MODELIZACIÓN I: Grupo 26 Ejercicios puntuables

HOJA 1 (fecha límite de entrega: J 2 marzo)

1.- Este ejercicio muestra los errores frecuentes en el uso de "tasas de crecimiento".

(i) Una rebaja del 10 % tras una subida del 10 %, ¿deja el precio como estaba? ¿Y si la rebaja precede a la subida?

(ii) ¿Es lo mismo crecer un 12 % cada año que un 1 % cada mes? ¿Cuánto se crece por año si se crece un 5 % por mes? ¿Y cuánto por mes si se crece un 60 % por año? ¿Cuál es en cada caso la tasa unitaria y la instantánea (especifica las unidades)? Una tasa instantánea $r = 12\,\%/\text{año}$, ¿es o no la misma que un 1 % al mes?

(iii) De los átomos de un cierto isótopo radiactivo presentes en una muestra sabemos que el 12 % habrán desaparecido en el plazo de un año. ¿Cuántos en el plazo de un mes? Cada átomo tiene una probabilidad p de seguir allí dentro de un año. ¿Es $p = 88\,\%$? Y ¿qué probabilidad tiene cada átomo de sobrevivir 2 años?, ¿y un mes?

NOTA: [$1'5$ puntos.]

2.- En 1881 se transportaron 435 ejemplares de una especie de lubina atlántica a los caladeros de la bahía de San Francisco. La adaptación al medio fue excelente, y ya con la apertura de la veda en 1899 se pescaron 555 toneladas de esta especie. Es razonable suponer que en estas circunstancias el crecimiento de la población sigue la *ley de Malthus* $p'(t) = rp(t)$, y desearíamos estimar el valor del parámetro r. Sabiendo que el peso medio de una lubina es un kilo y medio, y que en 1899 se pescó al menos el 10 % de la población, dar una cota inferior para r.

NOTA: [1 punto.]

3.- Tenemos una población que se duplica al cabo de 100 años y se triplica al cabo de 300. Probar que esta población no sigue la ley de Malthus.

NOTA: [$0'5$ puntos.]

4.- El método de datación $^{234}U - ^{230}Th$ permite estimar la edad de ciertas rocas, como las estalagtitas en cuevas, formadas por la precipitación de sales disueltas en corrientes de agua. En el proceso inicial de formación los sedimentos contienen ^{234}U (que es soluble en el agua y precipita en pequeñas cantidades junto con otras sales), pero no contienen ^{230}Th (que no es soluble en el agua). El isótopo de uranio tiene una semivida de $2'48 \times 10^5$ años y se desintegra en ^{230}Th, que a su vez tiene una semivida de 75.200 años. Podemos suponer que el sistema es "cerrado" (i.e., no se producen contaminaciones posteriores en la roca con uranio o thorio), y que a día de hoy los laboratorios saben medir las proporciones Th/U con buena exactitud.

(i) Formula las ecuaciones que rigen la evolución del número de isótopos de thorio y uranio que hay en una muestra dada de roca.

(ii) Si nuestra medición nos da una proporción actual Th/U del 10 %, ¿qué edad debería tener la roca?

(iii) Supongamos ahora un modelo ligeramente más complicado: *inicialmente las aguas también pueden contener* ^{238}U*, que se desintegra en* ^{234}U *con una semivida de* $4'47 \times 10^9$ *años, y que por tanto contribuye a la cantidad final de thorio. Como dato adicional se conoce la proporción inicial de* $^{234}U/\,^{238}U$*.* ¿Sabrías formular ahora las ecuaciones de evolución? En la práctica se supone que la proporción de $^{234}U/\,^{238}U$ se mantiene esencialmente constante a lo largo del proceso. ¿Por qué es razonable suponer esto?

NOTA: [2 puntos.]

5.- Formula el siguiente **modelo de hipoteca** simplificado: *el 1 de enero el banco te concede un préstramo de C euros, con una tasa anual de interés r. La devolución debes realizarla en N años, con pagos anuales (cada 31 de diciembre) de "letras" con importe constante de L euros.*

(i) Formular un sistema dinámico discreto para

$$x_n = \text{ deuda pendiente con el banco a 31 de diciembre del año } n, \quad n = 1, 2, 3$$

(ii) Sabiendo que x_N tiene que ser 0, calcular una fórmula para L, y deducir la cantidad total que se ha pagado al banco al término de la hipoteca.

(iii) En una hipoteca "media" con $r = 0'03$ y $C = 120.000$ euros, ¿cuántos años necesita quien sólo puede pagar 7.200 euros al año?

(iv) Supongamos que aún pudiendo pagar más, no quieres que la cantidad total pagada al banco supere los 240.000 euros. ¿Por cuántos años como máximo tendrías que pedir la hipoteca? ¿Sabrías dar una fórmula general en términos de r y C?

(v) Supongamos ahora que queremos realizar los pagos mensualmente, para lo que el banco te aplica la tasa $0'03/12$ cada mes. ¿Aumentarán o disminuirán los pagos anuales por letras? ¿Cuántos años necesitas si no puedes pagar más de 600 euros/mes?

NOTA: [3 puntos, espacio máximo 2 páginas.]

6.- En clase vimos que un modelo probabilístico de desintegración radiactiva viene dado por la v.a. $\mathbf{N}(t) = \sum_{j=1}^{N_0} \mathbf{X}_j(t)$, donde $\mathbf{X}_j(t)$ son experimentos independientes de Bernoulli con media e^{-rt} y N_0 el número inicial de isótopos.

(i) Buscar una referencia precisa o dar una demostración de la siguiente desigualdad de Chebichev: *si $\mathbf{X}_j$ son v.a. independientes i.d. con $\mathbb{E}[\mathbf{X}_j] = \mu$ y $Var(\mathbf{X}_j) = \sigma^2$, entonces:*

$$\mathbb{P}\big(\big|\tfrac{1}{N_0}\sum_{j=1}^{N_0} \mathbf{X}_j - \mu\big| \geq \varepsilon\big) \;\leq\; \frac{\sigma^2}{N_0^2 \varepsilon}. \tag{1}$$

(ii) Utiliza (1) para encontrar una cota inferior para N_0 de modo que se verifique

$$\mathbb{P}\big(\big|\mathbf{N}(t) - N_0 e^{-rt}\big| \leq \tfrac{N_0 e^{-rt}}{1000}\big) \;\geq\; 0'95. \tag{2}$$

Esto significa que $\mathbf{N}(t)$ y $N_0 e^{-rt}$ coinciden en sus tres primeras cifras con una probabilidad superior al 95 %.

(iii) Sabiendo que sólo hay un isótopo de ^{14}C por cada 10^{12} átomos de carbono, y que 12 gramos de carbono corresponden a $6'023 \times 10^{23}$ átomos, ¿cuántos gramos de carbono serían necesarios en una muestra de fósil para garantizar que se tiene (2)?

NOTA: [2 puntos, espacio máximo 1 página.]