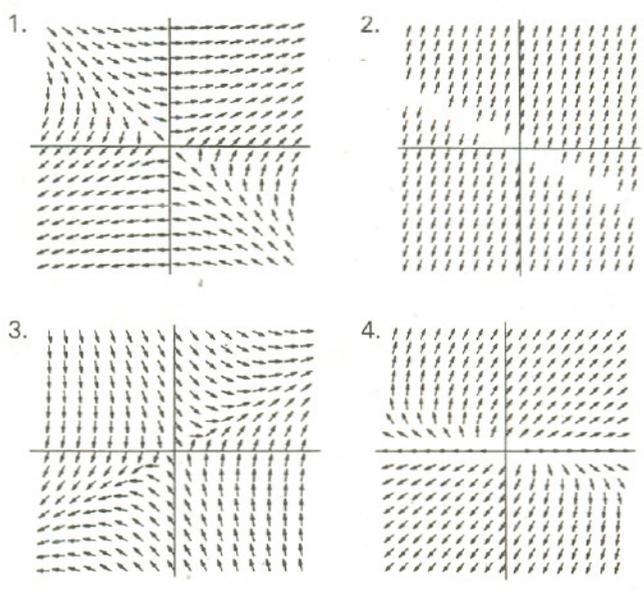


- 1.- Dar un ejemplo de un sistema lineal de ecuaciones diferenciales para el que  $\mathbf{X}(t) = \begin{pmatrix} e^{-t} \\ \alpha \end{pmatrix}$  sea una solución para toda constante  $\alpha \in \mathbb{R}$ .
- 2.- Calcular los autovectores de la matriz  $\begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ , donde  $\alpha$  es un parámetro constante. Dibujar el diagrama de estados de las soluciones para  $\alpha = -1, 0, 2$ . Justificar en el dibujo qué ocurre cuando  $\alpha \rightarrow 1$ .
- 3.- Considerar el sistema  $\mathbf{X}'(t) = \begin{pmatrix} 2\alpha & \beta \\ \beta & 0 \end{pmatrix} \mathbf{X}(t)$ . Dibujar un diagrama de parámetros  $\alpha\beta$  donde se distingan los distintos tipos de soluciones.
- 4.- Probar que las soluciones del sistema  $\mathbf{X}'(t) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \mathbf{X}(t)$ , al representarlas en el diagrama de estados, tienden a 0 **tangencialmente al autovector**  $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$  cuando  $\lambda < 0$ . Encontrar además la solución general y describir el diagrama de estados para el caso  $\lambda = 0$ .
- 5.- Considera el sistema **no lineal**  $\begin{cases} x'(t) = |y(t)| \\ y'(t) = x(t) \end{cases}$ . Utiliza las ideas que hemos visto en clase para esbozar el diagrama de estados.
- 6.- [Braun, p. 172]. Ciertos cañones tienen un mecanismo de amortiguación del retroceso que sigue la ecuación del muelle amortiguado  $mx''(t) + \nu x'(t) + kx(t) = 0$ , donde  $x(t)$  denota el desplazamiento del cañón respecto de la posición de equilibrio (en metros). Se sabe que la masa del cañón es de 100 Kg., y se elige  $k = 100\alpha^2$  y  $\nu = 200\alpha$ , para un cierto valor de  $\alpha$ . Además, al momento del disparo se tiene  $x(0) = 0$  y  $x'(0) = 100$  m/seg. Calcular la solución explícita de la ecuación diferencial. ¿Cómo habría que elegir  $\alpha$  si queremos que tras 1 seg. el retroceso del arma sea menor de 10 cm (i.e.  $|x(1)| \leq 0.1$ )? ¿Y si además queremos que  $|x'(1)| \leq 0.1$ ?
- 7.- Tenemos un depósito de 600 l. de agua con una cantidad inicial de  $Q_0$  gr. de sal disuelta. En tiempo  $t = 0$  abrimos un grifo externo que añade al depósito agua de mar con una concentración de 50 gr. de sal por litro y a un ritmo de .75 l/min. Por otro lado, abrimos un tapón en el fondo del depósito que elimina agua a ese mismo ritmo. Encontrar una expresión para la **concentración** de sal en el depósito en tiempo  $t$ .
- 8.- En una habitación de  $27 m^3$ , originalmente con aire limpio, se enciende un cigarillo cuyo humo contiene un 4% de monóxido de carbono. El humo se genera a una tasa de  $45 cm^3/seg$ , y suponemos que se mezcla de manera homogénea e instantánea con el aire de la habitación. ¿Cuándo se alcanzará en la habitación una concentración de monóxido de carbono del 0.012%? [Esta concentración se considera ya nociva para la salud.]

9.- Encuentra una correspondencia entre las siguientes ecuaciones lineales y los diagramas de isoclinas de la figura

$$\mathbf{X}'(t) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \mathbf{X}(t), \quad \mathbf{Y}'(t) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} \mathbf{Y}(t)$$

$$\mathbf{Z}'(t) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{Z}(t), \quad \mathbf{W}'(t) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -3 \end{pmatrix} \mathbf{W}(t)$$



10. Encuentra una correspondencia entre las siguientes ecuaciones lineales y los diagramas de fases de la figura

$$\mathbf{X}'(t) = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ -2 & -2 \end{pmatrix} \mathbf{X}(t), \quad \mathbf{Y}'(t) = \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} \mathbf{Y}(t), \quad \mathbf{Z}'(t) = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -2 \end{pmatrix} \mathbf{Z}(t)$$

$$\mathbf{A}'(t) = \begin{pmatrix} -3 & 5 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \mathbf{A}(t), \quad \mathbf{B}'(t) = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ -2 & -3 \end{pmatrix} \mathbf{B}(t), \quad \mathbf{C}'(t) = \begin{pmatrix} -3 & 5 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \mathbf{C}(t)$$

