MODELIZACIÓN I: Grupo 26 **Ejercicios puntuables**

HOJA 3 **(fecha límite de entrega: J 16 marzo)**

1.- Cierto país está dividido en tres zonas demográficas: interior, costa e islas. Se sabe que cada año un 5 % de la población del interior emigra a la costa y otro 5 % a las islas. De los residentes en la costa un 10 % se muda al interior y un 5 % a las islas. Por último, entre los isleños un 15 % emigra al interior y un 10 % a la costa.

(a) Formula un sistema dinámico **discreto** y estima el porcentaje de población que residirá en cada región a largo plazo. ¿Cuánto tiempo aproximadamente tardará en alcanzarse el equilibrio?

(b) Por motivos estratégicos, el gobierno desea que al menos un 25 % de la población resida en las islas. Para ello limita la emigración de isleños a un porcentaje fijo α cada año. Sabiendo que entre los emigrantes isleños el 60 % escoge destinos del interior, ¿cuál debe ser el valor de α para que se cumplan los deseos del gobierno?
NOTA: [1'5 puntos.]

2.- *Estimación de parámetros.* Se tienen dos lagunas *de volumen distinto* en el curso de un río.

(a) Suponiendo conocido el flujo del río $3\,m^3/seg$ y el volumen de la segunda laguna $30\,m^3$, se quiere estimar el volumen de la primera, para lo que se echa un tinte altamente soluble en ésta y se observa que la concentración máxima en la segunda se alcanza 5 segundos después. Formula y resuelve las ecuaciones de la concentración y calcula el volumen de V_1.

(b)Supongamos ahora no conocidos ni los volúmenes ni el flujo. Sabemos que la cantidad de tinte es $0'1\,gr$, y que tras la toma de numerosas muestras y un ajuste gráfico de los datos la concentración en la segunda laguna se comporta como

$$C_2(t) \;=\; 0'01\left(e^{-0'2t} - e^{-0'6t}\right) \qquad \text{(en gr tinte}/m^3 \text{ y tiempo en seg).}$$

Estimar los volúmenes y el flujo.
NOTA: [2 puntos]. Adaptado de [DS].

3.- *Descripción de un vaso sanguíneo.* Considerar un vaso sanguíneo de longitud L y sección d cm^2, con un flujo continuo de sangre de $F\ cm^3/seg$. En tiempo $t = 0$ se inyecta una cantidad q_0 ml de un cierto medicamento, del que se quiere estudiar su evolución en el vaso sanguíneo.

(a) Plantea un modelo de un solo compartimento para la concentración de medicamento, y calcula la solución explícita. ¿Crees es que se dan las hipótesis para que se trate de un modelo realista?

(b) Plantea ahora un modelo de tres compartimentos (cada uno sería un trozo de vaso sanguíneo de longitud $L/3$). Escribe explícitamente las soluciones y esboza un diagrama espacio-tiempo. Prueba la regla de Zilversmit: *"las concentraciones en 1 y 2 se igualan cuando y sólo cuando la concentración en 2 es máxima"*. A partir de ahí, ¿qué concentración es mayor? ¿Ocurre lo mismo con las concentraciones de 1 y 3? ¿Y con las de 2 y 3?

(c) Plantea y resuelve inductivamente un modelo de n compartimentos, y dibuja en un diagrama espacio-tiempo la evolución de las concentraciones. ¿Dónde se alcanzan los máximos de cada una de ellas?
NOTA: [2 puntos]. Adaptado de [DS].

4.- En un islote habitado por pájaros, capturamos y marcamos (con una anilla en la pata) a 100 ejemplares. Cada día durante un mes recapturamos 50 pájaros al azar, apuntamos el número de marcados y los volvemos a liberar. Los datos obtenidos son:

n^o marcas	0	1	2	3	4	5	6	≥ 7
n^o días	2	1	5	7	6	3	2	2

Estima el número de pájaros en la isla. ¿Sabrías dar un intervalo de confianza al 95 %?
NOTA: [1/2 punto.]

5.- Suponer ahora que tenemos dos islotes con poblaciones constantes de N_1 y N_2 pájaros en cada uno. Sabemos que hay un intercambio de F pájaros/día de una isla a otra, y querríamos estimar los tres parámetros N_1, N_2 y F. Para ello capturamos, anillamos y liberamos 500 pájaros en la isla 1.

(a) Formular un modelo continuo para el número de anillados en las islas 1 y 2, y encontrar la solución explícita.

(b) Tomamos muestras semanales de 100 pájaros en la isla 1, que nos dan

semanas 1, 2 y 3	7 anillados
semanas 4-12	6 anillados
semanas > 12	5 anillados

Estimar los parámetros N_1, N_2 y F.

(c) Suponer que, por una cuestión de infraestructuras, el equipo prefiere tomar los datos en la isla 2. Probar que, habiéndose anillado las aves en la isla 1, sólo con datos de la isla 2 no se podrán determinar los parámetros N_1, N_2 y F.
NOTA: [2'5 puntos]. Adaptado de [DS].

6.- Una matriz de Leslie es de la forma

$$A = \begin{pmatrix} b_1 & b_2 & \cdots & b_n \\ s_1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & s_{n-1} & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{(donde } s_j > 0 \text{ y } b_j \geq 0\ \forall\, j, \text{ y } \exists\, j_0 :\ b_{j_0} > 0).$$

Demostrar por inducción que el polinomio característico satisface

$$\det(A - \lambda I) = \lambda^n - b_1\lambda^{n-1} - b_2 s_1 \lambda^{n-2} - b_3 s_1 s_2 \lambda^{n-3} - \ldots - b_n s_1 \cdots s_{n-1}.$$

Probar que la función

$$q(\lambda) = \frac{b_1}{\lambda} + \frac{b_2 s_1}{\lambda^2} + \frac{b_3 s_1 s_2}{\lambda^3} + \ldots + \frac{b_n s_1 \cdots s_{n-1}}{\lambda^n}$$

es estrictamente decreciente y por tanto una biyección de $(0, \infty)$ en sí mismo, y además $q(\lambda) = 1$ si y sólo si $p(\lambda) = 0$. Deducir que A tiene un único autovalor positivo, y que además debe ser simple.
NOTA: [1'5 puntos]; puede consultarse Anton-Rorres *"Elementary linear algebra with applications"*.