MODELIZACIÓN I: Grupo 26 Ejercicios puntuables

HOJA 4 (fecha límite de entrega: J 6 abril)

1.- (a) Una población crece según la logística con valor de equilibrio N. Si el tiempo de duplicación para poblaciones pequeñas es aprox. 40 min, ¿cuál será la población dos horas después de valer $N/2$?

(b) Si la población duplica en 2 horas su valor inicial x_0 y se estabiliza en torno a $8x_0$, hallar qué parámetros debe tener el modelo logístico para ajustarse a ella.

(c) Supongamos que la población del planeta sigue el modelo logístico. A día de hoy la población es $5'96 \cdot 10^9$ y crece a una tasa del $2\,\%$ anual. Si se sabe que $r = 0'029$, estimar el parámetro N. ¿Estamos actualmente en la fase acelerada o en la fase lenta de crecimiento?
NOTA: [1 punto. Alumnos con **año** de nacimiento impar deben hacer (a), los pares (b) y todos (c).]

2.- Una población de ratones crece según un modelo logístico $x' = rx(1 - x/N)$. Se ha observado que cuando la población alcanza los N_1 individuos se desarrolla un tipo de infección que hace decrecer la población según la ecuación $x' = \tilde{r}x(1 - x/\tilde{N})$, hasta llegar a un valor $N_0 > \tilde{N}$. A partir de aquí la infección cesa y la población vuelve a crecer según la ecuación original, y así sucesivamente, fluctuando en ciclos entre N_0 y N_1 individuos.

(a) Probar que el tiempo que tarda en crecer de N_0 a N_1 es $T_{01} = \frac{1}{r} \ln[\frac{N_1}{N_0} \frac{N-N_0}{N-N_1}]$, y dar una fórmula para T_{10} y la duración total del ciclo.

(b) Experimentando con cierta especie se ha observado que la enfermedad elimina a un $98\,\%$ de la población en pocos días, y a partir de ahí el $2\,\%$ superviviente crece esencialmente de manera exponencial según $x' = rx$. Por otro lado en el período de enfermedad $\tilde{r}$ es tan pequeño que podemos suponer $x' = -\beta x^2$. Calcular en ese caso fórmulas para T_{01} y T_{10}. Estimar el parámetro r si observamos que $T_{01} = 4$ años y $N_1 \approx 50 N_0$.
NOTA: [1 punto, problema adaptado de Braun.]

3.- Identificar los siguientes sistemas con cada una de las descripciones dadas abajo. En cada caso estudiar el espacio de fases y su dinámica: puntos críticos, estabilidad local y dependencia de los parámetros.

$$(I)\left\{\begin{array}{l} x' = rx(1 - \frac{ax+by}{L}) + \alpha \\ y' = sy(1 - \frac{ax+by}{L}) \end{array}\right. \qquad (II)\left\{\begin{array}{l} x' = x(r - ax + by) \\ y' = y(s - cy + dx) \end{array}\right.$$

$$(III)\left\{\begin{array}{l} x' = x(r - a(x+y)) \\ y' = y(s - b(x+y)) \end{array}\right. \qquad (IV)\left\{\begin{array}{l} x' = rx(1 - ax - by) \\ y' = sy(1 - ax - by) \\ z' = z(-e + cx + dy) \end{array}\right.$$

(i) Competencia con inmigración: dos especies compiten por una cantidad limitada de alimentos, recibiendo inmigración una de ellas a ritmo constante.

(ii) Dos tipos de levadura crecen en el mismo medio y producen alcohol, cuya concentración, proporcional en cada momento al peso total de ambas levaduras, limita el crecimiento de cada una de ellas.
(iii) Simbiosis: la concentración de cada una limita su propio crecimiento pero favorece a la otra.

(iv) Dos especies compiten por una cantidad limitada de alimento y tienen además un parásito común.
NOTA: [1 punto. Alumnos con **día** de nacimiento impar deben hacer (i) y (iii), y los pares (ii) y (iv).]

4.- Los siguientes sistemas son variantes de un modelo presa/depredador. Analiza y clasifica los puntos de equilibrio. Esboza los planos de fases y describe los cambios de comportamiento al variar los parámetros:

$$(i)\left\{\begin{array}{l} x' = x(1-x) - \frac{axy}{x+1} \\ y' = y(1-y) \end{array}\right. \qquad (ii)\left\{\begin{array}{l} x' = x(1-x) - \frac{xy}{x+b} \\ y' = y(1-y) \end{array}\right. \qquad (iii)\left\{\begin{array}{l} x' = x(1-x) - xy \\ y' = y(1 - \frac{y}{x}) \end{array}\right.$$

Para el último sistema, ¿sabrías probar que es un atractor global?

NOTA: [1'5 puntos. Alumnos con **mes** de nacimiento impar deben hacer (i), los pares (ii), y todos (iii).]

5.-Formula un modelo de evolución para una enfermedad de transmisión sexual con las siguientes características: el estudio se realiza en una población constante de N hombres y M mujeres, que suponemos heterosexuales y promiscuos a todos los efectos. Las tasas de recuperación de infectados son ligeramente menores entre mujeres que entre hombres. Suponer que los porcentajes de contagio son los mismos en cada encuentro hombre infectado/mujer susceptible y viceversa. Suponer finalmente que es posible reincidir en la enfermedad, y por tanto no existen individuos "recuperados".

(a) Formula las ecuaciones y dibuja un diagrama de fases que describa la evolución de las poblaciones infectadas de hombres y mujeres, analizando puntos críticos y estabilidad local.

(b) Determina el rango de parámetros para el que la enfermedad, según este modelo, tiende a desaparecer, o a estabilizarse en una cantidad determinada.
NOTA: [1'5 puntos, adaptado de Braun.]

6.- (a) Probar que un péndulo en rotación de masa m, longitud L y velocidad angular constante ω rad/seg satisface la ecuación diferencial:

$$\theta''(t) + a\theta'(t) \; + \; \big(b - \omega^2 \cos\theta(t)\big) \; \operatorname{sen}\theta(t) \; = \; 0,$$

donde $\theta(t)$ es el ángulo con el eje de rotación y a, b son ctes positivas a determinar[1]

(b) Escribe esta ecuación como un sistema 2×2, analizando sus soluciones de equilibrio, estabilidad local y diagrama de fases.

(c) Demuestra que existe un ω_0 donde ocurre un fenómeno de *bifurcación*: el número de soluciones estacionarias[2] es 1 ó 3 según $\omega < \omega_0$ ó $\omega > \omega_0$. Esboza los diagramas de fases en ambos casos, y representa en un diagrama (θ, ω) la posición de los ptos de equilibrio para cada ω. ¿Sabrías explicar el significado físico de estas soluciones estacionarias?
NOTA: [2 puntos, adaptado de Hubbard-West].

7.- El modelo de presa/depredador de Holling-Tanner se formula como sigue:

$$x' = rx(1 - \tfrac{x}{N}) - \frac{\omega xy}{x+d}, \qquad y' = sy(1 - \tfrac{y}{Mx}).$$

(a) ¿Sabrías explicar su diferencia con Lotka-Volterra? Demuestra que con un cambio de variables apropiado se transforma en

$$\mathbf{x}' = \mathbf{x}(1 - \mathbf{x}) - \frac{a\mathbf{x}\mathbf{y}}{\mathbf{x}+b}, \qquad \mathbf{y}' = c\mathbf{y}(1 - \tfrac{\mathbf{y}}{\mathbf{x}})$$

para constantes a, b, c a determinar.

(b) Suponer por simplicidad $a = 1$, $b, c > 0$, donde b es típicamente pequeño. Hallar las soluciones de equilibrio en el primer cuadrante y estudiar su comportamiento local. Probar que el punto interior de equilibrio es de silla si b es muy pequeño, y es atractor o repulsor local en otro caso.

(c)[3] Encontrar un intervalo de valores de b en el cual el equilibrio puede ser un repulsor si c se toma sufucientemente pequeño. ¿Sabrías justificar en este caso la existencia de al menos un ciclo periódico?
NOTA: [2 puntos].

[1]SUGERENCIA: Escribe la posición del péndulo en coordenadas esféricas $(r\cos\theta, r\operatorname{sen}\theta\cos\varphi, r\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\varphi)$, determinando r y φ de los datos del problema.

[2]Suponer por simplicidad en este apartado que $\theta \in (-\pi, \pi)$.

[3]Este apartado es más difícil.