MODELIZACIÓN I: Grupo 26 Ejercicios puntuables

HOJA 5 (fecha límite de entrega: X 3 mayo)

1.- Debemos transportar 7 productos químicos, de los que los pares indicados en la tabla no pueden almacenarse juntos por el riesgo de explosión. Calcula el número de camiones que necesitaríamos. ¿Sabrías demostrar que tu respuesta es óptima? A última hora nos dicen que no es necesario transportar el producto 7. ¿Reduciría esto el número de camiones? Finalmente se decide que sólo acudirán 3 camiones y que llevemos el número mayor de productos, ¿entre cuáles podemos elegir para no ser transportados?

1	2	3	4	5	6	7
2	1	2	2	1	1	2
5	3		5	2	2	5
6	4		6	4	4	6
	5			6	5	
	6			7	7	
	7					

NOTA: [1'5 puntos.]

2.- En un departamento de 6 personas se tienen 5 comisiones $C_1 = \{a, e\}$, $C_2 = \{b, c\}$, $C_3 = \{a, b, d\}$, $C_4 = \{d, e, f\}$, $C_5 = \{e, f\}$. Cada comisión debe enviar un miembro que represente únicamente a su comisión en un congreso. A la hora de elegir miembros, C_5 se muestra indiferente, pero C_1 querría que su representante fuese e, C_2 prefiere b, C_3 apuesta por a y C_4 por f.

(a) Dibuja el grafo y muestra que no es posible una selección completa con esas características.

(b) Tras una negociación C_1 y C_3 acceden a enviar a cualquiera de sus miembros. Usar el algoritmo húngaro para encontrar una selección completa de representantes.

(c) Finalmente se decide que todos los miembros de una comisión son elegibles, salvo b y d que tienen otros compromisos. ¿Es posible construir ahora un sistema completo? ¿Y si se convenciera a b de participar?
NOTA: [1'5 puntos.]

3.- En cierto país se tienen 11 ciudades conectadas dos a dos, sea por una carretera o por una vía de tren. Probar que existen al menos 28 tramos de carreteras o 28 tramos de vía férrea. Concluir que necesariamente tiene que existir un puente de carretera por encima de una carretera, o bien un puente de tren por encima de una vía.
NOTA: [1 punto.]

4.- Demostrar que si el grafo de Petersen P admitiera una 3-coloración por aristas, entonces cada color debería usarse necesariamente dos veces en las aristas del "hexágono exterior" de la figura, y que esencialmente sólo hay dos maneras distintas de hacerlo. Deducir que $\chi_{\text{aristas}}(P) = 4$.
NOTA: [1'5 puntos.]

5.- Construye ejemplos de grafos tales que tengan

(a) ciclos eulerianos y hamiltonianos.
(b) ciclos eulerianos pero no hamiltonianos.
(c) ciclos hamiltonianos pero no eulerianos.
(d) ni ciclos ni eulerianos ni hamiltonianos.

NOTA: [0'5 puntos. Días de nacimiento pares (a,b), días impares (c,d).]

6.- Encontrar un número binario de longitud mínima en cuyo interior se encuentren todos los números binarios de 4 cifras. Para ello formula el digrafo correspondiente y encuentra un circuito euleriano. En general, un número en base p de longitud mínima en cuyo interior se encuentran todos los números de r cifras se llama *secuencia de Bruijn de tipo* (p, r). ¿Sabrías probar que tales secuencias siempre existen? ¿Cuántos dígitos deberían tener?
NOTA: [2 puntos. Adaptado de F. Roberts, *Applied cominatorics*.]

7.- Probar que si $G = (V, A)$ es un grafo bipartido, entonces[1] $\chi_{\text{aristas}}(G) = \text{máx}\{\text{gr }(v) \mid v \in V\}$.
NOTA: [2 puntos. Adaptado de Biggs.]

[1] SUGERENCIA: Proceder por inducción en $|A|$, y usar ideas similares a las que utilizamos en el "algoritmo húngaro".