

1.- En un comedor universitario el segundo plato se acompaña de una guarnición que puede ser de patatas fritas, ensalada o arroz. Cada día el cocinero elige aleatoriamente una única de estas guarniciones según las siguientes reglas:

- (a) Nunca sirve arroz dos días seguidos.
- (b) Si un día sirve arroz, al día siguiente tiene igual probabilidad de servir patatas o ensalada.
- (c) Cuando toca patatas o ensalada, hay un 50 % de posibilidades de repetir menú al día siguiente.
- (d) Cuando en el caso anterior no repiten menú, es el doble de veces más probable que les toque la otra guarnición a que les toque arroz.

Plantear una cadena de Márkov que describa la evolución de la guarnición en el tiempo. A largo plazo, ¿qué probabilidad habrá de que toque cada una de las guarniciones?

NOTA: [1'5 puntos.]

2.- En una licenciatura de 4 años, cierto estudiante tiene, cada año, una probabilidad p de aprobar el curso, r de repetir y q de abandonar la carrera.

(a) Modelizar la evolución del estudiante con una cadena de Márkov con estados $\{A, 1, 2, 3, 4, L\}$, donde A =abandono y L =licenciado. Dar una expresión de la matriz de transición y esbozar el digrafo correspondiente, indicando los distintos tipos de estados.

(b) Para un alumno con $p = 0'7$, $r = 0'2$, $q = 0'1$, hallar la probabilidad de licenciarse. ¿Cuál será la probabilidad de abandono?

(c) Para este mismo alumno, hallar el tiempo medio que pasará en 2º curso, y el tiempo medio que pasará en la universidad.

(d) Por último, sabemos que el estudiante se ha licenciado. ¿Cuál será el tiempo medio que pasó en la universidad?

NOTA: [2'5 puntos.]

3.- Un gen se compone de d subunidades, siendo m de ellas normales y las restantes $d - m$ mutantes. Durante la reproducción de la célula el gen se duplica, heredando cada célula hija d subunidades al azar, de entre las $2d$ unidades iniciales. Supongamos que seguimos una línea fija de descendientes, y contamos en cada generación el número de subunidades mutantes. Encontrar la cadena de Márkov que modeliza este fenómeno, identificando los estados absorbentes. ¿Sabrías justificar que a largo plazo los genes serán o bien enteramente normales o bien enteramente mutantes?

NOTA: [1 punto.]

4.- Una caja tiene N bolas de color blanco o negro. Cada minuto se extrae una bola al azar de la caja y se reemplaza por una bola externa, que puede ser blanca o negra con probabilidad p ó $1 - p$, respectivamente.

(a) Describe la cadena de Márkov que modeliza la evolución de bolas blancas en la caja, encontrando los coeficientes p_{ij} , clasificando los estados y esbozando el digrafo asociado (distingue los casos $p = 1$, $p = 0$ y $0 < p < 1$).

(b) Suponer que $p = 1$, $N = 4$ y que inicialmente hay $k = 1$ bolas blancas. Hallar el tiempo medio que tardaría en llenarse la caja de bolas blancas. ¿Sabrías dar una fórmula para N , k general (con $p = 1$)?

NOTA: [1'5 puntos.]