

5.- Las familias de cierto país tienen hijos según las siguientes reglas: si el primogénito es niña, entonces tienen exactamente un hijo más; si por el contrario el primogénito es niño, entonces continúan hasta que nace la primera niña y luego paran.

(a) Hallar la probabilidad de que una familia tenga exactamente  $k$  hijos, y también la de tener exactamente  $k$  hijos varones.

(b) Sabiendo que el apellido se transmite por vía paterna, hallar la probabilidad de extinción del apellido de una familia fija.

NOTA: [1'5 puntos.]

6.- Considera el siguiente modelo de Ehrenfest modificado: tenemos una colección de  $d$  bolas numeradas repartidas en dos cajas; en cada paso seleccionamos un número al azar, extraemos la bola con ese número y la colocamos en una las dos cajas también al azar.

(a) Describe la cadena de Márkov que cuenta el número de bolas en la primera caja, dibujando el digrafo y hallando la matriz de transición.

(b) Calcula la distribución estacionaria para  $d = 3$ . ¿Sabrías dar una expresión para  $d$  general?

(c) Supón ahora  $d = 100$  y  $X_0 = 0$ , ¿cuál es el tiempo medio que tardaría la primera caja en volver a tener 0 bolas?

NOTA: [1 punto.]

7.- Probar que en una cadena de Márkov finita se tiene  $\rho_{y, \text{ABS}} = 1, \forall y \in \mathcal{S}_T$ . Para ello puedes usar los teoremas demostrados en clase, así como las ideas de las demostraciones.

NOTA: [1 punto.]