Lecciones de Análisis Complejo

Gabriel Vera

Índice general

Capítulo 1

Preliminares

1.1. El cuerpo de los números complejos

El cuerpo $\mathbb{R}$ de los números reales tiene el inconveniente de no ser algebraicamente cerrado; hay polinomios de coeficientes reales, de grado ≥ 1, que no tienen ceros. El ejemplo más simple es $x^2 + 1$. El álgebra y el análisis en el campo complejo arrancan con la búsqueda de un cuerpo algebraicamente cerrado que contenga a $\mathbb{R}$ como subcuerpo.

Se supone conocida la construcción usual del cuerpo $\mathbb{C}$ de los números complejos a partir de los pares ordenados de números reales: Se definen la suma y el producto según las reglas:

$$(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d); \qquad (a, b) \cdot (c, d) = (ac - bd, ad + bc);$$

Cuando el par ordenado de números reales (a, b) se considera como elemento del cuerpo $\mathbb{C}$ se expresa en la forma habitual $a + bi$ donde $i := (0, 1)$.

Aunque el objetivo inicial de esta construcción es el de ampliar el cuerpo de los números reales a un cuerpo con un elemento i que verifique $i^2 + 1 = 0$, es sorprendente que se consigue mucho más: $\mathbb{C}$ resulta algebraicamente cerrado en virtud del teorema fundamental del álgebra, del cual se darán distintas pruebas a lo largo del curso.

El cuerpo de los números complejos $\mathbb{C}$ queda caracterizado, salvo isomorfismos, como el mínimo cuerpo algebraicamente cerrado, que contiene a $\mathbb{R}$ como subcuerpo. (Si $\mathcal{K}$ es un cuerpo algebraicamente cerrado que contiene a $\mathbb{R}$ como subcuerpo, debe existir $j \in \mathcal{K}$ con $j^2 + 1 = 0$, y el subcuerpo de $\mathcal{K}$ engendrado por $\mathbb{R} \cup \{j\}$ se identifica con $\mathbb{C}$ mediante el isomorfismo natural $a + bj \to a + bi$).

Aunque se gana mucho al pasar del cuerpo real al cuerpo complejo, también se pierde bastante: Se pierde el orden. Es importante resaltar que la estructura de cuerpo ordenado que tenía $\mathbb{R}$ no se puede extender a $\mathbb{C}$: Es imposible definir en $\mathbb{C}$ una relación de orden que sea compatible con las operaciones de cuerpo (pues si a es un elemento no nulo de un cuerpo ordenado se cumple $a^2 > 0 > -1$).

Convenios de notación. En lo que sigue se reservan las letras z, w para designar elementos genéricos del cuerpo $\mathbb{C}$ y las letras x, y, (resp u, v) para designar la parte real e imaginaria de $z = x + iy$ (resp. $w = u + iv$).

$$x = \operatorname{Re} z; \; y = \operatorname{Im} z; \qquad u = \operatorname{Re} w; \; v = \operatorname{Im} w;$$

Cada número complejo se puede representar mediante un punto del plano euclídeo, y en las cuestiones donde no interviene la estructura de cuerpo se identifica $\mathbb{C}$ con el espacio euclídeo $\mathbb{R}^2$ en la forma natural

$$x + iy \leftrightarrow (x, y)$$

Ahora el eje de abscisas $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z = 0\}$ y el eje de ordenadas $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z = 0\}$ reciben el nombre de eje real y eje imaginario respectivamente. El eje real se supone identificado con la recta real $\mathbb{R}$.

Como $\mathbb{C}$ no es un cuerpo ordenado, relaciones tales como $z \leq w$ no tienen sentido para números complejos arbitrarios $z, w \in \mathbb{C}$. No obstante, a la hora de describir subconjuntos de $\mathbb{C}$, es cómodo adoptar el siguiente convenio: $z \leq w$ (resp. $z < w$) significa que z y w están en el eje real y que, considerados como números reales, cumplen la correspondiente desigualdad. Se hacen convenios análogos para $z \geq w$ y $z > w$. Así el semieje real positivo (resp. negativo) se describe en la forma:

$$\mathbb{R}^+ = \{z \in \mathbb{C} : z \geq 0\}; \qquad (\text{ resp. } \mathbb{R}^- = \{z \in \mathbb{C} : z \leq 0\}).$$

Conjugado, valor absoluto. El *conjugado* del número complejo $z = x+iy$ es $\overline{z} = x-iy$. Las siguientes propiedades son inmediatas:

i) $\overline{z+w} = \overline{z} + \overline{w}$; $\quad \overline{zw} = \overline{z}\,\overline{w}$; $\quad \overline{z/w} = \overline{z}/\overline{w}$ si $w \neq 0$:

ii) $1/z = \overline{z}/|z|^2$ si $z \neq 0$

De estas propiedades se sigue que si $a, b, c, \cdots$ son números complejos y $w = R(a, b, c, \cdots)$, donde R es una expresión racional, entonces $\overline{w} = R(\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}, \cdots)$. Una consecuencia directa de esta observación es lo siguiente: Si $p(z)$ es un polinomio con coeficientes reales en la variable compleja z, y z_0 es un cero de p, entonces su conjugado $\overline{z}_0$ también lo es.

El *módulo*, o *valor absoluto*, del número complejo $z = x + iy$ es el número real

$$|z| = \sqrt{z\overline{z}} = \sqrt{x^2 + y^2}$$

que coincide con la norma euclídea del correspondiente vector $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Además de las propiedades características de la norma euclídea:

i) $|z| \geq 0$ para todo $z \in \mathbb{C}$, y $|z| = 0$ si, y sólo si $z = 0$;

ii) $|z + w| \leq |z| + |w|$; (desigualdad triangular)

el valor absoluto de los números complejos se comporta respecto al producto de la misma forma que el valor absoluto de los números reales:

iii) $|zw| = |z||w|$.

Asociado al valor absoluto queda definida la distancia $d(z, w) = |z - w|$ que corresponde a la distancia euclídea de $\mathbb{R}^2$.

Argumento. De momento, hasta que no se haya introducido formalmente la función exponencial compleja, manejaremos la expresión $e^{i\theta}$ como una abreviatura del número complejo $\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta$. Si $z \neq 0$ y $e^{i\theta} = z/|z|$ se dice que θ es un *argumento* de z. Se denotará por $\arg z$ el conjunto de los argumentos de z.

Cada $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ se puede escribir en la llamada forma módulo argumental: $z = re^{i\theta}$, donde $r = |z|$, $\theta \in \arg z$. Es fácil ver que $e^{i(\alpha+\theta)} = e^{i\alpha}e^{i\theta}$, de donde se sigue que para dos números complejos dados en forma módulo argumental $z_1 = r_1 e^{i\theta_1}$, $z_2 = r_2 e^{i\theta_2}$ su producto $z = z_1 z_2$ se escribe cómodamente en esta forma $z = re^{i\theta}$ ya que su módulo r es el producto de los módulos $r = r_1 r_2$, y uno de sus argumentos θ se obtiene sumando argumentos de los factores $\theta = \theta_1 + \theta_2$. En particular,$(e^{i\theta})^n = e^{in\theta}$, y resulta la clásica fórmula de De Moivre

$$(\cos\theta + i\operatorname{sen}\theta)^n = \cos n\theta + i\operatorname{sen} n\theta$$

que resulta muy útil para expresar $\cos n\theta$, y $\operatorname{sen} n\theta$ en términos de $\operatorname{sen}\theta$ y $\cos\theta$.

Por otra parte, para un número complejo fijo $a = \rho e^{i\alpha}$, la aplicación $z \to az$ se puede interpretar geométricamente como la transformación del plano obtenida componiendo un giro de amplitud α alrededor del origen con una homotecia de razón ρ respecto al origen:

$$z \to \rho e^{i\alpha} z = \rho e^{i\alpha} r e^{i\theta} = \rho r e^{i(\alpha+\theta)}$$

El *argumento principal* de z, denotado $\operatorname{Arg} z$, es el único argumento de z que verifica $-\pi < \operatorname{Arg} z \leq \pi$, de modo que

$$\arg z = \{\operatorname{Arg} z + 2\pi m : m \in \mathbb{Z}\}$$

Es claro que para un número complejo $z = x + iy$ del semiplano $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z > 0\}$ se puede calcular su argumento principal mediante la fórmula

$$\operatorname{Arg}(x + iy) = \operatorname{Arctg}(y/x)$$

donde $\operatorname{Arctg} : \mathbb{R} \to (-\pi/2, \pi/2)$ es la rama principal de la función multivaluada arc tg.

Es fácil obtener una fórmula para el argumento principal de un número complejo $z = x + iy$ en el abierto $\Omega_1 = \mathbb{C} \setminus \{x \in \mathbb{R} : x \leq 0\}$ ([17] ejerc. 1.4)

$$\operatorname{Arg}(x + iy) = 2\operatorname{Arctg}\frac{y}{x + \sqrt{x^2 + y^2}}$$

Si consideramos Arg como función de dos variables reales (x, y) la fórmula anterior nos garantiza que su restricción a $\Omega_1 = \mathbb{R}^2 \setminus \{(x, 0) : x \leq 0\}$ es de clase C^∞.

Raíces. Dado un número complejo $z \in \mathbb{C}$, si $n \in \mathbb{N}$ la ecuación $w^n = z$ tiene siempre solución. Cuando $z \neq 0$ la ecuación tiene exactamente n soluciones distintas, que se llaman raíces n-ésimas de z. Si $\alpha = \operatorname{Arg} z$, se calculan fácilmente mediante la fórmula

$$w_k = |z|^{1/n}\left(\cos\frac{\alpha + 2\pi k}{n} + i\operatorname{sen}\frac{\alpha + 2\pi k}{n}\right), \qquad k = 0,1, 2, \cdots n - 1$$

Geométricamente las n raíces $w_0, w_1, \cdots w_{n-1}$ son los vértices de un polígono regular inscrito en la circunferencia de centro el origen y radio $|z|^{1/n}$. Mientras no se indique otra cosa el símbolo $\sqrt[n]{z}$ designará el conjunto finito de las raíces n-ésimas de z. Ninguna tiene preferencia, y cuando sea preciso seleccionar una se deberá indicar explícitamente su argumento.

1.2. Topología en el plano complejo

Después de identificar $\mathbb{C}$ con $\mathbb{R}^2$, el valor absoluto $|\ |$ con la norma euclídea $\|\ \|_2$ y la distancia $d(z,w) = |z-w|$ con la distancia euclídea $d_2(z,w) = \|z-w\|_2$, quedan definidas en el plano complejo todas las nociones geométricas y topológicas habituales del espacio euclídeo $(\mathbb{R}^2, \|\ \|_2)$. Así por ejemplo, dados $a, b \in \mathbb{C}$, el segmento orientado de origen a y extremo b es: $[a,b] = \{(1-t)a + tb : 0 \leq t \leq 1\}$. En el espacio métrico $(\mathbb{C}, d)$ a las bolas se les acostumbra a llamar discos, y se usan las notaciones

$$D(a,r) = \{z : |z-a| < r\}; \qquad D^*(a,r) = \{z : 0 < |z-a| < r\};$$

para el *disco abierto* y el *disco abierto perforado* de centro $a \in \mathbb{C}$ y radio $r > 0$.

Frecuentemente se reservará la letra D para designar el disco unidad abierto $D = D(0,1)$, y la letra $\mathbb{T}$ para la circunferencia unidad $\mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$. Generalmente, en lo que sigue Ω denotará un subconjunto abierto de $(\mathbb{C}, d)$.

Como es habitual M' denota el conjunto de los puntos de acumulación de $M \subset \mathbb{C}$ ($a \in M'$ si $D^*(a,r) \cap M \neq \emptyset$ para todo $r > 0$). Si $M \subset \Omega$ y $M' \cap \Omega = \emptyset$ se dice que M es discreto en Ω. Esto significa que para cada $a \in M$ existe $r > 0$ tal que $D(a,r) \cap M = \{a\}$.

En lo que sigue se suponen conocidas las nociones y los resultados básicos de topología, en el ámbito de los espacios métricos. Los recursos básicos requeridos para el curso son los referentes a conexión y compacidad que, en el contexto del espacio métrico $(\mathbb{C}, d)$, se resumen a continuación:

- Un abierto $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ se dice que es *conexo* cuando es imposible descomponerlo como unión $\Omega = A \cup B$ de dos abiertos $A, B \subset \mathbb{C}$ no vacíos y disjuntos. En ese caso se suele decir que Ω es un *dominio* o *región*.

- Un conjunto $X \subset \mathbb{C}$ se dice que es *conexo por caminos* cuando para cada par $a, b \in X$ existe una función continua $\gamma : [0,1] \to X$ tal que $\gamma(0) = a$ y $\gamma(1) = b$.

- Un conjunto $K \subset \mathbb{C}$ se dice que es *compacto* cuando de todo cubrimiento de K, formado por conjuntos abiertos, se puede extraer un subrecubrimiento finito.

Proposición 1.2.1

i) $(\mathbb{C}, d)$ *es un espacio métrico* conexo, *es decir, los únicos subconjuntos de* $\mathbb{C}$ *que son simultáneamente abiertos y cerrados son* $\mathbb{C}$ *y* $\emptyset$.

ii) Todo conjunto $X \subset \mathbb{C}$ *conexo por caminos es conexo. El recíproco se cumple si* X *es abierto. Más aún, todo conjunto abierto y conexo* $X \subset \mathbb{C}$ *es conexo por líneas poligonales (de lados paralelos a los ejes).*

iii) Todo abierto se expresa de modo único como unión disjunta de una familia finita o numerable de abiertos conexos (sus componentes conexas*).*

Proposición 1.2.2 *Las siguientes propiedades de un conjunto* $K \subset \mathbb{C}$ *son equivalentes:*

i) K *es compacto.*

ii) Cada sucesión en K *posee una subsucesión convergente hacia un punto de* K.

iii) Para cada conjunto infinito $M \subset K$ se cumple $M' \cap K \neq \emptyset$, e.d. M tiene algún punto de acumulación en K.

iv) K es cerrado y acotado.

Corolario 1.2.3 *Para una sucesión acotada de números complejos (z_n) son equivalentes:*

a) (z_n) es convergente (hacia z);

b) Todas las subsucesiones convergentes de (z_n) tienen el mismo límite (z);

En 1.5.2 se exponen algunos resultados concretos de carácter auxiliar, relativos a la topología del plano, que intervienen en la teoría de las funciones de variable compleja.

El plano complejo ampliado.
Para diversas cuestiones conviene ampliar el conjunto de los números complejos introduciendo un nuevo elemento llamado punto del infinito, denotado ∞. El conjunto $\mathbb{C}_\infty = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ se llama *plano complejo ampliado.* Si $a \in \mathbb{C}$ y $b \in \mathbb{C}_\infty \setminus \{0\}$ se adoptan los convenios:

$$a + \infty = \infty + a = \infty; \quad b \cdot \infty = \infty \cdot b = \infty$$

$$a/0 = \infty \text{ si } a \neq 0; \quad b/\infty = 0 \text{ si } b \neq \infty; \quad |\infty| = +\infty$$

(No es posible definir $\infty + \infty$, y $\infty \cdot 0$ sin violar las reglas usuales de la aritmética)

En $\mathbb{C}_\infty$ se introduce una topología natural $\mathcal{G}_\infty$ especificando una base de entornos de cada punto. Para ello se define en $\mathbb{C}_\infty$ el disco abierto de centro $a \in \mathbb{C}_\infty$ y radio $r > 0$, en la siguiente forma:

Si $a \neq \infty$ el disco abierto de centro a y radio $r > 0$ es el que ya se ha definido en $\mathbb{C}$

$$D(a, r) = \{z \in \mathbb{C}_\infty : |z - a| < r\} = \{z \in \mathbb{C} : |z - a| < r\}$$

Cuando $a = \infty$ el disco abierto de centro ∞ y radio $r > 0$ es

$$D(\infty, r) = \{z \in \mathbb{C}_\infty : |z| > 1/r\} = \{z \in \mathbb{C} : |z| > 1/r\} \cup \{\infty\},$$

(El disco perforado es $D^*(\infty, r) = \{z \in \mathbb{C} : |z| > 1/r\}$).

Si existe $r > 0$ tal que $V \supset D(a, r)$ se dice que $V \subseteq \mathbb{C}_\infty$ es entorno de $a \in \mathbb{C}_\infty$. Se comprueba fácilmente que la familia $\mathcal{G}_\infty$ formada por los conjuntos $G \subset \mathbb{C}_\infty$ que son entornos de todos sus puntos forma una topología Hausdorff. Es fácil ver que con esta topología $(\mathbb{C}_\infty, \mathcal{G}_\infty)$ es un espacio compacto que induce en $\mathbb{C} \subset \mathbb{C}_\infty$ su topología usual y además $\mathbb{C}$ es un subconjunto denso de $\mathbb{C}_\infty$. Todo esto significa que $(\mathbb{C}_\infty, \mathcal{G}_\infty)$ es la compactificación por un punto del plano complejo $\mathbb{C}$ dotado de su topología usual.

La esfera de Riemann.
Desde un punto de vista geométrico es conveniente considerar un modelo en el cual cada punto del plano ampliado $\mathbb{C}_\infty$ se represente mediante un punto concreto. Esto se consigue con el espacio métrico compacto (S, d_2) donde

$$S = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\}$$

es la esfera unidad de $\mathbb{R}^3$ y d_2 la restricción a S de la distancia euclídea de $\mathbb{R}^3$.

En la teoría de funciones de variable compleja al espacio compacto (S, d_2), se le suele llamar *esfera de Riemann*. Su interés se debe a que proporciona un modelo geométrico útil para la compactificación por un punto del plano complejo.

El plano complejo ampliado $\mathbb{C}_\infty$ se identifica con la *esfera de Riemann*

$$S = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\}$$

mediante la *proyección estereográfica* $\Psi : \mathbb{C}_\infty \to S$, donde $\Psi(\infty) = (0, 0, 1)$ y para $x + iy \in \mathbb{C}$, $\Psi(x + iy)$ es el punto de S, distinto de $(0, 0, 1)$, en el que la recta que pasa por $(x, y, 0)$ y $(0, 0, 1)$ corta a la esfera. Un cálculo sencillo (realizado en 1.5.4) proporciona las ecuaciones de Ψ y su inversa:

$$\Psi(x + iy) = \left(\frac{2x}{|z|^2 + 1}, \frac{2y}{|z|^2 + 1}, \frac{|z|^2 - 1}{|z|^2 + 1} \right); \quad \Psi^{-1}(x_1, x_2, x_3) = \frac{x_1 + ix_2}{1 - x_3}.$$

Cuando en S se considera con la topología inducida por la topología usual de $\mathbb{R}^3$, es fácil ver que la proyección estereográfica $\Psi : \mathbb{C}_\infty \to (S, d_2)$ establece un homeomorfismo, de donde se sigue que la topología $\mathcal{G}_\infty$ de $\mathbb{C}_\infty$ es la asociada a la distancia

$$d_\infty(z, w) = d_2(\Psi(z), \Psi(w))$$

La distancia d_∞ por su significado geométrico, recibe el nombre de *distancia cordal*. Con un poco de cálculo (véase 1.5.5) se obtienen las fórmulas explícitas

$$d_\infty(z, w) = \frac{2|z - w|}{\sqrt{1 + |z|^2}\sqrt{1 + |w|^2}} \quad \text{si} \quad z, w \in \mathbb{C};$$
$$d_\infty(z, \infty) = \frac{2}{\sqrt{1 + |z|^2}} \quad \text{si} \quad z \in \mathbb{C}.$$

Se obtiene así que $(\mathbb{C}_\infty, d_\infty)$ es un espacio métrico compacto isométrico (mediante la proyección estereográfica) a la esfera de Riemann con la propiedad de que d_∞ induce en $\mathbb{C}$ una distancia es equivalente a la usual (pero no es uniformemente equivalente).

1.3. Circunferencias y simetrías

Las coordenadas cartesianas x, y de un punto del plano se expresan en términos de $z, \overline{z}$ mediante las fórmulas

$$x = \frac{1}{2}(z + \overline{z}); \quad y = \frac{1}{2i}(z - \overline{z}).$$

Las cantidades $z, \overline{z}$ se llaman las *coordenadas conjugadas* del punto (x, y).
En algunas cuestiones de geometría analítica plana, en vez de considerar las coordenadas cartesianas x, y de un punto del plano puede resultar más cómodo utilizar sus coordenadas complejas conjugadas z,$\overline{z}$.

Es conveniente conocer las expresiones analíticas, en forma compleja, de ciertos conceptos y transformaciones geométricas elementales. En la siguiente proposición se obtiene la forma compleja, usando coordenadas conjugadas, de la ecuación de una circunferencia o una recta.

Proposición 1.3.1 *La forma general de la ecuación de una recta o circunferencia en el plano complejo es* $A\overline{z}z+Bz+C\overline{z}+D=0$ *donde* A *y* D *son reales,* B *y* C *son complejos conjugados y* $AD-BC<0$. *(Si* $A=0$ *se obtiene una recta, y si* $A\neq 0$ *resulta una circunferencia de centro* $z_0=-C/A$ *y radio* $\rho=\sqrt{BC-AD}/|A|$*).*

DEM: [17] ejerc. 2.5 ■

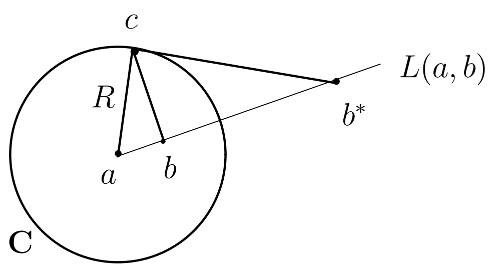
Una notable propiedad de la proyección estereográfica, es que con ella las rectas y circunferencias del plano complejo se corresponden con las circunferencias de la esfera de Riemann (véase 1.5.6). Vemos así que en el plano complejo ampliado $\mathbb{C}_\infty=\mathbb{C}\cup\{\infty\}$, es natural considerar a las rectas como un caso particular de circunferencias (las que pasan por ∞). Desde este punto de vista 1.3.1 proporciona la forma general de la ecuación de una circunferencia en el plano complejo ampliado.

Usando la condición de ortogonalidad para circunferencias que indica en 1.5.7 es fácil deducir que la proyección estereográfica transforma circunferencias ortogonales en circunferencias ortogonales (1.5.8).

Definición 1.3.2 *Dada la circunferencia* $S=\{z:|z-a|=R\}$*, el simétrico de* $b\in\mathbb{C}$*,* $b\neq a$*, respecto a* S *es el único punto de la semirrecta* $L(a,b)=\{a+t(b-a):t\geq 0\}$ *que cumple* $|b-a||b^*-a|=R^2$*. Viene dado por*

$$b^*=a+\frac{R^2}{\overline{b}-\overline{a}}=a+\frac{R^2}{|b-a|^2}(b-a)$$

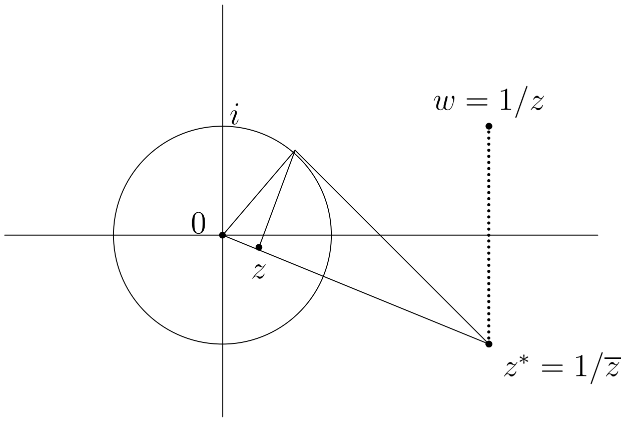
La simetría respecto a una circunferencia S que deja fijos los puntos de S: Cuando $b\in S$ se cumple $R^2/(\overline{b}-\overline{a})=b-a$. Sustituyendo esta expresión en la ecuación de la simetría se obtiene que $b^*=b$. Si $b\notin S$ queda dentro de la circunferencia, su simétrico b^* es exterior a la misma y se puede obtener con la siguiente construcción: Se traza la recta que pasa por b y es perpendicular a la semirrecta $L(a,b)$. Si c es uno de los dos puntos donde esta perpendicular corta a la circunferencia S entonces b^* queda determinado como el punto en que la tangente a S en c corta a la semirrecta $L(a,b)$:



Efectivamente, por la semejanza de los triángulos $\triangle(a,c,b^*)$, $\triangle(a,b,c)$, el punto b^* así obtenido verifica $|b^*-a|/R=R/|b-a|$. Si b es exterior a la circunferencia su simétrico b^* se obtiene realizando la construcción en sentido inverso.

Entre las diversas motivaciones que justifican la consideración del punto ∞ podemos mencionar ya que al considerarlo podemos completar la definición de simetría 1.3.2, definiendo $a^*=\infty$ y $\infty^*=a$. Entonces es fácil ver que la simetría respecto a la circunferencia S es un homeomorfismo de $\mathbb{C}_\infty$

Las simetrías respecto a circunferencias desempeñan un papel importante en la teoría de las transformaciones de Möbius que estudia en la siguiente sección. De momento, conviene señalar que la transformación $w = 1/z$ es el resultado de componer una simetría respecto a la circunferencia unidad $|z| = 1$ con una simetría respecto al eje real (el simétrico de $z \neq 0$ respecto a esta circunferencia es $z^* = 1/\bar{z}$).



La proyección estereográfica permite interpretar ciertas transformaciones del plano de modo muy simple. Acabamos de ver que la transformación $z \to 1/z$, se puede interpretar geométricamente como la composición de una simetría respecto al eje real con una simetría (o inversión) respecto a la circunferencia $|z| = 1$. Sin embargo la transformación que $z \to 1/z$ induce en la esfera de Riemann, mediante la proyección estereográfica, tiene un significado geométrico más sencillo: Se trata de un giro de amplitud π alrededor del eje Ox_1 ([17] ejerc. 2.31).

1.4. Transformaciones de Möbius

Estas transformaciones intervienen de modo natural al estudiar algunas funciones elementales de variable compleja. por lo que es conveniente familiarizarse con sus propiedades geométricas.

Las *transformaciones de Möbius* son las transformaciones $T : \mathbb{C}_\infty \to \mathbb{C}_\infty$ no constantes, definidas mediante funciones racionales de la forma:

$$T(z) = \frac{az + b}{cz + d}, \quad \text{donde} \quad a, b, c, d \in \mathbb{C}, \ ad - bc \neq 0$$

donde se utilizan los convenios habituales:

$$\begin{array}{lll} T(\infty) = a/c \ \text{ y } \ T(-d/c) = \infty & \text{si} & c \neq 0 \\ T(\infty) = \infty & \text{si} & c = 0. \end{array}$$

Para cada $w \in \mathbb{C}_\infty$ la ecuación $T(z) = w$ tiene una única solución

$$z = T^{-1}(w) = \frac{dw - b}{-cw + a}$$

luego T^{-1} sigue siendo una transformación del mismo tipo. La composición de dos transformaciones de Möbius sigue siendo otra transformación de Möbius: Dadas

$$T_i(z) = \frac{a_i z + b_i}{c_i z + d_i} \quad \text{con} \quad a_i d_i - b_i c_i \neq 0, \; (i = 1, 2)$$

es fácil comprobar que $T = T_1 \circ T_2$ se puede escribir en la forma

$$T(z) = \frac{az + b}{cz + d}$$

donde sus coeficientes a, b, c, d son los elementos de la matriz producto

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix}$$

En lo que sigue denotaremos por $\mathbb{M}$ el conjunto de todas las transformaciones de Möbius. Con la operación de composición $\mathbb{M}$ es un grupo de transformaciones de $\mathbb{C}_\infty$ generado por las transformaciones elementales de los siguientes tipos:

i)	Traslaciones:	$z \to a + z, (a \in \mathbb{C})$	ii)	Giros:	$z \to e^{i\alpha} z, (\alpha \in \mathbb{R})$
iii)	Dilataciones:	$z \to rz, (r > 0)$	iv)	Inversión:	$z \to 1/z$

Esto es evidente en el caso $c = 0$. En el caso $c \neq 0$ basta escribir una transformación genérica $T(z) = (az + b)/(cz + d)$ en la forma

$$T(z) = \frac{a}{c} + \frac{bc - ad}{c^2(z + d/c)}$$

Proposición 1.4.1 *Dada una terna z_1, z_2, z_3 formada por tres puntos distintos de $\mathbb{C}_\infty$, si w_1, w_2, w_3 es otra terna en las mismas condiciones, existe una única transformación de Möbius T que transforma la primera terna en la segunda, es decir, $T(z_i) = w_i$, $i = 1, 2, 3$.*

Dem: En el caso particular $w_1 = 0$, $w_2 = 1$, $w_3 = \infty$, T se define así:

$$T(z) = \frac{z - z_1}{z - z_3} \frac{z_2 - z_3}{z_2 - z_1} \quad \text{si} \quad z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}; \quad T(z) = \frac{z_2 - z_3}{z - z_3}, \quad \text{si} \quad z_1 = \infty;$$

$$T(z) = \frac{z - z_1}{z - z_3}, \quad \text{si} \quad z_2 = \infty; \qquad T(z) = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}, \quad \text{si} \quad z_3 = \infty.$$

Para obtener la unicidad en este caso basta observar que si $S \in \mathbb{M}$ también verifica $S(z_1) = 0$, $S(z_2) = 1$ y $S(z_3) = \infty$ entonces $T \circ S^{-1}$ deja fijos los tres puntos $0, 1, \infty$ y por lo tanto es la identidad, es decir $S = T$.

Consideremos ahora el caso general:
Dados tres puntos distintos w_i, $i = 1, 2, 3$, según lo que acabamos de demostrar en el caso particular, existen $M, N \in \mathbb{M}$ verificando

$$M(w_1) = 0, \; M(w_2) = 1, \; M(w_3) = \infty; \quad N(z_1) = 0, \; N(z_2) = 1, \; N(z_3) = \infty;$$

luego $T = M^{-1}N$ cumple la condición $T(z_i) = w_i$ para $i = 1, 2, 3$. Por otra parte, si $T^* \in \mathbb{M}$ también verifica esta condición, se cumple $(M \circ T^*)(z_1) = 0$, $(M \circ T^*)(z_2) = 1$, $(M \circ T^*)(z_3) = \infty$. En virtud de la unicidad establecida en el caso preliminar, se concluye que $M \circ T^* = N$, es decir $T^* = M^{-1} \circ N = T$ ■

Definición 1.4.2 *Dada una cuaterna ordenada z_0, z_1, z_2, z_3 formada por puntos de $\mathbb{C}_\infty$, donde los tres últimos z_1, z_2, z_3 se suponen distintos, se define la razón doble (z_0, z_1, z_2, z_3) como la imagen de z_0 mediante la única transformación de Möbius R que verifica*

$$R(z_1) = 0, R(z_2) = 1, R(z_3) = \infty$$

En las condiciones de la definición anterior, si los tres puntos z_1, z_2, z_3 son finitos se tiene:

$$(z_0, z_1, z_2, z_3) = \frac{(z_0 - z_1)(z_2 - z_3)}{(z_0 - z_3)(z_2 - z_1)}$$

En otro caso:

$$(z_0, \infty, z_2, z_3) = \frac{z_2 - z_3}{z_0 - z_3}; \quad (z_0, z_1, \infty, z_3) = \frac{z_0 - z_1}{z_0 - z_3}; \quad (z_0, z_1, z_2, \infty) = \frac{z_0 - z_1}{z_2 - z_1}.$$

Proposición 1.4.3 *La razón doble es un invariante para las transformaciones de Möbius: Si $T \in \mathbb{M}$ y z_0, z_1, z_2, z_3 son puntos de $\mathbb{C}_\infty$, (donde z_1, z_2, z_3 se suponen distintos) se cumple: $(z_0, z_1, z_2, z_3) = (T(z_0), T(z_1), T(z_2), T(z_3))$.*

DEM: Con la transformación $R(z) = (z, z_1, z_2, z_3)$ se consigue que $R \circ T^{-1}$ lleve la terna ordenada $T(z_1), T(z_2), T(z_3)$ a la terna ordenada $(0, 1, \infty)$, luego $(R \circ T^{-1})(w) = (w, T(z_1), T(z_2), T(z_3))$. Sustituyendo $w = T(z_0)$ se obtiene el resultado. ∎

Dadas dos ternas ordenadas de puntos distintos de $\mathbb{C}_\infty$, (z_1, z_2, z_3), (w_1, w_2, w_3) para obtener explícitamente la ecuación de la única $T \in \mathbb{M}$ que lleva la primera terna a la segunda basta despejar w en función de z, en la igualdad

$$(z, z_1, z_2, z_3) = (w, w_1, w_2, w_3)$$

En lo que sigue las circunferencias en el plano complejo se consideran siempre en sentido amplio, es decir, se considera a las rectas como un caso particular de las circunferencias (las que pasan por ∞). Denotaremos por $\mathbb{R}_\infty$ la 'circunferencia' que corresponde al eje real, es decir $\mathbb{R}_\infty = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$.

Proposición 1.4.4 *Sea $\mathbf{C}$ la circunferencia (en sentido amplio) determinada por tres puntos distintos z_1, z_2, z_3 de $\mathbb{C}_\infty$. Entonces*

$$z \in \mathbf{C} \Leftrightarrow (z, z_1, z_2, z_3) \in \mathbb{R}_\infty$$

DEM: Sea $T(z) = (az + b)/(cz + d)$ definida por $T(z) = (z, z_1, z_2, z_3)$. La condición $T(z) \in \mathbb{R}$ significa que $z \neq z_3$ y $\overline{T(z)} = T(z)$, es decir

$$z \neq -d/c \quad \text{y} \quad \frac{az + b}{cz + d} = \frac{\bar{a}\bar{z} + \bar{b}}{\bar{c}\bar{z} + \bar{d}}$$

Se obtiene que $T(z) \in \mathbb{R}_\infty$ si y sólo si $(az + b)(\bar{c}\bar{z} + \bar{d}) = (cz + d)(\bar{a}\bar{z} + \bar{b})$, lo que equivale a $i(a\bar{c} - c\bar{a})z\bar{z} + i(a\bar{d} - c\bar{b})z + i(b\bar{c} - d\bar{a})\bar{z} + i(b\bar{d} - d\bar{b}) = 0$ que es una ecuación de la forma $Az\bar{z} + Bz + C\bar{z} + D = 0$ con $A, D \in \mathbb{R}$, $B = \overline{C}$ y $AD - BC = -|ad - bc|^2 < 0$, es decir, es la ecuación de una circunferencia (véase la proposición 1.3.1) que, evidentemente pasa por z_1, z_2, y z_3 ∎

Proposición 1.4.5 *Las transformaciones de Möbius transforman circunferencias en circunferencias (en sentido amplio).*

DEM: Sea $T \in \mathbb{M}$ y $\mathbf{C}$ la circunferencia determinada por los tres puntos z_1, z_2, z_3. Si $\mathbf{C}^*$ es la circunferencia determinada por sus imágenes $w_j = T(z_j)$, $j = 1, 2, 3$, en virtud de las proposiciones 1.4.4 y 1.4.3 se cumple

$$z \in \mathbf{C} \Leftrightarrow (z, z_1, z_2, z_3) \in \mathbb{R}_\infty \Leftrightarrow (T(z), T(z_1), T(z_2), T(z_3)) \in \mathbb{R}_\infty \Leftrightarrow T(z) \in \mathbf{C}^*$$

También se puede dar otra demostración de esta proposición utilizando la descomposición de T en transformaciones elementales de los tipos i), ii), iii) y iv). Como el resultado es evidente cuando T es una traslación, un giro o una homotecia, basta hacer la demostración para $T(z) = 1/z$. En este caso, dada una circunferencia de ecuación $Az\bar{z}+Bz+C\bar{z}+D = 0$, con $A, D \in \mathbb{R}$, $B = \overline{C}$ y $AD - BC < 0$, haciendo la sustitución $w = 1/z$ resulta $Dw\bar{w} + Cw + B\bar{w} + A = 0$, que es la ecuación de una circunferencia en el plano w. ■

Manejando la condición de ortogonalidad de circunferencias que se muestra en el ejercicio 1.5.7, es fácil ver que las transformaciones de Möbius transforman circunferencias ortogonales en circunferencias ortogonales ([17] ejerc. 2.14).

Conservación de la simetría. La razón doble permite escribir de manera muy simple las ecuaciones de simetrías respecto a circunferencias:

Proposición 1.4.6 *Sea* $\mathbf{C}$ *una circunferencia (en sentido amplio) determinada por tres puntos distintos de la misma* $z_1, z_2, z_3 \in \mathbf{C}$. *Entonces* z^* *es el simétrico de* z *respecto a la circunferencia* $\mathbf{C}$ *si, y sólo si*

$$(z^*, z_1, z_2, z_3) = \overline{(z, z_1, z_2, z_3)}$$

DEM: Supongamos en primer lugar que $\mathbf{C} = \{z : |z - a| = R\}$ es una verdadera circunferencia de centro a y radio R. Utilizando la invariancia de la razón doble frente a las transformaciones de Möbius (proposición 1.4.3) resulta:

$$\overline{(z, z_1, z_2, z_3)} = \overline{(z - a, z_1 - a, z_2 - a, z_3 - a)} = \left(\bar{z} - \bar{a}, \frac{R^2}{z_1 - a}, \frac{R^2}{z_2 - a}, \frac{R^2}{z_3 - a}\right) =$$

$$= \left(\frac{R^2}{\bar{z} - \bar{a}}, z_1 - a, z_2 - a, z_3 - a\right) = (z^*, z_1, z_2, z_3)$$

donde $z^* = a + R^2/(\bar{z} - \bar{a})$.

Supongamos ahora que $\mathbf{C}$ es una recta y sean z, z^* puntos simétricos respecto a esta recta. Si z_1, z_2, z_3 son tres puntos distintos de $\mathbf{C}$, la transformación $T(z) = (z, z_1, z_2, z_3)$ convierte $\mathbf{C}$ en $\mathbb{R}_\infty$. Toda circunferencia Γ que pase por z y z^* es ortogonal a la recta $\mathbf{C}$ luego $T(\Gamma)$ es una circunferencia que corta de modo ortogonal a la recta real. Como todas las circunferencias que pasan por $T(z)$ y $T(z^*)$ son ortogonales a la recta real se sigue que $T(z)$ y $T(z^*)$ son simétricos respecto a esta recta, es decir $T(z^*) = \overline{T(z)}$ ■

Proposición 1.4.7 [Principio de simetría] *Si a, a^* son puntos simétricos respecto a una circunferencia $\mathbf{C}$ y $T \in \mathbb{M}$ es una transformación de Möbius entonces $T(a)$ y $T(a^*)$ son simétricos respecto a la circunferencia imagen $T(\mathbf{C})$.*

DEM: Sea z^* el simétrico de z respecto a la circunferencia $\mathbf{C}$ que suponemos determinada por tres puntos distintos z_1, z_2, z_3. La circunferencia $T(\mathbf{C})$ está determinada por las imágenes $w_j = T(z_j)$, $j = 1, 2, 3$. Según las proposiciones 1.4.3 y 1.4.6 se cumple

$$(T(z^*), w_1, w_2, w_3) = (z^*, z_1, z_2, z_3) = \overline{(z, z_1, z_2, z_3)} = \overline{(T(z), w_1, w_2, w_3)}$$

lo que, según la proposición 1.4.6, significa que $T(z^*)$ es el simétrico de $T(z)$ respecto a la circunferencia $T(\mathbf{C})$. ■

Conviene observar que z y z^* son simétricos respecto a una circunferencia $\mathbf{C}$ si y sólo si $\overline{T(z)} = T(z^*)$ para cada (o alguna) $T \in \mathbb{M}$ que cumpla $T(\mathbf{C}) = \mathbb{R}_\infty$.

El principio de simetría resulta especialmente útil en las aplicaciones a la hora de obtener transformaciones de Möbius, con determinadas propiedades. Así por ejemplo, para transformar dos circunferencias disjuntas $\mathbf{C}_1$, $\mathbf{C}_2$ en dos circunferencias concéntricas basta encontrar dos puntos a, b que sean simétricos respecto a ambas. Entonces $T(z) = (z-a)/(z-b)$ transforma $\mathbf{C}_1$ y $\mathbf{C}_2$ en un par de circunferencias respecto a las cuales los puntos $T(a) = 0$ y $T(b) = \infty$ son simétricos, y lo que significa que son concéntricas.

En las demostraciones de las proposiciones 1.4.8, 1.4.9 se utiliza de modo sistemático el principio de simetría.

Proposición 1.4.8 *La forma general de las transformaciones de Möbius $T \in \mathbb{M}$ que dejan invariante el disco $D(0,1)$ es*

$$T(z) = \mu \frac{z-a}{1-\overline{a}z}, \quad \textit{con} \ \ |\mu| = 1 \ \ \textit{y} \ \ |a| < 1.$$

DEM: [17] ejerc. 2.19 ■

Análogamente, las transformaciones de Möbius que dejan invariante el disco $D(0,R)$ son las de la forma

$$T(z) = \mu \frac{z-a}{R^2-\overline{a}z}, \quad \text{con} \ \ |a| < R \ \ \text{y} \ \ |\mu| = R^2$$

Proposición 1.4.9 *La forma general de las transformaciones de Möbius $T \in \mathbb{M}$ que dejan invariante el semiplano $P = \{z : \operatorname{Im} z > 0\}$ es*

$$T(z) = \frac{az+b}{cz+d} \quad \textit{donde} \ \ a, b, c, d \in \mathbb{R}, \quad ad - bc > 0$$

DEM: [17] ejerc. 2.20 ■

Conservación de la orientación. Desde el punto de vista de las aplicaciones también es interesante el principio de conservación de las orientaciones que se explica a continuación: Es bien sabido que una recta se orienta dando un par ordenado de puntos z_1,z_2 de la misma, o bien dando un vector de dirección $u = z_2 - z_1$. De esta forma queda establecido el sentido de recorrido de la recta, que corresponde al de la parametrización $z(t) = z_1 + t(z_2 - z_1)$ cuando t crece. Después de orientar una recta queda determinado su lado derecho y su lado izquierdo, que son respectivamente

$$\left\{z : \operatorname{Im}\left(\frac{z - z_1}{z_2 - z_1}\right) < 0\right\}; \quad \left\{z : \operatorname{Im}\left(\frac{z - z_1}{z_2 - z_1}\right) > 0\right\}$$

Según la definición, cuando el eje real se orienta en la forma usual su lado izquierdo es $\{z : \operatorname{Im} z > 0\}$, y su lado derecho es $\{z : \operatorname{Im} z < 0\}$.

Análogamente, una genuina circunferencia $\mathbf{C}$ se orienta dando una terna ordenada (z_1, z_2, z_3) de puntos distintos de la misma. Con respecto a esta orientación su lado derecho (resp. izquierdo) es la región determinada, respectivamente, por

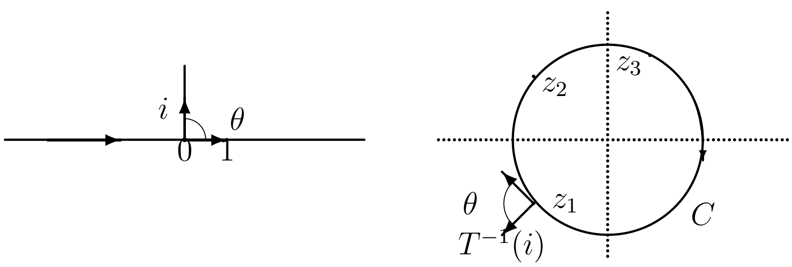
$$\operatorname{Im}(z, z_1, z_2, z_3) < 0; \quad \operatorname{Im}(z, z_1, z_2, z_3) > 0.$$

Obsérvese que $\mathbf{C} = \{z : \operatorname{Im}(z, z_1, z_2, z_3) = 0\}$. Si un punto z_0 queda dentro de la circunferencia $\mathbf{C}$ y cumple la desigualdad $\operatorname{Im}(z_0, z_1, z_2, z_3) > 0$, (resp. < 0) un sencillo argumento de conexión conduce a que todos los puntos que quedan dentro de la circunferencia verifican la misma desigualdad que z_0. Por otra parte, si z_0 queda dentro de la circunferencia $\mathbf{C}$ es claro que z_0^* queda fuera de la misma y

$$(z_0^*, z_1, z_2, z_3) = \overline{(z_0, z_1, z_2, z_3)}$$

luego $\operatorname{Im}(z_0^*, z_1, z_2, z_3) = -\operatorname{Im}(z_0, z_1, z_2, z_3)$ cumple la desigualdad opuesta. Lo mismo ocurre con todos los puntos que están fuera de la circunferencia.
(Obsérvese que la orientación de una recta mediante un par ordenado de sus puntos (z_1, z_2), así como el lado derecho e izquierdo de la recta respecto a esta orientación, aparecen como casos particulares de las definiciones para circunferencias, cuando $z_3 = \infty$).

Al orientar una circunferencia mediante una terna ordenada de sus puntos (z_1, z_2, z_3) queda determinado un sentido de recorrido de la misma, a saber, el que corresponde a la parametrización $z = T^{-1}(t)$, $t \in \mathbb{R}$, con $T(z) = (z, z_1, z_2, z_3) = t$.



Si un vector tal como $i = (1, 0)$ apunta hacia el lado izquierdo del eje real, la imagen $T^{-1}(i)$ debe apuntar hacia el lado izquierdo de la circunferencia. En el caso de la figura apunta hacia el exterior de la misma porque el ángulo orientado que forma con el vector tangente en z_1 a la circunferencia debe ser $+\pi/2$.

El principio de conservación de las orientaciones asegura que si una circunferencia $\mathbf{C}$ se orienta mediante la terna (z_1, z_2, z_3) y la imagen $T(\mathbf{C})$ se orienta mediante la terna imagen $(T(z_1), T(z_2), T(z_3))$ entonces T transforma el lado izquierdo (resp. derecho) de $\mathbf{C}$ en el lado izquierdo (resp. derecho) de $T(\mathbf{C})$.

Este principio, teóricamente obvio, resulta de gran ayuda en las aplicaciones si se tienen en cuenta las siguientes consideraciones, que no tienen nada que ver con las matemáticas, pero son muy útiles: Con el convenio usual de dibujar el eje real horizontalmente, creciendo de izquierda a derecha, y el eje imaginario verticalmente, creciendo de abajo hacia arriba, el lado derecho de las circunferencias orientadas en el sentido las manecillas del reloj corresponde a su interior y el lado izquierdo a su exterior. En el caso de una recta ($z_3 = \infty$), orientada mediante (z_1, z_2, ∞) el lado derecho corresponde al semiplano que queda a la derecha cuando avanzamos sobre la recta en la dirección marcada por el vector $z_2 - z_1$.

1.5. Complementos

1.5.1. Sobre compacidad y conexión

Esta sección alberga algunos resultados concretos de la topología del plano que intervienen o tienen relación con la teoría de las funciones complejas de variable compleja.

Proposición 1.5.1 *Si $\Omega \subset \mathbb{C}$ es abierto entonces*

$$K_n = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq n,\ d(z, \mathbb{C} \setminus \Omega) \geq 1/n\}$$

es una sucesión de compactos que recubre Ω y verifica $K_n \subseteq \overset{o}{K}_{n+1}$ para cada $n \in \mathbb{N}$.

Esta sucesión tiene la propiedad de que cada componente conexa de $\mathbb{C}_\infty \setminus K_n$ contiene una componente conexa de $\mathbb{C}_\infty \setminus \Omega$. (Una sucesión de compactos que cumple estas condiciones se dice que es una sucesión fundamental de compactos en Ω.)

DEM: Véase [17] ejerc. 2.38 ■

Si M es un subconjunto del abierto $\Omega \subset \mathbb{C}$ y $M' \cap \Omega = \emptyset$ se dice que M es discreto en Ω. Esto significa que para cada $a \in M$ existe $r > 0$ tal que $D(a, r) \cap \Omega = \{a\}$.

Proposición 1.5.2 *Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$ abierto. Si $M \subset \Omega$ y $M' \cap \Omega = \emptyset$ entonces M es numerable, $\Omega \setminus M$ es abierto y si Ω es conexo entonces $\Omega \setminus M$ también lo es.*

DEM: Véase [17] ejerc. 2.39 ■

Proposición 1.5.3 *Si T es un espacio compacto y $\mathcal{H}$ la familia de los subconjuntos abiertos y cerrados de T entonces $T_x = \bigcap\{F : x \in F \in \mathcal{H}\}$ es la componente conexa de $x \in T$.*

DEM: Véase [17] ejerc. 2.43 ■

1.5.2. Sobre geometría y la esfera de Riemann

Los ejercicios que se agrupan en esta sección conciernen a cálculos y resultados de carácter complementario que han sido comentados a lo largo de este capítulo.

Ejercicio 1.5.4 *Obtenga las ecuaciones de la proyección estereográfica y de su inversa:*

$$\Psi(x+iy) = \left(\frac{2x}{|z|^2+1}, \frac{2y}{|z|^2+1}, \frac{|z|^2-1}{|z|^2+1}\right); \quad \Psi^{-1}(x_1,x_2,x_3) = \frac{x_1+ix_2}{1-x_3}.$$

SOLUCIÓN Identificando $z = x+iy$ con $(x,y,0) \in \mathbb{R}^3$, se tiene que $\Psi(z) = \Psi(x+iy)$ es el punto, distinto de $(0,0,1)$, donde la recta que pasa por los puntos $(x,y,0)$ y $(0,0,1)$ corta a la esfera $x_1^2+x_2^2+x_3^2 = 1$. Si en las ecuaciones de esta recta

$$x_1(t) = tx; \qquad x_2(t) = ty; \qquad x_3(t) = 1-t;$$

se impone la condición $x_1(t)^2+x_2(t)^2+x_3(t)^2 = 1$ se obtiene la ecuación de segundo grado $(1+|z|^2)t^2-2t = 0$ cuyas soluciones son $t_1 = 0$, $t_2 = 2/(1+|z|^2)$. La primera corresponde al punto $(0,0,1)$ y la segunda al punto $\Psi(z)$, luego

$$\Psi(x+iy) = \left(\frac{2x}{|z|^2+1}, \frac{2y}{|z|^2+1}, \frac{|z|^2-1}{|z|^2+1}\right).$$

Por otra parte, si $x+iy = \Psi^{-1}(x_1,x_2,x_3)$ se cumple $x_1 = t_2x$, $x_2 = t_2y$, $x_3 = 1-t_2$, luego $x = x_1/(1-x_3)$, $y = x_2/(1-x_3)$, es decir

$$\Psi^{-1}(x_1,x_2,x_3) = \frac{x_1+ix_2}{1-x_3}.$$

Ejercicio 1.5.5 *Obtenga la fórmula para la distancia cordal*

$$d_\infty(z,w) = \frac{2|z-w|}{\sqrt{1+|z|^2}\sqrt{1+|w|^2}} \quad \text{si } z,w \in \mathbb{C};$$

$$d_\infty(z,\infty) = \frac{2}{\sqrt{1+|z|^2}} \quad \text{si } z \in \mathbb{C}.$$

SOLUCIÓN Sean $z = x+iy$, $w = u+iv$, y $\Psi(z) = (x_1,x_2,x_3)$, $\Psi(w) = (y_1,y_2,y_3)$ sus imágenes mediante la proyección estereográfica. Teniendo en cuenta que $1 = x_1^2+x_2^2+x_3^2 = y_1^2+y_2^2+y_3^2$ se obtiene

$$d_\infty(z,w)^2 = (x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2+(x_3-y_3)^2 = 2(1-x_1y_1-x_2y_2-x_3y_3)$$

y empleando las ecuaciones de Ψ se llega a la expresión

$$d_\infty(z,w)^2 = 2\left(1-\frac{4xu}{AB}-\frac{4yv}{AB}-\frac{(|z|^2-1)(|w|^2-1)}{AB}\right)$$

donde $A = 1 + |z|^2$, $B = 1 + |w|^2$. Después de simplificarla se llega a

$$d_\infty(z, w)^2 = \frac{4}{AB}(|z|^2 + |w|^2 - 2xu - 2yv) = \frac{4}{AB}|z - w|^2.$$

Análogamente, con un cálculo más corto, que se deja al cuidado del lector, se obtiene la fórmula para $d_\infty(z, \infty)$.

También se puede obtener la fórmula para la distancia cordal con un sencillo razonamiento geométrico basado en que el triángulo de vértices $N, \Phi(z), \Phi(w)$ es semejante al triángulo de vértices N, w, z, con $N = (0, 0, 1)$.

Ejercicio 1.5.6 *Demuestre que, mediante la proyección estereográfica, las circunferencias del plano complejo se corresponden con las circunferencias de la esfera de Riemann:*

Una recta del plano se transforma en una circunferencia de la esfera que pasa por el polo de proyección $(0, 0, 1)$*, y una verdadera circunferencia de ecuación*

$$A\overline{z}z + Bz + C\overline{z} + D = 0$$

donde $A, D \in \mathbb{R}$, $B = \overline{C}$, $AD - BC < 0$, $A \neq 0$. *(vea 1.3.1) se transforma en la circunferencia de la esfera determinada por el plano de ecuación*

$$ax_1 + bx_2 + cx_3 + d = 0$$

donde $a = B + C$, $b = i(B - C)$, $c = A - D$, $d = A + D$.
(Observe que a, b, c, d *son reales y que si* Δ *es la distancia del origen al plano entonces* $\Delta < 1$ *por lo que el plano corta efectivamente a la esfera).*

SOLUCIÓN Véase [17] ejerc. 2.32

Ejercicio 1.5.7 *Sean* Γ_i, $i = 1, 2$, *circunferencias en el plano complejo de ecuaciones respectivas* $A_i\overline{z}z + B_iz + C_i\overline{z} + D_i = 0$, *donde* A_i, D_i *son reales,* B_i, C_i *complejos conjugados y* $A_iD_i - B_iC_i < 0$. *Demuestre que* Γ_1 *y* Γ_2 *son ortogonales si y sólo si* $A_1D_2 + A_2D_1 = B_1C_2 + B_2C_1$.

SOLUCIÓN Véase [17] ejerc. 2.5

Ejercicio 1.5.8 *Demuestre que la proyección estereográfica transforma circunferencias ortogonales en circunferencias ortogonales.*

SOLUCIÓN Véase [17] ejerc. 2.36

1.6. Ejercicios

♢ **1.1** *Si $z, w \in \mathbb{C}$ demuestre, de la forma más breve posible, la igualdad:* $|zw| = |z||w|$

♢ **1.2** *Si z, w son números complejos demuestre la identidad del paralelogramo:*

$$|z+w|^2 + |z-w|^2 = 2(|z|^2 + |w|^2)$$

Obtenga el mínimo valor de $|z-a|^2 + |z-b|^2$, donde a, b son números complejos fijos y z varía en $\mathbb{C}$. ([17] ejerc. 1.1).

♢ **1.3** *Si a, b son números complejos demuestre la identidad*

$$|1+\overline{a}b|^2 = |a+b|^2 + (1-|a|^2)(1-|b|^2)$$

♢ **1.4** *Compruebe las siguientes afirmaciones ([17] ejerc. 1.2)*

i) $|a-b| < |1-\overline{a}b|$ *si* $|a| < 1$ *y* $|b| < 1$.

ii) $|a-b| = |1-\overline{a}b|$ *si* $|a| = 1$ *ó* $|b| = 1$.

♢ **1.5** *Calcule la parte real y la parte imaginaria de* $(1+i)^{2n+1}$.

♢ **1.6** *Calcule el argumento principal de* $(z-1)/(z+1)$ *donde* $|z| = 1$, $z \notin \{1, -1\}$.

♢ **1.7** *Compruebe que la parte la parte imaginaria de $z/(1+z^2)$ es positiva si y sólo si* $|z| < 1$.

♢ **1.8** *Demuestre que las dos raíces cuadradas de $z = a+ib$, con con $b \neq 0$, vienen dadas por*

$$\sqrt{a+ib} = \pm\sqrt{\frac{|z|+a}{2}} + i\ \mathit{signo}(b)\sqrt{\frac{|z|-a}{2}}$$

♢ **1.9** *Demuestre que el número complejo $u = (2-i)/(2+i)$ tiene la propiedad de que $u^n \neq 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$. (En [9, pág.33] se puede ver una solución atribuida a Hurwitz).*

♢ **1.10** *Si $\omega^n = 1$, calcule*

$$1 + \omega^k + \omega^{2k} + \cdots + \omega^{(n-1)k}; \quad 1 - \omega^k + \omega^{2k} - \cdots + (-1)^{n-1}\omega^{(n-1)k}$$

♢ **1.11** *Justifique que para $0 \le r < 1$ se cumple*

a) $1 + 2r\cos\theta + \cdots + 2r^n \cos n\theta + \cdots = \dfrac{1-r^2}{1-2r\cos\theta + r^2}$.

b) $r\,\mathrm{sen}\,\theta + \cdots + r^n \sin n\theta + \cdots = \dfrac{r\sin\theta}{1-2r\cos\theta + r^2}$.

♢ **1.12** *Justifique la igualdad*

$$1 + 2\cos\theta + 2\cos 2\theta + \cdots + 2\cos n\theta = \frac{\operatorname{sen}\,[(2n+1)\theta/2]}{\operatorname{sen}(\theta/2)}$$

♢ **1.13** *Suponiendo que* $x = r\cos\theta; y = r\operatorname{sen}\theta$ *demuestre que*

$$r^n \cos n\theta = x^n - \binom{n}{2} x^{n-2}y^2 + \binom{n}{4} x^{n-4}y^4 - \cdots$$

$$r^n \operatorname{sen} n\theta = \binom{n}{1} x^{n-1}y - \binom{n}{3} x^{n-4}y^4 + \cdots$$

♢ **1.14** *Utilice el producto* $(5-i)^4(1+i)$ *para establecer la igualdad de Machin:*

$$\frac{\pi}{4} = 4\arctan\frac{1}{5} - \arctan\frac{1}{239}$$

♢ **1.15** *Utilice los números complejos para expresar* $x^4 + 4$ *como producto de dos polinomios reales de segundo grado.*

♢ **1.16** *Demuestre que* $\cos nt$ *se puede expresar en la forma* $\cos n\theta = T_n(\cos\theta)$ *donde* T_n *es un polinomio de grado* $n-1$ *(el n-ésimo polinomio de Tchevichev). Calcule* T_0, T_1, T_2 *y obtenga la relación de recurrencia*

$$T_{n+2}(x) = 2xT_{n+1}(x) - T_n(x)$$

♢ **1.17** *Dada una circunferencia* $S = \{z : |z-a| = R\}$ *demuestre ([17] ejerc. 2.6):*
i) La familia de las circunferencias que pasan por $b \notin S$ *y su simétrico* b^* *coincide con la familia de las circunferencias ortogonales a* S *que pasan por* b.
ii) La simetría transforma circunferencias ortogonales en circunferencias ortogonales y que las circunferencias ortogonales a S *se transforman en sí mismas.*

♢ **1.18** *Determine geométricamente los siguientes subconjuntos del plano ([17] ejerc. 2.7)*

a) $R = \{z : \operatorname{Im}\frac{z-a}{b} = 0\}$, $H = \{z : \operatorname{Im}\frac{z-a}{b} > 0\}$, $a, b \in \mathbb{C}$.

b) $R = \{z : \operatorname{Re}(z/b) = 1\}$, $H = \{z : \operatorname{Re}(z/b) > 1\}$, $b \in \mathbb{C}$.

c) $\{z : |z|^2 - 2\operatorname{Re}(\overline{a}z) + \alpha = 0\}$, $a \in \mathbb{C}$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

d) $\{z : |z-a| = \rho|z-b|\}$, $a, b \in \mathbb{C}$, $\rho > 0$.

e) $\{z : |z-a| = |1-\overline{a}z|\}$, $|a| < 1$.

♢ **1.19** *La relación* $z_1 - z_2 + z_3 - z_4 = 0$ *entre los números complejos* z_1, z_2, z_3, z_4 *se puede escribir de varias formas equivalentes:*
a) $z_1 - z_2 = z_4 - z_3$;
b) $z_1 - z_4 = z_2 - z_3$;
c) $(z_1 + z_3)/2 = (z_2 + z_4)/2$;
d) $(z_1 + z_3)/2 = \frac{1}{2}\left((z_1 + z_2)/2 + (z_3 + z_4)/2\right)$;
Indique la interpretación geométrica de cada una de ellas.

$\diamondsuit$ **1.20** *Sobre cada lado de un cuadrilátero (arbitrario) se coloca un cuadrado exterior al mismo de modo que uno de sus lados coincide con el lado del cuadrilátero. Se consideran los dos segmentos determinados por el centro de cada cuadrado y el centro del cuadrado opuesto. Utilice los números complejos para demostrar que los dos segmentos tienen la misma longitud y son perpendiculares.*

$\diamondsuit$ **1.21** *Sea C la circunferencia imagen de $|z-1| = \sqrt{2}$ mediante $T(z) = (z-1)/(z-3)$. Utilice el principio de simetría para determinar el centro de C. ([17] ejerc. 2.10)*

$\diamondsuit$ **1.22** *Demuestre que el lugar geométrico de los puntos $z \in \mathbb{C}$ cuyas distancias a dos puntos distintos $a, b \in \mathbb{C}$ tienen una razón constante ρ es una circunferencia respecto a la cual a y b son simétricos. Determine su centro y su radio cuando $\rho \neq 1$. (Las circunferencias obtenidas así reciben el nombre de circunferencias de Apolonio de puntos límites a, b). ([17] ejerc. 2.11).*

$\diamondsuit$ **1.23** *Sea $\mathcal{C}_1$ la familia de las circunferencias del plano que pasan por $a, b \in \mathbb{C}$, $a \neq b$, y $\mathcal{C}_2$ la familia de las circunferencias respecto a las cuales a y b son simétricos. Demuestre las siguientes afirmaciones ([17] ejerc. 2.12)*

a) Por cada punto del plano, distinto de a y b pasa una única circunferencia de $\mathcal{C}_1$ y una única circunferencia de $\mathcal{C}_2$.

b) Las circunferencias de $\mathcal{C}_1$ son ortogonales a las circunferencias de $\mathcal{C}_2$.

c) Si S es la simetría respecto a $C_1 \in \mathcal{C}_1$ entonces $S(C_2) = C_2$ para cada $C_2 \in \mathcal{C}_2$. Análogamente, si S es la simetría respecto a $C_2 \in \mathcal{C}_2$ se verifica $S(C_1) = C_1$ para cada $C_1 \in \mathcal{C}_1$.

$\diamondsuit$ **1.24** *Demuestre que un par de circunferencias del plano ampliado se pueden transformar, mediante una simetría (o una transformación de Möbius) apropiada, en un par de circunferencias concéntricas o en un par de líneas rectas. ([17] ejerc. 2.13)*

$\diamondsuit$ **1.25** *Demuestre que las transformaciones de Möbius llevan circunferencias ortogonales a circunferencias ortogonales. Obtenga las circunferencias ortogonales a las dos circunferencias $C_1 = \{z : |z| = 1\}$, $C_2 = \{z : |z-1| = 4\}$ ([17] ejerc. 2.14).*

$\diamondsuit$ **1.26** *Obtenga una transformación de Möbius que lleve el abierto*

$$\{z : \operatorname{Re} z > 0, |z-2| > 1\}$$

a una corona circular de la forma $\{w : r < |w| < 1\}$, de modo que el eje imaginario se transforme en la circunferencia $\{w : |w| = 1\}$.

Determine las circunferencias que son ortogonales al eje imaginario y a la circunferencia $\{z : |z-2| = 1\}$. (análogo a [17] ejerc. 2.15)

$\diamondsuit$ **1.27** *Obtenga una transformación de Möbius que transforme la circunferencia $|z| = 1$ en una recta paralela al eje imaginario, el punto $z = 4$ en el punto $w = 0$ y la circunferencia $|z| = 2$ en ella misma. ([17] ejerc. 2.16)*

♢ **1.28** *Utilice el principio de simetría para determinar* $S(\Omega_1)$ *y* $T(\Omega_2)$ *donde*

$$\begin{array}{ll} S(z) = (z-i)/(z+i), & \Omega_1 = \{z : \operatorname{Re} z > 0, \operatorname{Im} z > 0\}; \\ T(z) = z/(z-1), & \Omega_2 = \{z : 0 < \operatorname{Arg} z < \frac{\pi}{4}\} \end{array}$$

([17] ejerc. 2.17)

♢ **1.29** *En cada caso obtenga una transformación de Möbius* T *con* $T(\Omega) = G$*:*

i) $\Omega = \{z : |z| < 1, \ \operatorname{Re} z > 0\}, \quad G = \{z : \operatorname{Re} z > 0, \ \operatorname{Im} z > 0\}.$

ii) $\Omega = \{z : |z| > 1, \ \operatorname{Im} z > 0\}, \quad G = \{z : |z| < 1, \ \operatorname{Im} z > 0\}.$

([17] ejerc. 2.18)

♢ **1.30** *Obtenga la forma general de las transformaciones de Möbius que transforman el semiplano* $P = \{z : \operatorname{Im}(z) > 0\}$ *en el disco* $D(0, R)$*. ([17] ejerc. 2.21)*

♢ **1.31** *Si* $f : \mathbb{C}_\infty \to \mathbb{C}_\infty$ *es una biyección que transforma circunferencias en circunferencias, demuestre que una de las dos funciones* $f, \overline{f}$ *es una transformación de Möbius.*

Capítulo 2

Series de potencias y derivación compleja

Uno de los objetivos de este capítulo es introducir la noción de derivada en sentido complejo y demostrar que la función definida por una serie de potencias es derivable en sentido complejo. Más adelante las series de potencias desempeñarán un papel central cuando se demuestre la sorprendente validez del recíproco: Toda función derivable en sentido complejo se puede desarrollar en serie de potencias en cada disco abierto contenido en su dominio. De momento, las series de potencias, que generalizan a los polinomios, se utilizarán en este capítulo para introducir las funciones elementales de variable compleja.

2.1. Series de números complejos

En esta sección se consideran series de números complejos a las que se extienden directamente los resultados clásicos referentes a series de números reales tales como la equivalencia entre la convergencia absoluta y la convergencia incondicional. La novedad de esta sección aparece en los asuntos que conciernen a la sumación de series dobles.

Con el fin de dar un tratamiento unificado de la sumación iterada de series dobles y del producto de convolución de series aquí se demuestra el teorema de sumación por paquetes del que es consecuencia inmediata la regla para sumar el producto de convolución de dos series absolutamente convergentes que utilizaremos luego para establecer fácilmente la ecuación funcional de la función exponencial (que lleva implícita toda la trigonometría). Por otra parte la sumación por paquetes permitirá justificar más adelante ciertas manipulaciones formales que se suelen hacer con las series de potencias, similares a las que habitualmente se hacen con los polinomios.

Asociado al valor absoluto se tiene definida la distancia $d(z,w) = |z-w|$ y un primer resultado fundamental es el hecho de que $(\mathbb{C}, d)$ es un espacio métrico completo, e.d. una sucesión de números complejos (z_n) es convergente si y sólo si verifica la *condición de Cauchy:* Para cada $\epsilon > 0$ existe $n(\epsilon) \in \mathbb{N}$ tal que

$$p, q \in \mathbb{N},\ p, q \geq n(\epsilon) \Rightarrow d(z_p, z_q) < \epsilon$$

En particular, una serie de números complejos $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ converge si y sólo si cumple la condición de Cauchy: Para cada $\epsilon > 0$ existe $n(\epsilon) \in \mathbb{N}$ tal que

$$q > p \geq n(\epsilon) \Rightarrow |\sum_{n=p}^{q} z_n| \leq \epsilon$$

Si $\sum_{n=1}^{\infty} |z_n| < +\infty$ se dice que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ es *absolutamente convergente.* Una consecuencia directa de la condición de Cauchy es que toda serie absolutamente convergente $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ es convergente y además $|\sum_{n=1}^{\infty} z_n| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |z_n|$. Una serie se dice que es *semiconvergente* cuando es convergente pero no es absolutamente convergente.

Cambiar el orden de los términos de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ consiste en considerar otra serie $\sum_{n=1}^{\infty} z_{\tau(n)}$ donde $\tau : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ es una biyección. Una serie se dice que es *incondicionalmente convergente* cuando es convergente y cualquier cambio del orden de sus términos no altera ni la convergencia ni el valor de la suma.

Para series de números reales es bien conocida la equivalencia entre la convergencia absoluta y la convergencia incondicional. En particular, si una serie de números reales positivos es convergente, sigue siendo convergente, con la misma suma, cuando se modifica el orden de sus términos. Considerando las dos series reales en que se descompone una serie compleja se obtiene fácilmente que para series de números complejos la convergencia absoluta y la convergencia incondicional también son equivalentes.

La convergencia incondicional permite dar sentido a sumas de números complejos del tipo $\sum_{j \in J} z_j$ donde J es un conjunto infinito numerable. Si los elementos de J se ordenan en sucesión utilizando una biyección $\tau : \mathbb{N} \to J$ es natural considerar la serie $\sum_{n=1}^{\infty} z_{\tau(n)}$.

Para que la suma $\sum_{j \in J} z_j$ tenga un sentido independientemente de la biyección τ se formula la siguiente definición:

Definición 2.1.1 *Si J es infinito numerable se dice que la suma $\sum_{j \in J} z_j$ es conmutativamente convergente con suma S si para cada biyección $\tau : \mathbb{N} \to J$ la serie $\sum_{n=1}^{\infty} z_{\tau(n)}$ es convergente y su suma es S*

Obsérvese que para $J = \mathbb{N}$ la convergencia conmutativa no es otra cosa que la convergencia incondicional.

Proposición 2.1.2 *Si J es infinito numerable una condición necesaria y suficiente para que la suma $\sum_{j \in J} z_j$ sea conmutativamente convergente es que esté acotado superiormente el conjunto de las sumas finitas*

$$\mathcal{S} = \{\sum_{j \in F} |z_j| : F \subset J \textit{ finito}\}$$

Dem: Si $\sum_{j \in J} z_j$ es conmutativamente convergente, dada una biyección $\tau : \mathbb{N} \to J$, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} z_{\tau(n)}$ es incondicionalmente convergentes y por lo tanto absolutamente convergente y $C := \sum_{n=1}^{\infty} |z_{\tau(n)}|$ es una cota superior del conjunto de las sumas finitas $\mathcal{S}$.

Recíprocamente, si M es una cota superior de $\mathcal{S}$, es cota superior del conjunto de las sumas parciales $\sum_{n=1}^{m} |z_{\tau(n)}|$, luego la serie $\sum_{n=1}^{\infty} z_{\tau(n)}$ es absolutamente convergente y por lo tanto incondicionalmente convergente, lo que significa que la suma $\sum_{j\in J} z_j$ es conmutativamente convergente. ■

Dada una suma conmutativamente convergente $\sum_{j\in J} z_j$, en virtud de 2.1.2, para cada $M \subset J$ la suma $\sum_{m\in M} z_m$ es conmutativamente convergente. En lo que sigue su valor será denotado S_M. En el caso $J = \mathbb{N}$, si $M \subset \mathbb{N}$ es infinito, a la hora de calcular la suma $\sum_{m\in M} z_m$ podemos considerar la biyección natural $\tau : \mathbb{N} \to M$ obtenida ordenando los elementos de M en sucesión creciente: Si $M = \{m_1 \le m_2 \le m_3 \cdots\}$ entonces $\tau(k) = m_k$. En este caso llamaremos secciones iniciales de M a los conjuntos finitos de la forma $C = \{m_1, m_2, \cdots m_n\}$ y abreviaremos la notación escribiendo $\sum_{m\in M} z_m = \lim_{C\nearrow M} \sum_{m\in C} z_m$ en lugar de $\sum_{m\in M} z_m = \lim_n \sum_{j=1}^n z_{m_j}$.

Teorema 2.1.3 *Si $\sum_{j\in J} a_j$ es conmutativamente convergente entonces vale la fórmula de sumación por paquetes: Si $\{J_k : k \in \mathbb{N}\}$ es una partición de J entonces la serie $\sum_{k=1}^\infty S_{J_k}$ es absolutamente convergente y se cumple*

$$\sum_{j\in J} a_j = \sum_{k=1}^\infty S_{J_k} = \sum_{k=1}^\infty \sum_{j\in J_k} a_j$$

DEM: Fijada una biyección $\tau : \mathbb{N} \to J$, sea $z_n = a_{\tau(n)}$. Es claro que la serie $\sum_{n=1}^\infty z_n$ es absolutamente convergente (por ser incondicionalmente convergente). Si $J_k = \tau(M_k)$ sea $S_k = \sum_{n\in M_k} z_n = S_{J_k}$. La serie $\sum_{k=1}^\infty S_k$ es absolutamente convergente porque $A = \sum_{n=1}^\infty |z_n|$ es una cota superior de las sumas parciales $\sum_{k=1}^m |S_k|$. Efectivamente, si C_k es una sección inicial de M_k es claro que $\sum_{k=1}^m \sum_{n\in C_k} |z_n| \le A$, y pasando al límite cuando $C_k \nearrow M_k$ se obtiene

$$\sum_{k=1}^m |S_k| \le \sum_{k=1}^m \sum_{n\in M_k} |z_n| \le A$$

Si $S' = \sum_{k=1}^\infty S_k$ y $S = \sum_{n=1}^\infty z_n$ hay que demostrar que $S = S'$. Para ello, dado $\epsilon > 0$ se obtiene $m \in \mathbb{N}$ tal que $\sum_{n=m+1}^\infty |z_n| < \epsilon$ y así $|S - \sum_{n=1}^m z_n| < \epsilon$. Si $p \in \mathbb{N}$ es suficientemente grande se puede asegurar que

$$|\sum_{k=1}^p S_k - S'| < \epsilon; \quad \text{y} \quad \{1, 2, 3, \cdots m\} \subset M_1 \cup M_2 \cup \cdots \cup M_p;$$

Para cada $k \in \{1, 2, 3, \cdots p\}$ existe una sección inicial C_k de M_k verificando

$$|\sum_{n\in C_k} z_n - S_k| < \epsilon/p; \quad \text{y} \quad \{1, 2, 3, \cdots m\} \subset C_1 \cup C_2 \cup \cdots \cup C_p;$$

Como todos los sumandos de la suma $\sum_{n=1}^m z_n$ aparecen en la suma $\sum_{k=1}^p \sum_{n\in C_k} z_n$

$$\left| \sum_{n=1}^m z_n - \sum_{k=1}^p \sum_{n\in C_k} z_n \right| \le \sum_{n=m+1}^\infty |z_n| < \epsilon$$

y entonces

$$|S - S'| \leq$$
$$\leq |S - \sum_{n=1}^{m} z_n| + |\sum_{n=1}^{m} z_n - \sum_{k=1}^{p} \sum_{n \in C_k} z_n| + |\sum_{k=1}^{p} \sum_{n \in C_k} z_n - \sum_{k=1}^{p} S_k| + |\sum_{k=1}^{p} S_k - S'| \leq$$
$$\leq \epsilon + \epsilon + p\epsilon/p + \epsilon = 4\epsilon$$

Como $\epsilon > 0$ es arbitrario se obtiene que $S = S'$. ■

El teorema anterior se podrá usar para dar fundamento a algunas manipulaciones formales que se suelen hacer con las series de potencias, similares a las que habitualmente se hacen con los polinomios. (véanse los ejercicios 4.14 y 5.11 en [17])

Corolario 2.1.4 *Sea $\{z_{nk} : (n, k) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}\}$ una sucesión doble en $\mathbb{C}$ tal que*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} |z_{nk}| < +\infty$$

Entonces la suma $\sum_{(p,q)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}} z_{pq}$ es conmutativamente convergente y su suma S se puede calcular mediante sumas iteradas: Para cada $n \in \mathbb{N}$ y cada $k \in \mathbb{N}$ las series $\sum_{k=1}^{\infty} z_{nk}$, $\sum_{n=1}^{\infty} z_{nk}$ son absolutamente convergentes y sus sumas forman series absolutamente convergentes que verifican

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} z_{nk} = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} z_{nk} = S$$

DEM: Como $C := \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} |z_{nk}|$ es una cota superior de las sumas finitas $\sum_{(p,q)\in F} |z_{pq}|$, la suma $\sum_{(p,q)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}} z_{pq}$ es conmutativamente convergente (2.1.2).

$J = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ es unión disjunta de los conjuntos $J_n = \{(n, k) : k \in \mathbb{N}\}$ y también es unión disjunta de los conjuntos $I_k = \{(n, k) : n \in \mathbb{N}\}$. Aplicando dos veces el teorema 2.1.3 de sumación por paquetes se concluye que la suma S coincide con la de las dos series iteradas, que son absolutamente convergentes. ■

Corolario 2.1.5 *Si las series $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ son absolutamente convergentes, su producto de convolución $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$, definido por $c_n = a_1 b_n + a_2 b_{n-1} + \cdots a_n b_1$, es una serie absolutamente convergente que verifica*

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n = \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n\right) \left(\sum_{n=1}^{\infty} b_n\right)$$

DEM: Es claro que $C := (\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|)(\sum_{k=1}^{\infty} |b_k|)$ es una cota superior de las sumas finitas $\sum_{(p,q)\in F} |a_p b_q|$ luego, en virtud de 2.1.2, la suma $\sum_{(p,q)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}} a_p b_q$ es conmutativamente convergente. Formando los paquetes considerados en 2.1.4 se obtiene el valor de la suma

$$S = (\sum_{n=1}^{\infty} a_n)(\sum_{n=1}^{\infty} b_n)$$

Por otra parte, si se aplica 2.1.3 con los paquetes $J_n = \{(p,q) : p+q = n+1\}$ resulta $S = \sum_{n=1}^{\infty} c_n$, ya que $\sum_{k \in J_n} a_p b_q = c_n$. ■

El resultado anterior lo completa el siguiente resultado

Teorema 2.1.6 [Mertens] *Sean $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ series convergentes de números complejos. Si una de ellas es absolutamente convergente entonces su producto de convolución $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$, donde $c_n = a_1 b_n + a_2 b_{n-1} + \cdots a_n b_1$, es convergente y*

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n = \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n\right)\left(\sum_{n=1}^{\infty} b_n\right)$$

DEM: Véase Teor. 8.46 en [2] ó ejerc. 1.18 en [17]. ■

a) Tomando como base la noción de familia sumable en el apéndice 2.8.1 se obtiene el teorema de sumación por paquetes 2.1.3 junto con la equivalencia entre convergencia absoluta y convergencia incondicional.
b) El teorema 8.42 del libro de Apostol [2] es una versión del teorema de sumación por paquetes para el caso de series dobles absolutamente convergentes. Los teoremas 8.43 y 8.44 del mismo libro aparecen aquí como 2.1.4 y 2.1.5.
c) El teorema de reordenación de Riemann, que se suele incluir en los textos básicos de cálculo, asegura que si una serie de números reales $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ es convergente pero no es absolutamente convergente entonces para cada $x \in \mathbb{R}$ existe una biyección $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tal que la serie reordenada $\sum_{n=1}^{\infty} x_{\sigma(n)}$ es convergente con suma x. El teorema no es cierto para series de números complejos pero subsiste la siguiente versión (véase [13] pág 30): Sea $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ una serie de números complejos no absolutamente convergente y $L \subset \mathbb{C}$ el conjunto de las sumas de sus reordenaciones convergentes. Entonces ocurre una de las tres alternativas: i) $L = \emptyset$; ii) L es una linea recta en $\mathbb{C}$; iii) $L = \mathbb{C}$.
d) No se puede garantizar que el producto de convolución de dos series convergentes produzca una serie convergente, pero se puede asegurar que es sumable Cesàro hacia el producto de las sumas.

2.2. Series de potencias

Definición 2.2.1 *Una serie de potencias compleja (resp. real) centrada en $a \in \mathbb{C}$ (resp. $a \in \mathbb{R}$) es una serie de la forma*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-a)^n$$

donde los coeficientes a_n son números complejos (resp. reales) y z es una variable compleja (resp. real).

Los resultados que se exponen a continuación, salvo mención expresa de lo contrario, se refieren siempre a series de potencias complejas. (También son válidos para series de potencias reales, con los cambios de nomenclatura pertinentes: Intervalo de convergencia en lugar de disco de convergencia, etc..).

Proposición 2.2.2 *Dada la serie de potencias* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-a)^n$ *el conjunto*

$$E := \{r \geq 0 : \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| r^n < +\infty\}$$

es un subintervalo de $[0,+\infty]$ *cuyo extremo superior* $\rho \in [0,+\infty]$ *es el único número que satisface las dos propiedades siguientes:*

i) $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-a)^n$ *no converge si* $|z-a| > \rho$*;*

ii) $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-a)^n$ *converge absolutamente si* $|z-a| < \rho$*;*

La serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-a)^n$ *converge uniformemente sobre cada disco compacto* $\overline{D(a,r)} \subseteq D(a,\rho)$*.*

DEM: Es obvio que $0 \in E$ y que si $r \in E$ entonces $[0,r] \subset E$, por lo que E es un subintervalo de $[0,+\infty]$. Sea $\rho := \sup E \leq +\infty$.

i) Si $|z-a| > \rho$ se obtiene que la serie no converge viendo que la sucesión $|a_n(z-a)^n|$ no es acotada: Efectivamente, si estuviese acotada por $C > 0$, eligiendo $\rho < r < |z-a|$ se tendría $|a_n|r^n = |a_n||z-a|^n R^n$, donde $R = r/|z-a| < 1$, luego

$$|a_n|r^n \leq CR^n \quad \text{para todo} \quad n \in \mathbb{N}$$

Como la serie de término general CR^n es convergente (pues $R < 1$) se obtendría que $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|r^n < +\infty$ lo que contradice la elección de $r > \rho$.

ii) Si $|z-a| < \rho$, por la definición de $\rho = \sup E$, existe $r \in E$ tal que $|z-a| < r < \rho$ luego

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n||z-a|^n \leq \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|r^n < +\infty$$

Finalmente, si $r < \rho$, para todo $z \in \overline{D(a,r)}$ se cumple la desigualdad anterior y aplicando el criterio de Weierstrass 2.8.18 se obtiene la convergencia uniforme sobre $\overline{D(a,r)}$. ■

Definición 2.2.3 *El número* $\rho \in [0,+\infty]$ *asociado, por la proposición anterior, a la serie de potencias* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-a)^n$ *se llama* radio de convergencia *de la serie.*

Proposición 2.2.4 *Si* ρ *es el radio de convergencia de* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-a)^n$ *y* $L = \overline{\lim}_n \sqrt[n]{|a_n|}$ *se verifica:*

a) $\rho = 1/L$ *(con el convenio habitual* $1/0 = +\infty$*, y* $1/+\infty = 0$*).*

b) $\rho = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$ *cuando este límite existe.*

DEM: a) El criterio de la raíz aplicado a la serie de números reales no negativos $\sum_{n=1}^{\infty} a_n r^n$ con $r > 0$ dice que si $\alpha := \overline{\lim}_n \sqrt[n]{|a_n| r^n} = rL < 1$ (resp. > 1) entonces la serie converge (resp. no converge). Si $L = 0$ (resp. $L = +\infty$) se sigue que para todo $r > 0$ es $\alpha = 0$, (resp. $\alpha = +\infty$) y por lo tanto la serie $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| r^n$ converge (resp. no converge) para todo $r > 0$ lo que significa que $\rho = +\infty$ (resp. $\rho = 0$).

Por otra parte, si $0 < L < +\infty$ la conclusión es que $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| r^n$ converge para $r < 1/L$ y no converge para $r > 1/L$, luego $\rho = 1/L$.

Razonando en forma similar, pero con el criterio del cociente se deduce b). ■

En relación con las fórmulas a) y b) de 2.2.4 conviene recordar que si $L = 1/\rho$ se tiene

$$\underline{\lim}_n \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \leq \underline{\lim}_n \sqrt[n]{|a_n|} \leq L = \overline{\lim}_n \sqrt[n]{|a_n|} \leq \overline{\lim}_n \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$$

En general no se puede decir nada acerca de la convergencia de una serie de potencias sobre los puntos de la frontera del disco de convergencia como se pone de manifiesto con los siguientes ejemplos

Ejemplos 2.2.5 *Las siguientes series de potencias tienen radio de convergencia $\rho = 1$.*

$$\sum_{n=1}^{\infty} z^n; \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^2}; \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n};$$

La primera serie no converge en ningún z con $|z| = 1$, la segunda converge en todo z con $|z| = 1$ y la tercera diverge para $z = 1$ y converge cuando $|z| = 1$ y $z \neq 1$. La última afirmación se puede justificar con 2.8.19. En el ejercicio 2.31 se muestra una serie de potencias, centrada en 0, con radio de convergencia 1, tal que el conjunto de los puntos de la circunferencia $|z| = 1$ donde la serie converge (resp. diverge) es denso en la circunferencia.

Si $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-a)^n$ es una serie de potencias con radio de convergencia $\rho \in (0, +\infty]$, en virtud de 2.2.2 la serie converge uniformemente sobre compactos en $D(a, \rho)$ y aplicando el teorema 2.8.17 se obtiene que su suma

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-a)^n \quad \text{para } z \in D(a, \rho)$$

define una función continua en el disco de convergencia $D(a, \rho)$. Este hecho, combinado con el siguiente teorema, que tiene interés por si mismo, permitirá demostrar en 2.3.4 la derivabilidad de la función definida por una serie de potencias.

Teorema 2.2.6 *Si $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-a)^n$ es la función definida en $D(a, \rho)$ por una serie de potencias con radio de convergencia $\rho > 0$, entonces para cada $b \in D(a, \rho)$ existe una serie de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} b_n (z-b)^n$, con radio de convergencia $\rho_b \geq \rho - |b-a|$, tal que*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (z-b)^n \quad si \quad |z-b| < \rho - |b-a|,$$

Los coeficientes b_n se pueden obtener, a partir de los a_n, como las sumas de las series absolutamente convergentes

$$b_n = \sum_{m=n}^{\infty} \binom{m}{n} a_m (b-a)^{m-n}$$

DEM: Si $z \in D(a, \rho)$, usando la fórmula del binomio de Newton

$$f(z) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m[(z-b)+(b-a)]^m = \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{m} a_m \binom{m}{n}(z-b)^n(b-a)^{m-n} = \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} C_m(n)$$

donde $C_m(n) = a_m\binom{m}{n}(z-b)^n(b-a)^{m-n}$ si $0 \le n \le m$ y $C_m(n) = 0$ si $n > m$.

Si $|z-b| < \rho - |b-a|$ usando que $r := |z-b| + |b-a| < \rho$ se obtiene

$$\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} |C_m(n)| = \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{m} |a_m| \binom{m}{n} |z-b|^n |b-a|^{m-n} =$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty} |a_m|[|z-b| + |b-a|]^m = \sum_{m=0}^{\infty} |a_m| r^m < +\infty$$

Aplicando el corolario 2.1.4

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty} C_m(n) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m\ge n} C_m(n) = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{m\ge n} a_m\binom{m}{n}(b-a)^{m-n}\right)(z-b)^n$$

donde todas las series involucradas son absolutamente convergentes. Con esto queda probado que todas las series

$$b_n = \sum_{m\ge n} a_m \binom{m}{n}(b-a)^{m-n}$$

son absolutamente convergentes y que en el disco $D(b, \rho - |b-a|) \subset D(a, \rho)$ la función f admite el desarrollo

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n(z-b)^n$$

Por consiguiente el radio de convergencia ρ_b de esta serie debe cumplir $\rho_b \ge \rho - |b-a|$. ■

La nueva serie de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} b_n(z-b)^n$ obtenida en el teorema anterior se dice que es una *reordenación* de $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-a)^n$ alrededor del punto b. Puede ocurrir que el radio de convergencia ρ_b de la serie reordenada verifique $\rho_b > \rho - |b-a|$ de modo que la nueva serie sea convergente en puntos donde la serie inicial $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-a)^n$ no lo era. (véase el ejemplo 2.3.7).

2.3. Derivación compleja

Definición 2.3.1 *Una función compleja de variable compleja $f : \Omega \to \mathbb{C}$, definida en un abierto $\Omega \subset \mathbb{C}$, se dice que es derivable (en sentido complejo) en $a \in \Omega$ si existe el límite*

$$\lim_{z \to a} \frac{f(z) - f(a)}{z - a} = f'(a)$$

en cuyo caso se dice que $f'(a)$ es la derivada de f en a.

Para las funciones complejas de variable compleja se verifican los resultados usuales del cálculo diferencial: La derivabilidad de una función en un punto implica su continuidad en el punto; valen las reglas usuales para el cálculo de derivadas de sumas y productos y la regla de la cadena para la derivada de la composición de dos funciones derivables, $f \circ g$, donde g es de variable real o de variable compleja, con valores en el dominio de f.

Definición 2.3.2 *Si $f : \Omega \to \mathbb{C}$ es derivable en todos los puntos de un abierto $\Omega \subset \mathbb{C}$ se dice que f es* holomorfa *en Ω. A las funciones definidas y holomorfas en todo $\mathbb{C}$ se les llama* funciones enteras*.*

El conjunto de las funciones holomorfas en Ω, denotado $\mathcal{H}(\Omega)$, es un álgebra sobre el cuerpo $\mathbb{C}$, contenida en el álgebra de las funciones continuas $C(\Omega)$. Se sigue de esto que los polinomios complejos son funciones enteras y para ellos vale la fórmula usual de la derivada: Si $p(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots a_n z^n$ entonces $p'(z) = a_1 + 2a_2 z + \cdots n a_n z^{n-1}$.

Proposición 2.3.3 *Si f es holomorfa en un abierto conexo Ω y $f'(z) = 0$ para cada $z \in \Omega$ entonces f es constante.*

DEM: Basta demostrar que, fijado $b \in \Omega$, el conjunto no vacío $G := \{z \in \Omega : f(z) = f(b)\}$ es abierto y cerrado respecto al espacio conexo Ω, pues entonces se tendrá que $\Omega = G$, y con ello que f es constante.

Como f es continua es inmediato que G es cerrado relativo a Ω. G también es abierto relativo a Ω: Dado $a \in G$ si $r > 0$ es tal que $D(a, r) \subset \Omega$ entonces $D(a, r) \subset G$. Efectivamente, dado $z \in D(a, r)$ el segmento $\sigma(t) = a + t(z - a)$, $0 \leq t \leq 1$, está contenido en $D(a, r) \subset \Omega$ luego la función compuesta $h(t) = f(\sigma(t))$ está definida para $t \in [0, 1]$. Como $h'(t) = f'(\sigma(t))\sigma'(t) = 0$ para todo $t \in [0, 1]$ se sigue que h es constante, de modo que $h(1) = h(0)$, es decir $f(z) = f(a) = f(b)$ luego $z \in G$. ■

Teorema 2.3.4 *La función definida por una serie de potencias $f(z) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - a)^n$ con radio de convergencia $\rho > 0$ es holomorfa en su disco de convergencia $z \in D(a, \rho)$, y vale la regla de derivación término a término:*

$$f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (z - a)^{n-1}$$

y el radio de convergencia de la serie derivada sigue siendo ρ.

DEM: Fijado $b \in D(a,\rho)$, si $|z-b| < r_b = \rho - |b-a|$, en virtud de 2.2.6 se tiene

$$\frac{f(z)-f(b)}{z-b} = \sum_{n=1}^{\infty} b_n (z-b)^{n-1}$$

La serie de potencias $g(z) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n(z-b)^{n-1}$ converge en $D(b,\rho_b)$ donde define una función continua, luego

$$\lim_{z \to b} g(z) = g(b) = b_1 = \sum_{m=1}^{\infty} m a_m (b-a)^{m-1}$$

lo que prueba que f es derivable en $z = b$ con

$$f'(b) = \sum_{m=1}^{\infty} m a_m (b-a)^{m-1}$$

donde esta serie, en la variable b, converge absolutamente para todo $b \in D(a,\rho)$. Por lo tanto, su radio de convergencia ρ' cumple $\rho \leq \rho'$. Para demostrar que $\rho = \rho'$ basta ver que $r < \rho' \Rightarrow r \leq \rho$. Efectivamente, si $r < \rho'$ entonces $\sum_{n=1}^{\infty} n|a_n|r^{n-1} < +\infty$ luego $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|r^n \leq |a_0| + \sum_{n=1}^{\infty} n|a_n|r^n < +\infty$ y por consiguiente $r \leq \rho$. ■

Corolario 2.3.5 *En las condiciones del teorema anterior la función holomorfa f definida por la serie de potencias es indefinidamente derivable, sus derivadas sucesivas se obtienen derivando sucesivamente la serie término a término y*

$$a_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!} \qquad \textit{para todo } n \geq 0$$

DEM: En virtud del teorema 2.3.4 es $f'(a) = a_1$. Volviendo a aplicar el teorema 2.3.4 a la serie de potencias

$$f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (z-a)^{n-1}$$

resulta

$$f''(z) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n (z-a)^{n-2}$$

y en particular $f''(a) = 2a_2$. Procediendo de modo recurrente se obtiene $f^{(n)}(a) = n! a_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. ■

Obsérvese que, en virtud del corolario 2.3.5 los coeficientes a_n del desarrollo en serie de potencias de una función f en un punto quedan unívocamente determinados por la restricción de la función a un entorno, tan pequeño como se quiera, del punto. Una consecuencia inmediata de esta observación es:

Corolario 2.3.6 *Si $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, definida en $D(0,\rho)$ es una función par (resp. impar) entonces $a_n = 0$ cuando n es impar (resp. par).*

Dem: $2a_1z + 2a_3z^3 + \cdots + 2a_{2n+1}z^{2n+1} + \cdots$ es el desarrollo en serie de potencias de la función $f(z)-f(-z)$. Cuando f es par, esta función es idénticamente nula, y 2.3.5 implica que todos sus coeficientes son nulos. Análogamente se razona cuando f es impar. ■

Ejemplo 2.3.7 *Serie geométrica:*

El radio de convergencia de la serie geométrica $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ es $\rho = 1$. Usando la identidad $(1-z)(1+z+z^2+\cdots+z^n) = 1-z^{n+1}$ se deduce

$$\sum_{n=1}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z} \text{ si } |z| < 1$$

La función $1/(z-1)$ también admite un desarrollo en serie geométrica alrededor de cualquier punto $b \neq 1$ pues escribiéndola en la forma

$$\frac{1}{1-z} = \frac{1}{(1-b)}\frac{1}{1-\left(\frac{z-b}{1-b}\right)}$$

y tomando $|z-b| < |1-b|$ se puede considerar el desarrollo

$$\frac{1}{1-z} = \frac{1}{1-b}\left(1 + \frac{z-b}{1-b} + \left(\frac{z-b}{1-b}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{z-b}{1-b}\right)^n + \cdots\right)$$

donde el valor absoluto de la razón es < 1. Si $b_n = (1-b)^{-(n+1)}$ se obtiene

$$\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} b_n(z-b)^n \text{ si } |z-b| < |1-b|$$

Cuando $|b| < 1$, en virtud de la unicidad de los coeficientes de un desarrollo en serie de potencias, la última serie debe coincidir con la obtenida reordenando $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ alrededor de b (véase 2.2.6). Obsérvese que, de acuerdo con 2.3.5, se tiene $b_n = f^{(n)}(b)/n!$, donde $f(z) = 1/(1-z)$, y que el radio de convergencia de la serie reordenada es $\rho_b = |1-b|$.

Es claro que para $b \notin [0,1)$ se verifica $\rho_b > 1-|b|$, luego, en este caso, el disco de convergencia de la serie reordenada no está contenido en el disco de convergencia de la serie inicial. Esto significa que $z = 1$ es el único punto singular de la serie geométrica (en el ejercicio 2.34 se puede ver la definición de punto singular). Este hecho se puede contemplar como caso particular del resultado considerado en el ejercicio 2.35.

Series de Laurent. Estas series, que engloban a las series de potencias, proporcionan funciones holomorfas en coronas circulares. En lo que sigue

$$A(a; r, R) = \{z \in \mathbb{C} : r < |z-a| < R\}$$

denotará la *corona circular* abierta centrada en $a \in \mathbb{C}$ de radios r y R, $0 \leq r < R \leq +\infty$. Obsérvese que estas coronas incluyen como caso particular a los discos perforados $D^*(a,R) = A(a;0,R)$, $D^*(\infty,r) = A(0;1/r,+\infty)$.

Una *serie de Laurent* centrada en el punto $a \in \mathbb{C}$ es una serie de la forma

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n(z-a)^n$$

donde $a_n \in \mathbb{C}$ para cada $n \in \mathbb{Z}$. La serie se considera convergente en aquellos puntos $z \in \mathbb{C}$ donde convergen simultáneamente las dos series

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(z-a)^n; \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_{-n}}{(z-a)^n};$$

Si R y $1/r$ son los radios de convergencia de $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(z-a)^n$ y $\sum_{n=1}^{+\infty} a_{-n}w^n$ respectivamente, y se cumple que $0 \leq r < R \leq +\infty$ entonces la serie de Laurent converge en la corona $A(a;r,R) = \{z : r < |z-a| < R\}$ llamada corona de convergencia.

La serie de Laurent define en su corona de convergencia una función holomorfa

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n(z-a)^n$$

que se descompone en suma de dos funciones holomorfas $f(z) = f_{-1}(z) + f_1(z)$ donde

$$f_{-1}(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_{-n}}{(z-a)^n} \text{ es holomorfa en } \{z : r < |z-a|\}$$

$$f_1(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n(z-a)^n \text{ es holomorfa en } \{z : |z-a| < R\}$$

Obsérvese que $f_{-1}(z) = h(1/(z-a))$ donde $h(w) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_{-n}w^n$, luego f_{-1} es holomorfa y $\lim_{z\to\infty} f_{-1}(z) = 0$. Más adelante se verá que, bajo estas condiciones, la descomposición es única (véase el lema 5.2.6).

Proposición 2.3.8 *Si $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n(z-a)^n$ es una serie de Laurent convergente en la corona $\{z : r < |z-a| < R\}$ se verifica*

a) La serie converge uniformemente sobre compactos en la corona de convergencia y la función suma f es holomorfa en dicha corona.

b) La derivada f' admite un desarrollo de Laurent, con la misma corona de convergencia, que coincide con el obtenido derivando la serie inicial término a término.

Dem: a) El radio de convergencia de la serie $h(w) = \sum_{n=1}^{\infty} a_{-n}w^n$ es $1/r$ y por lo tanto, para cada $\rho > r$, la serie converge uniformemente sobre $\overline{D(0,1/\rho)} \subset D(0,1/r)$. Con la sustitución $w = 1/(z-a)$ se deduce que $\sum_{n=1}^{\infty} a_{-n}(z-a)^{-n}$ converge uniformemente sobre $\{z : |z-a| \geq \rho\}$. Por otra parte, si $\rho' < R$ la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-a)^n$ converge uniformemente sobre $\{z : |z-a| \leq \rho'\}$. Por consiguiente la serie de Laurent converge uniformemente sobre la corona compacta $\{z : \rho \leq |z-a| \leq \rho'\}$ (también converge uniformemente sobre un

compacto arbitrario $K \subset \{z : r < |z-a| < R\}$, porque K está contenido en una de estas coronas compactas). Es claro que la función $f(z) = h(1/(z-a)) + \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-a)^n$ es holomorfa en $\{z : r < |z-a| < R\}$, y así queda establecido a).
b) La corona de convergencia de la serie derivada sigue siendo la misma como consecuencia de la última afirmación de 2.3.4. Utilizando 2.3.4 y la regla de la cadena:

$$f'(z) = h'\left(\frac{1}{z-a}\right)\left(\frac{-1}{(z-a)^2}\right) + \sum_{n=1}^{\infty} na_n(z-a)^{n-1} =$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} na_{-n}\left(\frac{1}{z-a}\right)^{n-1}\left(\frac{-1}{(z-a)^2}\right) + \sum_{n=1}^{\infty} na_n(z-a)^{n-1} =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} -na_{-n}(z-a)^{-n-1} + \sum_{n=1}^{\infty} na_n(z-a)^{n-1} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} na_n(z-a)^{n-1}$$

■

2.3.1. Las ecuaciones de Cauchy-Riemann.

Las funciones holomorfas que han aparecido hasta ahora han sido definidas mediante fórmulas en términos de la variable independiente z. Las fórmulas admisibles para producir funciones holomorfas son aquellas que sólo utilizan la estructura algebraica y topológica de $\mathbb{C}$, como ocurre con las series de potencias. Estas fórmulas paradigmáticas son las piezas con las se construye el edificio teórico. Veremos en el siguiente capítulo que también se pueden incorporar a las fórmulas admisibles nuevos símbolos que designan a las funciones elementales y a las ramas de sus inversas, como $\sqrt{\ }$, Log.

Si una función, $f : \Omega \to \mathbb{C}$, en vez de venir dada por una fórmula de este tipo, en términos de la variable compleja z, viene dada explícitamente mediante sus componentes $u(x,y) = \operatorname{Re} f(x+iy)$, $v(x,y) = \operatorname{Im} f(x+iy)$ en términos de las dos variables reales x, y, (p.e. $f(x,y) = x\cos y + iy^2e^x$) conviene disponer de un criterio cómodo y útil para saber si f es holomorfa. Suponiendo identificado $\mathbb{C}$ con $\mathbb{R}^2$, el objetivo es reconocer a las funciones holomorfas entre las aplicaciones diferenciables $f : \Omega \to \mathbb{R}^2$ donde Ω es un subconjunto abierto de $\mathbb{R}^2$.

Funciones diferenciables. Toda función $f : \Omega \to \mathbb{C}$, definida en un abierto $\Omega \subset \mathbb{C}$, se puede contemplar como una función de dos variables reales (x,y) con valores en $\mathbb{R}^2$, y as¡ se puede considerar la noción de usual de diferenciabilidad (en sentido real): Recuérdese que f es *diferenciable* en el punto $a \in \Omega$ si existe una aplicación lineal $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tal que

$$f(a+h) - f(a) = L(h) + |h|\epsilon(h)$$

donde $\lim_{h\to 0} \epsilon(h) = 0$. En este caso se dice que L es la diferencial de f en a y se escribe $L = df(a)$. La matriz de la diferencial $df(a)$ respecto de la base canónica de $\mathbb{R}^2$ es la matriz jacobiana

$$\begin{pmatrix} D_1u(a) & D_2u(a) \\ D_1v(a) & D_2v(a) \end{pmatrix}$$

donde $u(x,y) = \operatorname{Re} f(x+iy)$ y $v(x,y) = \operatorname{Im} f(x+iy)$.

La diferenciabilidad de f en el punto $a \in \Omega$ equivale a la diferenciabilidad, en este punto, de sus dos componentes u, v, siendo $du(a), dv(a)$ las componentes de $df(a)$, es decir, para todo $h = (h_1, h_2) \in \mathbb{R}^2$ se tiene $df(a)h = du(a)h + idv(a)h$.

Como $du(a)h = D_1u(a)h_1 + D_2u(a)h_2$ y $dv(a)h = D_1v(a)h_1 + D_2v(a)h_2$ resulta

$$df(a)h = D_1f(a)h_1 + D_2f(a)h_2$$

donde $D_1f(a) = D_1u(a) + iD_1v(a)$ y $D_2f(a) = D_2u(a) + iD_2v(a)$.

Aplicaciones $\mathbb{C}$-lineales. Antes de seguir conviene hacer algunas consideraciones elementales de tipo algebraico.

Dada una aplicación lineal $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ en virtud de la identificación de $\mathbb{R}^2$ con $\mathbb{C}$, si $z = x + iy$ frecuentemente se escribirá $L(z)$ en lugar de $L((x,y))$. En particular, se escribirá $L(1)$ en vez de $L((1,0))$ y $L(i)$ en lugar de $L((0,1))$.

Se dice que una aplicación lineal $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ es $\mathbb{C}$-lineal si conmuta con la multiplicación compleja:

$$L(\lambda z) = \lambda L(z) \text{ para todo } \lambda, z \in \mathbb{C}$$

Mediante la multiplicación compleja, a cada $\mu = \alpha + i\beta \in \mathbb{C}$ se le puede asociar la aplicación lineal $L_\mu : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, dada por $L_\mu(x,y) = (\alpha x - \beta y, \alpha y + \beta x)$ es decir, $L_\mu(z) = \mu z$ cuando $z = x + iy$ se identifica con (x,y). La condición de que L sea $\mathbb{C}$-lineal significa que $L \circ L_\lambda = L_\lambda \circ L$ para todo $\lambda \in \mathbb{C}$.

Proposición 2.3.9 *Si $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ es una aplicación $\mathbb{R}$-lineal de matriz $\begin{pmatrix} \alpha & \gamma \\ \beta & \delta \end{pmatrix}$ con $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$. son equivalentes:*
a) $L = L_\mu$ para algún $\mu \in \mathbb{C}$; b) L es $\mathbb{C}$-lineal; c) $L(i) = iL(1)$; d) $\alpha = \delta$ y $\beta = -\gamma$;

Dem: a) $\Rightarrow$ b) $\Rightarrow$ c) es inmediato. La implicación c) $\Rightarrow$ d) se obtiene teniendo en cuenta que $iL(1) = iL((1,0)) = i(\alpha, \beta) = i(\alpha + i\beta) = -\beta + i\alpha$ y que $L(i) = L((0,1)) = (\gamma, \delta) = \gamma + i\delta$. Finalmente, para ver que d) $\Rightarrow$ a) basta tomar $\mu = \alpha + i\beta$. ■

Teorema 2.3.10 *Dada una función $f : \Omega \to \mathbb{C}$, definida en un abierto $\Omega \subset \mathbb{C}$, y $a \in \Omega$, son equivalentes:*

a) f es derivable en a (en sentido complejo).

b) f es diferenciable en a y $df(a)$ es $\mathbb{C}$-lineal.

c) f es diferenciable en a y sus componentes $u = \operatorname{Re} f$, $v = \operatorname{Im} f$ satisfacen las ecuaciones de Cauchy-Riemann: $D_1u(a) = D_2v(a)$; $D_2u(a) = -D_1v(a)$.

Si f es derivable en a, se tiene $df(a)(h) = f'(a)h$ y $f'(a) = D_1u(a) + iD_1v(a)$.

DEM: b) $\Leftrightarrow$ c) en virtud de la proposición 2.3.9.
a) $\Rightarrow$ b) La hipótesis es que

$$\delta(h) = \frac{f(a+h) - f(a)}{h} - f'(a)$$

tiende hacia 0 cuando $|h| \to 0$. Entonces

$$f(a+h) - f(a) - f'(a)h = h\delta(h) = |h|\epsilon(h)$$

donde $\epsilon(h) = \delta(h)h/|h|$ tiende hacia 0 cuando $h \to 0$. Esto significa que f es diferenciable en a y que su diferencial es la aplicación $\mathbb{C}$-lineal $h \to df(a)h = f'(a)h$.
b) $\Rightarrow$ a) Ahora se supone que $f(a+h) - f(a) - df(a)h = |h|\epsilon(h)$ donde $\epsilon(h) \to 0$ cuando $h \to 0$ y que $df(a)$ es de la forma $df(a)h = \mu h$ para algún $\mu \in \mathbb{C}$. Entonces

$$\frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \mu + \frac{|h|}{h}\epsilon(h)$$

tiende hacia μ cuando $h \to 0$, es decir f es derivable en a y $f'(a) = \mu$.

Nótese que si se cumple alguna de las condiciones equivalentes del enunciado entonces

$$f'(a) = df(a)(1,0) = D_1u(a) + iD_1v(a) = D_1u(a) - iD_2u(a)$$

■

Corolario 2.3.11 *Sea $f : \Omega \to \mathbb{C}$ una función tal que en un entorno V de $a \in \Omega$ sus componentes $u(x,y) = \operatorname{Re} f(x+iy)$, $v(x,y) = \operatorname{Im} f(x+iy)$ poseen derivadas parciales $D_1u(x,y)$, $D_2u(x,y)$, $D_1v(x,y)$, $D_2v(x,y)$. Si estas derivadas parciales son continuas en a y verifican las ecuaciones de Cauchy-Riemann:*

$$D_1u(a) = D_2v(a); \qquad D_2u(a) = -D_1v(a);$$

Entonces f es derivable (en sentido complejo) en a. En particular si f es de clase C^1 en Ω y satisface las ecuaciones de Cauchy-Riemann en todo punto $a \in \Omega$ entonces f es holomorfa en Ω.

DEM: Por un resultado bien conocido del cálculo diferencial la hipótesis de existencia y continuidad en a de las derivadas parciales garantiza que u y v son diferenciables en a. Por lo tanto f es diferenciable en a y basta aplicar 2.3.10 ■

Después del teorema 2.3.10 es fácil dar ejemplos de aplicaciones diferenciables no holomorfas: La función $f(x+iy) = y^2$ sólo es derivable en sentido complejo en los puntos del eje real, y por lo tanto no es holomorfa en ningún abierto del plano complejo.

A las funciones holomorfas en un abierto $\Omega \subset \mathbb{C}$, por ser diferenciables, se les pueden aplicar los resultados usuales del cálculo diferencial de funciones de dos variables reales. As¡ por ejemplo, si f es holomorfa en un abierto conexo Ω y $f'(z) = 0$ para cada $z \in \Omega$ entonces f es constante (resultado que ya ha sido obtenido directamente en 2.3.3)

Funciones anti-holomorfas. Una clase importante de funciones directamente relacionadas con las holomorfas son las llamadas anti-holomorfas. Son las de la forma $g(z) = \overline{f(z)}$ donde $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ es holomorfa. Estas funciones, si no son constantes y su dominio es conexo nunca son holomorfas. Si $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ entonces $\overline{f(\overline{z})}$ es holomorfa en $\Omega^- = \{\overline{z} : z \in \Omega\}$, y por lo tanto $f(\overline{z})$ es anti-holomorfa ([17] ejerc. 3.26).

Una base adecuada para las aplicaciones lineales. Sea $\mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ el espacio vectorial real de las aplicaciones lineales de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}$. La base canónica de este espacio vectorial es la formada por las proyecciones

$$dx : (x, y) \to x, \quad dy : (x, y) \to y,$$

Las coordenadas de $du(a)$ y $dv(a)$ respecto a esta base son sus derivadas parciales

$$du(a) = D_1u(a)dx + D_2u(a)dy, \quad dv(a) = D_1v(a)dx + D_2v(a)dy,$$

Por otra parte, el conjunto $\mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$ formado por las aplicaciones lineales $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ es un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$ de dimensión 4, pero aquí conviene considerarlo como un espacio vectorial de dimensión 2 sobre $\mathbb{C}$, con la ley externa $\mathbb{C} \times \mathcal{L}(\mathbb{R}^2) \to \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$ dada por $(\mu L)(h) = \mu \cdot L(h)$, (e.d $\mu L = L_\mu \circ L$).

Identificando $\mathbb{R}$ con un subconjunto de $\mathbb{C}$, se puede considerar que las proyecciones dx y dy toman valores en $\mathbb{C}$, y con ello que pertenecen al espacio vectorial complejo $\mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$ del cual constituyen una base.

Si la matriz de $L \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$ es $\begin{pmatrix} \alpha & \gamma \\ \beta & \delta \end{pmatrix}$ y $h = (h_1, h_2) \in \mathbb{R}^2$ se tiene

$$L(h) = (\alpha h_1 + \gamma h_2, \beta h_1 + \delta h_2)$$

que en forma compleja se escribe

$$L(h) = (\alpha h_1 + \gamma h_2) + i(\beta h_1 + \delta h_2) = (\alpha + i\beta)h_1 + (\gamma + i\delta)h_2$$

luego $L(h) = (pdx + qdy)(h)$, donde $p = \alpha + i\beta$ y $q = \gamma + i\delta$. Es decir,

$$L = pdx + qdy$$

donde las coordenadas de L respecto a la base $\{dx, dy\}$ son los números complejos $p = \alpha + i\beta$, $q = \gamma + i\delta$, formados con las columnas de la matriz de L.

Otra base del espacio vectorial complejo $\mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$, más adecuada para representar aplicaciones $\mathbb{C}$-lineales, es la formada por la pareja de aplicaciones lineales

$$dz : (x, y) \to (x, y); \qquad d\overline{z} : (x, y) \to (x, -y);$$

Como $L(h) = ph_1 + qh_2 = p\dfrac{h + \overline{h}}{2} + q\dfrac{h - \overline{h}}{2i} = \dfrac{p - iq}{2}h + \dfrac{p + iq}{2}\overline{h}$ resulta

$$L = rdz + sd\overline{z} \ \text{ donde } \ r = \frac{p - iq}{2}, \ \text{ y } \ s = \frac{p + iq}{2}$$

Es decir, las coordenadas de L respecto a la base $\{dz, d\overline{z}\}$ son los números complejos

$$r = (\alpha + \delta + i\beta - i\gamma)/2; \quad s = (\alpha - \delta + i\beta + i\gamma)/2.$$

El interés de la base $\{dz, d\overline{z}\}$ reside en que $L = rdz + sd\overline{z}$ es $\mathbb{C}$ lineal si y sólo si $s = 0$.

La representación de $L = df(a)$, en términos de la base $\{dx, dy\}$ es

$$df(a) = D_1 f(a)dx + D_2 f(a)dy$$

y en términos de la base $\{dz, d\overline{z}\}$ es

$$df(a) = \partial f(a)dz + \bar{\partial} f(a)d\bar{z}$$

donde

$$\partial f(a) = \frac{D_1 f(a) - iD_2 f(a)}{2} = \frac{1}{2}(D_1 u(a) + D_2 v(a) + iD_1 v(a) - iD_2 u(a))$$

$$\overline{\partial} f(a) = \frac{D_1 f(a) + iD_2 f(a)}{2} = \frac{1}{2}(D_1 u(a) - D_2 v(a) + iD_1 v(a) + iD_2 u(a))$$

Para las coordenadas de $df(a)$ respecto a la base $\{dz, d\overline{z}\}$ se suele adoptar la notación:

$$\frac{\partial f}{\partial z}(a) = \partial f(a); \qquad \frac{\partial f}{\partial \overline{z}}(a) = \overline{\partial} f(a);$$

y con ella las condiciones de Cauchy-Riemann en el punto a se expresan en forma condensada mediante la condición

$$\frac{\partial f}{\partial \overline{z}}(a) = 0$$

Si f es derivable en a no sólo se cumple que $\overline{\partial} f(a) = 0$, sino que $\partial f(a) = f'(a)$.

Resulta que una función diferenciable $f : \Omega \to \mathbb{C}$ es holomorfa si y sólo si $\dfrac{\partial f}{\partial \overline{z}}(a) = 0$ para todo $a \in \mathbb{C}$, lo que se suele interpretar diciendo que f no depende de $\overline{z}$, es decir,

$$f^*(z, \overline{z}) = u\left(\frac{z + \overline{z}}{2}, \frac{z - \overline{z}}{2i}\right) + iv\left(\frac{z + \overline{z}}{2}, \frac{z - \overline{z}}{2i}\right)$$

no depende de $\overline{z}$.

Por otra parte, las funciones anti-holomorfas en Ω se caracterizan como las funciones f que son diferenciables en Ω y cumplen $\dfrac{\partial f}{\partial z}(a) = 0$ para todo $a \in \Omega$. Es decir son las funciones que sólo dependen de $\overline{z}$.

2.4. Representación gráfica de funciones

En esta sección se describen algunos procedimientos gráficos que se suelen utilizar en la teoría de las funciones complejas de variable compleja. La gráfica de una función compleja de variable compleja $w = f(z)$ es un subconjunto de $\mathbb{C}^2$, que tiene dimensión 4 como espacio vectorial real, y no es posible visualizarla como en el caso de las funciones reales de una o dos variables reales. Sin embargo se pueden considerar distintas alternativas para representaciones gráficas que permitan visualizar propiedades de la función.

Una alternativa, que puede ser útil para localizar ceros de f consiste en considerar la gráfica de la función $|f(x+iy)|$, llamada superficie modular de f.

Pero la alternativa más apropiada consiste en considerar dos copias del plano complejo. En una de ellas, que llamaremos plano z, o plano (x,y), se mueve la variable independiente $z=x+iy$ y en la otra, que llamaremos plano w o plano (u,v), varía $w=f(z)$.

Cuando $z(t)$ describe una curva en el primer plano, su imagen $w(t)=f(z(t))$ describe otra curva en el segundo plano. Si se interpreta el parámetro t como el tiempo, el movimiento del punto imagen $w(t)$ proporciona una idea del comportamiento de la función a lo largo del camino $z(t)$. Con este método será posible apreciar cuando el camino $z(t)$ pasa cerca de un cero de la derivada $f'(z)$.

Considerando diferentes caminos $z(t)$ que barran de modo uniforme el dominio se puede conseguir una imagen dinámica del comportamiento de la función $w=f(z)$. Se suelen considerar rectas paralelas al eje real, $y=cte$, y rectas paralelas al eje imaginario, $x=cte$, igualmente espaciadas. A veces resulta más adecuado efectuar el barrido del dominio usando coordenadas polares (r,φ) para la variable independiente $z=re^{i\varphi}$. En este caso se impone la consideración de las imágenes de las circunferencias $z(t)=re^{it}$, y de las semirrectas $z(t)=te^{i\alpha}\ t\geq 0$, donde $r>0$ y $\alpha\in[0,2\pi]$. En 2.5.10 se verá un ejemplo sencillo y paradigmático de esta técnica, y más adelante, en la sección 8.3 se verán otros ejemplos interesantes.

Para ciertas funciones sencillas como $w=az+b$, $w=1/z$, que admiten interpretación geométrica como transformaciones del plano en s¡ mismo, conviene considerar los planos z y w superpuestos. Por ejemplo, si $a=re^{i\theta}$, ya sabemos que la transformación $w=az+b$ es el resultado de efectuar un giro alrededor de 0 (de amplitud θ) seguido de una homotecia (de razón r) respecto al mismo punto, y de una traslación. También sabemos que la transformación $w=1/z$ es el resultado de componer una simetría respecto a la circunferencia unidad con una simetría respecto al eje real.

Otra alternativa para visualizar y apreciar gráficamente propiedades de una función compleja de variable compleja consiste en considerar las dos funciones

$$u(x,y)=\operatorname{Re} f(x+iy),\quad v(x,y)=\operatorname{Im} f(x+iy)$$

cuyas gráficas son superficies en el espacio euclídeo $\mathbb{R}^3$, que se pueden representar en el plano (x,y) mediante un mapa de curvas de nivel:

En el plano (x,y) se suelen dibujar superpuestas las curvas $u(x,y)=c$, $v(x,y)=c$ para diferentes valores de la constante c, de modo que, para una función biyectiva f, este procedimiento coincide con el descrito anteriormente aplicado a la inversa f^{-1}. Si f no es inyectiva el procedimiento puede ayudar a determinar regiones parciales $G\subset\Omega$ sobre las que f sea inyectiva y a obtener sus imágenes $f(G)$. Será útil para encontrar abiertos donde existan ramas holomorfas de la inversa de una función holomorfa dada.

Los procedimientos gráficos que acabamos de comentar suelen resultar útiles a la hora de definir una función de variable compleja F como composición de otras dos $F=f\circ g$ ya que para hacerlo es preciso obtener la imagen de g, y comprobar que está contenida en el dominio de f. Pero sobre todo se utilizan para conocer con detalle el comportamiento de las funciones elementales consideradas como transformaciones de un plano en otro.

Representación mediante campos de vectores. Para conseguir una imagen gráfica de las funciones complejas de variable compleja hay una alternativa bastante interesante desde el punto de vista de las aplicaciones físicas de la teoría. Consiste en utilizar un solo plano para representar tanto la variable independiente z como variable dependiente $w = f(z)$, pero con el siguiente convenio: z se representa mediante un punto y w mediante el vector $\overline{w}$ dibujado con origen en este punto (más adelante quedará patente la conveniencia de considerar el vector $\overline{w}$ en lugar del vector w). Es decir, se representa $f = u+iv$ mediante el campo de vectores $A(x,y) = (A_1(x,y), A_2(x,y))$ donde $A_1 = u$ y $A_2 = -v$. As¡ por ejemplo, un campo plano de fuerzas, dirigidas radialmente desde desde el origen hacia afuera, de magnitud inversamente proporcional a la distancia al origen, es una buena representación física de la función $1/z$.

Si existe una primitiva $F = U + iV$ de f en Ω, utilizando las condiciones de Cauchy-Riemann, es fácil ver que

$$A(x,y) = \nabla U(x,y); \qquad < A(x,y)|\nabla V(x,y) > = 0.$$

Esto significa que las curvas de nivel $U(x,y) = c$ (líneas equipotenciales del campo) son ortogonales al campo y que las curvas de nivel $V(x,y) = c$ (líneas de corriente del campo) son tangentes al campo A (véanse los ejercicios 3.27 y 3.28 en [17]).

Para obtener gráficamente las curvas de nivel $U(x,y) = c$, $V(x,y) = c$, asociadas a una función holomorfa F, basta considerar el campo $A(x,y) = \overline{f(x+iy)}$ asociado a su derivada $f = F'$ y dibujar (con un programa de ordenador adecuado) las trayectorias de las ecuaciones diferenciales

$$A_1(x,y)dx + A_2(x,y)dy = 0; \quad A_2(x,y)dx - A_1(x,y)dy = 0;$$

que son respectivamente, las curvas $U(x,y) = cte$, $V(x,y) = cte$.

2.5. Aplicaciones conformes

Dado un par ordenado de vectores no nulos (w_1, w_2) del espacio euclídeo $\mathbb{R}^2$, (que se supone identificado con el cuerpo $\mathbb{C}$) se llama *ángulo orientado* del par (w_1, w_2) al número real $\operatorname{Arg}(w_2/w_1) \in (-\pi, \pi]$.

Definición 2.5.1 *Una función $f : \Omega \to \mathbb{C}$ definida en un abierto $\Omega \subseteq \mathbb{C}$, se dice que conserva ángulos orientados en $a \in \Omega$ si se cumplen las condiciones siguientes:*

a) Para cada $w \in \mathbb{T}$ existe $\delta_w > 0$ tal que $D(a, \delta_w) \subseteq \Omega$ y

$$f(a+tw) - f(a) \neq 0 \quad si \quad 0 < t < \delta_w.$$

b) Para cada $w \in \mathbb{T}$ existe, y no depende de w, el l¡mite:

$$\lim_{t \to 0+} \frac{f(a+tw) - f(a)}{w|f(a+tw) - f(a)|} = c$$

La interpretación geométrica de esta definición es sencilla: El vector unitario en la dirección de $f(a+tw)-f(a)$ tiende hacia la posición límite cw cuando $t>0$ tiende hacia 0, luego cw es un vector tangente, en sentido generalizado, a la curva $\gamma_w(t) = f(a+tw)$, $0 < t < \delta_w$, en su origen $\gamma_w(0) = f(a)$.

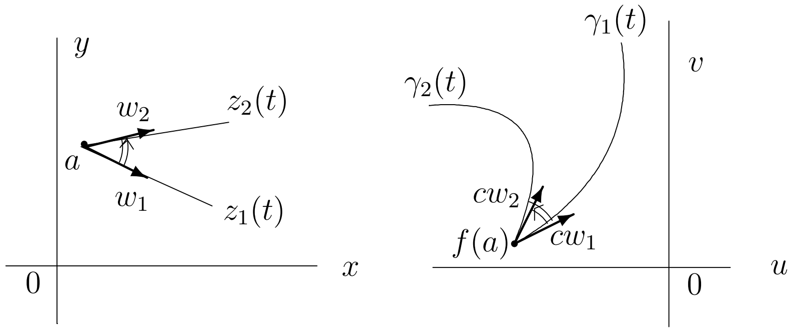
Si se consideran dos semirrectas que surgen de a, de ecuaciones paramétricas

$$z_1(t) = a + tw_1; \qquad z_2(t) = a + tw_2; \qquad t \geq 0$$

donde $|w_1| = |w_2| = 1$, as¡ como las curvas imágenes

$$\gamma_1(t) = f(a+tw_1); \qquad \gamma_2(t) = f(a+tw_2); \qquad 0 < t < \text{mín}\{\delta_{w_1}, \delta_{w_2}\}$$

entonces el par ordenado (cw_1, cw_2) es el formado por los vectores unitarios tangentes (en sentido generalizado) a estas curvas en $t=0$ y es claro que el ángulo orientado de este par coincide con el del par (w_1, w_2) ya que $\operatorname{Arg}\dfrac{cw_2}{cw_2} = \operatorname{Arg}\dfrac{w_2}{w_1}$



La siguiente proposición, cuya demostración es inmediata, revela una notable propiedad geométrica de las funciones complejas con derivada no nula. Obsérvese que según la definición de derivada, si $f'(a) = re^{i\alpha}$, con $r > 0$ el incremento local $\Delta(h) = f(a+h)-f(a)$, para valores de h pequeños, se comporta como la transformación $h \to re^{i\alpha}h$ cuyo significado geométrico ya lo hemos mencionado.

Proposición 2.5.2 *Sea $f : \Omega \to \mathbb{C}$ definida en un abierto $\Omega \subset \mathbb{C}$. Si f es derivable en $a \in \Omega$ y $f'(a) \neq 0$ entonces f conserva ángulos orientados en a.*

DEM: Se deja al cuidado del lector. ■

El siguiente ejemplo revela el papel esencial que desempeña la condición $f'(a) \neq 0$ en la propiedad de conservación de ángulos orientados.

Ejemplo 2.5.3 *Sea $f : \Omega \to \mathbb{C}$ una función que se puede escribir en la forma $f(z) - f(a) = (z-a)^m g(z)$ para todo $z \in \Omega$ donde $m \in \mathbb{N}$, $m \geq 2$ y $g : \Omega \to \mathbb{C}$ es continua en a con $g(a) \neq 0$. Entonces f no conserva ángulos orientados en a. Obsérvese que $f'(a) = 0$.*

Dem: Basta tener en cuenta que para todo w con $|w| = 1$, en virtud de la continuidad de g en a se cumple

$$\lim_{t \to 0+} \frac{1}{w} \frac{f(a+tw) - f(a)}{|f(a+tw) - f(a)|} = \lim_{t \to 0} w^{m-1} \frac{g(a+tw)}{|g(a+tw)|} = w^{m-1} \frac{g(a)}{|g(a)|}$$

límite que depende de w, en contra de la hipótesis. ■

Obsérvese que en el ejemplo anterior, lo que ocurre realmente, es que en el punto a el efecto de la transformación f es el de multiplicar por m la amplitud de los ángulos: Ahora, cuando $t > 0$ tiende hacia 0, el vector unitario en la dirección de $f(a + tw) - f(a)$ tiende hacia la posición límite cw^m, con $c = g(a)/|g(a)|$, luego cw^m es un vector tangente, en sentido generalizado, a la curva $\gamma_w(t) = f(a + tw)$, en su origen $\gamma_w(0) = f(a)$. Si consideramos dos semirrectas que surgen de a según los vectores unitarios w_1, w_2 con ángulo orientado pequeño $\alpha = \text{Arg}(w_2/w_1) < \pi/m$, entonces (cw_1^m, cw_2^m) es el par ordenado formado por los vectores unitarios tangentes (en sentido generalizado) a las curvas imágenes

$$\gamma_1(t) = f(a + tw_1); \qquad \gamma_2(t) = f(a + tw_2)$$

Como $w_2/w_1 = e^{i\alpha}$ y estamos suponiendo que $m\alpha < \pi$, se cumplirá que el ángulo orientado de (cw_1^m, cw_2^m) vale $\text{Arg}(w_2^m/w_1^m) = \text{Arg}(w_2/w_1)^m = \text{Arg}(e^{im\alpha}) = m\alpha$.

Más adelante se demostrará que toda función holomorfa $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ no es idénticamente nula en un entorno de $a \in \Omega$ admite una representación del tipo considerado en el ejemplo anterior y con este ejemplo quedará justificado que $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ conserva ángulos orientados en un punto $a \in \Omega$ si y sólo si $f'(a) \neq 0$. Por ello, la situación considerada en el siguiente ejemplo no se puede presentar cuando f es holomorfa.

Ejemplo 2.5.4 *La función $f(z) = z|z|$ es diferenciable en $z = 0$ y conserva ángulos orientados en $a = 0$ aunque $df(0) = 0$.*

Proposición 2.5.5 *Para una aplicación lineal $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ son equivalentes*

a) L conserva ángulos orientados en 0;

b) L conserva ángulos orientados en todos los puntos;

c) L no es singular y para todo par (w_1, w_2) con $|w_1| = |w_2| = 1$ se verifica

$$\text{Arg}\, \frac{w_2}{w_1} = \text{Arg}\, \frac{L(w_2)}{L(w_1)}$$

d) L es $\mathbb{C}$-lineal no nula;

Dem: a) $\Leftrightarrow$ b) es consecuencia inmediata de la linealidad. a) $\Rightarrow$ c): Si se cumple a), las condiciones de 2.5.1 aplicadas a L en $a = 0$ se traducen en la existencia de $c \in \mathbb{T}$ tal que para cada w con $|w| = 1$ se cumple $0 \neq L(w) = c|L(w)|w$. Por consiguiente L es no singular y

$$\text{Arg}\, \frac{L(w_2)}{L(w_1)} = \text{Arg}\, \frac{|L(w_2)|w_2}{|L(w_1)|w_1} = \text{Arg}\, \frac{w_2}{w_1} \quad \text{si } |w_1| = |w_2| = 1$$

c) $\Rightarrow$ d): Si se expresa L en la forma $L = rdz + sd\overline{z}$ basta probar que si L cumple c) entonces $s = 0$. Cuando w recorre la circunferencia $|w| = 1$, $L(w)/w$ recorre la circunferencia de centro r y radio $|s|$ ya que $L(w)/w = r + s\overline{w}/w = r + s\overline{w}^2$. Por otra parte, aplicando c) al par $(w, 1)$ con $|w| = 1$ se obtiene que $\operatorname{Arg} w = \operatorname{Arg} \dfrac{L(w)}{L(1)}$ y por lo tanto existe $\rho > 0$ tal que $\rho w = L(w)/L(1)$. Esto significa que $L(w)/w$ permanece en la recta $\{tL(1) : t \in \mathbb{R}\}$. Para que las dos condiciones que se han obtenido sean compatibles es necesario que $s = 0$. ■

Es decir, las aplicaciones lineales $L : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ que conservan ángulos orientados son las de la forma $L(z) = re^{i\alpha}z$, que tienen una interpretación geométrica bien sencilla: La composición de un giro de amplitud α alrededor de 0, con una homotecia de razón $r > 0$ respecto al origen.

Teorema 2.5.6 *Si $f : \Omega \to \mathbb{C}$ es diferenciable en $a \in \Omega$ con $df(a) \neq 0$ entonces f conserva ángulos orientados en a si y sólo si f es derivable en a.*

Dem: Si f es derivable en a es claro que $f'(a) \neq 0$ y entonces es inmediato comprobar que f conserva ángulos orientados en a. Recíprocamente, si f conserva ángulos orientados en a, y su diferencial $L = df(a)$ no es idénticamente nula, su núcleo $\{w : L(w) = 0\}$, o bien se reduce a $\{0\}$, o es una recta que pasa por 0. En cualquier caso, si $|w| = 1$ y $L(w) \neq 0$, en virtud de la condición b) de 2.5.1 se verifica

$$c = \lim_{t \to 0+} \frac{1}{w} \frac{f(a + tw) - f(a)}{t} \left| \frac{t}{f(a + tw) - f(a)} \right| = \frac{1}{w} \frac{L(w)}{|L(w)|}$$

Se sigue que para todo w con $|w| = 1$ el cociente $L(w)/w$ pertenece a la recta $\{tc : t \in \mathbb{R}\}$ y razonando como en la prueba de 2.5.5 se concluye que $L = df(a)$ es $\mathbb{C}$-lineal no nula, lo que significa que f es derivable en a ■

Definición 2.5.7 *Una función $f : \Omega \to \mathbb{C}$ se dice que es* conforme *en el abierto $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ si es holomorfa y $f'(a) \neq 0$ para todo $a \in \Omega$. Un isomorfismo conforme del abierto $\Omega_1 \subseteq \mathbb{C}$ sobre el abierto $\Omega_2 \subseteq \mathbb{C}$ es una aplicación biyectiva $f : \Omega_1 \to \Omega_2$ tal que f y f^{-1} son conformes.*

El calificativo de conforme que se da a las aplicaciones holomorfas con derivada no nula hace alusión a la propiedad de conservación de ángulos orientados que tienen estas aplicaciones (2.5.2).

Obsérvese que si $f : \Omega_1 \to \Omega_2$ es una biyección holomorfa con inversa $g = f^{-1}$ holomorfa entonces las derivadas de f y g no se anulan nunca, y por lo tanto f es un isomorfismo conforme. En 2.6.7 veremos que para que una aplicación biyectiva $f : \Omega_1 \to \Omega_2$ sea un isomorfismo conforme basta que f sea holomorfa con derivada no nula y que su inversa sea continua. Anticipamos que en esta afirmación se pueden eliminar los requerimientos de que la derivada no se anule y que la inversa sea continua: Se demostrará más adelante (véase 4.2.4) que si $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ es inyectiva entonces $f'(z) \neq 0$ para todo $z \in \Omega$, $V = f(\Omega)$ es abierto y la inversa $f^{-1} : V \to \Omega$ es holomorfa. Es decir, toda función holomorfa e inyectiva establece un isomorfismo conforme entre su dominio y su imagen que necesariamente es abierta.

Proposición 2.5.8 *Un difeomorfismo $f : \Omega_1 \to \Omega_2$ (aplicación biyectiva y diferenciable con inversa diferenciable) es un isomorfismo conforme si y sólo si conserva ángulos orientados en todos los puntos.*

DEM: Supongamos que f es un difeomorfismo que conserva ángulos orientados en cada punto. Por ser f un difeomorfismo se ha de cumplir que $df(z) \neq 0$ para cada $z \in \Omega_1$ y aplicando el teorema 2.5.6 se obtiene que $f \in \mathcal{H}(\Omega_1)$ y además $f'(z) \neq 0$ para cada $z \in \Omega$. Si $g = f^{-1}$, para cada $w = f(z) \in \Omega_2$, la aplicación $dg(w)$ es $\mathbb{C}$-lineal porque es la inversa de la aplicación $\mathbb{C}$-lineal $df(z)$. Por lo tanto g es holomorfa en Ω_2, y obviamente $g'(w) \neq 0$ para cada $w \in \Omega_2$. Así queda demostrado que f es un isomorfismo conforme.

Recíprocamente, si f es un isomorfismo conforme entonces f y su inversa g son holomorfas y además $f'(z) \neq 0$ y $g'(w) \neq 0$ para cada $z \in \Omega_1$ y cada $w \in \Omega_2$, luego, en virtud de 2.5.6, f y g conservan ángulos orientados en todos los puntos. ■

En lo que sigue $\Gamma(\Omega_1, \Omega_2)$ denotará al conjunto de todos los isomorfismos conformes de Ω_1 sobre Ω_2. Si $\Gamma(\Omega_1, \Omega_2)$ es no vacío se dice que los abiertos Ω_1, Ω_2 son *conformemente equivalentes*. Por definición $\Gamma(\Omega_1) = \Gamma(\Omega_1, \Omega_1)$.

El problema central de la representación conforme es el de determinar cuando dos abiertos Ω_1 y Ω_2 son conformemente equivalentes y en su caso describir el conjunto $\Gamma(\Omega_1, \Omega_2)$. Obsérvese que si se tiene descrito uno de los dos grupos de transformaciones $\Gamma(\Omega_1)$ o $\Gamma(\Omega_2)$ y se conoce un elemento particular $f \in \Gamma(\Omega_1, \Omega_2)$ entonces se puede determinar $\Gamma(\Omega_1, \Omega_2)$ mediante:

$$\Gamma(\Omega_1, \Omega_2) = \{f \circ \varphi : \varphi \in \Gamma(\Omega_1)\} = \{\varphi \circ f : \varphi \in \Gamma(\Omega_2)\}.$$

Para los ejemplos que siguen no es preciso recurrir a 4.2.4 pues en cada caso es claro que la imagen de la función es abierta y que su inversa es holomorfa.

Ejemplos 2.5.9 *Usando transformaciones de Möbius apropiadas T se pueden establecer isomorfismos conformes entre los abiertos Ω_1 y Ω_2 que se indican en la siguiente tabla:*

$\Omega_1 \xrightarrow{T} \Omega_2$	
Semiplano abierto	Disco abierto
Cuadrante abierto	Semidisco
Región limitada por circunferencias tangentes	Región limitada por dos rectas paralelas
Región limitada por circunferencias que no se cortan	Corona circular $A(0, r, R)$, (*)

En (*) la relación de los radios de la corona r/R no es posible prefijarla de antemano. Con los recursos avanzados del capitulo 9 se puede demostrar que una condición necesaria y suficiente para que dos coronas circulares sean conformemente equivalentes es que la razón entre sus radios sea la misma (véase [17] ejerc. 10.16).

Ejemplo 2.5.10 *La transformación* z^2

La transformación $f(z) := z^2$ es conforme sobre cada abierto $\Omega \subset \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Cuando se considera un dominio Ω con una descripción simple en coordenadas polares $z = re^{i\alpha}$ resulta muy sencillo determinar su imagen mediante la transformación $f(z) := z^2$. Si $A := \{x + iy : x > 0, y > 0\}$, $P := \{x + iy : y > 0\}$ y $H := \{x + iy : x > 0\}$ se verifica

$$f(A) = P; \quad f(P) = \mathbb{C} \setminus \{x \in \mathbb{R}; x \geq 0\}; \quad f(H) = \mathbb{C} \setminus \{x \in \mathbb{R} : x \leq 0\};$$

Para cada $w \neq 0$ la ecuación $z^2 = w$ tiene exactamente dos soluciones una opuesta de la otra. Por lo tanto $f(z) := z^2$ es inyectiva sobre cada abierto $\Omega \subset \mathbb{C}$ que tenga la propiedad de no contener parejas de puntos simétricos respecto al origen, es decir $z \in \Omega \Rightarrow -z \notin \Omega$. Una condición necesaria para esto es que $0 \notin \Omega$. Por otra parte, cuando $0 \in \Omega$, se aprecia que la transformación $f(z) = z^2$ duplica ángulos en $z = 0$, fenómeno que, en un contexto general, ya se ha comentado en la observación que sigue al ejemplo 2.5.3).

En particular, la transformación $z \to z^2$ establece una biyección entre cada uno de los abiertos A, P, H y su imagen. Obsérvese que mientras que la inversa de $f|_H$ es la ra¡z cuadrada principal $\sqrt{z}$ sin embargo la inversa de $f|_P$ es $i\sqrt{-z}$. Es claro que estas biyecciones son bicontinuas (homeomorfismos) y es fácil ver que son difeomorfismos de clase C^∞ cuando se consideran en el ámbito del espacio eucl¡deo $\mathbb{R}^2$. Veremos pronto que las biyecciones naturales (las establecidas con funciones derivables en sentido complejo) son siempre difeomorfismos de clase C^∞ con la propiedad de conservar ángulos orientados.

Con los procedimientos gráficos indicados anteriormente, usando coordenadas cartesianas, se puede ver que, para $\alpha > 0$, la transformación $z \to z^2$. establece una biyección de $H_\alpha := \{x + iy : x > \alpha\}$ sobre $U_\alpha := \{u + iv : v^2 > 4\alpha^2(\alpha^2 - u)\}$ y también de $V_\alpha := \{x + iy : x^2 - y^2 > \alpha\}$ sobre $H_\alpha := \{u + iv : u > \alpha\}$ (Véase [17] ejerc. 2.23).

Estas biyecciones, que son realmente isomorfismos conformes, quedan incluidas en el siguiente cuadro que muestra parejas de abiertos G_1, G_2 entre los que la transformación $z \to z^2$ establece isomorfismos conformes.

$G_1 \xrightarrow{z^2} G_2$	
$A = \{x + iy : x > 0, y > 0\}$	$P = \{u + iv : v > 0\}$
$P = \{x + iy : y > 0\}$	$\Omega_{-1} = \mathbb{C} \setminus \{u \in \mathbb{R} : u \geq 0\}$
$H = \{x + iy : x > 0\}$	$\Omega_1 = \mathbb{C} \setminus \{u \in \mathbb{R} : u \leq 0\}$
$\{x + iy : x > t\}$	$\{u + iv : v^2 > 4t^2(t^2 - u)\}$
$\{x + iy : x^2 - y^2 > t\}$	$\{u + iv : u > t\}$

Obsérvese que en todos los casos, excepto en el segundo, la inversa viene dada por la ra¡z cuadrada principal $\sqrt{z}$. ∎

2.6. Funciones elementales

Las series de potencias que definen las funciones reales e^x, $\operatorname{sen} x$, $\cos x$ siguen convergiendo cuando se sustituye la variable real x por la variable compleja z. Las series de potencias complejas que resultan se utilizan para definir en el plano complejo las funciones elementales de variable compleja que extienden a las correspondientes funciones reales.

Función exponencial. La *función exponencial compleja* $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ es la función entera definida en todo el plano mediante la serie de potencias

$$\exp(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$$

cuyo radio de convergencia es $+\infty$. Obsérvese que, en virtud de 2.3.4, su derivada es $\exp'(z) = \exp(z)$. Si $x, y \in \mathbb{R}$ se comprueba fácilmente que

$$\exp(x) = e^x; \qquad \exp(iy) = \cos y + i \operatorname{sen} y;$$

La ecuación funcional

$$\exp(z + w) = \exp(z)\exp(w) \text{ para cada } z, w \in \mathbb{C} \tag{2.1}$$

se obtiene usando el producto de convolución de series absolutamente convergentes (véase 2.1.5) y la fórmula del binomio de Newton:

$$\exp(z)\exp(w) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\sum_{p+q=n} n! \frac{z^p w^q}{p!q!} \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}(z+w)^n = \exp(z+w)$$

Aplicando (2.1) se obtiene que la función $c : \mathbb{R} \to \mathbb{T}$ definida por

$$c(t) := \exp(it) = \cos t + i \operatorname{sen} t$$

es un homomorfismo del grupo aditivo $(\mathbb{R}, +)$ sobre el grupo multiplicativo $(\mathbb{T}, \cdot)$ cuyo núcleo es $2\pi\mathbb{Z}$. Como $\exp(z)\exp(-z) = \exp(0) = 1$ se sigue que $\exp(z) \neq 0$ para todo $z \in \mathbb{C}$, y usando la sobreyectividad de c se obtiene fácilmente que $\exp(\mathbb{C}) = \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

En virtud de (2.1), si $z = x + iy$ se tiene

$$\exp(z) = e^x(\cos y + i \operatorname{sen} y) \qquad |\exp(z)| = e^x$$

donde la expresión de la izquierda es la que se suele adoptar como definición de la exponencial compleja en los textos elementales de cálculo. De ella se deduce que exp es una función periódica de periodos $2\pi mi$, $m \in \mathbb{Z}$.

Con la ecuación funcional (2.1) también se obtiene la clásica fórmula de De Moivre muy útil para expresar $\cos n\alpha$, y $\operatorname{sen} n\alpha$ en términos de $\operatorname{sen}\alpha$ y $\cos\alpha$:

$$(\cos\alpha + i \operatorname{sen}\alpha)^n = \cos n\alpha + i \operatorname{sen} n\alpha$$

Por paso al cociente del homomorfismo de grupos $c : \mathbb{R} \to \mathbb{T}$ se obtiene un isomorfismo de grupos

$$\tilde{c} : \frac{\mathbb{R}}{2\pi\mathbb{Z}} \to \mathbb{T}$$

que no sólo efectúa una identificación algebraica entre el grupo cociente $\frac{\mathbb{R}}{2\pi\mathbb{Z}}$ y el grupo multiplicativo $\mathbb{T}$ sino que también los identifica topológicamente, ya que establece un homeomorfismo entre $\frac{\mathbb{R}}{2\pi\mathcal{Z}}$ con la topología cociente y el espacio compacto $\mathbb{T}$.

Una vez introducida la función exponencial compleja mediante la serie de potencias se podrían introducir las funciones reales $\operatorname{sen} x$ y $\cos x$ mediante las expresiones:

$$\operatorname{sen} x := \operatorname{Im}(\exp(ix)); \qquad \cos x := \operatorname{Re}(\exp(ix)) :$$

en cuyo caso, de la ecuación funcional (2.1) se deducen fácilmente las fórmulas usuales de la trigonometría. A título de ejemplo, la relación $\operatorname{sen}^2 t + \cos^2 t = 1$ se podría obtener así: En virtud de la continuidad de $z \to \overline{z}$ se tiene que $\exp(\overline{z}) = \overline{\exp(z)}$ luego

$$\cos^2 t + \operatorname{sen}^2 t = |\exp(it)|^2 = \exp(it)\overline{\exp(it)} = \exp(it)\exp(-it) = \exp(0) = 1$$

Las restantes fórmulas de la trigonometría, p.e. las fórmulas para el seno y el coseno de la suma, están implícitas en la ecuación (2.1). Cuando se sigue este proceso para introducir las funciones $\operatorname{sen} x$, $\cos x$ se comienza definiendo $\pi = 2\min\{t \in \mathbb{R} : \cos t = 0\}$, y luego se demuestra que $c : \mathbb{R} \to \mathbb{T}$, $c(t) := \exp(it)$, es suprayectiva con $\{t \in \mathbb{R} : c(t) = 1\} = \{2n\pi : n \in \mathbb{Z}\}$ (los detalles se pueden ver en [14]).

Ejemplo 2.6.1 *La transformación $z \to e^z$.*

La derivada de la función exponencial no se anula nunca, luego la transformación $z \to e^z$ es conforme e inyectiva sobre cualquier abierto Ω con la propiedad de no contener parejas de puntos z_1, z_2 verificando $z_1 - z_2 \in 2\pi i\mathbb{Z}$. La función exponencial establece isomorfismos conformes entre las siguientes parejas de abiertos Ω_1, Ω_2 (donde $t - s < 2\pi$):

$\Omega_1 \xrightarrow{\exp} \Omega_2$	
$\{x + iy : s < y < t\}$	$\{re^{i\theta} : r > 0, s < \theta < t\}$
$\{x + iy : x < 0, s < y < t\}$	$\{re^{i\theta} : 0 < r < 1, s < \theta < t\}$

En particular, cuando $t - s = \pi$, se obtiene un isomorfismo conforme entre una banda y un semiplano y entre una semibanda y un semidisco. Análogamente, con $t - s = \pi/2$ se consigue un isomorfismo conforme de una banda sobre un cuadrante y de una semi-banda sobre un cuadrante de un disco.

Funciones trigonométricas e hiperbólicas. Las *funciones trigonométricas* de variable compleja sen, cos son funciones enteras definidas en términos de la función exponencial mediante las expresiones

$$\operatorname{sen} z = \frac{\exp(iz) - \exp(-iz)}{2i}; \qquad \cos z = \frac{\exp(iz) + \exp(-iz)}{2};$$

de donde se deducen sus desarrollos en serie de potencias:

$$\cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \frac{z^6}{6!} + \ldots\ldots$$

$$\operatorname{sen} z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \frac{z^7}{7!} + \dots\dots$$

que ponen de manifiesto que estas funciones extienden a las correspondientes funciones de variable real. Se sigue cumpliendo que la derivada de $\operatorname{sen} z$ (resp. $\cos z$) es $\cos z$ (resp. $-\operatorname{sen} z$) así como las relaciones trigonométricas clásicas

$$\operatorname{sen}^2 z + \cos^2 z = 1; \quad \operatorname{sen} z = \cos\left(\frac{\pi}{2} - z\right);$$

$$\cos z = \cos(-z); \quad \operatorname{sen}(-z) = -\operatorname{sen} z;$$

$$\operatorname{sen}(z+w) = \operatorname{sen} z \cos w + \cos z \operatorname{sen} w;$$

$$\cos(z+w) = \cos z \cos w - \operatorname{sen} z \operatorname{sen} w.$$

que se deducen a partir de la ecuación (2.1).

Las *funciones hiperbólicas* de variable compleja , son funciones enteras definidas en términos de la función exponencial mediante las expresiones

$$\operatorname{sh} z = \frac{\exp(z) - \exp(-z)}{2}; \qquad \operatorname{ch} z = \frac{\exp(z) + \exp(-z)}{2};$$

Es claro que estas funciones extienden al plano complejo las correspondientes funciones reales. Están directamente relacionadas con las funciones trigonométricas ya que

$$\operatorname{ch}(iz) = \cos z; \quad \operatorname{sh}(iz) = i \operatorname{sen} z; \quad \cos(iz) = \operatorname{ch} z; \quad \operatorname{sen}(iz) = i \operatorname{sh} z;$$

Se comprueba fácilmente que $\operatorname{ch}^2 z - \operatorname{sh}^2 z = 1$, así como las restantes relaciones clásicas entre las funciones hiperbólicas (teoremas de adición, etc..). Las derivadas de las funciones hiperbólicas siguen siendo formalmente las mismas que en el caso de las correspondientes funciones de variable real.

Ceros y periodicidad:
Los ceros de $\cos z$ están en el eje real y coinciden con los de la correspondiente función de variable real $\cos x$

Teniendo en cuenta que $\operatorname{sen} z = \cos(\pi/2 - z)$ se sigue que todos los ceros de $\operatorname{sen} z$ también están en el eje real y son los mismos que los de la función real $\operatorname{sen} x$

Las funciones $\operatorname{sen} z$, $\cos z$ son periódicas de periodo 2π y sus únicos periodos son los del conjunto $\{2m\pi : m \in \mathbb{Z}\}$ (véanse los ejercicios 3.14 y 3.15 en [17]).

Por otra parte, con las relaciones $\operatorname{ch} z = \cos(iz)$, $i \operatorname{sh} z = \operatorname{sen}(iz)$ se obtienen los ceros y los periodos de las funciones hiperbólicas $\operatorname{sh} z$, $\operatorname{ch} z$.

Logaritmos, raíces y potencias complejas. Puesto que $\exp(\mathbb{C}) = \mathbb{C} \setminus \{0\}$, dado un número complejo $w \neq 0$ existe $z \in \mathbb{C}$ tal que $\exp(z) = w$ y se dice que z es un *logaritmo* de w. El conjunto de todos los logaritmos de w, se designa por $\log w$, y viene dado por

$$\log w = \{\log |w| + i\alpha : \alpha \in \arg(w)\}$$

Por definición, el *logaritmo principal* de w, denotado $\operatorname{Log} w$, es el que se obtiene con el argumento principal $\alpha = \operatorname{Arg} w$, es decir, es el único elemento del conjunto $\log w$ cuya parte imaginaria pertenece al intervalo $(-\pi, \pi]$.

La *exponenciación compleja* (con base y exponente complejo) se define tomando como base la función exponencial: Dado un número complejo $a \neq 0$, para cada $z \in \mathbb{C}$ se define

$$a^z = \{\exp(cz) : c \in \log a\}$$

Nótese que, de acuerdo con las definiciones anterior, si $a \neq 0$ y $z = 1/n$ resulta $a^{1/n} = \sqrt[n]{a}$.

Obsérvese que $z \to a^z$ no es una función uniforme. Es una función multiforme (o multivaluada) ya que la imagen a^z de cada $z \in \mathbb{C}$ es un conjunto (generalmente infinito, aunque puede ser finito en casos especiales p.e. cuando $z = 1/n$ con $n \in \mathbb{N}$). Sin embargo, fijado $c \in \log a$ se obtiene una función uniforme $f_c(z) = \exp(zc)$ tal que $f_c(z) \in a^z$ para cada $z \in \mathbb{C}$. Se dice que f_c es una rama o determinación uniforme de a^z. Se aprecia una colección numerable de estas ramas, una para cada valor de $c \in \log a$. Para $c = \operatorname{Log} a$ queda determinada la llamada *determinación principal* de a^z.

De acuerdo con la definición que acabamos de formular el símbolo e^z designa a la función multivaluada $\{\exp(cz) : c \in \log e\} = \{\exp((1 + 2\pi i m)z) : m \in \mathbb{Z}\}$ cuya determinación principal es la función exponencial $\exp(z)$. El uso de la notación e^z para la función exponencial se justifica con el siguiente convenio: La determinación principal de a^z se denota con el mismo símbolo a^z. El único problema que ocasiona este convenio es que, en las raras ocasiones en que se desee considerar la función multiforme habrá que decirlo explícitamente. Adoptado este convenio, en lo que sigue e^z designará a la función exponencial $\exp(z)$ y se escribirá $z = re^{i\alpha}$ donde $r = |z|$ y $\alpha \in \arg z$.

Al considerar los argumentos, los logaritmos y la exponenciación compleja han aparecido diversas funciones multiformes, y es conveniente introducir la terminología pertinente. Conviene advertir que en la siguiente definición, asumiendo la identificación de $\mathbb{R}$ con el eje real, se contempla el caso particular de que $T = [a, b]$ sea un intervalo de la recta real.

Definición 2.6.2 *Sea T un subconjunto del plano complejo y $\mathcal{P}(\mathbb{C})$ el conjunto de las partes de $\mathbb{C}$: Una multifunción (o función multiforme) con dominio T y valores en $\mathbb{C}$ es una aplicación*

$$G : T \to \mathcal{P}(\mathbb{C})$$

Se dice que g es una rama continua o determinación continua de G si $g : T \to \mathbb{C}$ es continua y $g(t) \in G(t)$ para cada $t \in T$.

Un problema natural que se plantea en relación con una multifunción dada G es el de determinar o caracterizar los abiertos $\Omega \subset \mathbb{C}$ donde existen ramas continuas de la multifunción. De momento sólo se considerarán algunos casos particulares sencillos.

Los ejemplos más notables de funciones multiformes son $\arg z$, $\log z$, y $\sqrt[n]{z}$. La mayor parte de las multifunciones de interés aparecen cuando $G(t) = f^{-1}(t)$ donde $f : \Omega \to T$ está definida en un abierto $\Omega \subset \mathbb{C}$. Así ocurre por ejemplo con las multifunciones $\operatorname{arc\,sen} z$, $\operatorname{arc\,tg} z$ que se estudiarán más adelante.

Las ramas continuas de multifunciones de la forma $\log f(t)$, $\arg f(t)$ reciben nombres especiales:

Definición 2.6.3 *Sea $f : T \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$ una función continua, definida en $T \subset \mathbb{C}$.*

a) Si $g : T \to \mathbb{C}$ es una función continua tal que $e^{g(t)} = f(t)$ (e.d $g(t) \in \log f(t)$) para todo $t \in T$ se dice que g es un logaritmo continuo *de f en T.*

b) Si $\alpha : T \to \mathbb{R}$ es una función continua tal que $\alpha(t) \in \arg f(t)$ para todo $t \in T$ se dice que α es un argumento continuo *de f en T.*

Con la terminología que acabamos de introducir es claro que el argumento principal $\operatorname{Arg} z$ y el logaritmo principal, $\operatorname{Log} z = \log|z| + i \operatorname{Arg} z$, son, respectivamente, un argumento continuo y un logaritmo continuo de la identidad z en el abierto $\Omega_1 = \mathbb{C} \setminus \{t \in \mathbb{R} : t \leq 0\}$.

Más generalmente, para cada $b \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ el abierto $\Omega_b = \mathbb{C} \setminus \{tb : t \in \mathbb{R}, t \leq 0\}$ es un entorno de b en el que hay definido un logaritmo continuo Log_b y un argumento continuo Arg_b de z:

$$\operatorname{Log}_b z = \operatorname{Log}(z/b) + a; \qquad \operatorname{Arg}_b z = \operatorname{Im} \operatorname{Log}_b(z) \;\; \text{donde} \;\; a \in \log b$$

Basta observar que $\operatorname{Log}_b z = \operatorname{Log}(z/b) + a$ es una función definida y continua en Ω_b que verifica $e^{\operatorname{Log}_b z} = (z/b)b = z$ para todo $z \in \Omega_b$, por lo que $\operatorname{Im}(\operatorname{Log}_b z)$ es un argumento continuo de z en Ω_b.

Si g es un logaritmo continuo de f en T entonces $\alpha(t) = \operatorname{Im} g(t)$ es un argumento continuo de f en T. Recíprocamente, si α es un argumento continuo de f en T entonces $g(t) = \log|f(t)| + i\alpha(t)$ es un logaritmo continuo de f en T.

Si $f : T \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$ es una función continua tal que en $f(T)$ existe un logaritmo continuo L de la identidad z entonces que $g(t) = L(f(t))$ es un logaritmo continuo de f en T. Sin embargo, la existencia de un logaritmo continuo g de f en T no significa que g se pueda expresar en la forma $g(t) = L(f(t))$ donde L es un logaritmo continuo de z definido sobre $f(T)$. Por ejemplo, si $T = [0, 2\pi]$ y $f(t) = e^{it}$, es obvio que $g(t) = it$ es un logaritmo continuo de f en T que no es posible expresarlo en la forma indicada porque en $f(T) = \mathbb{T}$ no se puede definir un logaritmo continuo de z (véase 2.6.13).

Definición 2.6.4 *Sea $f : T \to \mathbb{C}$ una función continua, definida en $T \subset \mathbb{C}$. y $n \in \mathbb{N}$. Si $h : T \to \mathbb{C}$ es una función continua tal que $h(t)^n = f(t)$ (e.d. $h(t) \in \sqrt[n]{f(t)}$) para todo $t \in T$ se dice que h es una raíz n-ésima continua de f en T.*

En las condiciones de la definición 2.6.4 si $0 \notin f(T)$ y existe en T un logaritmo continuo g de f entonces $h(t) = e^{\frac{1}{n} g(t)}$ es una raíz n-ésima continua de f en T. En particular, si $0 \notin f(T)$ y sobre $f(T)$ se puede definir un logaritmo continuo L de la identidad entonces la función $h(t) = e^{\frac{1}{n} L(f(t))}$ es una raíz n-ésima continua de f en T.

Puede ocurrir que para un valor particular de $n \in \mathbb{N}$ exista en T una raíz n-ésima continua de f aunque no exista un logaritmo continuo. Por ejemplo, $f(z) = z^2$ posee en $T = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ una raíz cuadrada continua y en el ejercicio 3.4 de [17] se muestra que no existe en T un logaritmo continuo de z^2. En 2.7.6 se puede ver otro ejemplo donde no existe un logaritmo continuo de f en T pero existe una raíz cuadrada continua.

Proposición 2.6.5 *Sea $f : T \to \mathbb{C}$ una función continua que no se anula en $T \subset \mathbb{C}$, que se supone conexo. Si $L_1, L_2 : T \to \mathbb{C}$ (resp, $A_1, A_2 : T \to \mathbb{R}$) son dos logaritmos continuos (resp. argumentos continuos) de f en T entonces existe $m \in \mathbb{Z}$ tal que*

$$L_1(t) = L_2(t) + 2\pi m i; \;\; \textit{(resp. } A_1(t) = A_2(t) + 2\pi m \textit{) para todo } t \in T$$

Dem: Como $g = L_1 - L_2$ es continua y $e^{g(t)} = 1$ para todo $t \in T$ resulta que $g(T)$ es un subconjunto conexo del conjunto discreto $\{2\pi n i : n \in \mathbb{Z}\}$. Como los únicos subconjuntos conexos de los conjuntos discretos son los puntos se obtiene el resultado referente a los logaritmos. Análogamente se razona con los argumentos. ■

Proposición 2.6.6 *Sea $f : T \to \mathbb{C}$ una función continua definida en $T \subset \mathbb{C}$, con la propiedad de que $T_0 = \{t \in T : f(t) \neq 0\}$ es no vacío y conexo. Si existe en T una raíz n-ésima continua h_0 de la función f, entonces en T existen exactamente n raices n-ésimas continuas de f, dadas por*

$$h_k(t) = \omega_k h_0(t) \quad \textit{donde} \quad \omega_k = e^{2\pi i k/n}, k = 0, 1, 2, \cdots n-1.$$

Dem: Véase [17] ejerc. 3.2 ■

En las condiciones de la proposición 2.6.6 si se desea determinar una rama continua h de la función multiforme $\sqrt[n]{f}$ lo que hay que hacer es fijar un punto $a \in T$ tal que $f(a) \neq 0$ e indicar cual de los n valores $\sqrt[n]{f(a)}$ es el que toma h en a. Cada $b \in \sqrt[n]{f(a)}$ determina la rama h_k que cumple $h_k(a) = b$.

La proposición 2.6.6 se aplicará frecuentemente cuando $T = \Omega \subset \mathbb{C}$ es un abierto conexo y f una función holomorfa no idénticamente nula en T, ya que, en estas condiciones se podrá asegurar que $\Omega_0 = \{z \in \Omega : f(z) \neq 0\}$ es conexo (véase 4.1.2 y 1.5.2).

La siguiente proposición nos dice que si la derivada de una función holomorfa g no se anula entonces toda rama continua de la multifunción inversa $g^{-1}(z)$ también es holomorfa

Proposición 2.6.7 *Sean Ω, V subconjuntos abiertos de $\mathbb{C}$, $g \in \mathcal{H}(V)$ y $f : \Omega \to V$ una función continua tal que $g(f(z)) = z$ para todo $z \in \Omega$. Si g' no se anula sobre $f(\Omega)$ entonces f es holomorfa y $f' = \dfrac{1}{g' \circ f}$.*

Dem: Sea $a \in \Omega$ y $b = f(a)$. La función

$$\Delta(w) = \frac{g(w) - g(b)}{w - b} \quad \text{si} \quad w \neq b; \quad \text{y} \quad \Delta(b) = g'(b)$$

es continua en el punto $w = b$. Para todo $w \in V$ se verifica $g(w) - g(b) = (w - b)\Delta(w)$. Sustituyendo $w = f(z)$ y $b = f(a)$ resulta $z - a = (f(z) - f(a))\Delta(f(z))$ y tomando límites cuando $z \to a$ se obtiene el resultado:

$$\lim_{z \to a} \frac{f(z) - f(a)}{z - a} = \lim_{z \to a} \frac{1}{\Delta(f(z))} = \frac{1}{\Delta(b)} = \frac{1}{g'(b)}$$

(Nótese que $\Delta(b) = g'(b) \neq 0$ por la hipótesis) ■

Proposición 2.6.8 *Si $L : \Omega \to \mathbb{C}$ es un logaritmo continuo de la identidad definido en un abierto $\Omega \subset \mathbb{C} \setminus \{0\}$ entonces L es holomorfo, con derivada $L'(z) = 1/z$. En particular, el logaritmo principal* Log *es holomorfo en $\Omega_1 = \mathbb{C} \setminus \{x \in \mathbb{R} : x \leq 0\}$.*

DEM: Basta aplicar 2.6.7 con $g(z) = e^z$ y $f(z) = L(z)$ para concluir que L es holomorfa en Ω y que $L'(z) = 1/z$. ■

Proposición 2.6.9 *Sea $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ tal que $0 \notin f(\Omega)$. Si h es una raíz m-ésima continua de f en Ω entonces h es holomorfa y $h'(z) = \dfrac{f'(z)h(z)}{mf(z)}$.*

DEM: Si $D(a,r) \subset \Omega$ y $0 < |z| < r$ se tiene

$$\frac{f(a+z) - f(a)}{z} = \frac{h(a+z)^m - h(a)^m}{z} = \frac{h(a+z) - h(a)}{z}\Delta(z)$$

donde $\Delta(z) = h(a+z)^{m-1} + h(a+z)^{m-2}h(a) + \cdots + h(a+z)h(a)^{m-2} + h(a)^m$ tiende hacia $mh(a)^{m-1}$ cuando z tiende hacia 0. Como $f(a) \neq 0$ también es $h(a) \neq 0$ y por lo tanto existe el límite

$$\lim_{z \to 0} \frac{h(a+z) - h(a)}{z} = \frac{f'(a)}{mh(a)^{m-1}} = \frac{f'(a)h(a)}{mf(a)}$$

■

Si $g : \Omega \to \mathbb{C}$ es un logaritmo continuo de una función holomorfa $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ en general no es posible expresar globalmente g en la forma $g = L \circ f$ donde L es un logaritmo continuo de z, pero se puede asegurar asegurar que existe una descomposición local de este tipo.

Lema 2.6.10 *Si $g : \Omega \to \mathbb{C}$ es un logaritmo continuo de una función continua $f : \Omega \to \mathbb{C}$ entonces g se puede expresar localmente como la composición de f con un logaritmo continuo de z: Para cada $a \in \Omega$ hay un disco $D(a,r) \subset \Omega$ y un logaritmo continuo de la identidad L, definido en un entorno abierto de $f(D(a,r))$, tal que $g(z) = L(f(z))$ para todo $z \in D(a,r)$.*

DEM: Véase [17] ejerc. 3.5 ■

Proposición 2.6.11 *Si $g : \Omega \to \mathbb{C}$ es un logaritmo continuo de una función holomorfa $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ entonces $g \in \mathcal{H}(\Omega)$ y para todo $z \in \Omega$ se cumple $g'(z) = f'(z)/f(z)$*

DEM: Dado $a \in \Omega$, aplicando el lema 2.6.10 se obtiene un disco $D(a,r) \subset \Omega$ tal que $f(D(a,r)) \subset \Omega_b$ donde Ω_b es un entorno abierto de $b = f(a) \neq 0$ en el que hay definido un logaritmo continuo de z, $L_b(z)$, que verifica $g(z) = L_b(f(z))$ para todo $z \in D(a,r)$. Teniendo en cuenta que L_b es holomorfo (en virtud de 2.6.8) y aplicando la regla de la cadena se obtiene que existe la derivada $g'(a) = f'(a)/f(a)$. Como esta afirmación es cierta para cada $a \in \Omega$, queda demostrado que g es holomorfa en Ω. ■

Proposición 2.6.12 *Si $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ una condición necesaria y suficiente para que f posea un logaritmo continuo ($\Leftrightarrow$ holomorfo) en Ω es que $0 \notin f(\Omega)$ y la función $f'(z)/f(z)$ tenga primitiva en Ω. Si Ω es conexo y g es una primitiva de f'/f en Ω existe $c \in \mathbb{C}$ tal que $g(z) - c$ es un logaritmo holomorfo de f en Ω.*

DEM: Para demostrar la primera afirmación no es restrictivo suponer que Ω es conexo. Si existe $g \in \mathcal{H}(\Omega)$ con $e^g = f$ entonces $0 \notin f(\Omega)$, y en virtud de la proposición 2.6.11 g es una primitiva de f'/f. Recíprocamente, si $0 \notin f(\Omega)$ y g es una primitiva de f'/f en Ω entonces $h(z) = e^{g(z)}/f(z)$ es constante en el abierto conexo Ω porque su derivada es idénticamente nula: $h' = e^g(g'f - f')/f^2 = 0$. Si $h(z) = k$ para todo $z \in \Omega$ debe ser $k \neq 0$ y tomando $c \in \log k$ se obtiene que para todo $z \in \Omega$ se cumple $e^{g(z)}/f(z) = e^c$, e.d. $e^{g(z)-c} = f(z)$. ■

Corolario 2.6.13 *Si $\{z : |z| = r\} \subset \Omega$ entonces en Ω no se puede definir un logaritmo continuo de la identidad y $1/z$ no tiene primitiva en Ω.*

DEM: Si existiese una función continua $L : \Omega \to \mathbb{C}$ tal que $e^{L(z)} = z$ para todo z en Ω, aplicando 2.6.5 a las restricciones de L y Log al conjunto conexo $T = \{re^{it} : |t| < \pi\}$ se obtendría que la diferencia $\operatorname{Log} - L$ es constante en T, con lo cual Log se podría extender a una función continua sobre toda la circunferencia $\{z : |z| = r\}$. Esta contradicción pone de manifiesto que L no puede existir. En virtud de 2.6.12, $1/z$ no tiene primitiva en Ω. (Véase también el ejercicio 3.4 de [17]). ■

Con recursos avanzados de la teoría de funciones holomorfas se puede demostrar que en un abierto $\Omega \subset \mathbb{C}$ se puede definir un logaritmo continuo de z si y sólo si los dos puntos $0,\infty$ están en la misma componente conexa de $\mathbb{C}_\infty \setminus \Omega$ (ejercicio 5.16).

Corolario 2.6.14 *Sea $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n(z-a)^n$ la función holomorfa definida por una serie de Laurent en su corona de convergencia $A(a; r, R)$. Una condición necesaria y suficiente para que f tenga primitiva en la corona es que $a_{-1} = 0$.*

DEM: Si $a_{-1} = 0$ todos los términos de la serie de Laurent tienen primitiva y se puede formar la serie de Laurent $\displaystyle\sum_{n=-\infty, n\neq -1}^{+\infty} \frac{a_n}{n+1}(z-a)^{n+1}$ que tiene la misma corona de convergencia $A(a; r, R)$. Su suma $F(z)$ es una función holomorfa que, en virtud de 2.3.8, verifica $F' = f$.

Recíprocamente, por lo que se acaba de demostrar $f(z) - a_{-1}/(z-a)$ tiene primitiva en $A(a; r, R)$, y si se supone que si f tiene primitiva se concluye que también la tiene $a_{-1}/(z-a)$ luego, en virtud de 2.6.13, debe ser $a_{-1} = 0$. ■

2.7. Técnicas de cálculo

Ya hemos visto que la función definida por una serie de potencias, (resp. serie de Laurent) es holomorfa en su disco (resp. corona) de convergencia. En el capítulo 3 se demostrará que toda función holomorfa admite un desarrollo en serie de potencias (resp. de Laurent) en cada disco (resp corona) contenido de su dominio. Por esta razón los desarrollos en serie de potencias y en serie de de Laurent desempeñan un papel central en la teoría de las funciones holomorfas.

El objetivo de esta sección es exponer técnicas útiles para calcular loa desarrollos de algunas funciones concretas que vienen dadas por una fórmula en términos de las funciones elementales. La técnica consiste en utilizar los desarrollos conocidos de las funciones elementales y manipularlos adecuadamente para conseguir el resultado deseado.

Ya conocemos la serie geométrica y los desarrollos en serie de potencias de la funciones e^z, $\operatorname{sen} z$, $\cos z$. A este catálogo de desarrollos conocidos, hay que añadir los que se consideran al comienzo de esta sección: El desarrollo alrededor de 0 de la función $\operatorname{Log}(1+z)$, y la serie binomial.

Proposición 2.7.1 *La función* $\operatorname{Log}(1+z)$*, que está definida en* $\mathbb{C} \setminus \{x \in \mathbb{R} : x \leq -1\}$*, tiene el siguiente desarrollo en serie de potencias en el disco* $D(0,1)$*:*

$$\operatorname{Log}(1+z) = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \frac{z^4}{4} + \cdots \ \textit{si } |z| < 1$$

Dem: Sabemos que la función $\operatorname{Log}(1+z)$ es holomorfa en $\mathbb{C} \setminus \{x \in \mathbb{R} : x \leq -1\}$ con derivada $1/(1+z)$. La serie de potencias

$$z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \frac{z^4}{4} + \cdots$$

de radio de convergencia 1, define en $D(0,1)$ una función holomorfa h cuya derivada se obtiene derivando la serie término a término:

$$h'(z) = 1 - z + z^2 - z^3 + \cdots = \frac{1}{1+z}$$

Las funciones $h(z)$ y $\operatorname{Log}(1+z)$ tienen la misma derivada en el disco $D(0,1)$, y aplicando la proposición 2.3.3 se deduce que $h(z) - \operatorname{Log}(1+z)$ es constante en $D(0,1)$. Como $h(0) - \operatorname{Log}(1+0) = 0$ se concluye que $\operatorname{Log}(1+z) = h(z)$ si $|z| < 1$. ∎

La *serie binomial* que se considera a continuación se puede utilizar para obtener el desarrollo en serie de potencias, alrededor de 0, de las ramas holomorfas de $\sqrt[n]{1+z}$.

En lo que sigue, si $\alpha \in \mathbb{C}$ se designa por $S_\alpha(z)$ la determinación principal de $(1+z)^\alpha$, definida en $\Omega_1 := \mathbb{C} \setminus \{x \in \mathbb{R} : x \leq -1\}$ por $S_\alpha(z) = e^{\alpha \operatorname{Log}(1+z)}$.

En el siguiente teorema el significado de $\binom{\alpha}{n}$ con $\alpha \in \mathbb{C}$, es el habitual

$$\binom{\alpha}{n} = \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}$$

Proposición 2.7.2 (Serie binomial) *La determinación principal de* $(1+z)^\alpha$ *admite el siguiente desarrollo en serie de potencias en* $D(0,1)$*:*

$$S_\alpha(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} z^n \ \textit{si } |z| < 1$$

(Si $\alpha = m \in \mathbb{N}$ *el desarrollo es válido en todo el plano pues la serie se reduce al polinomio que resulta de aplicar la fórmula del binomio de Newton a* $(1+z)^m$*).*

Dem: Si $\alpha \notin \mathbb{N}$ se verifica $\lim_n \left| \frac{\binom{\alpha}{n}}{\binom{\alpha}{n+1}} \right| = \lim_n \left| \frac{n+1}{\alpha - n} \right| = 1$ luego el radio de convergencia de la serie es 1 en virtud de 2.2.4. La función $f_\alpha(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} z^n$, definida en $D(0,1)$ verifica

$$f_{\alpha+1}(z) = (1+z)f_\alpha(z); \qquad f'_\alpha(z) = \alpha f_{\alpha-1}(z);$$

La segunda propiedad es inmediata usando 2.3.4 y la primera se sigue fácilmente de

$$\binom{\alpha+1}{n} = \binom{\alpha}{n} + \binom{\alpha}{n-1}$$

Estas dos propiedades de f_α implican que la derivada de $f_\alpha(z)S_{-\alpha}(z)$ es idénticamente nula en $D(0,1)$:

$$f'_\alpha(z)S_{-\alpha}(z) - \frac{\alpha}{1+z} f_\alpha(z)S_{-\alpha}(z) = \alpha S_{-\alpha}(z)(f_{\alpha-1}(z) - f_{\alpha-1}(z)) = 0$$

Entonces $f_\alpha(z)S_{-\alpha}(z)$ es constante en $D(0,1)$ y el valor constante es $1 = f_\alpha(0)S_{-\alpha}(0)$ luego $f_\alpha(z) = S_\alpha(z)$ para todo $z \in D(0,1)$ ■

Operaciones con series de potencias. Tomando como base los desarrollos conocidos que se acaban de considerar se pueden calcular desarrollos en serie de potencias, o en serie de Laurent, de funciones concretas dadas por una fórmula en términos de las funciones elementales. Los siguientes resultados proporcionan el fundamento para los cálculos formales que se suelen utilizar en la práctica para hallar los desarrollos.

A) En primer lugar es fácil justificar que las funciones definidas mediante series de potencias se pueden manipular formalmente como las definidas mediante polinomios: Sean

$$\sum_{n=0}^{\infty} a'_n (z-a)^n; \qquad \sum_{n=0}^{\infty} a''_n (z-a)^n$$

dos series de potencias centradas en el mismo punto $a \in \mathbb{C}$, con radios de convergencia $\rho' > 0$, $\rho'' > 0$ y sean f, g, respectivamente, las funciones definidas por su suma en los correspondientes discos de convergencia. Si $\rho := \min\{\rho', \rho''\}$, en el disco $D(a,\rho)$ están definidas la suma $f+g$ y el producto fg.

Es inmediato que $f+g$ es desarrollable en serie de potencias en este disco y mediante una serie con coeficientes $a'_n + a''_n$.

Usando el producto de convolución de series se obtiene que si $|z-a| < \rho$ entonces el producto fg admite el desarrollo en serie de potencias

$$f(z)g(z) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a'_n (z-a)^n \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} a''_n (z-a)^n \right) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-a)^n$$

donde $a_n = \sum_{p+q=n} a'_p a''_q$.

Conviene advertir que, en las condiciones anteriores, el radio de convergencia de la serie suma o producto puede ser mayor que $\rho := \min\{\rho', \rho''\}$.

B) Las series de potencias no sólo se pueden sumar y multiplicar y reordenar como los polinomios sino que también la composición de funciones definidas mediante series de potencias admite un desarrollo en serie de potencias que se puede obtener mediante la sustitución formal de una serie en otra:

Proposición 2.7.3 *Sean f, g funciones definidas por sendas series de potencias*

$$f(w) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (w-a)^n; \qquad g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (z-b)^n$$

en sus respectivos discos de convergencia $D(a, \rho)$, $D(b, \rho')$ donde se supone que $g(b) = a$.

Si $r > 0$ se elige de modo que $\sum_{n=1}^{\infty} |b_n| r^n < \rho'$ entonces la función compuesta $f(g(z))$ está definida en el disco $D(b, r)$, donde admite un desarrollo en serie de potencias

$$f(g(z)) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-b)^n \text{ si } |z-b| < r$$

(¡el radio de convergencia puede ser mayor que r!).

Los coeficientes c_n de este desarrollo son los que resultan cuando se sustituye formalmente la expresión $w - a = \sum_{n=1}^{\infty} b_n (z-b)^n$ en la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (w-a)^n$ y se ordena el resultado según las sucesivas potencias de $(z - b)$:

$$c_0 = a_0; \quad y \ c_k = \sum_{n=1}^{\infty} b_k(n) a_n, \ \text{ si } k \geq 1$$

donde

$$b_k(n) = \sum_{i_1+i_2+\cdots+i_n=k} b_{i_1} b_{i_2} .. b_{i_n}$$

DEM: Para una demostración directa de este resultado se puede consultar [2, 9.16]. Con los resultados del capítulo 3 se puede dar una demostración más breve basada en el hecho de que las funciones holomorfas admiten un desarrollo en serie de potencias en cada disco abierto contenido en su dominio. ■

C) Usando el principio de sustitución se puede obtener fácilmente el desarrollo en serie de potencias de la inversa de una serie de potencias :

Proposición 2.7.4 *Sea $g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (z-b)^n$ una función definida por una serie de potencias en su disco de convergencia $D(b, \rho)$. Si $b_0 = 1$ y se elige $r > 0$ de modo que $\sum_{n=1}^{\infty} |b_n| r^n < 1$ entonces $g(z)$ no se anula en $D(b, r)$ y la función $1/g(z)$, que está definida en el disco $D(b, r)$, se puede representar mediante una serie de potencias*

$$\frac{1}{g(z)} = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-b)^n \text{ para todo } z \in D(b, r)$$

DEM: Basta aplicar el principio de sustitución 2.7.3 para efectuar sustitución formal de la serie $1 - g(z) = \sum_{n=1}^{\infty} -b_n(z-b)^n$ en la serie geométrica

$$(1-w)^{-1} = 1 + w + w^2 + \cdots + w^n + \cdots$$

■

D) En la demostración de 2.7.1 aparece una idea interesante que conviene recoger aquí: *Para calcular el desarrollo en serie de potencias de una función holomorfa f puede resultar útil comenzar con el cálculo del desarrollo de su derivada.*

Para el caso de funciones multiformes sencillas como las consideradas aquí, (inversas de funciones elementales, logaritmos y raíces cuadradas de polinomios) merece la pena determinar dominios y fórmulas explícitas para ramas holomorfas de estas multifunciones.

En 3.3.8 y 4.2.4 se establecerán un criterios útiles, en términos de integrales curvilíneas, para discutir la existencia de logaritmos y raíces n-ésimas holomorfas de funciones holomorfas. Con este criterio algunas de las discusiones que siguen se podrían simplificar.

Ejemplo 2.7.5 *Ramas holomorfas de* $\operatorname{arc\,tg} z$.

$$\operatorname{tg} w = \frac{1}{i}\frac{e^{iw} - e^{-iw}}{e^{iw} + e^{-iw}} = T(e^{2iw}) \quad \text{donde} \quad T(z) = i\frac{1-z}{1+z}$$

luego $\operatorname{tg} w = z$ si y sólo si $e^{2iw} = S(z)$, donde

$$S(z) = T^{-1}(z) = \frac{1+iz}{1-iz} = -\frac{z-i}{z+i}$$

Entonces, para definir en un abierto $\Omega \subset \mathbb{C}$ una rama holomorfa de $\operatorname{arc\,tg} z$, basta definir un logaritmo holomorfo de $S(z)$ y dividirlo luego por $2i$. Es fácil ver que $S(z)$ es real ≤ 0 si y sólo si $z \in \{iy : y \in \mathbb{R},\ |y| \geq 1\}$, luego en el abierto $\Omega = \mathbb{C} \setminus \{iy : y \in \mathbb{R},\ |y| \geq 1\}$ está definida la función holomorfa

$$f(z) = \frac{1}{2i}\operatorname{Log} S(z)$$

que verifica $\operatorname{tg} f(z) = z$ para todo $z \in \Omega$. Como $f(0) = 0$ podemos afirmar que $f(z)$ es el único logaritmo holomorfo de $S(z)$, definido en Ω, que se anula en $z = 0$.

En los ejercicios 2.6 y 2.7.5 se propone el cálculo de las imágenes $f(\Omega)$, $f(D(0,1)$ y el desarrollo en serie de potencias de f en $D(0,1)$.

Análogamente, si E es un arco de circunferencia de extremos i, $-i$, en el abierto $\mathbb{C} \setminus E$ se puede definir un logaritmo holomorfo de $S(z)$, y por lo tanto una rama holomorfa de $\operatorname{arc\,tg} z$ (ejercicio 3.19 de [17]). Un resultado más general se puede ver en el ejercicio 5.20.

Ejemplo 2.7.6 *Logaritmos holomorfos de* $z^2 - 1$

La función $\operatorname{Log}(z^2-1)$ está definida en $\mathbb{C}\setminus T$ donde $T = i\mathbb{R}\cup[-1,1]$ pues

$$\{z : z^2-1\le 0\} = \{z : z^2\le 0\}\cup\{z : z^2\in[0,1]\} = i\mathbb{R}\cup[-1,1]$$

Si en vez de considerar el logaritmo principal se considera $\operatorname{Log}_{-1} z := \operatorname{Log}(-z)+\pi i$, definido en $\Omega_{-1} = \mathbb{C}\setminus\{x\in\mathbb{R} : x\ge 0\}$, se obtiene que

$$g(z) = \operatorname{Log}_{-1}(z^2-1) = \operatorname{Log}(1-z^2)+\pi i$$

es un logaritmo holomorfo de z^2-1 definido en el abierto $U := \mathbb{C}\setminus\{x :\in\mathbb{R} : |x|\ge 1\}$ pues $\{z : 1-z^2\le 0\} = \{x\in\mathbb{R} : |x|\ge 1\}$. Su desarrollo en serie de potencias en $D(0,1)\subset U$ se calcula considerando su derivada que, en virtud de 2.6.11, es

$$g'(z) = \frac{1}{z-1}+\frac{1}{z+1}$$

Usando las series geométricas de razones z y $-z$ se obtiene

$$g'(z) = -2z-2z^3-2z^5-\cdots-2z^{2n+1}-\cdots; \qquad \text{si } |z|<1.$$

Como $g(0) = \operatorname{Log}_{-1}(-1) = \operatorname{Log} 1+\pi i = \pi i$ resulta

$$g(z) = \pi i - z^2 - \frac{2}{4}z^4-\cdots-\frac{2}{2n}z^{2n}-\cdots; \qquad \text{si } |z|<1.$$

Si se desea determinar la relación que hay entre las funciones $\operatorname{Log}(z^2-1)$ y $g(z)$ en cada uno de los cuatro cuadrantes

$$A = \{x+iy : x>0, y>0\}; \qquad B = \{x+iy : x<0, y>0\};$$
$$C = \{x+iy : x<0, y<0\}; \qquad D = \{x+iy : x>0, y<0\};$$

basta fijar un punto en cada uno de ellos y comparar los valores de las dos funciones en el punto, con el fin de aplicar 2.6.5.

En el punto $a = e^{\frac{\pi}{4}i}\in A$ se cumple $g(a) = \operatorname{Log}\sqrt{2}+\frac{3}{4}\pi i = \operatorname{Log}(a^2-1)$, luego

$$g(z) = \operatorname{Log}(z^2-1) \text{ para todo } z\in A$$

En el punto $b = e^{\frac{3}{4}\pi i}\in B$ se verifica $g(b)-\operatorname{Log}(b^2-1) = 2\pi i$ luego

$$g(z)-\operatorname{Log}(z^2-1) = 2\pi i \text{ para todo } z\in B$$

Razonando de forma similar en los puntos $c=-a\in C$ y $d=-b\in D$ resulta

$$g(z) = \operatorname{Log}(z^2-1) \text{ para todo } z\in C; \quad g(z) = \operatorname{Log}(z^2-1)+2\pi i \text{ para todo } z\in D.$$

Se puede demostrar que la función z^2-1 no tiene logaritmo holomorfo en $V = \mathbb{C}\setminus[-1,1]$ (ejercicio 2.3).

■

A veces se tienen varias expresiones analíticas que proporcionan distintas ramas de la raíz n-ésima de una función holomorfa. Si se desean comparar dos ramas sobre un cierto abierto conexo A (contenido en la intersección de sus dominios) basta comparar los valores de las ramas en un sólo punto $a\in A$ y aplicar 2.6.6. Esta observación se aplica varias veces en los siguientes ejemplos.

Ejemplo 2.7.7 *Raíces cuadradas holomorfas de* $z^2 - 1$

En lo que sigue, $\sqrt{\ }$ designa a la raíz cuadrada principal, definida en $\mathbb{C} \setminus \{x \in \mathbb{R} : x \leq 0\}$. Es fácil ver que $R(z) = i\sqrt{1 - z^2}$ es una raíz cuadrada holomorfa de $z^2 - 1$ en $U := \mathbb{C} \setminus \{x \in \mathbb{R} : |x| \geq 1\}$ y $r(z) = z\sqrt{1 - \frac{1}{z^2}}$ una raíz cuadrada holomorfa de $z^2 - 1$ en $V := \mathbb{C} \setminus [-1, 1]$ (ejercicio 3.6 de [17]). La intersección de los dominios de $R(z)$ y $r(z)$ tiene dos componentes conexas que son los semiplanos

$$P = \{z : \operatorname{Im} z > 0\}; \qquad -P = \{z : \operatorname{Im} z < 0\};$$

Como $i \in P$ y $r(i) = R(i)$ se sigue que $r(z) = R(z)$ para cada $z \in P$. Por otra parte, como $r(-i) = -R(-i)$, con $-i \in -P$, podemos afirmar que $r(z) = -R(z)$ para cada $z \in -P$.

También se puede comprobar (ejercicio 3.7 de [17]) que con la fórmula

$$r^*(z) = (z + 1)\sqrt{\frac{z - 1}{z + 1}}$$

queda definida una raíz cuadrada holomorfa de $z^2 - 1$ en $V := \mathbb{C} \setminus [-1, 1]$.

Como $r^*(2) = \sqrt{3} = r(2)$ se sigue que $r^*(z) = r(z)$ para todo $z \in V$. Disponemos de dos fórmulas distintas para la misma función. La usada en la definición de $r(z)$ es la adecuada para obtener inmediatamente el desarrollo de Laurent en $|z| > 1$.

En el ejercicio 2.26 se propone el cálculo del desarrollo en serie de potencias de $R(z)$ en $D(0, 1)$ y el desarrollo de Laurent de $r(z)$ en $\{z : |z| > 1\} \subset V$.

Si para definir una raíz cuadrada holomorfa de $z^2 - 1$ se usa la fórmula $\sqrt{z^2 - 1}$, que parece más natural, se observa que su dominio es $\mathbb{C} \setminus T$ donde $T = i\mathbb{R} \cup [-1, 1]$. Este es un resultado peor que el obtenido anteriormente porque el dominio de $\sqrt{z^2 - 1}$, estrictamente contenido en el de $r(z)$, no es conexo. Tiene dos componentes conexas $A = \{z : \operatorname{Re} z > 0\} \setminus (0, 1]$ y $B = \{z : \operatorname{Re} z < 0\} \setminus [-1, 0)$. Sobre A la función $\sqrt{z^2 - 1}$ coincide con $r(z)$ pues $2 \in A$ y $r(2) = \sqrt{3}$ mientras que sobre B coincide con $-r(z)$ pues $r(-2) = -\sqrt{3}$.

Vemos así que la fórmula $\sqrt{z^2 - 1}$ no es la más apropiada para definir una raíz cuadrada holomorfa de $z^2 - 1$ porque produce una función discontinua en los puntos del eje imaginario, lo que obliga a eliminarlo del dominio. Al atravesar el eje imaginario la función definida por esta fórmula da un salto artificial desde la rama continua $r(z)$ a su opuesta.

El dominio de $\sqrt{z^2 - 1}$ al ser un subconjunto propio del dominio de $r(z)$, no es maximal respecto a la propiedad de existir en él una raíz cuadrada holomorfa de z^2-1. Los dominios de $R(z)$ y $r(z)$ si son maximales respecto a esta propiedad. Esta afirmación se puede justificar con recursos más avanzados, demostrando que en un abierto Ω existe una raíz cuadrada holomorfa de $z^2 - 1$ si y sólo si los dos puntos 1 y -1, (los ceros se $z^2 - 1$) caen en la misma componente conexa de $\mathbb{C}_\infty \setminus \Omega$ (ejercicio 5.18).

Ejemplo 2.7.8 *Ramas de la inversa de la transformación de Joukowski* $J(z) = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$

Es fácil comprobar que en $U := \mathbb{C} \setminus \{x \in \mathbb{R} : |x| \geq 1\}$ se pueden definir dos (y sólo dos) ramas holomorfas de $J^{-1}(z)$, que son

$$f_1(z) = z + i\sqrt{1 - z^2}, \quad f_2(z) = z - i\sqrt{1 - z^2}.$$

Análogamente, en $V = \mathbb{C} \setminus [-1, 1]$ también se pueden definir dos (y sólo dos) ramas holomorfas de $J^{-1}(z)$, que son

$$g_1(z) = z + z\sqrt{1 - 1/z^2}, \quad g_2(z) = z - z\sqrt{1 - 1/z^2}.$$

Los detalles se pueden ver en el ejercicio 3.9 de [17] donde también se calculan las imágenes

$$f_1(U) = \{w : \operatorname{Im} w > 0\}, \qquad f_2(U) = \{w : \operatorname{Im} w < 0\}.$$

$$g_1(V) = \{w : |w| > 1\}, \qquad g_2(V) = \{w : 0 < |w| < 1\}.$$

Si Ω es una de las dos regiones del plano ampliado limitadas por una circunferencia Γ que pasa por $+1$ y -1, entonces J es inyectiva sobre Ω. En particular es inyectiva sobre $D = D(0, 1)$, y sobre $P = \{z : \operatorname{Im} z > 0\}$. Considerando la descomposición $J(z) = T^{-1}(T(z)^2)$ con $T(z) = (z - 1)/(z + 1)$, es fácil calcular $J(D)$, $J(P)$, $J(\Omega)$, y calcular fórmulas explícitas para las inversas de $J|_P$ y $J|_D$, y $J|_\Omega$. Por este camino se llega a otras fórmulas alternativas para f_1 y f_2:

$$f_1(z) = z + i(1 + z)\sqrt{\frac{1 - z}{1 + z}}; \quad g_2(z) = z - (z + 1)\sqrt{\frac{z - 1}{z + 1}}$$

(Véanse los ejercicio 2.26, 2.27, 2.28 y 2.29 de [17]).

Ejemplo 2.7.9 *Ramas holomorfas de* $\arccos z$

Para cada $z \in \mathbb{C}$ el conjunto $\arccos z := \{w : \cos w = z\}$ no es vacío. Efectivamente, $\cos w = J(e^{iw})$ donde $J(u) = \frac{1}{2}(u + 1/u)$ luego las soluciones de la ecuación $\cos w = z$ se obtienen dividiendo por i los logaritmos de $J^{-1}(z)$ es decir

$$\arccos z = \frac{1}{i} \log J^{-1}(z)$$

Si $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ es una función holomorfa que verifica $\cos f(z) = z$ para todo $z \in \Omega$ se dice que la función $f(z)$ es una rama o determinación holomorfa de $\arccos z$, definida en Ω.

Un primer problema que se plantea es el de caracterizar los abiertos sobre los que existen ramas holomorfas de $\arccos z$. Con recursos avanzados de la teoría se puede demostrar (ejercicio 7.16 de [17]) que estos abiertos son precisamente aquellos para los que los tres puntos $1, -1, \infty$ caen en la misma componente conexa de $\mathbb{C}_\infty \setminus \Omega$

De momento sólo nos preocuparemos de obtener algunos abiertos sencillos sobre los que sea posible definir de forma explícita una rama holomorfa de $\arccos z$.

Si deseamos encontrar abiertos $\Omega \subset \mathbb{C}$ en los que se pueda definir una rama holomorfa de $\arccos z$, es decir, una función $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ que cumpla

$$J(e^{if(z)}) = z \text{ para todo } z \in \Omega$$

es natural empezar considerando abiertos en los que se pueda definir una rama holomorfa de la inversa $J^{-1}(z)$ de la transformación de Joukowski.

Según 2.7.8, en $U := \mathbb{C} \setminus \{x \in \mathbb{R} : |x| \geq 1\}$ hay definidas dos de estas ramas,

$$f_1(z) = z + i\sqrt{1-z^2}, \quad f_2(z) = z - i\sqrt{1-z^2}$$

con imágenes $f_1(U) = \{w : \operatorname{Im} w > 0\}$, $f_2(U) = \{w : \operatorname{Im} w < 0\}$, contenidas en el dominio del logaritmo principal, luego con la fórmula

$$f(z) = \frac{1}{i}\operatorname{Log}(z + i\sqrt{1-z^2})$$

queda definida en U una rama holomorfa de $\arccos z$. Su desarrollo en serie de potencias en $D(0,1)$ se propone en el ejercicio 2.24.

Además de esta rama, en el ejercicio 3.22 de [17] se consideran otras, definidas en los abiertos

$$G_1 = \mathbb{C} \setminus \{x \in \mathbb{R} : x \geq -1\}; \quad G_2 = \mathbb{C} \setminus \{x \in \mathbb{R} : x \leq 1\}$$

mediante las fórmulas

$$g_1(z) = \pi + \frac{1}{i}\operatorname{Log}(-z + z\sqrt{1-1/z^2}), \quad g_2(z) = \frac{1}{i}\operatorname{Log}(z + z\sqrt{1-1/z^2})$$

En la sección 8.3 se muestra que el conjunto $\arccos z$ es infinito numerable y se distribuye en dos rectas paralelas simétricas respecto al eje real, de modo que sobre cada recta sus puntos están igualmente espaciados, a distancia 2π, siendo los puntos de una recta opuestos a los de la otra (cuando $z \in \mathbb{R}$, las dos rectas se confunden con el eje real). Según esto, cada uno de los abiertos $A := \{z : 0 < \operatorname{Re} z < \pi\}$, $B := \{z : \operatorname{Im} z > 0, 0 < \operatorname{Re} z < 2\pi\}$ sólo puede contener, a lo sumo, un punto del conjunto $\arccos z$, lo que significa que la restricción de la función $\cos z$ a cada uno de ellos es inyectiva (véase el ejercicio 3.20 de [17]). Esto hace posible definir ramas uniformes de $\arccos z$ sobre $\cos(A)$ y sobre $\cos(B)$. Según se muestra en la sección 8.3, y en el ejercicio 3.21 de [17] $\cos(A) = U$ y $\cos(B) = G_1$, por lo que las inversas de $\cos|_A : A \to U$ y $\cos|_B : B \to G_1$ son, respectivamente, las ramas f y g_1 definidas anteriormente.

Funciones analíticas.

Definición 2.7.10 *Una función $f : \Omega \to \mathbb{C}$ definida en un abierto $\Omega \subset \mathbb{C}$ se dice que es analítica en $a \in \Omega$ si existe un disco $D(a,r) \subseteq \Omega$, tal que f se puede representar en $D(a,r)$ mediante una serie de potencias*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-a)^n \qquad \text{si } z \in D(a,r)$$

Cuando f es analítica en cada $a \in \Omega$ se dice que f es analítica en Ω.

Así por ejemplo, como consecuencia directa del teorema de reordenación 2.2.6 se puede afirmar que

Proposición 2.7.11 *La función definida por una serie de potencias en su disco de convergencia es analítica.*

Conviene advertir que la definición 2.7.10 no exige que $D(a, r)$ sea el disco de convergencia de la serie de potencias. Puede ocurrir que el disco de convergencia no esté contenido en Ω, como sucede en el caso de la función analítica definida en $\Omega = D(0, 1)$ mediante la suma de la serie geométrica $\sum_{n=0}^{+\infty} z^n$, cuyo desarrollo en serie de potencias alrededor de $b \in D(0, 1) \setminus [0, 1)$ converge en un disco que no está contenido en Ω (véase 2.3.7).

Las funciones analíticas no sólo son holomorfas sino que son indefinidamente derivables en virtud de 2.3.5. Uno de los resultados fundamentales y sorprendentes de la teoría de funciones analíticas de variable compleja que se verá en el próximo capítulo, asegura que el recíproco también es cierto: Toda función holomorfa es analítica.

Mientras que no se establezca este hecho $\mathcal{A}(\Omega)$ denotará el conjunto de todas las funciones analíticas en Ω. Los resultados sobre series de potencias que se han visto en este capítulo implican que $\mathcal{A}(\Omega)$ es un espacio vectorial estable frente a la multiplicación. Usando el principio de sustitución 2.7.3 se podría dar una demostración directa de que la composición de funciones analíticas sigue siendo analítica. También se podría demostrar, usando 2.7.4, que si f es analítica en Ω y $\Omega_0 = \{z \in \Omega : f(z) \neq 0\}$ entonces $1/f$ es analítica en Ω_0. Aquí no damos demostraciones directas de estos resultados, porque en el contexto de las funciones de variable compleja, resultarán obvios una vez que se haya demostrado que las funciones holomorfas son analíticas.

Weierstrass puso de manifiesto que es posible desarrollar una teoría de funciones analíticas directamente, a partir de su definición, sin utilizar este hecho.

El punto de vista de Weierstrass tiene interés en relación con el análisis real: Para funciones reales de variable real, usando series de potencias reales, se puede definir de modo análogo la noción de *función analítica real*. Estas funciones son indefinidamente derivables en todos los puntos de su dominio pero existen funciones reales indefinidamente derivables que no son analíticas. El ejemplo típico de esta situación es la función

$$f(x) = e^{-1/x^2} \text{ si } x \neq 0; \quad f(0) = 0$$

que en un entorno de 0 no se puede representar mediante mediante una serie de potencias porque $f^{(n)}(0) = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Análogamente, para funciones reales de n variables reales de clase C^∞ también se puede definir la noción de función analítica requiriendo que en un entorno de cada punto de su dominio la función se pueda representar mediante su serie de Taylor.

2.8. Complementos

2.8.1. Sobre familias sumables

En algunos temas de Análisis (como la teoría de series de potencias) a menudo es conveniente considerar sumas del tipo $\sum_{j\in J} z_j$ donde $(z_j)_{j\in J}$ es una familia de números complejos con indices en un conjunto arbitrario J donde, ni siquiera en el caso de ser numerable, hay prefijado un orden natural como ocurre en el caso de las series, cuando $J = \mathbb{N}$. Con la noción de familia sumable de números complejos 2.8.1 se logra dar sentido a sumas de este tipo. Cuando J es numerable se demuestra que esta noción es equivalente a la convergencia conmutativa 2.8.9 (definida en términos de convergencia incondicional de series 2.8.8) lo que permite dar una rápida demostración de la equivalencia entre la convergencia absoluta y la convergencia incondicional de series de números complejos 2.8.10 (véase el corolario 2.8.10 y los teoremas 8.32, 8.33 en [2] pág 239-240).

El resultado central de la teoría de familias sumables es el teorema de sumación por paquetes 2.8.6, que establece una propiedad asociativa generalizada para las sumas infinitas. Este resultado, que se formula y justifica cómodamente con el lenguaje de las familias sumables, proporciona un tratamiento sencillo y unificado de la sumación iterada de series dobles y del producto de convolución de series. Además permite justificar ciertas manipulaciones formales que se suelen hacer para calcular desarrollos en serie de potencias.

Dada una familia de números complejos $(z_j)_{j\in J}$, con índices en un conjunto arbitrario J, la idea para dar sentido a una suma del tipo $\sum_{j\in J} z_j$ consiste en considerar, para los subconjuntos finitos $H \subset J$, las sumas finitas $S_H = \sum_{j\in H} z_j$ y luego el límite de estas sumas finitas, en el sentido que se precisa en la siguiente definición:

Definición 2.8.1 *La familia $(z_j)_{j\in J}$ es sumable con suma $S \in \mathbb{C}$ si se verifica:*
Para cada $\epsilon > 0$ existe $H(\epsilon) \subset J$ finito, tal que si $H \subset J$ es finito y $H \supset H(\epsilon)$ entonces $|S_H - S| < \epsilon$. En este caso la suma S de la familia se denota $\sum_{j\in J} z_j$.

Si $\mathcal{H}(J)$ es la familia de las partes finitas de J, dirigida por inclusión, el lector que esté familiarizado con la noción de red habrá reconocido que $(S_H)_{H\in\mathcal{H}(J)}$ es una red y que en la definición 2.8.1 lo que se hace es requerir que esta red tenga límite S.

En las condiciones de la definición anterior es inmediato que la suma S es única. Además, cuando J es finito, resulta el caso particular de una suma finita.

En lo que sigue, aunque no se sepa que la familia $(z_j)_{j\in J}$ es sumable es cómodo adoptar un abuso de notación similar al que se usa con las series: El símbolo $\sum_{j\in J} z_j$ significa que se está considerando la sumabilidad de la familia $(z_j)_{j\in J}$. En el caso de que sea sumable se suele decir también que $\sum_{j\in J} z_j$ es sumable y con el mismo símbolo se designa también el valor de la suma.

En el caso $J = \mathbb{N}$ hay que advertir que la noción de familia sumable es distinta de la noción usual de serie convergente. Dada una sucesión $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$, para la definición de convergencia de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ se tiene en cuenta el orden de $\mathbb{N}$, ya que sólo se consideran sumas finitas del tipo $S_{\{1,2,\cdots n\}} = z_1 + z_2 + \cdots + z_n$, y se requiere luego que estas sumas formen una sucesión convergente. Es decir, en la definición de suma de una serie $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ interviene una suma ordenada y se obtiene la suma total a base de ir añadiendo términos de acuerdo con el orden usual de $\mathbb{N}$.

Por otra parte, la definición de familia sumable $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es intrínsecamente una noción de suma desordenada donde la suma total se obtiene añadiendo sumandos, en cantidad finita y en forma completamente arbitraria. Por ello, incluso cuando $J = N$, aquí conviene distinguir los dos conceptos usando notaciones distintas, $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$, $\sum_{n\in\mathbb{N}} z_n$, según se considere, respectivamente, una serie en sentido usual o una suma en el sentido de las familias sumables.

Los resultados elementales recogidos en la siguiente proposición son consecuencia directa de la definición de familia sumable y se dejan al cuidado del lector.

Proposición 2.8.2 *Sean $(z_j)_{j\in J}$, $(w_j)_{j\in J}$ familias de números complejos:*

i) Si $(z_j)_{j\in J}$, $(w_j)_{j\in J}$ son sumables y $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ entonces $(\lambda z_j + \mu w_j)_{j\in J}$ también lo es y se cumple: $\sum_{j\in J}(\lambda z_j + \mu w_j) = \lambda \sum_{j\in J} z_j + \mu \sum_{j\in J} w_j$.

ii) Si $C := \{j \in J : z_j \neq 0\}$ entonces $(z_j)_{j\in J}$ es sumable si y sólo si $(z_j)_{j\in C}$ es sumable y en este caso $\sum_{j\in J} z_j = \sum_{j\in C} z_j$. En particular, si C es finito, la familia $(z_j)_{j\in J}$ es sumable con suma $\sum_{j\in C} z_j$.

iii) Si $F := \{j \in J : z_j \neq w_j\}$ es finito y la familia $(z_j)_{j\in J}$ es sumable entonces $(w_j)_{j\in J}$ también lo es.

v) Si $\tau : I \to J$ es una biyección y $w_j := z_{\tau(j)}$ entonces $(z_j)_{j\in J}$, es sumable si y sólo si $(w_j)_{j\in J}$ es sumable y en este caso las dos sumas valen lo mismo.

Proposición 2.8.3 *Una condición necesaria y suficiente para que $(z_j)_{j\in J}$ sea sumable es que se cumpla la siguiente condición de Cauchy: Para cada $\epsilon > 0$ existe $H(\epsilon) \subset J$ finito, tal que si $H \subset J$ es finito y $H \cap H(\epsilon) = \emptyset$ entonces $|S_H| \leq \epsilon$.*

DEM: Véase [17] ejerc. 1.9 ■

Teorema 2.8.4 *Para una familia de números complejos $(z_j)_{j\in J}$ son equivalentes:*

a) $\sum_{j\in J} |z_j|$ es sumable.

b) $\sum_{j\in J} z_j$ es sumable.

c) El conjunto de las sumas finitas $\{\sum_{j\in H} z_j : H \in \mathcal{H}(J)\}$ es acotado.

d) El conjunto de las sumas finitas $\{\sum_{j\in H} |z_j| : H \in \mathcal{H}(J)\}$ es acotado.

DEM: Véase [17] ejerc. 1.10 ■

Conviene que quede enunciado explícitamente el siguiente hecho que queda implícito en la última parte de la demostración del teorema 2.8.4.

Corolario 2.8.5 *Una familia $(x_j)_{j\in J}$ de números reales no negativos es sumable si y sólo si la familia de sumas finitas $\sigma_H = \sum_{j\in H} x_j$ es acotada. En este caso*

$$\sum_{j\in J} x_j = \sup\{\sigma_H : H \in \mathcal{H}(J)\}$$

Usando la condición de Cauchy se obtiene fácilmente que si $L \subset J$ y la familia $(z_j)_{j\in J}$ es sumable, entonces $(z_j)_{j\in L}$ también lo es: Dado $\epsilon > 0$, si $H(\epsilon)$ es el subconjunto finito de J que proporciona la condición de Cauchy para la familia sumable $(z_j)_{j\in J}$ entonces $H(\epsilon) \cap L$ es un subconjunto finito de L que sirve para ver que la familia $(z_j)_{j\in L}$ cumple la condición de Cauchy.

Teorema 2.8.6 (Sumación por paquetes) *Dada una familia sumable $(z_j)_{j\in J}$ y una partición $\{J_\alpha : \alpha \in A\}$ de J formada por conjuntos no vacíos, se verifica:*
Todas las familias $(z_j)_{j\in J_\alpha}$ son sumables y si $S_\alpha = \sum_{j\in J_\alpha} z_j$ entonces la familia de las sumas $(S_\alpha)_{\alpha\in A}$ es sumable y se cumple:

$$\sum_{j\in J} z_j = \sum_{\alpha\in A} S_\alpha = \sum_{\alpha\in A} \left(\sum_{j\in J_\alpha} z_j \right)$$

DEM: Véase [17] ejerc. 1.11 ■

Proposición 2.8.7 *Una familia $(z_j)_{j\in J}$ es sumable si y sólo si $C := \{j \in J : z_j \neq 0\}$ es numerable y $(z_j)_{j\in C}$ es sumable. En este caso $\sum_{j\in J} z_j = \sum_{j\in C} z_j$*

DEM: Véase [17] ejerc. 1.12 ■

Según la proposición 2.8.7 a la hora de estudiar la sumabilidad de una familia concreta $(z_j)_{j\in J}$ no es restrictivo suponer que J es numerable. Después de este resultado parece que el estudio de las familias sumables se debería restringir al de las sucesiones sumables, es decir al caso $J = \mathbb{N}$. Sin embargo hay dos razones para considerar familias sumables con índices en un conjunto abstracto J. La primera de ellas es que a la hora de considerar todas las familias sumables con índices en J, el conjunto numerable C que aparece en la proposición 2.8.7 no es común a todas las familias. La segunda es que, incluso en el caso de que J sea numerable y se esté considerando una única familia, no es recomendable numerar J y reconsiderar la familia con índices en $\mathbb{N}$. En el caso caso de las series dobles, donde $J = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, cualquier orden que se imponga en J es completamente artificial y ajeno a la noción de familia sumable.

Familias numerables y series dobles
Cuando J es numerable hay otra alternativa para dar sentido a sumas de números complejos del tipo $\sum_{j\in J} z_j$, basada en la noción de serie incondicionalmente convergente: Consiste en ordenar los elementos de J utilizando una biyección $\tau : \mathbb{N} \to J$. Esto permite considerar la serie $\sum_{n=1}^{\infty} z_{\tau(n)}$ y exigir que esta serie sea incondicionalmente convergente. De esta manera se logra una definición de suma, independiente de la biyección τ, que también se puede formular así:

Definición 2.8.8 *Si J es infinito numerable diremos que la suma $\sum_{j\in J} z_j$ es conmutativamente convergente, con suma S, cuando para cada biyección $\tau : \mathbb{N} \to J$, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} z_{\tau(n)}$ es convergente y su suma es S.*

Obsérvese que para $J = \mathbb{N}$ la convergencia conmutativa no es otra cosa que la convergencia incondicional.

Proposición 2.8.9 *Para una familia de números complejos $(z_j)_{j\in J}$, indicada en un conjunto numerable J, son equivalentes:*

a) $\sum_{j\in J} z_j$ *es sumable (con suma S);*

b) $\sum_{j\in J} z_j$ *es conmutativamente convergente (con suma S).*

Dem: Véase [17] ejerc. 1.13 ■

Corolario 2.8.10 *Para series de números complejos la convergencia absoluta y la convergencia incondicional son equivalentes.*

Dem: Véase [17] ejerc. 1.14 ■

Una vez que ha sido establecida la equivalencia entre sumabilidad y convergencia conmutativa nos proponemos obtener criterios útiles con los que sea posible garantizar, en situaciones concretas, la sumabilidad de una familia dada.

Corolario 2.8.11 *Si J es numerable y $\sigma : \mathbb{N} \to J$ es una biyección, son equivalentes:*

a) $\sum_{j\in J} z_j$ *es sumable.*

b) $\sum_{n=1}^{\infty} |z_{\sigma(n)}| < +\infty$.

Dem: Véase [17] ejerc. 1.15 ■

Resultados clásicos sobre series dobles y producto de series se obtienen fácilmente aplicando los obtenidos anteriormente cuando $J = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$.

Proposición 2.8.12 *Sea $\{z_{nk} : (n,k) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N}\}$ una sucesión doble de números complejos tal que $\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} |z_{nk}| < +\infty$. Entonces la familia $(z_{nk})_{(n,k)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}}$ es sumable y su suma S se puede calcular mediante sumas iteradas:*
Para cada $n \in \mathbb{N}$ y cada $k \in \mathbb{N}$ las series $\sum_{k=1}^{\infty} z_{nk}$, $\sum_{n=1}^{\infty} z_{nk}$ son absolutamente convergentes y sus sumas forman series absolutamente convergentes que verifican

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} z_{nk} = \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} z_{nk} = S$$

Dem: Véase [17] ejerc. 1.16 ■

Corolario 2.8.13 *Sean $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ series de números complejos y $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ su producto de convolución definido por $c_n = a_1 b_n + a_2 b_{n-1} + \cdots + a_n b_1$.*

Si las series $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ son absolutamente convergentes se verifica:

a) $(a_i b_j)_{(i,j)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}}$ *es una familia sumable con suma* $S = \left(\sum_{i=1}^{\infty} a_i\right)\left(\sum_{j=1}^{\infty} b_j\right)$.

b) La serie $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ *es absolutamente convergente con suma* $(\sum_{n=1}^{\infty} a_n)(\sum_{n=1}^{\infty} b_n)$.

Dem: Véase [17] ejerc. 1.17 ■

Familias sumables en espacios normados

Para la noción de familia sumable de números complejos, el hecho de que en $\mathbb{C}$ hay definido un producto es irrelevante. La noción se puede dar para familias en un espacio normado, o más generalmente en un conjunto E dotado de una estructura de grupo con una topología separada, lo que permite considerar límites de sumas finitas (véase [5]). En este contexto conviene advertir que la suficiencia de la condición de Cauchy 2.8.6 y la demostración del teorema de sumación por paquetes 2.8.4 requiere que E sea completo.

Así el teorema de sumación por paquetes 2.8.4 sigue valiendo para familias sumables en un espacio normado completo y lo mismo ocurre con la proposición 2.8.9. Sin embargo corolario 2.8.13 no tiene sentido para familias en un espacio normado. Se deja al cuidado del lector las posibles extensiones de este corolario para el caso de que una de las dos series sea de escalares.

El siguiente teorema recoge los resultados que siguen valiendo en el contexto de los espacios normados

Teorema 2.8.14 *Si J es numerable, se consideran las siguientes propiedades de una familia $(\mathbf{x}_j)_{j\in J}$ en un espacio normado completo $(E, \| \ \|)$*

a) $\sum_{j\in J} \|\mathbf{x}_j\|$ *es sumable.*

b) Para cada biyección $\tau : \mathbb{N} \to J$ la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \left\|\mathbf{x}_{\tau(n)}\right\|$ converge.

c) Para alguna biyección $\sigma : \mathbb{N} \to J$ la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \left\|\mathbf{x}_{\sigma(n)}\right\|$ converge.

d) $\sum_{j\in J} \mathbf{x}_j$ *es sumable (con suma* $\mathbf{s}$*)*

e) $\sum_{j\in J} \mathbf{x}_j$ *es conmutativamente convergente (con suma* $\mathbf{s}$*)*

f) El conjunto de las sumas finitas $\{\sum_{j\in H} \mathbf{x}_j : H \in \mathcal{H}(J)\}$ es acotado.

Entonces a) $\Leftrightarrow$ b) $\Leftrightarrow$ c) $\Rightarrow$ d) $\Leftrightarrow$ e) $\Rightarrow$ f), y si E es de dimensión finita, todas las propiedades son equivalentes.

NOTA

En [7, pág.101] se puede ver una demostración directa, que no utiliza la completitud de E, de la equivalencia d) $\Leftrightarrow$ e) en 2.8.14. Con recursos avanzados de Análisis Funcional se puede probar que e) $\Rightarrow$ a) si y sólo si E es de dimensión finita.

2.8.2. Sobre convergencia uniforme

Sea X un conjunto no vacío, (E, ρ) un espacio métrico y E^X el conjunto de todas las funciones $f : X \to E$. Si $\emptyset \neq K \subset X$ y $f, g \in E^X$ se define

$$\rho_K(f, g) = \sup\{\rho(f(x), g(x)) : x \in K\} \quad (\leq +\infty)$$

Definición 2.8.15 *Una sucesión f_n en E^X converge puntualmente hacia $f \in E^X$ si* $\lim_n \rho(f_n(x), f(x)) = 0$ *para cada $x \in X$. Si además se verifica que* $\lim_n \rho_K(f_n, f) = 0$ *se dice que f_n converge hacia f uniformemente sobre K*

Proposición 2.8.16 *Si E es un espacio métrico completo, una condición necesaria y suficiente para que la sucesión (f_n) sea uniformemente convergente sobre K es que se cumpla la condición de Cauchy para la convergencia uniforme:*
Para cada $\epsilon > 0$ existe $n_\epsilon \in \mathbb{N}$ tal que si $q > p \geq n_\epsilon$ entonces $\rho_K(f_p f_q) < \epsilon$.

Dem: La necesidad se sigue de la desigualdad. $\rho_K(f_p, f_q) \leq \rho_K(f_p, f) + \rho_K(f, f_q)$. Para probar que la condición es suficiente obsérvese que para cada $x \in K$ es $\rho(f_p(x), f_q(x)) \leq \rho_K(f_p, f_q)$ luego $(f_n(x))$ es una sucesión de Cauchy que converge hacia un punto $f(x) \in E$. Dado $\epsilon > 0$ tomando $q > p \geq n_\epsilon$ se cumple que $\rho(f_p(x), f_q(x)) < \epsilon$ para todo $x \in K$. Fijando $x \in K$ y pasando al límite en la última desigualdad cuando $q \to +\infty$ se obtiene que para todo $x \in K$ y todo $p > n(\epsilon)$ se verifica $\rho(f_p(x), f(x)) \leq \epsilon$ es decir $p > n(\epsilon)$ implica $\rho_K(f_p, f) \leq \epsilon$. ■

Teorema 2.8.17 *Si X es un espacio topológico y $f_n : X \to E$ una sucesión de funciones continuas que converge hacia $f : X \to E$ uniformemente sobre X entonces f es continua.*

Dem: La prueba de que f es continua en cualquier punto $a \in X$ se basa en la desigualdad triangular:

$$\rho(f(x), f(a)) \leq \rho(f(x), f_n(x)) + \rho(f_n(x), f_n(a)) + \rho(f_n(a), f(a)) \tag{2.2}$$

Dado $\epsilon > 0$ en virtud de la convergencia uniforme existe $n \in \mathbb{N}$ tal que para todo $x \in X$ es $\rho(f_n(x), f(x)) \leq \epsilon/3$. Por la continuidad de f_n existe un entorno V_a de a tal que para todo $x \in V_a$ se cumple $\rho(f_n(x), f_n(a)) \leq \epsilon/3$. Entonces, con la desigualdad 2.2 se concluye que para todo $x \in V_a$ se cumple $\rho(f(x), f(a)) \leq \epsilon/3 + \epsilon/3 + \epsilon/3 = \epsilon$ ■

Realmente, para obtener la continuidad de la función límite de una sucesión de funciones continuas basta que haya convergencia uniforme local, e.d. cada $x \in X$ posee un entorno V_a sobre el que la sucesión converge uniformemente. Cuando X es un espacio métrico, para obtener la continuidad de la función límite f basta que la sucesión sea uniformemente convergente sobre cada compacto $K \subset X$.

Para funciones con valores reales o complejos ($E = \mathbb{R}$ ó $\mathbb{C}$) se pueden considerar series de funciones $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$, donde $f_n : X \to E$. La serie se dice que converge puntualmente (resp. uniformemente) sobre K si la sucesión de sumas parciales $S_m(x) = \sum_{n=1}^{m} f_n(x)$ tiene la correspondiente propiedad. En ese caso queda definida sobre K la función suma

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$$

Proposición 2.8.18 [Criterio de Weierstrass] *Una condición suficiente para que la serie $\sum_{n=1} f_n(x)$ sea uniformemente convergente sobre K es que exista $m \in \mathbb{N}$ tal que*

$$\sum_{n \geq m}^{\infty} \|f_n\|_K < +\infty$$

DEM: Para cada $x \in K$ la serie numérica $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ es absolutamente convergente porque $|f_n(x)| \leq \|f_n\|_K$. Si $f : K \to \mathbb{C}$ es su suma y $S_n = \sum_{k=1}^{n} f_k$, para todo $n \geq m$ y todo $x \in K$ se cumple

$$|f(x) - S_n(x)| = |\sum_{k>n} f_k(x)| \leq \sum_{k>n} |f_k(x)| \leq \sum_{k>n} \|f_k\|_K$$

luego $\|f - S_k\|_K \leq \epsilon_n$ donde $\epsilon_n := \sum_{k>n} \|f_k\|_K$ es una sucesión que tiende hacia 0. Esto significa que S_n converge hacia f uniformemente sobre K. ■

Al aplicar el criterio de Weierstrass, generalmente no es preciso calcular explícitamente los valores $\|f_n\|_K$. Basta encontrar una serie numérica convergente $\sum_{n=1}^{\infty} M_n$ tal que, desde un valor de n en adelante, se cumpla $|f_n(x)| \leq M_n$ para todo $x \in K$.

Los criterios de Abel y Dirichlet proporcionan condiciones suficientes bastante útiles para establecer convergencia uniforme de series de funciones que no son absolutamente convergentes:

Teorema 2.8.19 (Abel y Dirichlet) *Sea $f_n(z) = a_n(z)b_n(z)$ una sucesión de funciones complejas definidas en un conjunto K. Cada una de las siguientes condiciones es suficiente para que la serie de funciones $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ sea uniformemente convergente sobre K:*

a) La serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge uniformemente sobre K y b_n es una sucesión de funciones reales uniformemente acotada sobre K tal que para cada $z \in K$ la sucesión $b_n(z)$ es monótona.

b) La serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge uniformemente sobre K y existe $C > 0$ tal que para todo $z \in K$ se cumple

$$|b_1(z)| + \sum_{n=1}^{\infty} |b_n(z) - b_{n+1}(z)| \leq C$$

c) La sucesión de sumas $\sum_{n=1}^{m} a_n$ está uniformemente acotada sobre K, la sucesión b_n converge hacia 0 uniformemente sobre K y para cada $z \in K$ la sucesión $b_n(z)$ es monótona.

d) La sucesión de sumas $\sum_{n=1}^{m} a_n$ está uniformemente acotada sobre K, la sucesión b_n converge hacia 0 uniformemente sobre K y la serie $\sum_{n=1}^{\infty} |b_n(z) - b_{n+1}(z)|$ converge uniformemente sobre K.

DEM: La prueba se basa en la fórmula de sumación parcial de Abel:

$$F_n^m(z) = b_m(z)A_n^m(z) + \sum_{j=n}^{m-1} A_n^j(z)(b_j(z) - b_{j+1}(z)) \qquad [*]$$

donde

$$F_n^m(z) = \sum_{j=n}^{m} f_j(z), \text{ y } A_n^m(z) = \sum_{j=n}^{m} a_j(z)$$

Para establecerla se supone, por comodidad, que $n = 1$:

$$b_m(a_1+a_2+\cdots+a_m)+a_1(b_1-b_2)+(a_1+a_2)(b_2-b_3)+\cdots+(a_1+a_2+\cdots+a_{m-1})(b_{m-1}-b_m) =$$

$$= a_1(b_1 - b_m) + a_2(b_2 - b_m) + a_3(b_3 - b_m) + \cdots + a_{m-1}(b_{m-1} - b_m) + b_m(a_1 + a_2 + \cdots + a_m)$$

$$= a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_mb_m = f_1 + f_2 + \cdots + f_m = F_1^m$$

Utilizando [*] se va a demostrar si se cumple b) o c) entonces se cumple la condición de Cauchy para la convergencia uniforme sobre K: Para ello se introducen las sucesiones

$$\epsilon(n) = \sup_{m\geq n} \|A_n^m\|_K \,; \qquad \delta(n) = \sup_{m\geq n} \|F_n^m\|_K$$

b) La condición de Cauchy para la convergencia uniforme sobre K de la serie $\sum_n a_n(z)$ se traduce en que $\lim_n \epsilon(n) = 0$. Por otra parte, para todo $z \in K$ y todo $m \in \mathbb{N}$ se verifica

$$|b_m(z)| \leq |b_1(z)| + |b_m(z) - b_1(z)| \leq |b_1(z)| + \sum_{i=1}^{m-1} |b_{i+1}(z) - b_i(z)| \leq C$$

Para cada $j \geq n$ y todo $z \in K$ se cumple $|A_n^j(z)| \leq \epsilon(n)$ y aplicando [*] se obtiene

$$|F_n^m(z)| \leq \epsilon(n)C + \epsilon(n) \sum_{j=1}^{m-1} |b_j(z) - b_{j+1}(z)| \leq 2C\epsilon(n)$$

luego $\delta(n) \leq 2C\epsilon(n)$ y por lo tanto $\lim_n \delta_(n) = 0$, lo que significa que la serie $\sum_n f_n(z)$ cumple la condición de Cauchy para la convergencia uniforme sobre K.

d) Según la hipótesis existe $R > 0$ tal que para todo $z \in K$ y todo $m \in \mathbb{N}$ se cumple $|A_1^m(z)| \leq R$, luego $|A_n^m(z)| \leq 2R$ para todo $z \in K$ y todo $m \geq n$. Utilizando [*] se obtiene que para $z \in K$ y $m \geq n$ se verifica:

$$|F_n^m(z)| \leq 2R \left(\|b_m\|_K + \sum_{j=n}^{\infty} |b_j(z) - b_{j+1}(z)| \right)$$

luego $\delta(n) \leq 2C(\alpha(n) + \beta(n))$ donde las sucesiones

$$\alpha(n) = \sup_{z\in K} \sum_{j=n}^{\infty} |b_j(z) - b_{j+1}(z)|, \quad \beta(n) = \sup_{m\geq n} \|b_m\|_K$$

convergen hacia 0 en virtud de las hipótesis. Se sigue que $\lim_n \delta(n) = 0$ y se concluye como antes que la serie $\sum_n f_n(z)$ cumple la condición de Cauchy para la convergencia uniforme sobre K.

Para terminar basta ver que a) $\Rightarrow$ b) y que c) $\Rightarrow$ d): Si se cumple a) y $|b_n(z)| \leq M$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y todo $z \in K$ como la sucesión $b_n(z)$ es decreciente se tiene:

$$\sum_{n=1}^{m} |b_n(z) - b_{n+1}(z)| = b_1(z) - b_2(z) + b_2(z) - b_3(z) + \cdots + b_m(z) - b_{m+1}(z) =$$

$$= b_1(z) - b_{m+1}(z) \leq 2M$$

luego $|b_1(z)| + \sum_{n=1}^{\infty} |b_n(z) - b_{n+1}(z)| \leq M + 2M = 3M$ para todo $z \in K$.

Por otra parte, si se cumple c) y la sucesión $b_n(z)$ es decreciente para cada $z \in K$, entonces la sucesión $\sum_{n=1}^{m} |b_n(z) - b_{n+1}(z)| = b_1(z) - b_{m+1}(z)$ converge uniformemente sobre K hacia $b_1(z)$ y por lo tanto se verifica d). ■

NOTA: El apartado *a*) del teorema 2.8.19 proporciona el clásico criterio de Abel, [2, Ejer.9.13]; y el apartado *b*) es una ligera mejora de este. El apartado *c*) es el clásico criterio de Dirichlet, [2, teo. 9.15], y el apartado *d*) es una versión algo más general del mismo.

2.9. Ejercicios

$\diamondsuit$ **2.1** *Obtenga las imágenes, mediante la función exponencial, de los conjuntos*

$$\{z : |\operatorname{Im} z| < \pi\}; \quad \{z : \operatorname{Re} z > 0, |\operatorname{Im} z| < \pi\}.$$

$\diamondsuit$ **2.2** *Compruebe que las fórmulas*

$$\varphi(z) = -i(z+1)\sqrt{\frac{1-z}{1+z}}; \quad \psi(z) = (z+1)\sqrt{\frac{z-1}{z+1}};$$

definen, respectivamente, raíces cuadradas continuas de $z^2 - 1$ *en los abiertos*

$$U = \mathbb{C} \setminus \{x \in \mathbb{R} : |x| \geq 1\}; \quad V = \mathbb{C} \setminus \{x \in \mathbb{R} : |x| \leq 1\}$$

Obtenga su relación con las obtenidas en el ejemplo 2.7.7 [17] ejerc. 3.7).

$\diamondsuit$ **2.3** *Demuestre que la función* $z^2 - 1$ *no tiene logaritmo holomorfo en* $V = \mathbb{C} \setminus [-1, 1]$ *([17] ejerc. 3.10).*

$\diamondsuit$ **2.4** *Se considera el polinomio* $p(z) = z^2 - 2z + 2$*, con ceros* $a = 1 + i$, $\overline{a} = 1 - i$.

Compruebe que las siguientes fórmulas definen ramas continuas de la raíz cuadrada del polinomio $p(z)$.

$$a)\quad f_1(z) = (z-1)\sqrt{1 + \frac{1}{(z-1)^2}} \qquad b)\quad f_2(z) = (z - \overline{a})\sqrt{\frac{z-a}{z-\overline{a}}}$$

$$c)\quad f_3(z) = \sqrt{2}\sqrt{1 - z/a}\sqrt{1 - z/\overline{a}} \qquad d)\quad f_4(z) = z\sqrt{1 - a/z}\sqrt{1 - \overline{a}/z}$$

Determine el dominio de cada una y estudie la relación entre cada dos ramas en la intersección de sus dominios ([17] ejerc. 3.11).

$\diamondsuit$ **2.5** *Justifique que en* $U = \mathbb{C} \setminus \{x \in \mathbb{R} : 1 \leq |x|\}$ *y* $V = \mathbb{C} \setminus [-1, 1]$ *existen raíces cuadradas continuas* $f : U \to \mathbb{C}$, $g : V \to \mathbb{C}$ *de la función* $\varphi(z) = z^2/(1 - z^2)$ *y obtenga fórmulas para las determinadas por* $f(i) = g(i) = i/\sqrt{2}$*. Compruebe que* f *y* g *coinciden y son inyectivas en el semiplano* $P = \{z : \operatorname{Im} z > 0\}$*, calcule la imagen* $A = f(P) = g(P)$ *y una fórmula para la inversa de* $f|_P$ *([17] ejerc. 3.13).*

$\diamondsuit$ **2.6** *Compruebe que la función* $\operatorname{tg} z$ *es inyectiva sobe* $\Omega = \{x + iy : |x| < \pi/4\}$ *y obtenga la imagen* $\operatorname{tg}(\Omega)$ *([17] ejerc. 3.17).*

$\diamondsuit$ **2.7** *Compruebe que en* $\Omega = \mathbb{C} \setminus \{iy : y \in \mathbb{R},\ |y| \geq 1\}$ *se pueden definir ramas continuas de* $\operatorname{arc\,tg} z$*. Si* f *es la rama determinada por* $f(0) = 0$*, obtenga* $f(\Omega)$ *y* $f(D(0, 1))$ *([17] ejerc. 3.18).*

$\diamondsuit$ **2.8** *Si* Ω *es conexo y* $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ *verifica* $\operatorname{Im}(f) = \operatorname{Re}(f)^2$ *demuestre que* f *es constante.*

♢ **2.9** *Sea $f = u + iv$ es holomorfa en un abierto conexo Ω y $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ con $\alpha^2 + \beta^2 \neq 0$. Demuestre que cada una de las siguientes condiciones implica que f es constante:*
a) $\alpha u + \beta v$ *es constante.* *b)* u *es constante.* *c)* v *es constante.*
d) $\overline{f}$ *es holomorfa.* *e)* $|f|$ *es holomorfa.* *f)* $|f|$ *es constante.*
([17] ejerc. 3.25)

♢ **2.10** *Se supone que la sucesión $f_n : K \to \mathbb{C}$ converge uniformemente sobre K hacia una función $f = u + iv$ cuya parte real u está acotada superiormente sobre K. Demuestre que la sucesión $e^{f_n(z)}$ converge uniformemente sobre K ([17] ejerc. 4.1).*

♢ **2.11** *Para cada $w \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ sea $f_w(z)$ la determinación principal de $(1 + z/w)^w$, definida para $|z| < |w|$. Demuestre que $\lim_{w\to\infty} f_w(z) = e^z$, y que el límite es uniforme sobre compactos ([17] ejerc. 4.3).*

♢ **2.12** *Demuestre que $\lim_{n\to\infty} \operatorname{tg} nz = -i$, y que para cada $\epsilon > 0$ el límite es uniforme sobre el semiplano $H_\epsilon := \{z : \operatorname{Im} z < -\epsilon\}$ ([17] ejerc. 4.4).*

♢ **2.13** *Demuestre que la serie de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ converge uniformemente en cada conjunto donde la serie derivada $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1}$ es uniformemente convergente. ([17] ejerc. 4.6).*

♢ **2.14** *Sea $a_n \in \mathbb{R}$ una sucesión decreciente que converge hacia cero. Demuestre que la serie de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ converge uniformemente sobre*

$$A_\delta = \{z : |z| \leq 1,\ |z - 1| \geq \delta\}, \quad 0 < \delta < 1$$

y que la convergencia no es uniforme sobre $B_\delta = \{z : |z| < 1,\ 0 < |z - 1| \leq \delta\}$ cuando $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = +\infty$ ([17] ejerc. 4.7).

♢ **2.15** *Si la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ converge uniformemente sobre $E \subset \{z : |z| = 1\}$, demuestre que también converge uniformemente sobre $H = \{tz : 0 \leq t \leq 1,\ z \in E\}$. Deduzca el teorema de Abel: Si la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge entonces*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \lim_{r\to 1} \sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n.$$

Como aplicación calcule $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}/n$ ([17] ejerc. 4.8).

♢ **2.16** *Demuestre que la serie de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} \binom{1/2}{n} z^n$ converge absoluta y uniformemente sobre $\{z : |z| \leq 1\}$. Deduzca de ello que existe una sucesión de polinomios reales que converge hacia $|x|$ uniformemente sobre $[-1, 1]$ ([17] ejerc. 4.10).*

♢ **2.17** *Obtenga la región de convergencia y la suma $f(z)$ de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-1}(1 - z^2)^n$. Estudie la convergencia uniforme sobre compactos y obtenga el desarrollo en serie de potencias de $f(z)$ alrededor de $z = 1$ ([17] ejerc. 4.12).*

♢ **2.18** *Sea* $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$, *definida para* $|z| < \rho \leq 1$. *Demuestre que la serie* $\sum_{n=0}^{\infty} f(z^n)$ *converge uniformemente sobre compactos en* $D(0,\rho)$ *y que su suma*

$$g(z) = \sum_{n=1}^{\infty} f(z^n)$$

es desarrollable en serie de potencias en $D(0,\rho)$. *Obtenga los coeficientes del desarrollo en términos de los coeficientes* a_n *([17] ejerc. 4.13).*

♢ **2.19** *Demuestre que la serie* $\sum_{n=1}^{\infty} z^2/(n^2 - z^2)$ *converge uniformemente sobre compactos en el disco* $D(0,1)$, *y que su suma* $f(z)$ *es desarrollable en serie de potencias en este disco,* $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_{2k} z^{2k}$, *con coeficientes* $a_{2k} = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-2k}$.

♢ **2.20** *Demuestre que la serie*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{1+z^{2n}}$$

converge uniformemente sobre compactos en $\{z : |z| \neq 1\}$ *y que su suma admite un desarrollo en serie de potencias en* $D(0,1)$. *Obtenga el desarrollo ([17] ejerc. 4.14).*

♢ **2.21** *Obtenga, mediante un desarrollo en serie de potencias, un logaritmo holomorfo de* $f(z) = 1 + e^z$ *definido en un disco* $D(0,r)$ *([17] ejerc. 4.15).*

♢ **2.22** *Sea* $\Omega = \mathbb{C} \setminus [a,b]$, *con* $0 \notin [a,b]$. *Justifique la existencia de una única* $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ *verificando*

$$e^{f(z)} = \frac{z-a}{z-b} \quad \text{para todo } z \in \Omega, \qquad \lim_{z \to \infty} f(z) = 0.$$

Sea $r = \min\{|z| : z \in [a,b]\}$ *y* $R = \max\{|a|,|b|\}$. *Obtenga el desarrollo en serie de potencias de* f *en* $|z| < r$ *y el desarrollo de Laurent de* f *en* $|z| > R$.
Estudie el mismo problema cuando $\Omega = \mathbb{C} \setminus S$, *donde* S *es un arco de circunferencia de extremos* a *y* b *que no pasa por* 0. *([17] ejerc. 4.17).*

♢ **2.23** *Sea* $\Omega = \mathbb{C} \setminus \{iy : y \in \mathbb{R},\ |y| \geq 1\}$ *y* $f(z)$ *la rama de* arc tg z *definida en* Ω, *determinada por la condición* $f(0) = 0$ *(véase el ejercicio 2.7). Obtenga su desarrollo en serie de potencias ([17] ejerc. 4.18).*

♢ **2.24** *Sea* $f(z)$ *la rama de* arc cos z *definida en* $U = \mathbb{C} \setminus \{x \in \mathbb{R} : |x| \geq 1\}$, *determinada por la condición* $f(0) = \pi/2$ *(véase el ejemplo 2.7.9). Obtenga su desarrollo en serie de potencias en* $D(0,1)$ *([17] ejerc. 4.19).*

♢ **2.25** *Obtenga los desarrollos de Laurent de* $f(z) = \dfrac{1}{z(z-1)(z-2)}$ *en las coronas*

i) $\{z : 0 < |z| < 1\}$; $\{z : 1 < |z| < 2\}$; $\{z : 2 < |z|\}$
ii) $\{z : 0 < |z-1| < 1\}$; $\{z : 1 < |z-1|\}$
iii) $\{z : 0 < |z-2| < 1\}$; $\{z : 1 < |z-2| < 2\}$; $\{z : 2 < |z-2|\}$.

¿En qué coronas tiene primitiva la función f*?. ([17] ejerc. 4.21).*

♢ **2.26** *Sean* $f(z)$, $g(z)$ *las ramas de la raíz cuadrada de* z^2-1 *definidas, respectivamente, en* $U = \mathbb{C} \setminus \{x \in \mathbb{R} : |x| \geq 1\}$ *y* $V = \mathbb{C} \setminus [-1, +1]$*, determinadas por* $f(0) = i$, $g(2) = \sqrt{3}$ *(véase el ejemplo 2.7.7). Obtenga el desarrollo en serie de potencias de* f *en* $\{z : |z| < 1\}$ *y el desarrollo en serie de Laurent de* g *en* $\{z : 1 < |z|\}$ *([17] ejerc. 4.22).*

♢ **2.27** *Obtenga el desarrollo de Laurent de* $e^{\frac{1}{1-z}}$ *en* $\{z : |z| > 1\}$ *([17] ejerc. 4.23).*

♢ **2.28** *Obtenga el desarrollo de Laurent en* $A = \{z : |z| > 1\}$ *(resp. en serie de potencias en* $B = \{z : |z-1| < 1\}$*) de una raíz cúbica holomorfa de* $1 + z^3$ *([17] ejerc. 4.24).*

♢ **2.29** *Compruebe que* $p(z) = z^2-2z+2$ *tiene raices cuadradas holomorfas en* $\Omega = \mathbb{C} \setminus T$*, donde* $T = \{1 + it : |t| \leq 1\}$*. Si* $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ *es la raíz cuadrada de* p *determinada por* $f(0) = \sqrt{2}$*, obtenga su desarrollo en serie de potencias en* $D(0, 1)$ *y calcule el radio de convergencia ([17] ejerc. 4.25).*

♢ **2.30** *Sea* $\Omega = \mathbb{C} \setminus T$*, donde* $T = \{1 + it : |t| \leq 1\}$ *y* $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ *la raíz cuadrada de* $p(z) = z^2 - 2z + 2$ *considerada en el ejercicio 2.29. Calcule los desarrollos de Laurent de* f *en* $A = \{z : |z| > \sqrt{2}\}$ *y en* $B = \{z : |z-1| > 1\}$ *([17] ejerc. 4.26).*

♢ **2.31** *Se considera la serie de potencias*

$$\frac{z^3}{1} - \frac{z^{2\cdot 3}}{1} + \cdots + \frac{z^{3^n}}{n} - \frac{z^{2\cdot 3^n}}{n} + \cdots$$

Si $m \in \mathbb{N}$ *y* $k \in \mathbb{Z}$ *es par (resp. impar) compruebe que la serie converge (resp. no converge) en* $z = e^{i\pi k 3^{-m}}$*. Por consiguiente el radio de convergencia es* 1 *y el conjunto de puntos de la circunferencia* $\{z : |z| = 1\}$ *donde la serie converge (resp. no converge) es denso en la circunferencia ([17] ejerc. 4.29).*

♢ **2.32** *Obtenga la suma de la serie* $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 z^n$ *([17] ejerc. 4.30).*

♢ **2.33** *Sea* $a_0 = 0$*,* $a_1 = 1$ *y* $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$ *para* $n \geq 0$*. Obtenga el radio de convergencia de la serie de potencias* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$*, la función suma y una fórmula para el término general* a_n *m ([17] ejerc. 4.32).*

♢ **2.34** *Sea* $0 < \rho < +\infty$ *el radio de convergencia de* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n (z-a)^n$*. Un punto* s *de la circunferencia* $|z-a| = \rho$*, se llama singular cuando para cada* b *en el segmento* $[a, s)$ *el radio de convergencia de la serie reordenada en* b *vale* $\rho - |b-a|$*. Demuestre que los puntos singulares forman un subconjunto cerrado de* $\{z : |z-a| = \rho\}$ *([17] ejerc. 4.54)*

♢ **2.35** *Si los coeficientes de la serie* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ *son reales no negativos y* $0 < \rho < +\infty$ *es su radio de convergencia, demuestre que* $z = \rho$ *es un punto singular de la serie de potencias. (para la definición de punto singular véase el ejercicio 2.34), ([17] ejerc. 4.55)*

Capítulo 3

Integración compleja

3.1. Integración de funciones de variable real

Como la integral curvilínea, que desempeñará un papel central en la teoría de las funciones holomorfas, se define en términos de la integral de una función compleja de variable real, conviene revisar brevemente esta noción.

Una función acotada $f : [a, b] \to \mathbb{C}$ se dice que es *integrable Riemann* en el intervalo $[a, b]$ si sus componentes $u(t) = \operatorname{Re} f(t)$, $v(t) = \operatorname{Im} f(t)$ son integrables Riemann en $[a, b]$, en cuyo caso se define

$$\int_a^b f(t)dt = \int_a^b u(t)dt + i\int_a^b v(t)dt$$

Las propiedades usuales de la integral se siguen verificando para el caso de funciones con valores complejos: La integral es aditiva respecto al intervalo de integración; las sumas, los productos y las combinaciones lineales (con coeficientes complejos) de funciones integrables siguen siendo integrables y la integral $I(f) = \int_a^b f(t)dt$ es una forma $\mathbb{C}$-lineal sobre el espacio vectorial complejo de las funciones integrables: Si $\mu = \alpha + i\beta$ se tiene

$$I(\mu f) = I((\alpha u - \beta v) + i(\alpha v + \beta u)) = \alpha I(u) - \beta I(v) + i\alpha I(v) + i\beta I(u) =$$
$$= (\alpha + \beta i)(I(u) + iI(v)) = \mu I(f)$$

Proposición 3.1.1 *Si $f : [a, b] \to \mathbb{C}$ es integrable entonces $|f|$ también lo es y*

$$\left|\int_a^b f(t)dt\right| \leq \int_a^b |f(t)|dt$$

DEM: Recuérdese que una función real de variable real $\varphi : [a, b] \to \mathbb{R}$ es integrable Riemann si y sólo si el conjunto de sus puntos de discontinuidad $D(\varphi)$ es de medida nula. Si f es integrable entonces $D(u)$ y $D(v)$ tienen medida nula y lo mismo le ocurre a $D(|f|) \subset D(u) \cup D(v)$, de modo que $|f|$ también es integrable. Sea $w = I(f) = \int_a^b f(t)dt$. Si $w = 0$ la desigualdad $|I(f)| \leq I(|f|)$ es trivial. En caso contrario, si $w \neq 0$ y $\mu = |w|/w$ como la integral es $\mathbb{C}$-lineal se tiene:

$$|I(f)| = |w| = \mu w = \mu I(f) = I(\mu f)$$

Como $I(\mu f) > 0$ es $\operatorname{Re} I(\mu f) > 0$ y $\operatorname{Im} I(\mu f) = 0$ luego $|I(f)| = I(\mu f) = |I(\operatorname{Re}(\mu f))|$. Puesto que la desigualdad del enunciado se verifica para funciones con valores reales resulta

$$|I(f)| = |I(\operatorname{Re}(\mu f))| \leq I(|\operatorname{Re}(\mu f)|) \leq I(|\mu f|) = I(|f|)$$

■

Son integrables todas las funciones con un conjunto finito de puntos de discontinuidad, y siguen valiendo los teoremas fundamentales del cálculo y sus consecuencias: Regla de Barrow, cambio de variable, integración por partes etc... El siguiente resultado elemental se aplica frecuentemente a lo largo del curso:

Proposición 3.1.2 *Si $f_n : [a,b] \to \mathbb{C}$ es una sucesión de funciones integrables que converge uniformemente hacia $f : [a,b] \to \mathbb{C}$ entonces f es integrable y*

$$\int_a^b f(t)dt = \lim_n \int_a^b f_n(t)dt$$

DEM: En virtud del resultado para funciones con valores reales la función f es integrable (porque $u(t) = \operatorname{Re} f(t)$ y $v(t) = \operatorname{Im} f(t)$ son límites uniformes de las sucesiones de funciones integrables $u_n(t) = \operatorname{Re} f_n(t)$, $v_n(t) = \operatorname{Im} f_n(t)$) y se verifica que $\lim_n I(|f_n - f|) = 0$. Según 3.1.1 se tiene $|I(f) - I(f_n)| = |I(f - f_n)| \leq I(|f_n - f|)$ luego $I(f) = \lim_n I(f_n)$. ■

3.2. Formas diferenciales e integración compleja

Formas diferenciales: Una *forma diferencial real* (de grado 1) sobre un abierto $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ es una aplicación

$$\omega : \Omega \to \mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$$

donde $\mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ es el espacio vectorial de las aplicaciones lineales $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Si en este espacio vectorial se considera la base formada por las proyecciones

$$dx : (x,y) \to x; \qquad dy : (x,y) \to y;$$

la forma diferencial ω se representa en la forma

$$\omega(x,y) = P(x,y)dx + Q(x,y)dy$$

donde P, Q son funciones reales definidas en Ω. Si estas funciones son continuas (resp. de clase C^m) en Ω se dice que ω es continua (resp. de clase C^m) (esta definición es intrínseca, e.d. no depende de la base considerada en $\mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$).

Análogamente, una *forma diferencial compleja* (de grado 1) sobre el abierto Ω, es una aplicación $\omega : \Omega \to \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$, donde $\mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$ es el espacio vectorial de las aplicaciones lineales $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, considerado como espacio vectorial de dimensión 2 sobre el cuerpo $\mathbb{C}$.

En lo que sigue sólo se considerarán formas diferenciales de grado 1, por lo que, a partir de ahora *forma diferencial* será sinónimo de *forma diferencial de grado 1.*

Respecto a la base $\{dx, dy\}$ del espacio vectorial complejo $\mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$, la forma diferencial compleja ω se expresa en la forma

$$\omega(x, y) = P(x, y)dx + Q(x, y)dy$$

donde ahora las funciones coordenadas P, Q, definidas en Ω, son funciones con valores complejos. En términos de la base $\{dz, d\bar{z}\}$ la forma diferencial compleja ω se representa en la forma

$$\omega(x, y) = R(x, y)dz + S(x, y)d\bar{z}$$

donde $R = (P - iQ)/2$ y $S = (P + iQ)/2$.

Igual que en el caso real, la forma diferencial compleja ω se dice que es continua o de clase C^m si las funciones coordenadas P, Q (equiv. R, S) son continuas o de clase C^m, respectivamente. Obsérvese que una forma diferencial compleja ω no es más que una pareja de formas diferenciales reales, pues si para cada $(x, y) \in \Omega$ se consideran las componentes $\omega_1(x, y), \omega_2(x, y)$ de la aplicación lineal $\omega(x, y)$ se obtiene una pareja de formas diferenciales reales ω_1, ω_2 tales que

$$\omega(x, y) = \omega_1(x, y) + i\omega_2(x, y)$$

Se dirá que $\omega_1 = \operatorname{Re} \omega$, (resp. $\omega_2 = \operatorname{Im} \omega$) es la parte real (resp. imaginaria) de ω.

Si u, v, son las componentes de una función diferenciable $f : \Omega \to \mathbb{R}^2$ entonces $df = du + idv$, es decir, las formas diferenciales reales du, dv son, respectivamente, la parte real e imaginaria de la forma diferencial compleja df, y se tiene

$$du(x, y) = D_1u(x, y)dx + D_2u(x, y)dy$$

$$dv(x, y) = D_1v(x, y)dx + D_2v(x, y)dy$$

$$df(x, y) = D_1f(x, y)dx + D_2f(x, y)dy$$

donde

$$D_1f(x, y) = D_1u(x, y) + iD_1v(x, y), \text{ y } D_2f(x, y) = D_2u(x, y) + iD_2v(x, y).$$

En términos de la base $\{dz, d\bar{z}\}$, se tiene $df(z) = \partial f(z)dz + \bar{\partial} f(z)d\bar{z}$ donde

$$\partial f(z) = \frac{D_1f(z) - iD_2f(z))}{2}; \quad \bar{\partial} f(z) = \frac{D_1f(z) + iD_2f(z)}{2}$$

Definición 3.2.1 *Si ω es una forma diferencial real (resp. compleja), definida en un abierto $\Omega \subset \mathbb{C}$ y existe una función diferenciable $F : \Omega \to \mathbb{R}$, (resp. $F : \Omega \to \mathbb{C}$) tal que $\omega = dF$ se dice que F es una primitiva de ω y que ω es una forma diferencial exacta. Si para cada $a \in \Omega$ existe $D(a, r) \subset \Omega$ tal que la restricción $\omega|_{D(a,r)}$ es exacta se dice que ω es una forma diferencial cerrada.*

Es obvio que una forma diferencial compleja $\omega = \omega_1 + i\omega_2$ es cerrada (resp. exacta) si y sólo si sus dos componentes ω_1, ω_2 son cerradas (resp. exactas). Aunque el estudio de formas diferenciales complejas se reduce al de una pareja de formas diferenciales reales, en la teoría de funciones holomorfas intervienen de modo esencial cierto tipo de formas diferenciales que resulta más cómodo y natural considerar como formas diferenciales complejas que como parejas de formas diferenciales reales. Nos estamos refiriendo a las formas diferenciales del tipo $\omega(z) = f(z)dz$ donde f es una función continua en Ω. Para este tipo de formas diferenciales se cumple:

Proposición 3.2.2 *Si $f(z)dz$ es una forma diferencial exacta en Ω entonces existe una función holomorfa $F : \Omega \to \mathbb{C}$ tal que $F' = f$.*

DEM: Por hipótesis existe una función diferenciable $F : \Omega \to \mathbb{C}$ tal que $dF(z) = f(z)dz$ para todo $z \in \Omega$. Entonces $\partial F(z) = f(z)$ y $\overline{\partial} F(z) = 0$. Esto significa que $dF(z)$ es $\mathbb{C}$-lineal y que existe la derivada compleja $F'(z) = f(z)$ para todo $z \in \mathbb{C}$. ■

El siguiente ejemplo desempeña un papel fundamental en la teoría de Cauchy.

Ejemplo 3.2.3 *La forma diferencial $\dfrac{dz}{z}$ es cerrada en $\mathbb{C} \setminus \{0\}$, pero no es exacta.*

En virtud de 3.2.2 y 2.6.13 la forma diferencial $\dfrac{dz}{z}$ no es exacta en $\mathbb{C} \setminus \{0\}$. Sin embargo, es exacta sobre cada abierto $V \subset \Omega$ donde exista un logaritmo holomorfo $L(z)$ de z ya que en este caso $L'(z) = 1/z$ y por lo tanto $dL(z) = dz/z$. Como cada punto $b \neq 0$ posee un entorno $D(b, |b|)$ en el que existe un logaritmo holomorfo de z resulta que dz/z es una forma diferencial cerrada en $\mathbb{C} \setminus \{0\}$.

Estas propiedades de la forma diferencial dz/z se han obtenido sin considerar por separado su parte real y su parte imaginaria, es decir, considerando dz/z como una genuina forma diferencial compleja. Esta es la forma adecuada de proceder, evitando las expresiones engorrosas que aparecen cuando se hacen explícitas la parte real y la parte imaginaria de la forma diferencial, que en este caso serían

$$\frac{dz}{z} = \frac{\overline{z}}{|z|^2}dz = \left(\frac{x}{x^2+y^2} - i\frac{y}{x^2+y^2}\right)(dx + idy) = \omega_1(x,y) + i\omega_2(x,y)$$

donde

$$\omega_1(x,y) = \frac{x}{x^2+y^2}dx + \frac{y}{x^2+y^2}dy; \quad \omega_2(x,y) = \frac{-y}{x^2+y^2}dx + \frac{x}{x^2+y^2}dy$$

En este caso, la parte real $\omega_1(x,y)$ es exacta en $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ porque es la diferencial de la función $\log|z| = \log\sqrt{x^2+y^2}$. Se sigue que en $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ la forma diferencial real $\omega_2(x,y)$ es cerrada pero no es exacta. ■

Después de 3.2.2, dada una función continua $f : \Omega \to \mathbb{C}$ para obtener una primitiva F de f en sentido complejo (e.d. $F \in \mathcal{H}(\Omega)$ tal que $F' = f$) basta obtener una primitiva de la forma diferencial compleja $f(z)dz$. Como la integral curvilínea es la herramienta para obtener primitivas de formas diferenciales complejas en particular lo será también para obtener primitivas, en sentido complejo, de funciones complejas $f : \Omega \to \mathbb{C}$. Con ella se podrán abordar algunos de los problemas que ya se han planteado como por ejemplo el de determinar los abiertos $V \subset \Omega$ donde existe un logaritmo holomorfo de $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ con $0 \notin f(\Omega)$ ya que este problema equivale al de determinar los abiertos $V \subset \Omega$ donde f'/f tiene primitiva.

Pero la integral curvilínea de formas diferenciales del tipo $f(z)dz$ no sólo es la herramienta para resolver estos problemas, sino que toda la teoría de Cauchy (y en particular la demostración de que cada $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ admite un desarrollo en serie de potencias en cada disco $D(a,r) \subset \Omega$) requiere el uso de integrales curvilíneas de formas diferenciales complejas del tipo $f(z)dz$. El resultado fundamental, en el que se basa toda la teoría de Cauchy es el que asegura que si $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ entonces $f(z)dz$ es una forma diferencial cerrada. Su prueba usa una caracterización adecuada de las formas diferenciales cerradas en términos de integral curvilínea.

Estos comentarios son suficiente motivación para justificar un estudio preliminar de la integral curvilínea de formas diferenciales complejas.

Integración de formas diferenciales: En lo que sigue si $\gamma : [a,b] \to \Omega$ es una función continua se dirá que γ es un camino en Ω de origen $\gamma(a)$ y extremo $\gamma(b)$. Si $\gamma(a) = \gamma(b)$ se dirá que γ es un camino cerrado. Se designará por $\sim \gamma$ el camino opuesto, de origen $\gamma(b)$ y extremo $\gamma(a)$, definido en $[-b,-a]$ por $(\sim \gamma)(t) = \gamma(-t)$. Dados dos caminos $\gamma_1 : [a_1,b_1] \to \mathbb{C}$, y $\gamma_2 : [a_2,b_2] \to \mathbb{C}$ tales que $b_1 = a_2$, si el extremo del primero coincide con el origen del segundo, su *yuxtaposición* , denotada $\gamma = \gamma_1 \vee \gamma_2$, es el camino $\gamma : [a_1,b_2] \to \mathbb{C}$ definido por $\gamma(t) = \gamma_1(t)$ si $t \in [a_1,b_1]$ y $\gamma(t) = \gamma_2(t)$ si $t \in [a_2,b_2]$. Análogamente se define la yuxtaposición de un número finito de caminos.

Dos caminos $\gamma_i : [a_i,b_i] \to \mathbb{C}$, $i = 1,2$, se dice que son *topológicamente equivalentes* (resp. *topológicamente equivalentes con la misma orientación*) cuando existe una biyección (resp. biyección creciente) continua $\sigma : [a_1,b_1] \to [a_2,b_2]$ tal que $\gamma_1 = \gamma_2 \circ \sigma$.

Un camino $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ se dice que es de clase C^1 cuando es derivable en todo punto (derivable por la derecha en a y derivable por la izquierda en b) con derivada continua.

Un camino $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ se dice que es regular a trozos si se puede expresar como yuxtaposición de un número finito de caminos de clase C^1, es decir, si existe una subdivisión de su dominio $[a,b]$

$$a = x_0 < x_1 < x_2 \cdots < x_n = b$$

tal que cada restricción $\gamma|_{[x_{i-1},x_i]}$ es de clase C^1. Nótese que si γ es regular a trozos su derivada $\gamma'(t)$ existe excepto para un conjunto finito de valores del parámetro t donde sólo se puede asegurar la existencia de las derivadas laterales. A los correspondientes puntos de la imagen se les suele llamar vértices del camino.

Dos caminos de clase C^1, $\gamma_i : [a_i,b_i] \to \mathbb{C}$, $i = 1,2$, se dice que son *C^1-equivalentes* (resp. *C^1-equivalentes con la misma orientación*) si uno se obtiene del otro mediante un cambio de parámetro de clase C^1 con derivada no nula (resp. > 0).

Dos caminos regulares a trozos $\gamma_i : [a_i,b_i] \to \mathbb{C}$, $i = 1,2$, se dice que son *equivalentes como caminos regulares a trozos* (resp. *equivalentes como caminos regulares a trozos con la misma orientación*) cuando se pueden descomponer en la forma

$$\gamma_i = \gamma_i^1 \vee \gamma_i^2 \vee \cdots \vee \gamma_i^m$$

donde, los caminos γ_1^j, γ_2^j, son de clase C^1, y C^1-equivalentes (resp. C^1-equivalentes con la misma orientación).

La equivalencia de caminos regulares a trozos con la misma orientación es una relación de equivalencia; se suele decir que cada clase de equivalencia es un *arco regular a trozos* *orientado* y que cada representante de la clase es una *representación paramétrica* del mismo. El origen (resp. extremo) de un arco orientado es el origen (resp. extremo) común de todas sus representaciones paramétricas.

Definición 3.2.4 *Si $\omega(x,y) = P(x,y)dx + Q(x,y)dy$ es una forma diferencial real (resp. compleja) definida y continua en un abierto $\Omega \subset \mathbb{C}$, y $\gamma : [a,b] \to \Omega$ es un camino regular a trozos en Ω, se define la integral de ω a lo largo de γ mediante la fórmula*

$$\int_\gamma \omega = \int_a^b \omega(\gamma(t))(\gamma'(t))dt = \int_a^b (P(\gamma(t))\gamma_1'(t) + Q(\gamma(t))\gamma_2'(t))dt$$

donde γ_1, γ_2 son las componentes del camino γ.

Cuando ω se expresa en la forma $\omega(x,y) = R(x,y)dz + S(x,y)d\bar{z}$, su integral a lo largo de γ viene dada por

$$\int_\gamma \omega = \int_a^b \omega(\gamma(t))(\gamma'(t))dt = \int_a^b (R(\gamma(t))\gamma'(t) + S(\gamma(t))\overline{\gamma}'(t))dt$$

Obsérvese que γ es derivable en $[a,b]$ excepto en un conjunto finito de puntos de (a,b), $x_1 < x_2 < \cdots x_{n-1}$, en los que existen las derivadas laterales. La función

$$f(t) = \omega(\gamma(t))(\gamma'(t)) = P(\gamma(t))\gamma_1'(t) + Q(\gamma(t))\gamma_2'(t)$$

aunque no está definida en estos puntos coincide en cada intervalo abierto (x_{i-1}, x_i) con la restricción de una función continua definida en $[x_{i-1}, x_i]$. Por lo tanto, si se define f de modo arbitrario en $x_1, x_2, ..x_{n-1}$, resulta una función integrable Riemann cuya integral no depende de los valores asignados a f en estos puntos. (Recuérdese que si los valores de una función integrable se modifican en un conjunto finito de puntos se obtiene otra función integrable con el mismo valor de la integral).

Es inmediato que si $\omega = \omega_1 + i\omega_2$ es una forma diferencial compleja de componentes ω_1, ω_2, entonces $\int_\gamma \omega = \int_\gamma \omega_1 + i\int_\gamma \omega_2$, por lo que la integración de una forma diferencial compleja se reduce a la de de una pareja de formas diferenciales reales. Cuando ω sea una forma diferencial compleja del tipo $\omega(z) = f(z)dz$, no es conveniente expresar la integral mediante las integrales de sus componentes

$$\int_\gamma f(z)dz = \int_\gamma (u(x,y)dx - v(x,y)dy) + i\int_\gamma (v(x,y)dx + u(x,y)dy)$$

pues en este caso la integral se expresa directamente en términos de f:

$$\int_\gamma f(z)dz = \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)dt$$

Las siguientes propiedades de la integral curvilinea son bien conocidas para el caso de formas diferenciales reales. La prueba para formas diferenciales complejas es similar (o puede reducirse al caso real considerando las componentes ω_1 y ω_2 de ω).

Proposición 3.2.5 *Si ω_1, ω_2 son formas diferenciales (reales o complejas) definidas y continuas en un abierto $\Omega \subset \mathbb{C}$, y $\gamma, \gamma_1, \gamma_2$ son caminos regulares a trozos en Ω se verifica:*

i) $\int_\gamma(\omega_1+\omega_2)=\int_\gamma\omega_1+\int_\gamma\omega_2$

ii) $\int_\gamma\omega=\int_{\gamma_1}\omega+\int_{\gamma_2}\omega$ *si* $\gamma=\gamma_1\vee\gamma_2$

iii) $\int_{\sim\gamma}\omega=-\int_\gamma\omega$

iv) $\int_{\gamma_1}\omega=\int_{\gamma_2}\omega$ *si* γ_1,γ_2 *son equivalentes con la misma orientación.*

NOTA: En virtud de la propiedad 3.2.5 iv) los caminos equivalentes con la misma orientación se pueden identificar desde el punto de vista de la integración de formas diferenciales y se puede considerar que la integral curvilinea está definida sobre arcos regulares a trozos orientados, y esto es lo que se hace habitualmente aunque no se advierta de modo explícito. Puesto que cualquier camino regular a trozos es equivalente (con la misma orientación) a otro cuyo dominio es un intervalo prefijado, no será restrictivo suponer que el camino que interviene en una integral curvilinea está definido en el intervalo [0,1]. Por esta razón se suele considerar la yuxtaposición de dos caminos, aunque no estén definidos en intervalos contiguos, siempre que el extremo del primero coincida con el origen del segundo.

Proposición 3.2.6 *Sea* γ *un camino regular a trozos en el abierto* Ω *y* $f,f_n:\Omega\to\mathbb{C}$ *funciones continuas en* Ω*,* $(n\in\mathbb{N})$*.*

i) Si $|f(z)|\le M$ *para cada* $z\in Imagen(\gamma)$ *se tiene* $|\int_\gamma f(z)dz|\le MLong(\gamma)$*.*

ii) Si f_n *converge hacia* f *uniformemente sobre Imagen*(γ) *entonces*

$$\lim_{n\to\infty}\int_\gamma f_n(z)dz=\int_\gamma f(z)dz$$

DEM: i) $\left|\int_\gamma f(z)dz\right|\le\int_a^b|f(\gamma(t))||\gamma'(t)|dt\le\int_a^b M|\gamma'(t)|dt=M\text{Long}(\gamma)$.
ii) $\left|\int_\gamma f_n(z)dz-\int_\gamma f(z)dz\right|\le M_n\text{Long}(\gamma)$ donde $M_n:=\sup\{|f_n(z)-f(z)|:z\in\gamma([a,b])\}$, en virtud de la hipótesis, es una sucesión que tiende hacia 0. ■

El siguiente resultado es bien conocido para el caso de las formas diferenciales reales y su extensión al caso de formas diferenciales complejas es inmediata considerando sus dos componentes. No obstante, por el papel fundamental que desempeñará merece la pena recordar la prueba.

Teorema 3.2.7 *Si* ω *es una forma diferencial (real o compleja) definida y continua en un abierto* $\Omega\subset\mathbb{C}$*, son equivalentes*

a) ω *es exacta;*

b) $\int_\gamma\omega=0$ *para cada camino* γ *en* Ω*, cerrado y regular a trozos;*

Si se cumple b) y Ω *es conexo, se obtiene una primitiva* F *de* ω *fijando un punto* $a\in\Omega$ *y definiendo* $F(z)=\int_{\gamma_z}\omega$ *donde* γ_z *es cualquier camino en* Ω*, regular a trozos, con origen en* a *y extremo en* $z\in\Omega$*. (Si* Ω *no es conexo se obtiene la primitiva procediendo como se acaba de indicar en cada una de sus componentes conexas).*

Dem: a) $\Rightarrow$ b): Si $\omega = dF$ donde $F : \Omega \to \mathbb{C}$ es diferenciable y si $a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b$ es una subdivisión de $[a,b]$ tal que $\gamma|_{[x_{j-1},x_j]}$ es de clase C^1 se tiene:

$$\int_\gamma \omega = \int_\gamma dF(z)dz = \sum_{j=1}^n \int_{x_{j-1}}^{x_j} dF(\gamma(t))\gamma'(t)dt =$$

$$= \sum_{j=1}^n \int_{x_{j-1}}^{x_j} (F\circ\gamma)'(t)dt = \sum_{j=1}^n (F(\gamma(x_j) - F(\gamma(x_{j-1}))) = F(\gamma(a)) - F(\gamma(b)) = 0$$

pues γ es un camino cerrado.

b) $\Rightarrow$ a): No es restrictivo suponer que Ω es conexo (si no es así se aplica el siguiente razonamiento sobre cada una de sus componentes conexas) y por lo tanto conexo por poligonales. Fijado $a \in \Omega$, para cada $z \in \Omega$ se considera un camino regular a trozos $\gamma_z : [0,1] \to \Omega$ de origen $a = \gamma_z(0)$ y extremo $z = \gamma_z(1)$ y se define

$$F(z) = \int_{\gamma_z} \omega$$

La definición de $F(z)$ sólo depende del extremo z del camino: Si σ_z es otro camino regular a trozos en Ω de origen a y extremo z entonces $\gamma := \gamma_z \vee (\sim \sigma_z)$ es un camino cerrado y por hipótesis

$$0 = \int_\gamma \omega = \int_{\gamma_z} \omega - \int_{\sigma_z} \omega$$

Seguidamente se prueba que F es diferenciable en Ω y que $dF(z) = \omega(z)$ para todo $z \in \Omega$. Hay que demostrar que $\lim_{h\to 0} \epsilon(h)/|h| = 0$ donde $\epsilon(h) = F(z+h) - F(z) - \omega(z)h$. Considerando el segmento $\sigma(t) = z + th$, $t \in [0,1]$ y la definición de F, en virtud de las propiedades de la integral curvilinea se tiene que

$$F(z+h) - F(z) = \int_{\gamma_z \vee \sigma} \omega - \int_{\gamma_z} \omega = \int_\sigma \omega$$

luego

$$\epsilon(h) = \int_\sigma \omega - \omega(z)h = \int_0^1 [\omega(\sigma(t))h - \omega(z)h]dt$$

Si $\omega = Pdx + Qdy$ se tiene

$$|\omega(w)h - \omega(z)h| = |(P(w)-P(z))h_1 + (Q(w)-Q(z))h_2| \leq (|P(w)-P(z))| + |Q(w)-Q(z)|)|h|$$

En virtud de la continuidad de P y Q fijado $z \in \Omega$ existe $D(z,r) \subset \Omega$ tal que si $w \in D(z,r)$ entonces $|P(w) - P(z)| < \epsilon/2$ y $|Q(w) - Q(z)| < \epsilon/2$, luego $|\omega(w)h - \omega(z)h| < \epsilon|h|$.

Si $|h| < r$ el segmento $\sigma(t) = z + th$ está contenido en $D(z,r)$ luego $|\omega(\sigma(t))h - \omega(z)h| < \epsilon|h|$ para todo $t \in [0,1]$. Entonces

$$|\epsilon(h)| \leq \int_0^1 |\omega(\sigma(t))h - \omega(z)h|dt \leq \epsilon|h|$$

es decir $\epsilon(h)/|h| < \epsilon$ si $|h| < r$, y con esto queda probado que $\lim_{h\to 0} \epsilon(h)/|h| = 0$. ■

Utilizando 3.2.7 se puede ver fácilmente que la forma diferencial dz/z no es exacta en $\mathbb{C} \setminus \{0\}$, sin acudir a 2.6.13. Basta observar que con el camino cerrado $C_r(t) = re^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$ se cumple

$$\int_{C_r} \frac{dz}{z} = \int_0^{2\pi} \frac{ire^{it}}{re^{it}} dt = \int_0^{2\pi} i dt = 2\pi i \neq 0$$

Obsérvese que con esto se tiene otra demostración de la imposibilidad de definir un logaritmo continuo de z en un abierto $\Omega \supset \{z : |z| = r\}$.

Seguidamente se considera una clase particular de abiertos, que contiene a los discos, sobre los que toda forma diferencial cerrada es siempre exacta.

En lo que sigue cuando se hable de rectángulos en el plano complejo siempre se supondrá que son cerrados y tienen los lados paralelos a los ejes, es decir que son de la forma $R = \{x + iy : x \in [a, b], y \in [c, d]\}$. En este caso se denotará por ∂R el camino poligonal cerrado formado por los cuatro lados que componen su frontera, recorrido en el sentido $a + ic \to b + ic \to b + id \to a + id \to a + ic$.

Diremos que Ω es un *abierto especial* si existe $z \in \Omega$ tal que para cada $w \in \Omega$ el rectángulo $R_{z,w}$ con vértices opuestos z, w está contenido en Ω (Nótese que $R_{z,w}$ puede degenerar en un segmento si $\operatorname{Re} z = \operatorname{Re} w$ o si $\operatorname{Im} z = \operatorname{Im} w$). Son abiertos especiales los discos, los semiplanos abiertos determinados por rectas paralelas a uno de los ejes y los cuadrantes abiertos. Para este tipo de abiertos se verifica

Teorema 3.2.8 *Si ω es una forma diferencial (real o compleja) definida y continua en un abierto especial $\Omega \subset \mathbb{C}$ son equivalentes*

a) ω es exacta;

b) $\int_{\partial R} \omega = 0$ para cada rectángulo $R \subset \Omega$;

DEM: a) $\Rightarrow$ b) ya está probado en 3.2.7.
b) $\Rightarrow$ a): Sea $a \in \Omega$ un punto tal que para todo $z \in \Omega$ el rectángulo R_{az} está contenido en Ω. Dos de los lados de R_{az} forman un camino poligonal γ_z^1 de origen a y extremo z y los otros dos lados forman otro camino poligonal γ_z^2 de origen a y extremo z tales que $\partial R = \gamma_z^1 \vee (\sim \gamma_z^2)$. Si se cumple b) entonces

$$0 = \int_{\partial R} \omega = \int_{\gamma_z^1} \omega - \int_{\gamma_z^2} \omega$$

Para cada $z \in \Omega$ sea $F(z) = \int_{\gamma_z} \omega$ donde γ_z es uno de los dos caminos γ_z^1,γ_z^2 que se acaban de considerar. Si $w = Pdx + Qdy$ se probará que para todo $z \in \Omega$ es $D_1 F(z) = P(z)$ y $D_2 F(z) = Q(z)$. De aquí se seguirá, usando la continuidad de P y Q, que F es diferenciable con $dF = \omega$.

Fijado $z \in \Omega$, en virtud de la continuidad de P en z existe $r > 0$ tal que $D(z, r) \subset \Omega$ y $|P(w) - P(z)| < \epsilon$ para todo $w \in D(z, r)$. Si $|x| < r$ el segmento $\sigma_x(t) = z + tx$, $0 \leq t \leq 1$, está contenido en $D(z, r)$. Como

$$\frac{F(z + x) - F(z)}{x} = \frac{1}{x} \int_{\sigma_x} \omega = \frac{1}{x} \int_0^1 P(z + tx) x dt$$

resulta

$$\left|\frac{F(z+x)-F(z)}{x}-P(z)\right| = \left|\int_0^1 (P(z+tx)-P(z)dt\right| \leq \int_0^1 |P(z+tx)-P(z)|dt \leq \epsilon$$

Análogamente se demuestra que $D_2F = Q$. ■

Obsérvese que la definición de forma diferencial cerrada sólo exige que fijado un punto $a \in \Omega$ haya un disco suficientemente pequeño $D(a,r) \subset \Omega$ sobre el que la forma diferencial sea exacta. Con el siguiente resultado 3.2.9 se prueba que lo mismo ocurre si el disco se toma todo lo grande que se pueda y que en los abiertos especiales las formas diferenciales cerradas son exactas.

Proposición 3.2.9 *Si ω es una forma diferencial real o compleja definida y continua en un abierto $\Omega \subset \mathbb{C}$, son equivalentes:*

a) ω es cerrada

b) $\int_{\partial R} \omega = 0$ para cada rectángulo $R \subset \Omega$

c) ω posee primitiva en cada abierto especial $V \subset \Omega$ (y en particular en cada disco $D(a,r) \subset \Omega$)

Dem: b) $\Rightarrow$ c) en virtud de 3.2.8, y es evidente que c) $\Rightarrow$ a).
a) $\Rightarrow$ b): Se probará por reducción al absurdo, suponiendo que $\int_{\partial R} \omega \neq 0$ para algún rectángulo cerrado $R \subset \Omega$. Sea $\Delta =$ diámetro(R). Trazando los segmentos que unen los puntos medios de los lados opuestos se descompone R en cuatro rectángulos congruentes R^1,R^2,R^3,R^4. Teniendo en cuenta las cancelaciones de la integral sobre segmentos opuestos resulta:

$$0 \neq \int_{\partial R} \omega = \sum_{j=1}^{4} \int_{\partial R_j} \omega$$

luego $\int_{\partial R^i} \omega \neq 0$ para algún $i \in \{1,2,3,4\}$. Si $R_1 = R^i$ se tiene que diámetro$(R_1) = \Delta/2$. Repitiendo con R_1 el razonamiento que se acaba de hacer con R se obtiene un rectángulo cerrado $R_2 \subset R_1$ tal que diámetro$(R_2) = \Delta/2$ y $\int_{\partial R_2} \omega \neq 0$. De modo recurrente se obtiene una sucesión decreciente de rectángulos cerrados R_n tal que para todo $n \in \mathbb{N}$ se cumple

$$\text{diámetro}(R_n) = \Delta/2^n \text{ y } \int_{\partial R_n} \omega \neq 0$$

La intersección de la sucesión decreciente de compactos R_n no es vacía (de hecho se reduce a un punto). Si $a \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} R_n$, por la hipótesis ω tiene primitiva en algún disco $D(a,r) \subset \Omega$. Sin embargo para n suficientemente grande es $R_n \subset \Omega$ y $\int_{\partial R_n} \omega \neq 0$. Con esta contradicción se termina la prueba. ■

A título de referencia conviene recordar que hay una clase de abiertos, más general que la de los abiertos especiales, para los que que se pueden dar caracterizaciones útiles de las formas diferenciales exactas. Se trata de la clase de los abiertos estrellados. Un abierto Ω de $\mathbb{C}$ se dice que es *estrellado* si hay un punto $z_0 \in \Omega$ tal que para cada $z \in \Omega$ el segmento $[z_0, z]$ está contenido en Ω.

Teorema 3.2.10 *Si $\omega(x,y) = P(x,y)dx + Q(x,y)dy$ es una forma diferencial (real o compleja) de clase C^1 definida en un abierto estrellado $\Omega \subset \mathbb{C}$, son equivalentes:*

i) *ω es exacta*

ii) *$D_2P(x,y) = D_1Q(x,y)$ para cada $(x,y) \in \Omega$.*

Se puede probar que si Ω es un disco siguen siendo equivalentes las condiciones i) y ii) del teorema anterior, bajo la hipótesis de la existencia y continuidad de las dos derivadas parciales $D_2P(x,y), D_1Q(x,y)$. Por lo tanto, si las derivadas parciales $D_2P(x,y), D_1Q(x,y)$ existen y son continuas en todos los puntos de Ω, la condición ii) es necesaria y suficiente para que ω sea cerrada.

Aplicando 3.2.10 se obtiene que en los abiertos estrellados las formas diferenciales cerradas de clase C^1 son exactas. Sin embargo 3.2.9 muestra que en los abiertos especiales, y en particular en los discos, las formas diferenciales continuas y cerradas son exactas.

Los resultados que siguen revelan el papel que desempeña la integral de curvilínea como herramienta para determinar si una función holomorfa tiene primitiva en sentido complejo

Corolario 3.2.11 *Si $f : \Omega \to \mathbb{C}$ es continua, son equivalentes*

a) *Existe $F \in \mathcal{H}(\Omega)$ tal que $F' = f$;*

b) *$\int_\gamma f(z)dz = 0$ para cada camino cerrado regular a trozos γ en Ω.*

DEM: Es consecuencia inmediata de 3.2.7, teniendo en cuenta 3.2.2. ■

Corolario 3.2.12 *Si $\Omega \subset \mathbb{C}$ es un abierto especial y $f : \Omega \to \mathbb{C}$ es continua, son equivalentes*

a) *Existe $F \in \mathcal{H}(\Omega)$ tal que $F' = f$;*

b) *$\int_{\partial R} f(z)dz = 0$ para cada rectángulo cerrado $R \subset \Omega$ (de lados paralelos a los ejes).*

DEM: Es consecuencia inmediata de 3.2.9, teniendo en cuenta 3.2.11. ■

Según el corolario 2.6.14 los desarrollos de Laurent sirven para determinar si una función holomorfa tiene primitiva en una corona. Los ejercicios 3.2, 3.4, 3.6, 3.7, 3.8, 3.10 se pueden resolver mediante este corolario reformulado en los siguientes términos

Corolario 3.2.13 *Sea $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n(z-a)^n$ una serie de Laurent convergente en la corona $A = \{z : r < |z-a| < R\}$. Si γ es un camino cerrado y regular a trozos en A se verifica*

$$\int_\gamma f(z)dz = \int_\gamma \frac{a_{-1}}{z-a}dz$$

En particular, aplicando este resultado a la función $f(z)/(z-a)^{m+1}$ y a la circunferencia $C_\rho(t) = a + \rho e^{it}$, $(0 \le t \le 2\pi)$ con $r < \rho < R$, resulta

$$a_m = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_\rho} \frac{f(z)}{(z-a)^{m+1}}dz$$

3.3. Versiones locales de los teoremas de Cauchy

Usando 3.2.10 y las condiciones de Cauchy-Riemann es fácil comprobar que si f es derivable con derivada continua entonces la forma diferencial $f(z)dz$ es cerrada. Esta es la razón por la que inicialmente se definían las funciones holomorfas como aquellas que eran derivables con derivada continua. La contribución de Goursat a la teoría de funciones holomorfas consistió en demostrar que $f(z)dz$ es una forma diferencial cerrada suponiendo solamente que f es derivable en todos los puntos.

La demostración de este resultado, clave para el desarrollo de la teoría de las funciones holomorfas, utiliza la caracterización 3.2.9 de las formas diferenciales cerradas en vez de la clásica 3.2.10.

Teorema 3.3.1 [Cauchy-Goursat] *Si $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ entonces $\int_{\partial R} f(z)dz = 0$ para cada rectángulo cerrado $R \subset \Omega$. Por lo tanto f tiene primitiva en cada abierto especial (y en particular en cada disco) contenido en Ω.*

Dem: En virtud de 3.2.12 basta demostrar que si $R \subset \Omega$ es un rectángulo cerrado entonces $I(R) = 0$ donde

$$I(R) := \int_{\partial R} f(z)dz$$

Con los segmentos que unen los puntos medios de cada pareja de lados opuestos se descompone R en cuatro rectángulos congruentes R^1,R^2,R^3, R^4. Al considerar los bordes orientados de estos rectángulos se observa que los lados que son comunes a dos de ellos intervienen dos veces pero con orientaciones opuestas. Por consiguiente las integrales curvilíneas sobre estos lados se cancelan y resulta

$$I(R) = \sum_{i=1}^{4} I(R_i)$$

En virtud de la desigualdad triangular para algún $j \in \{1, 2, 3, 4\}$ se cumple

$$|I(R^j)| \geq \frac{1}{4}|I(R)|.$$

Se define entonces $R_1 := R^j$. Aplicando a R_1 el razonamiento anterior se obtiene un rectángulo cerrado $R_2 \subset R_1$ tal que $|I(R_2)| \geq \frac{1}{4}|I(R_1)|$. Repitiendo sucesivamente el mismo razonamiento se obtiene una sucesión decreciente de rectángulos cerrados R_n que cumple

i) $|I(R_n)| \geq \frac{1}{4}|I(R_{n-1})| \geq \frac{1}{4^2}|I(R_{n-2})| \geq \cdots \geq \frac{1}{4^n}|I(R)|$;

ii) $\operatorname{diam}(R_n) = \frac{1}{2}\operatorname{diam}(R_{n-1}) = \cdots = \frac{1}{2^n}\operatorname{diam}(R)$;

La sucesión decreciente de compactos R_n tiene intersección no vacía, que en virtud de ii) se reduce a un punto $\{a\}$, donde por hipótesis f es derivable. Usando la definición de derivada resulta que para cada $\epsilon > 0$ existe un disco $D(a, \delta) \subset \Omega$ tal que

$$z \in D(a, \delta) \Rightarrow |f(z) - f(a) - (z - a)f'(a)| \leq \epsilon|z - a|$$

Como $p(z) = f(a) + (z-a)f'(a)$ tiene primitiva en $\mathbb{C}$ se verifica que $\int_{\partial R_n} p(z)dz = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$ luego

$$I(R_n) = \int_{\partial R_n} (f(z) - f(a) - (z-a)f'(a))dz$$

Como $a \in R_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, en virtud de ii) para n suficientemente grande es $R_n \subset D(a,\delta)$ y entonces para cada $z \in \partial R_n$ se cumple

$$|f(z) - f(a) - (z-a)f'(a)| \leq \epsilon|z-a| \leq \epsilon \operatorname{diam}(R_n)$$

Aplicando 3.2.6 se obtiene

$$|I(R_n)| \leq \epsilon \operatorname{diam}(R_n) \operatorname{long}(\partial R_n) = \epsilon\frac{1}{2^n} \operatorname{diam}(R)\frac{1}{2^n} \operatorname{long}(\partial R)$$

Entonces, teniendo en cuenta i) y que $2 \times 2 = 4$ resulta

$$\frac{1}{4^n}|I(R)| \leq |I(R_n)| \leq \epsilon\frac{1}{4^n} \operatorname{diam}(R) \operatorname{long}(R)$$

Es decir $|I(R)| \leq \epsilon \operatorname{diam}(R) \operatorname{long}(R)$. Como $\epsilon > 0$ es arbitrario se concluye que $I(R) = 0$. ■

Un abierto $\Omega \subset \mathbb{C}$ se dice que es *holomórficamente conexo* si es conexo y para cada $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ existe $F \in \mathcal{H}(\Omega)$ tal que $F' = f$. En virtud de 3.3.1 los abiertos especiales son holomoórficamente conexos pero el recíproco es falso. En el ejercicio 3.12 se propone una técnica útil para demostrar, con recursos elementales, que ciertos abiertos concretos son holomórficamente conexos.

La demostración de la fórmula integral de Cauchy 3.3.5 requerirá la siguiente mejora del teorema 3.3.1. La mejora sólo es aparente, porque cuando se hayan obtenido las primeras consecuencias de esta fórmula se podrá demostrar fácilmente (véase 3.3.9) que si g cumple las hipótesis de 3.3.2 entonces existe la derivada $g'(a)$.

Lema 3.3.2 *Si $g : \Omega \to \mathbb{C}$ es continua en $a \in \Omega$ y derivable en cada $z \in \Omega \setminus \{a\}$ entonces $g(z)dz$ es una forma diferencial cerrada en Ω.*

Dem: En virtud de 3.2.12 basta demostrar que para cada rectángulo cerrado $R \subset \Omega$ es $I(R) = 0$ donde $I(R) := \int_{\partial R} g(z)dz$. Si $a \notin R$ el resultado es consecuencia de 3.3.1, pues $R \subset \Omega_a = \mathbb{C} \setminus \{a\}$ y g es holomorfa en Ω_a. Si $a \in R$, como g es continua en a, dado $\epsilon > 0$ existe $D(a,\delta) \subset \Omega$ tal que $|g(z) - g(a)| < \epsilon$ para todo $z \in D(a,\delta)$. El rectángulo cerrado R se puede descomponer en un número finito de rectángulos cerrados $R^1, R^2 \cdots R^m$ ($m \leq 9$) que no se solapan, de modo que $a \in R^1 \subset D(a,\delta)$. Considerando los bordes orientados de estos rectángulos, y teniendo en cuenta las cancelaciones de la integral curvilinea que se producen sobre los lados que intervienen dos veces pero con orientaciones opuestas, se obtiene que $I(R) = \sum_{i=1}^{9} I(R^i)$. Por lo probado al principio, todos los sumandos de esta suma, excepto el primero, son nulos luego

$$I(R) = I(R^1) = \int_{\partial R^1} g(z)dz = \int_{\partial R^1} (g(z) - g(a))dz$$

Como $R^1 \subset D(a, \delta)$ se cumple que $|g(z) - g(a)| \leq \epsilon$ para todo $z \in \partial R^1$ y aplicando la desigualdad 3.2.6 i) resulta

$$|I(R)| \leq \epsilon \text{ long}(\partial R^1) \leq \epsilon \text{ long}(\partial R)$$

Como $\epsilon > 0$ es arbitrario, se concluye que $I(R) = 0$. ■

Lema 3.3.3 *Si $\gamma : [0, 1] \to \mathbb{C}$ es un camino regular a trozos y $\varphi : K \to \mathbb{C}$ es continua sobre el compacto $K = \gamma([0, 1])$ entonces la función*

$$h(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{\varphi(w)}{w - z} dw$$

definida en $\Omega = \mathbb{C} \setminus K$, verifica $\lim_{z\to\infty} h(z) = 0$ y es desarrollable en serie de potencias en cada disco $D(a, r) \subset \Omega$:

$$h(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - a)^n \text{ si } |z - a| < r$$

donde

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{\varphi(w)}{(w - a)^{n+1}} dw$$

DEM: Fijado un disco $D(a, r) \subset \Omega$ si $z \in D(a, r)$ para cada $w \in K$ se verifica

$$\left| \frac{z - a}{w - a} \right| \leq \frac{|z - a|}{d} = \alpha < 1$$

donde $d = \text{dist}(a, K)$. Considerando la serie geométrica de razón $\dfrac{z - a}{w - a}$ se obtiene el desarrollo en serie

$$\frac{\varphi(w)}{w - z} = \frac{\varphi(w)}{w - a} \left(\frac{1}{1 - (z - a)/(w - a)} \right) =$$

$$= \frac{\varphi(w)}{w - a} \left(1 + \left(\frac{z - a}{w - a} \right) + \left(\frac{z - a}{w - a} \right)^2 + \cdots + \left(\frac{z - a}{w - a} \right)^n + \cdots \right)$$

donde la serie converge uniformemente sobre K en virtud del criterio de Weierstrass: Si $M = \max\{|\varphi(w)| : w \in K\}$, para cada $w \in K$ se verifica

$$\left| \frac{\varphi(w)}{w - a} \left(\frac{z - a}{w - a} \right)^n \right| \leq \frac{M}{d} \alpha^n$$

Aplicando 3.2.6 ii) se concluye que

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{\varphi(w)}{w - z} dw = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{\varphi(w)}{(w - a)^{n+1}} (z - a)^n dw = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - a)^n$$

donde

$$a_n = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{\varphi(w)}{(w-a)^{n+1}}dw$$

Obsérvese que este desarrollo es válido para todo $z \in D(a,r)$.

Por otra parte, si $|z| > R := \text{máx}\{|w| : w \in K\}$ para todo $w \in K$ se verifica

$$\left|\frac{\varphi(w)}{w-z}\right| \leq \frac{M}{|z|-|w|} \leq \frac{M}{|z|-R}$$

y en virtud de 3.3.4 i) resulta

$$|h(z)| \leq \frac{M}{|z|-R}\,\text{long}(\gamma)$$

luego $\text{lím}_{z\,\to\,\infty} h(z) = 0$. ■

NOTA: El lema anterior nos dice que la función h es analítica en Ω, lo que significa que para cada $a \in \Omega$ existe $r > 0$ tal que h admite en $D(a,r)$ un desarrollo en serie de potencias. Merece la pena resaltar que el lema nos dice algo más: El disco $D(a,r)$ se puede tomar todo lo grande que permite el abierto Ω es decir, el radio de convergencia ρ del desarrollo cumple:

$$\rho \geq \text{dist}(a,K)$$

Esta observación conviene tenerla presente en todos los resultados que se obtengan aplicando este lema, en particular en el teorema 3.3.6.

Corolario 3.3.4 *Sea $a \in \mathbb{C}$ y $C_r(t) = a + re^{it}$, $t \in [0,2\pi]$. Entonces para todo $z \in D(a,r)$ se verifica*

$$\int_{C_r} \frac{dw}{w-z} = 2\pi i$$

DEM: Aplicando 3.3.3 cuando φ es la función constante $2\pi i$ y $\gamma = C_r$ se obtiene

$$\int_{C_r} \frac{1}{w-z}dw = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-a)^n = a_0$$

pues $a_n = \displaystyle\int_{C_r} \frac{dw}{(w-a)^{n+1}} = 0$ para todo $n \geq 1$ debido a que la función $\dfrac{1}{(w-a)^{n+1}}$ tiene primitiva en $\mathbb{C}\setminus\{a\}$. Para terminar la prueba basta calcular

$$a_0 = \int_{C_r} \frac{dw}{w-a}dw = \int_0^{2\pi} \frac{ire^{it}}{re^{it}} = 2\pi i$$

■

La siguiente versión preliminar de la fórmula integral de Cauchy basta para establecer los primeros resultados fundamentales de este capítulo:

Teorema 3.3.5 [Fórmula integral de Cauchy] *Si $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ y $\overline{D(a,r)} \subset \Omega$, para cada $z \in D(a,r)$ se verifica:*

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_r} \frac{f(w)}{w-z}dw$$

donde $C_r(t) = a + re^{it}, t \in [0, 2\pi]$.

DEM: Como $\overline{D(a,r)} \subset \Omega$, existe $R > r$ tal que $D(a,R) \subset \Omega$. Fijado $z \in D(a,r)$ la función $g : \Omega \to \mathbb{C}$ definida por

$$g(w) = \frac{f(w)-f(z)}{w-z} \text{ si } w \neq z, \text{ y } g(z) = f'(z)$$

es holomorfa en $\Omega \setminus \{z\}$ y continua en z. En virtud del lema 3.3.2 $g(w)dw$ es una forma diferencial cerrada en Ω. Entonces el corolario 3.2.12 asegura que g tiene primitiva en $D(a,R)$ y por consiguiente $0 = \int_{C_r} g(w)dw$. Cuando $|w-a| = r$ es $w \neq z$ luego

$$0 = \int_{C_r} \frac{f(w)-f(z)}{w-z}dw = \int_{C_r} \frac{f(w)}{w-z}dw - \int_{C_r} \frac{f(z)}{w-z}dw = \int_{C_r} \frac{f(w)}{w-z}dw - f(z)2\pi i$$

donde la última igualdad es consecuencia de 3.3.4 ■

El siguiente resultado es bastante sorprendente: Dice que en el contexto de las funciones de variable compleja la noción de función derivable coincide con el de función analítica.

Teorema 3.3.6 *Si $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ entonces f es analítica y además admite un desarrollo en serie de potencias en cada disco $D(a,R) \subset \Omega$:*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-a)^n, \ \text{si } |z-a| < R$$

Los coeficientes del desarrollo vienen dados por

$$a_n = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_r} \frac{f(w)}{(w-a)^{n+1}}dw$$

donde $C_r(t) = a + re^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$, con $0 < r < R$.

DEM: Consecuencia inmediata de 3.3.5 y 3.3.3 ■

Corolario 3.3.7 *La derivada f' de cualquier función holomorfa $f = u + iv$ sigue siendo holomorfa. Por lo tanto las funciones holomorfas son indefinidamente derivables en sentido complejo, y sus componentes u, v son de clase C^∞.*

DEM: Sabemos que las afirmaciones del enunciado son ciertas para funciones definidas por series de potencias. Por lo tanto también lo son, en virtud del teorema anterior, para funciones holomorfas. ■

OBSERVACIÓN: El teorema 3.3.6 no sólo establece que toda función holomorfa $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ es analítica (y por tanto indefinidamente derivable) sino que fijado un punto $a \in \Omega$ de su dominio, el radio de convergencia ρ de su desarrollo en serie de potencias alrededor de a es tan grande como lo permite el abierto Ω, es decir: $\rho \geq d(a, \mathbb{C} \setminus \Omega)$. (Este hecho, que no es evidente a partir de la definición de función analítica dada en 2.7.10, puede resultar útil para calcular radios de convergencia de series de potencias. Esto se puede aplicar para resolver los ejercicios 4.10, 4.11, 4.12, y 5.14). resueltos en 5.20, 5.21 5.22 y 7.9 de [17].

Por otra parte, según 3.3.6, para cada $0 < r < d(a, \mathbb{C} \setminus \Omega)$, las sucesivas derivadas de f en el punto a vienen dadas por

$$f^{(n)}(a) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{C_r} \frac{f(w)}{(w-a)^{n+1}} dw$$

donde $C_r(t) = a + re^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$.

Dada una función holomorfa $f \in \mathcal{H}(G)$, la caracterización obtenida en 2.6.12 de los abiertos $\Omega \subset G$ en los que f posee logaritmo holomorfo se puede completar ahora con la siguiente:

Proposición 3.3.8 *Si $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ y $0 \notin f(\Omega)$, son equivalentes*

a) Existe $g \in \mathcal{H}(\Omega)$ tal que $f = e^g$;

b) Existe $F \in \mathcal{H}(\Omega)$ tal que $F'(z) = \dfrac{f'(z)}{f(z)}$

c) $\displaystyle\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)} dz = 0$ para cada camino cerrado γ en Ω, regular a trozos.

DEM: a) $\Leftrightarrow$ b) es 2.6.12. Como ya sabemos que las derivadas de las funciones holomorfas son holomorfas podemos asegurar que f'/f es continua y entonces basta aplicar 3.2.11 para obtener b) $\Leftrightarrow$ c). ■

NOTA: Conviene recordar que, en las condiciones de 3.3.8, si Ω es conexo se obtiene una primitiva F de f'/f en Ω mediante la integral

$$F(z) = \int_{\gamma_z} \frac{f'(z)}{f(z)} dz$$

donde γ_z es un camino en Ω, regular a trozos, con origen fijo $a \in \Omega$ y extremo variable $z \in \Omega$. En este caso, para cada $c \in \log f(a)$ la función $g(z) = F(z) + c$ es un logaritmo holomorfo de f en Ω.

El siguiente teorema proporciona un criterio útil para demostrar, en ciertas situaciones, la holomorfía de una función continua

Teorema 3.3.9 [Morera] *Si $f : \Omega \to \mathbb{C}$ es continua y $\int_{\partial R} f(z) dz = 0$ para cada rectángulo cerrado $R \subseteq \Omega$, entonces $f \in \mathcal{H}(\Omega)$.*

DEM: En virtud de 3.2.12 fijado un disco $D(a,R) \subset \Omega$ existe $F \in \mathcal{H}(D(a,R))$ tal que $F'(z) = f(z)$ para todo $z \in D(a,R)$. Según 3.3.7 la derivada $F' = f|_{D(a,R}$ es holomorfa en $D(a,R)$. Como esto es cierto para cada $D(a,R) \subset \Omega$ se concluye que $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ ■

NOTA: Obsérvese que, en virtud del teorema de Morera, toda función $g : \Omega \to \mathbb{C}$ que verifique las hipótesis de 3.3.2 es holomorfa en Ω.

Teorema 3.3.10 [Desigualdades de Cauchy] *Si* $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ *y* $\overline{D(a,r)} \subset \Omega$ *entonces para cada* $n \geq 0$ *se verifica*

$$\left| \frac{f^{(n)}}{n!}(a) \right| \leq \frac{M(r)}{r^n}$$

donde $M(r) = \sup\{|f(z)| : |z-a| \leq r\}$.

DEM: Es claro que existe $R > 0$ tal que $D(a,R) \subset \Omega$ y basta aplicar la desigualdad 3.2.6 i) a la integral que aparece en 3.3.6:

$$\left| \frac{f^{(n)}(a)}{n!} \right| = |a_n| = \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{C_r} \frac{f(w)}{(w-a)^{n+1}} dw \right| \leq \frac{1}{2\pi} \frac{M(r)}{r^{n+1}} 2\pi r = \frac{M(r)}{r^n}$$

■

NOTA: Es el momento de anunciar que como consecuencia del teorema del módulo máximo (véase 8.2.5) se puede asegurar que se cumple la igualdad

$$\text{máx}\{|f(z)| : |z-a| = r\} = \text{máx}\{|f(z)| : |z-a| \leq r\}$$

Por otra parte, en las condiciones de 3.3.10 si $\rho := \text{dist}\ (a, \mathbb{C}\setminus\Omega)$, la mejor cota de $|f^{(n)}(a)|$ que proporcionan las desigualdades de Cauchy se consigue con el extremo inferior de la función $r \to M(r)r^{-n}$ sobre $(0,\rho)$. Si $M := \sup\{|f(z)| : |z-a| < \rho\} \leq +\infty$ como la función creciente $M(r)$ verifica $\text{lím}_{r \to \rho} M(r) = M$ también se cumple

$$\left| \frac{f^n(a)}{n!} \right| \leq \frac{M}{\rho^n}$$

Una consecuencia inmediata de las desigualdades de Cauchy es

Teorema 3.3.11 [Liouville] *Toda función entera y acotada es constante.*

DEM: En virtud de 3.3.6 f admite un desarrollo en serie de potencias convergente en todo el plano $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$. Si $M > 0$ es una cota superior de $|f|$ utilizando las desigualdades de Cauchy, para todo $r > 0$ se verifica

$$|a_n| \leq \frac{M(r)}{r^n} \leq \frac{M}{r^n}$$

Si $r \to +\infty$ se sigue que $a_n = 0$ para todo $n \geq 1$ y por lo tanto f es constante. ■

Como aplicación del teorema de Liouville se puede dar una prueba rápida del teorema fundamental del álgebra.

Corolario 3.3.12 *Si $p(z)$ es un polinomio complejo no constante entonces $\mathcal{Z}(p) \neq \emptyset$.*

Dem: Por reducción al absurdo: Si $p(z)$ no se anula nunca $f(z) = 1/p(z)$ es una función entera. La condición $\lim_{z \to \infty} f(z) = 0$ implica que f es acotada (existe $R > 0$ tal que $|f(z)| < 1$ si $|z| > R$ y por lo tanto $|f(z)| \leq 1 + \max\{|f(z)| : |z| \leq R\}$ para todo $z \in \mathbb{C}$). Aplicando 3.3.11 se obtiene que f es constante lo que lleva consigo que p también, y con esta contradicción concluye la prueba. ■

Combinando el teorema de Morera con la fórmula integral de Cauchy, se obtiene

Teorema 3.3.13 [Weierstrass] *Si f_n es una sucesión de funciones holomorfas en un abierto Ω que converge, uniformemente sobre compactos, hacia una función $f : \Omega \to \mathbb{C}$, entonces f es holomorfa en Ω y la sucesión de las derivadas f_n' converge, uniformemente sobre compactos, hacia la derivada f'.*

Dem: La convergencia uniforme sobre compactos garantiza que f es continua. Entonces, teniendo en cuenta el teorema de Morera, para demostrar que f es holomorfa basta ver que para cada rectángulo cerrado $R \subset \Omega$ se cumple $\int_{\partial R} f(z)dz = 0$. En virtud del teorema de Cauchy-Goursat 3.3.1 $\int_{\partial R} f_n(z)dz = 0$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Como la sucesión f_n converge hacia f uniformemente sobre el compacto ∂R se puede aplicar 3.2.6 ii) para concluir.

$$\int_{\partial R} f(z)dz = \lim_n \int_{\partial R} f_n(z)dz = 0$$

Con esto queda demostrado que f es holomorfa en Ω.

A continuación se va a demostrar que si $\overline{D(a,r)} \subset \Omega$ entonces f_n' converge hacia f' uniformemente sobre $D(a, r/2)$. (esto implica que f_n' converge hacia f' uniformemente sobre compactos porque cada compacto se puede cubrir con un número finito de discos sobre los que hay convergencia uniforme).

Por hipótesis la sucesión $M_k := \max\{|f(z) - f_k(z)| : |z - a| \leq r\}$ tiende hacia 0. Si $0 < |z - a| \leq r/2$, la función $f_k - f$ admite un desarrollo en serie de potencias en $D(z, r/2) \subset D(a, r) \subset \Omega$, cuyo coeficiente a_1 viene dado por la fórmula en 3.3.6:

$$f_k'(z) - f'(z) = a_1 = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f_k(w) - f(w)}{(w - z)^2} dw$$

donde $C(t) = z + \frac{r}{2} e^{it}$, $0 \leq t \leq 2\pi$. Como la circunferencia $C([0, 2\pi])$ está contenida en $D(a, r)$ se tiene que $|f_k(w) - f(w)| \leq M_k$ para cada $w \in C([0, 2\pi])$. Por otra parte, para todo $w \in C([0, 2\pi])$ se cumple que $|w - z| = r/2$ y aplicando 3.2.6 i) se obtiene que

$$|f_k'(z) - f'(z)| \leq \frac{1}{2\pi} \frac{M_k}{(r/2)^2} 2\pi (r/2) = \frac{2}{r} M_k$$

Como la desigualdad obtenida es cierta para todo $z \in D(a, r/2)$ y M_k converge hacia 0 y se sigue que f_n' converge hacia f' uniformemente sobre $D(a, r/2)$. ■

Corolario 3.3.14 *Sea $f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(z)$ una serie de funciones holomorfas en Ω que converge uniformemente sobre compactos y*

$$f_k(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n^k (z-a)^n$$

el desarrollo en serie de potencias de $f_k(z)$ en $D(a,r) \subset \Omega$. Entonces todas las series numéricas $\sum_{k=1}^{\infty} a_n^k = a_n$ son convergentes y el desarrollo en serie de potencias de f en $D(a,r)$ es

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-a)^n$$

DEM: En virtud de 3.3.13 f es holomorfa en Ω y

$$f'(z) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k'(z)$$

donde la serie de las derivadas sigue convergiendo uniformemente sobre compactos. Por lo tanto $a_0 = f(0) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(0) = \sum_{k=1}^{\infty} a_0^k$ y $a_1 = f'(0) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k'(0) = \sum_{k=1}^{\infty} a_1^k$. Volviendo a aplicar el teorema de Weierstrass

$$f''(z) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k''(z)$$

donde la serie de las derivadas segundas sigue convergiendo uniformemente sobre compactos. Particularizando en $z = 0$ se obtiene $\sum_{k=1}^{\infty} a_2^k = a_2$ y razonando por inducción se concluye la prueba. ■

Teorema 3.3.15 *Sea $F : [\alpha, \beta] \times \Omega \to \mathbb{C}$ una función continua tal que las funciones parciales $z \to F(t,z)$ son holomorfas en Ω, con derivada $D_2F(t,z)$. Entonces se verifica:*

i) La integral $f(z) = \displaystyle\int_\alpha^\beta F(t,z)dt$ define una función holomorfa en Ω.

ii) Para cada $z \in \Omega$, la función $t \to D_2F(t,z)$, es continua en $[\alpha, \beta]$ y

$$f'(z) = \int_\alpha^\beta D_2F(t,z)dt$$

DEM: Fijado $a \in \Omega$, para cada $z \in \Omega$, $z \neq a$, consideremos el cociente

$$\Delta(z) = \frac{f(z) - f(a)}{z-a} = \int_\alpha^\beta \Delta(t,z)dt, \quad \text{donde } \Delta(t,z) = \frac{F(t,z) - F(t,a)}{z-a}$$

Si demostramos que el límite $\lim_{z \to a} \Delta(t,z) = D_2F(t,a)$ es uniforme respecto de $t \in [\alpha, \beta]$, y utilizando 2.8.17 obtendremos la continuidad de $t \to D_2F(t,a)$. Además la convergencia uniforme justifica la posibilidad de sacar el límite bajo la integral:

$$\int_\alpha^\beta D_2F(t,a)dt = \int_\alpha^\beta \lim_{z \to a} \Delta(t,z)dt = \lim_{z \to a} \int_\alpha^\beta \Delta(t,z)dt = \lim_{z \to a} \Delta(z)$$

donde la existencia del último límite es parte de la conclusión. Así quedará demostrada así la existencia de la derivada

$$f'(a) = \int_\alpha^\beta D_2F(t,a)dt$$

Sea $C_r(t) = a + re^{it}$ ($t \in [0, 2\pi]$). Aplicando la fórmula integral de Cauchy a las funciones $z \to F(t,z)$, cuando $|z-a| < r$ podemos escribir

$$\Delta(t,z) = \frac{1}{2\pi i}\frac{1}{z-a}\int_{C_r}\left(\frac{F(t,w)}{w-z} - \frac{F(t,w)}{w-a}\right)dw = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_r}\frac{F(t,w)}{(w-z)(w-a)}dw$$

Para demostrar que el límite $\lim_{z \to a}\Delta(t,z) = D_2F(t,a)$ es uniforme respecto de $t \in [\alpha,\beta]$ se puede razonar así: El coeficiente de $(z-a)$ en el desarrollo en serie de potencias de $z \to F(t,z)$ alrededor de a es

$$D_2F(t,a) = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_r}\frac{F(t,w)}{(w-a)^2}dw$$

Entonces, cuando $|z-a| < r$, para todo $t \in [\alpha,\beta]$ se cumple

$$|\Delta(t,z) - D_2F(t,a)| = \frac{1}{2\pi}\left|\int_{C_r}\frac{F(t,w)(z-a)}{(w-z)(w-a)^2}dw\right|$$

Si $|z-a| < r/2$, sobre la circunferencia $|w-a| = r$ se verifica

$$|w-z| \geq |w-a| - |z-a| \geq r - r/2 = r/2$$

luego, para todo $t \in [\alpha,\beta]$, vale la desigualdad

$$|\Delta(t,z) - D_2F(t,a)| \leq \frac{|z-a|}{2\pi}\frac{M}{r^2(r/2)}2\pi r = \frac{2M}{r^2}|z-a|$$

con $M = \max\{|F(t,z)| : \alpha \leq t \leq \beta, |w-a| = r\}$. De aquí se sigue que el límite $\lim_{z \to a}\Delta(t,z) = D_2F(t,a)$ es uniforme respecto de $t \in [\alpha,\beta]$. Con un razonamiento similar se puede resolver el ejercicio 3.19. ∎

NOTA: Se puede ver una demostración alternativa del teorema anterior en [17] ejerc. 5.48. Si sólo se desea probar la parte i) se puede emplear un razonamiento más breve basado en el teorema de Morera. En primer lugar se obtiene la continuidad de f en cada $a \in \Omega$ (usando la continuidad uniforme de F sobre $[\alpha,\beta] \times \overline{D(a,r)}$, con $\overline{D(a,r)} \subset \Omega$). En segundo lugar se utiliza el teorema de Fubini para demostrar que si $R \subset \Omega$ es un rectángulo cerrado se verifica

$$\int_{\partial R} f(z)dz = \int_{\partial R}\left(\int_\alpha^\beta F(t,z)dt\right)dz = \int_\alpha^\beta\left(\int_{\partial R} F(t,z)dz\right)dt = \int_\alpha^\beta 0dt = 0$$

(Las integrales $\int_{\partial R} F(t,z)dz$ son nulas en virtud del teorema de Cauchy).

3.4. Ejercicios

♢ **3.1** *Sea $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ y γ un camino cerrado regular a trozos en Ω. Demuestre que*

$$\operatorname{Re} \int_\gamma \overline{f(z)} f'(z) dz = 0$$

([17] ejerc. 5.2)

♢ **3.2** *Si $f : \Omega \to \mathbb{C}$ es continua en el abierto $\Omega \subset \mathbb{C}$ y $\gamma : [a, b] \to \Omega$ es un camino regular a trozos, se define*

$$\int_\gamma f(z) d\overline{z} = \int_a^b f(\gamma(t)) \overline{\gamma'(t)} dt$$

Sea $P(z)$ un polinomio complejo y C_R la circunferencia $|z - a| = R$, ($R > 0$), con la orientación habitual. Demuestre que

$$\int_{C_R} P(z) d\overline{z} = -2\pi i R^2 P'(a)$$

([17] ejerc. 5.3)

♢ **3.3** *Sea $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ tal que $|f(z) - 1| < 1$ para cada $z \in \Omega$. Si γ es un camino cerrado regular a trozos en Ω demuestre que*

$$\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)} dz = 0$$

([17] ejerc. 5.4)

♢ **3.4** *Demuestre la función $T(z) = z/(z + 1)$ tiene raíz cuadrada holomorfa en $\Omega = \mathbb{C} \setminus [-1, 0]$. Si $g \in \mathcal{H}(\Omega)$ es la raíz cuadrada de T determinada por $g(1) = 1/\sqrt{2}$ obtenga el valor de la integral $I = \int_C g(z)dz$, donde $C(t) = 2e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$*
([17] ejerc. 5.6).

♢ **3.5** *Sea $\Omega = \{z : |z| > 1\}$ y $n \in \mathbb{N}$. Demuestre que existe $f_n \in \mathcal{H}(\Omega)$ tal que*

$$f_n(z)^n = (z^n + 1)^2 \quad \textit{para todo} \quad z \in \Omega$$

Si $r > 1$ y $C_r(t) = re^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$, obtenga los valores de $n \in \mathbb{N}$ para los que

$$\int_{C_r} \frac{f_n(z)}{z} dz \neq 0$$

([17] ejerc. 5.7)

♢ **3.6** *Calcule $\displaystyle\int_\gamma z^2 e^{1/(z-1)} dz$, donde $\gamma(t) = 1 + e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$ ([17] ejerc. 5.8).*

$\diamondsuit$ **3.7** *Compruebe que $1 - z^2$ posee raíz cuadrada holomorfa en $\mathbb{C} \setminus [-1, 1]$. Si $f(z)$ es la raíz cuadrada holomorfa de $1 - z^2$ en $\mathbb{C} \setminus [-1, 1]$, determinada por $f(2) = -\sqrt{3}i$, obtenga el valor de la integral*

$$\int_{C_\rho} \left(\frac{1}{z} + \frac{1}{z^3} \right) \frac{dz}{f(z)}$$

donde $\rho > 1$, y $C_\rho(t) = \rho e^{it}, t \in [0, 2\pi]$ ([17] ejerc. 5.9).

$\diamondsuit$ **3.8** *Sean $r_1, r_2 > 0$, los radios de convergencia de las series de potencias*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n, \qquad g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n.$$

Demuestre que la serie $h(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n b_n z^n$ tiene radio de convergencia $\geq r_1 r_2$ y que si $|z| < r r_2$, con $0 < r < r_1$, se verifica

$$h(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_r} \frac{f(w)}{w} g\left(\frac{z}{w}\right) dw, \text{ donde } C_r(t) = re^{it}, \quad t \in [0, 2\pi]$$

([17] ejerc. 5.10)

$\diamondsuit$ **3.9** *Obtenga el desarrollo de Laurent de $e^{z+1/z}$ en $\{z : 0 < |z|\}$ y deduzca que*

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{2\cos t} \cos nt dt = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!(n+m)!}$$

([17] ejerc. 5.11)

$\diamondsuit$ **3.10** *Si f es holomorfa en $D(0, 3)$, demuestre que*

$$\frac{1}{2\pi i} \int_C f(z) \operatorname{Log} \frac{z+1}{z-1} dz = \int_{-1}^{1} f(x) dx$$

donde $C(t) = 2e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$ ([17] ejerc. 5.12).

$\diamondsuit$ **3.11** *Sea $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, definida en $D(0, r)$ y $0 < \rho < r$. Calcule, en términos de los coeficientes a_n, el valor de la integral*

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{C_\rho} e^{w/z} \frac{f(z)}{z} dz$$

donde $C_\rho(t) = \rho e^{it}, t \in [0, 2\pi]$.

$\diamondsuit$ **3.12** *Un abierto $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ se dice que es holomórficamente conexo cuando es conexo y cada $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ tiene primitiva (existe $F \in \mathcal{H}(\Omega)$ tal que $F' = f$).*

Demuesre las siguientes afirmaciones

i) Si dos abiertos $\Omega_1, \Omega_2 \subset \mathbb{C}$ son conformemente equivalentes y uno es holomórficamente conexo, el otro también lo es.

ii) Son holomórficamente conexos

$\Omega_0 = \{z : \operatorname{Im}(z-a)/u > 0\}, \quad a, u \in \mathbb{C},\ u \neq 0.$

$\Omega_1 = \mathbb{C} \setminus \{x \in \mathbb{R} : x \leq 0\}.$

$\Omega_2 = \{\rho e^{it} : r < \rho < R, \alpha < t < \beta\}, \quad \beta - \alpha < 2\pi.$

iii) Si los abiertos Ω_1, $\Omega_2 \subset \mathbb{C}$ son holomórficamente conexos y $\Omega_1 \cap \Omega_2$ es conexo entonces $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_1$ también es holomórficamente conexo. Muestre que este resultado es falso cuando la intersección no es conexa.

([17] ejerc. 5.13)

♢ **3.13** *Demuestre que la integral $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x+ia)^2} dx$ no depende de $a \in \mathbb{R}^+$ y obtenga*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} \cos(2ax) dx = \sqrt{\pi} e^{-a^2}$$

(Indicación: Considere la integral de e^{-z^2} a lo largo del borde del rectángulo $R = [-r, r] \times [0, a]$, y utilice que $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$) ([17] ejerc. 5.14)

♢ **3.14** *Usando la integral de e^{iz^2} sobre el borde de $S = \{re^{it} : 0 \leq r \leq R, 0 \leq t \leq \pi/4\}$ obtenga la convergencia y el valor de las integrales*

$$\int_0^{+\infty} \operatorname{sen} x^2 dx, \qquad \int_0^{+\infty} \cos x^2 dx.$$

(Indicación: $\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ y $\operatorname{sen} x \geq 2x/\pi$ si $0 \leq x \leq \pi/2$) ([17] ejerc. 5.15).

♢ **3.15** *Si $f \in \mathcal{H}(D(0,1))$ y $|z| < r < 1$ demuestre que $f(z) = \lim_{n\to\infty} f_n(z)$ donde*

$$f_n(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_r} \frac{f(w)}{w^{n+1}} \left(\frac{w^{n+1} - z^{n+1}}{w - z} \right) dw$$

con $C_r(t) = re^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$ ([17] ejerc. 5.26).

♢ **3.16** *Obtenga el valor de la integral*

$$I_R(a,b) = \int_{C_R} \frac{f(z)}{(z-a)(z-b)} dz$$

donde f es una función entera, $|a| < R$, $|b| < R$ y $C_R(t) = Re^{it}, t \in [0, 2\pi]$. Utilice el resultado para demostrar el teorema de Liouville ([17] ejerc. 5.30).

$\diamondsuit$ **3.17** *Sea* $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^{-n}$ *definida en* $\{z : |z| > \rho\}$, *con* $0 < \rho < 1$. *Calcule*

$$I(a) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)}{z(z-a)} dz$$

donde $|a| \neq 1$, *y* $C(t) = e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$ *([17] ejerc. 5.31).*

$\diamondsuit$ **3.18** *Obtenga el valor de la integral*

$$\frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{P(z)}{z^{n+1}(a-z)} dz$$

donde P *es un polinomio complejo de grado* n *y* $C(t) = e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$ *([17] ejerc. 5.32).*

$\diamondsuit$ **3.19** *Si* $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ *demuestre que el límite*

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h} = f'(z)$$

es uniforme, respecto de z, *en cada disco compacto* $\overline{D(a,r)} \subset \Omega$ *([17] ejerc. 5.36).*

$\diamondsuit$ **3.20** *¿Existe* $f \in \mathcal{H}(D(0,1))$, *tal que* $f^{(n)}(\frac{1}{3}) = n!\sqrt{n}2^n$ *para cada* $n \in \mathbb{N}$*?.*

$\diamondsuit$ **3.21** *Sea* $f \in \mathcal{H}(D(0,1))$ *tal que* $|f(z)| \leq 1/(1-|z|)$ *para cada* $z \in D(0,1)$. *Demuestre que para todo* $n \in \mathbb{N}$ *se cumple*

$$|f^{(n)}(0)| \leq (n+1)! \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

([17] ejerc. 5.38)

$\diamondsuit$ **3.22** *¿Existe una función* $f \in \mathcal{H}(D(a,R))$ *tal que* $|f^{(n)}(a)| \geq n^n n!$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$*? ([17] ejerc. 5.39).*

$\diamondsuit$ **3.23** *Sea* $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ *una función entera para la que existen* $n \in \mathbb{N}$ *y* $\rho > 0$ *verificando*

$$|f(z)| \leq |z|^n \text{ si } |z| \geq \rho$$

Demuestre que f *es un polinomio de grado menor o igual que* n *([17] ejerc. 5.40)*

$\diamondsuit$ **3.24** *Sea* $\rho > 0$ *el radio de convergencia de la serie de potencias* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$. *Demuestre que* $g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n/n!) z^n$ *es una función entera que verifica:*

(P) Existen $A > 0$ *y* $a > 1/\rho$ *tales que* $|g(z)| \leq Ae^{a|z|}$ *para todo* $z \in \mathbb{C}$.

Recíprocamente, si $g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$ *es una función entera que cumple* (P) *y* $a_n = n! b_n$, *demuestre que la serie de potencias* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ *tiene radio de convergencia* $\rho \geq 1/a$ *([17] ejerc. 5.43).*

$\diamondsuit$ **3.25** *Si* $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ *y* $\operatorname{Re} f(z) \leq 0$ *para todo* $z \in \mathbb{C}$, *demuestre que* f *es constante. ([17] ejerc. 5.46)*

$\diamondsuit$ **3.26** *Si* $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ *tiene los periodos* $1, i$, *demuestre que es constante.*

Capítulo 4

Ceros y singularidades aisladas

El hecho de que una función holomorfa sea analítica hace que en una situación natural sus ceros tengan propiedades similares a los de los polinomios: Son aislados y tienen multiplicidad. Si $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ no es idénticamente nula en un abierto conexo $\Omega \subset \mathbb{C}$ entonces el conjunto de sus ceros, $\mathcal{Z}(f) := \{z \in \Omega : f(z) = 0\}$ verifica la condición $\mathcal{Z}(f)' \cap \Omega = \emptyset$. Esto implica $\mathcal{Z}(f)$ es numerable y el principio de identidad 4.1.4 fundamental para las cuestiones de prolongación analítica.

4.1. Ceros y principio de identidad

Teorema 4.1.1 *Si $\Omega \subset \mathbb{C}$ es un abierto conexo, $a \in \Omega$ y $f \in \mathcal{H}(\Omega)$, son equivalentes:*

a) $f^{(n)}(a) = 0$ para todo $n \geq 0$;

b) Existe $V_a \subset \Omega$, entorno de a, tal que $f|_{V_a}$ es idénticamente nula.

c) f es idénticamente nula en todo Ω.

Dem: Es evidente que c) $\Rightarrow$ b) $\Rightarrow$ a).
a) $\Rightarrow$ c): La condición a) significa que $G := \{z \in \Omega : f^{(n)}(z) = 0, \ \forall n \geq 0\}$ no es vacío. Para probar c) basta ver que $G = \Omega$. Esto se obtendrá viendo que G es abierto y cerrado respecto al conexo Ω. Como las derivadas sucesivas $f^{(n)}$ son continuas, cada $G_n := \{z \in \Omega : f^{(n)}(z) = 0\}$ es cerrado relativo a Ω y por lo tanto $G = \cap_{n \geq 0} G_n$ también lo es. Por otra parte, si $z_0 \in G$, el desarrollo en serie de potencias de f alrededor de z_0 es idénticamente nulo, lo que significa que existe $D(z_0, r) \subset \Omega$ tal que $f|_{D(z_0,r)}$ es idénticamente nula. Esto implica que $D(z_0, r) \subset G$ y queda probado que G es un subconjunto abierto de Ω. ■

Corolario 4.1.2 *Si f es una función holomorfa no idénticamente nula en un abierto conexo Ω entonces todos los ceros de f son aislados y $\Omega \cap \mathcal{Z}(f)' = \emptyset$ (e.d $\mathcal{Z}(f)$ es discreto en Ω) Por consiguiente $\mathcal{Z}(f)$ es numerable y $\mathcal{Z}(f)' \subset \partial\Omega$.*

DEM: Si $a \in \mathcal{Z}(f)$ es un cero de f, según 4.1.1 existe $n \geq 1$ con $f^{(n)}(a) \neq 0$. Si $m := \min\{n \in \mathbb{N} : f^{(n)}(a) \neq 0\}$, en un cierto disco $D(a, r)$, la función f admite un desarrollo en serie de potencias del tipo:

$$f(z) = \sum_{n \geq m} a_n (z-a)^n = (z-a)^m g(z)$$

donde $g(z) = a_m + a_{m+1}(z-a) + a_{m+2}(z-a)^2 + \cdots$ es continua en $D(a, r)$ y verifica $g(a) = a_m \neq 0$. Entonces existe $0 < \delta < r$ tal que $g(z) \neq 0$ si $|z-a| < \delta$ y por lo tanto $D(a, \delta) \cap \mathcal{Z}(f) = \{a\}$, es decir a es un punto aislado de $\mathcal{Z}(f)$.

Se demuestra que $\Omega \cap \mathcal{Z}(f)' = \emptyset$ por reducción al absurdo: Si existe $a \in \Omega \cap \mathcal{Z}(f)'$ debe existir una sucesión $a_n \in \mathcal{Z}(f)$ convergente hacia a con $a_n \neq a$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Como $f(a) = \lim_n f(a_n) = 0$ se obtendría que a es un cero no aislado de f.

Obsérvese que $\mathcal{Z}(f)$ ha de ser numerable en virtud de 1.5.2. Por otra parte, teniendo en cuenta que $\mathcal{Z}(f)' \subset \overline{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega$, como $\mathcal{Z}(f)' \cap \Omega = \emptyset$, resulta $\mathcal{Z}(f)' \subset \partial\Omega$. ■ .

En la demostración de 4.1.2 se ha puesto de manifiesto que cada cero aislado $a \in \mathcal{Z}(f)$ tiene una *multiplicidad* que se define de forma similar a la de los ceros de polinomios:

Definición 4.1.3 *Si a es un cero aislado de una función holomorfa $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ se define*

$$\nu(f, a) = \min\{n \in \mathbb{N} : f^{(n)}(a) \neq 0\}$$

Si $m = \nu(f, a)$ se dice que a es un cero de f de multiplicidad m*, o que f presenta en a un cero de* orden m*. (Los ceros de multiplicidad 1,2.. se suele decir que son ceros simples, dobles ...).*

En las condiciones de la definición 4.1.3 $m = \nu(f, a)$ es el único número natural para el que existe una función $\varphi \in \mathcal{H}(\Omega)$ tal que $f(z) = (z-a)^m \varphi(z)$ y $\varphi(a) \neq 0$: En efecto, aunque la función holomorfa g que interviene en la demostración del corolario 4.1.2 sólo está definida en el disco $D(a, r)$ mediante una serie de potencias, también la podemos suponer definida en todo Ω, usando a fórmula $g(z) = f(z)/(z-a)^m$ para los puntos $z \in \Omega \setminus \{a\}$.

Si $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ no es idénticamente nula y Ω es conexo entonces todos los ceros de f tienen multiplicidad ya que todos ellos son aislados en virtud de 4.1.2

Si $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ no es constante y Ω es conexo entonces cada $a \in \Omega$ es un cero aislado de la función $f(z) - f(a)$. En lo que sigue, aunque a no sea cero de f se denotará también por $\nu(f, a)$ a la multiplicidad de a como cero de $f(z) - f(a)$. Nótese que en este caso también es $\nu(f, a) = \min\{n \in \mathbb{N} : f^{(n)}(a) \neq 0\}$.

Corolario 4.1.4 (Principio de identidad) *Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$ abierto conexo y $M \subset \Omega$ tal que $\Omega \cap M' \neq \emptyset$. Si $f, g \in \mathcal{H}(\Omega)$ y $f(z) = g(z)$ para cada $z \in M$ entonces $f = g$.*

DEM: Basta aplicar 4.1.2 a la función $f - g$ que cumple $\Omega \cap \mathcal{Z}(f-g)' \supset \Omega \cap M' \neq \emptyset$. ■

NOTA: Conviene advertir que los resultados 4.1.1, 4.1.2 y 4.1.4 son falsos cuando Ω no se supone conexo: Basta considerar el abierto $\Omega = \{z : \operatorname{Re} z \neq 0\}$ y la función $f(z) = 0$ si $\operatorname{Re} z < 0$ y $f(z) = 1$ si $\operatorname{Re} z > 0$.

Una consecuencia inmediata del teorema 4.1.4 es:

Corolario 4.1.5 *Si Ω es conexo el anillo $\mathcal{H}(\Omega)$ no tiene divisores de 0, es decir, siempre que el producto de dos funciones holomorfas $f, g \in \mathcal{H}(\Omega)$ es idénticamente nulo, una de las dos funciones, f o g, debe ser idénticamente nula.*

Dem: Si f no es idénticamente nula existe $D(a, r) \subset \Omega \setminus \mathcal{Z}(f)$ luego $g|_{D(a,r)}$ es idénticamente nula y en virtud del principio de identidad g es idénticamente nula. ■

El *principio de identidad* también se suele llamar *principio de prolongación analítica* porque se puede formular, de modo obvio, en los siguientes términos: Si g es holomorfa en un abierto $U \subset \mathbb{C}$ y si $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ es una prolongación holomorfa de g a algún abierto conexo $\Omega \supset U$ entonces f es la única prolongación analítica posible de g al abierto Ω.

Ejemplo 4.1.6 *Prolongación analítica de una serie de potencias*

Sea $f \in \mathcal{H}(U)$ la función holomorfa que define una serie de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-a)^n$ en su disco de convergencia $U := D(a, \rho)$. Se supone que el radio de convergencia ρ_b de la serie reordenada en $b \in D(a, \rho)$ verifica $\rho_b > \rho - |b-a|$ (véase 2.3.7).

Consideremos la función holomorfa $g(z) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n(z-b)^n$ definida en $D(b, \rho_b)$ mediante la suma de la serie reordenada. La intersección de los discos de convergencia $G := D(a, \rho) \cap D(b, \rho_b)$ es un abierto conexo. Si $r = \rho - |b-a| > 0$, el teorema de reordenación 2.2.6 asegura que f y g coinciden sobre $D(b, r) \subset G$ y aplicando el principio de identidad se sigue que f y g coinciden sobre G.

Entonces, sobre el abierto $\Omega := D(a, \rho) \cup D(b, \rho_b)$ podemos definir una función holomorfa F poniendo $F(z) = f(z)$ si $z \in D(a, \rho)$, y $F(z) = g(z)$ si $z \in D(b, \rho_b)$. En virtud del principio de identidad esta es la única prolongación analítica de f al abierto Ω.

nota: Se puede demostrar que para cada abierto conexo $U \subsetneq \mathbb{C}$ existe una función $f \in \mathcal{H}(U)$ tal que $\mathcal{Z}(f)' = \partial U$. Esta función es imposible prolongarla analíticamente a un abierto conexo $\Omega \supset U$, $\Omega \neq U$. En efecto, si existiese $F \in \mathcal{H}(\Omega)$ tal que $F(z) = f(z)$ para todo $z \in U$ entonces teniendo en cuenta 4.1.2 y que $\emptyset \neq \Omega \cap \partial U \subset \Omega \cap \mathcal{Z}(F)'$ se deduciría que F es idénticamente nula, lo cual es imposible porque f no lo es.

La siguiente proposición muestra que la teoría de las funciones analíticas de una variable real queda englobada en el de las funciones analíticas de una variable compleja.

Proposición 4.1.7 *Si f es una función analítica real, definida en un abierto $V \subset \mathbb{R}$ entonces existe un abierto $\Omega \subset \mathbb{C}$ y una función $F \in \mathcal{H}(\Omega)$, tal que $V = \Omega \cap \mathbb{R}$ y $f(x) = F(x)$ para todo $x \in V$.*

Dem: Véase [17] ejerc. 4.48 ■

4.2. Comportamiento local de una función holomorfa

El comportamiento local de una función holomorfa $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ en el entorno de un punto $a \in \Omega$ con $f'(a) \neq 0$ es muy simple:

Teorema 4.2.1 [Función inversa] *Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$ abierto y $f \in \mathcal{H}(\Omega)$. Si $a \in \Omega$ y $f'(a) \neq 0$ existe un entorno abierto de a, $U_a \subset \Omega$ tal que se cumple a), b) y c):*
a) $f|_{U_a}$ es inyectiva,
b) $V_b = f(U_a)$ es un entorno abierto de $b = f(a)$
c) La inversa $g = (f|_{U_a})^{-1} : V_b \to U_a$ es holomorfa.
Por lo tanto f establece un isomorfismo conforme entre un entorno abierto U_a de a y un entorno abierto V_b de b.

DEM: En virtud del teorema de la función inversa para funciones de vectoriales de varias variables reales que se explica en Análisis Matemático II (véase [2]) existen $U_a \subset \Omega$, entorno abierto de a, y $V_b \subset \mathbb{C}$, entorno abierto de $b = f(a)$ tales que $f(U_a) = V_b$ y $f|_{U_a} : U_a \to V_b$ es un difeomorfismo (una biyección diferenciable con inversa diferenciable). Esto lleva consigo que la aplicación $\mathbb{C}$-lineal $h \to df(z)h = f'(z)h$ es no singular, luego $f'(z) \neq 0$ para cada $z \in U_a$. Análogamente la inversa $g = (f|_{U_a})^{-1}$ es diferenciable en cada $w \in V_b$ y su diferencial ha de ser la aplicación $\mathbb{C}$-lineal: $dg(w)k = g'(w)k$ con $g'(w) = 1/f'(g(w))$, luego $g'(w) \neq 0$. Es decir, $f|_{U_a} : U_a \to V_b$ es un isomorfismo conforme. ■

A continuación nos ocupamos del comportamiento local de una función holomorfa $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ en el entorno de un punto $a \in \Omega$ donde $f'(a) = 0$. Es natural suponer que a es un cero aislado de f' (en otro caso f' sería idénticamente nula en la componente conexa de a y f sería constante en esta componente). Supongamos pues que a es cero de f' de multiplicidad $n \geq 1$. Entonces a es un cero aislado de $f(z) - f(a)$ de multiplicidad $m = n+1 \geq 2$, y según la observación que sigue al ejemplo 2.5.3, f transforma un ángulo orientado de valor θ en el punto a en un ángulo orientado de valor $m\theta$ en el punto $f(a)$. Así por ejemplo, cuando $m = 2$ los ángulos se duplican, hecho que se aprecia claramente con la función z^2 en el punto $a = 0$.

La siguiente proposición proporciona una descripción bastante precisa del comportamiento local de una función holomorfa en el entorno de un punto donde se puede anular la derivada:

Proposición 4.2.2 *Sea $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ y a un cero aislado de $f(z) - f(a)$ de multiplicidad m. Entonces existe un entorno abierto $U_a \subset \Omega$ un disco $D(0, \delta)$ y un isomorfismo conforme $\varphi : U_a \to D(0, \delta)$ tales que*

$$f(z) = f(a) + \varphi(z)^m \quad \textit{para todo} \quad z \in U_a$$

DEM: La función $f(z) - f(a)$, que tiene en $z = a$ un cero aislado de multiplicidad $m \in \mathbb{N}$, se puede escribir en la forma $f(z) - f(a) = (z - a)^m g(z)$ donde g es holomorfa en Ω y $g(a) \neq 0$. Por continuidad, existe un disco $D(a, r) \subset \Omega$ tal que $g(D(a, r)) \subset D(b, |b|)$.

En este disco g posee una raíz m-ésima holomorfa, es decir hay una función $\psi \in \mathcal{H}(D(a, r))$ que verifica $\psi(z)^m = g(z)$ para todo $z \in D(a, r)$. (Si $\operatorname{Log}_b : D(b, |b|) \to \mathbb{C}$ es un logaritmo holomorfo de z podemos tomar $\psi(z) = e^{\frac{1}{m} \operatorname{Log}_b g(z)}$).

La función $\varphi(z) = (z - a)\psi(z)$ cumple que $f(z) - f(a) = \varphi(z)^m$ para todo $z \in D(a, r)$ y además $\varphi'(a) = \psi(a) \neq 0$.

Como $\varphi(a) = 0$ y $\varphi'(a) \neq 0$, aplicando el teorema de la función inversa se obtiene un entorno abierto de a, $W_a \subset D(a, r)$ tal que φ establece un isomorfismo conforme entre

W_a y su imagen $V_0 = \varphi(W_a) \subset \mathbb{C}$. Como V_0 es un entorno de 0 podemos considerar un disco $D(0,\rho) \subset V_0$, y su preimagen $U_a = \varphi^{-1}(D(0,\rho))$. Entonces , con $\delta = \rho^m$, se cumplen los requisitos del enunciado, ya que la imagen de $D(0,\rho)$ mediante la función z^m es $D(0,\rho^m) = D(0,\delta)$. ■

En las condiciones de la proposición anterior, en un entorno de $z = a$ la función f se descompone en una aplicación φ que conserva ángulos orientados en a, seguida de la función z^m y de una traslación. Para valores pequeños de $z - a$ la función φ se comporta como $z \to \varphi'(a)(z-a)$ cuya interpretación geométrica es obvia. El comportamiento de z^m en $z = 0$ es bien conocido. En definitiva, en un entorno suficientemente pequeño de a la función $f(z) - f(a)$ se comporta como $(z-a)^m$.

Consecuencia directa de la descripción local proporcionada por 4.2.2 es el teorema de la aplicación abierta. Es este uno de los resultados básicos de la teoría de funciones holomorfas, cuya repercusión en los problemas de representación conforme se pone de manifiesto con su corolario 4.2.4. (en 5.5.2 se verá otra demostración de este teorema, con técnicas genuinas de variable compleja, basada en el principio del argumento).

Teorema 4.2.3 [Aplicación abierta] *Si $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ no es constante en un abierto conexo $\Omega \subset \mathbb{C}$ entonces f es abierta. Más concretamente, si $a \in \Omega$ y m es la multiplicidad de a como cero de $f(z) - f(a)$, existe un entorno abierto de a, $U_a \subset \Omega$ tal que $V_b = f(U_a)$ es un entorno abierto de $b = f(a)$ con la siguiente propiedad: Para cada $w \in V_b \setminus \{b\}$ la función $z \to f(z) - w$ posee m ceros distintos en U_a, todos simples.*

DEM: Como f no es constante en el abierto conexo Ω cada $a \in \Omega$ es un cero aislado de $f(z) - f(a)$, con una cierta multiplicidad $m \geq 1$. Usando la proposición 4.2.2 se obtiene la primera afirmación, tomando $V_b = D(b,\delta^m)$. Obsérvese que la aplicación $f|_{U_a}$ se puede descomponer así

$$U_a \xrightarrow{\varphi} D(0,\delta) \xrightarrow{z^m} D(0,\delta^m) \xrightarrow{z+b} D(b,\delta^m) = V_b$$

y todas las aplicaciones involucradas son biyectivas excepto $z \to z^m$ que, como es bien sabido, tiene la propiedad de que cada $w \in D(0,\delta^m) \setminus \{0\}$ tiene exactamente m preimágenes distintas en $D(0,\delta)$. Por otra parte, hay que hacer notar que al ser φ un isomorfismo conforme se cumple que $\varphi'(z) \neq 0$ para todo $z \in U_a$, luego $f'(z) = m\varphi(z)^{m-1}\varphi'(z) \neq 0$ para todo $z \in U_a \setminus \{a\}$. Esto lleva consigo que para cada $w \in V_b \setminus \{b\}$ los m ceros que tiene la función $f(z) - w$ en $U_a \setminus \{a\}$ son todos simples. ■

Corolario 4.2.4 *Si $\Omega \subset \mathbb{C}$ es abierto y $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ es inyectiva entonces $f'(a) \neq 0$ para cada $a \in \Omega$, $G = f(\Omega)$ es abierto y la inversa $g = f^{-1} : G \to \Omega$ es holomorfa, con $g'(w) \neq 0$ para todo $w \in G$. Por lo tanto f establece un isomorfismo conforme entre Ω y su imagen G.*

DEM: No es restrictivo suponer que Ω es conexo. Si f es inyectiva en virtud del teorema 4.2.3 cada $a \in \Omega$ es un cero simple de la función $f(z) - f(a)$ y por consiguiente $f'(a) \neq 0$. También se sigue de 4.2.3 que $G = f(\Omega)$ es abierto y que la transformación inversa

$f^{-1} : G \to \Omega$ es continua. Como f' no se anula en Ω, usando la proposición 2.6.7 se obtiene que f^{-1} es holomorfa. ■

Una consecuencia inmediata del corolario anterior es que una función holomorfa inyectiva sólo puede tener un cero, y éste debe ser simple.

Usando el teorema de la aplicación abierta se puede dar una breve demostración del *teorema fundamental del álgebra*:
Según 4.2.3 todo polinomio complejo p de grado ≥ 1 transforma abiertos en abiertos. Demostrando que p transforma cerrados en cerrados se obtendrá que $p(\mathbb{C})$ es un subconjunto abierto y cerrado de $\mathbb{C}$. Como los únicos subconjuntos abiertos y cerrados de $\mathbb{C}$ son $\emptyset$ y $\mathbb{C}$ se tendrá que $p(\mathbb{C}) = \mathbb{C}$ y en particular $0 \in p(\mathbb{C})$.

Para ver que p transforma cerrados en cerrados usaremos que $\lim_{z \to \infty} p(z) = \infty$ (la comprobación de esto es rutinaria y se deja al cuidado del lector). Si F es un subconjunto cerrado de $\mathbb{C}$ y $w \in \overline{p(F)}$ existe una sucesión $z_n \in F$ tal que $w_n = p(z_n)$ converge hacia w. La sucesión z_n es acotada pues en caso contrario existiría una subsucesión $z_{n_k} \to \infty$ y se seguiría que $w = \lim_k w_{n_k} = \lim_k p(z_{n_k}) = \infty$. La sucesión acotada z_n posee una subsucesión convergente hacia un punto $z \in F$ que cumple $p(z) = w$. Queda demostrado que $w \in p(F)$ y con ello que $p(F)$ es cerrado. ■

4.3. Singularidades aisladas

En esta sección se considera el comportamiento de una función holomorfa en el entorno perforado de un punto que no pertenece a su dominio. Cuando ocurre esto se dice que el punto es una *singularidad aislada* de la función.

Definición 4.3.1 *Sea $f \in \mathcal{H}(\Omega)$. Si $a \notin \Omega$ y $D^*(a, r) \subset \Omega$ para algún $r > 0$ se dice que a es una singularidad aislada de f.*
Si existe el límite $\lim_{z \to a} f(z) = b \in \mathbb{C}$ se dice que a es una singularidad evitable de f.
Si existe el límite $\lim_{z \to a} f(z) = \infty$ se dice que a es un polo de f.
Finalmente, cuando en $\mathbb{C}_\infty$ no existe el límite $\lim_{z \to a} f(z)$ se dice que a es una singularidad esencial de f.

Proposición 4.3.2 *Si $a \notin \Omega$ es una singularidad aislada de $f \in \mathcal{H}(\Omega)$, son equivalentes:*

a) a es singularidad evitable de f;

b) f está acotada en algún disco $D^*(a, r) \subset \Omega$;

c) f admite una extensión holomorfa al abierto $\Omega_a = \Omega \cup \{a\}$;

DEM: Es inmediato que c) $\Rightarrow$ a) $\Rightarrow$ b) y basta demostrar b) $\Rightarrow$ c).

Si se cumple b) sea $g(z) = f(z)(z - a)^2$. Definiendo $g(a) = 0$ es inmediato que g es derivable en a con $g'(a) = 0$, luego g es holomorfa en $\Omega \cup \{a\}$ y su desarrollo en serie de potencias en $D(a, r) \subset \Omega$ es de la forma

$$g(z) = \sum_{n=2}^{\infty} a_n (z - a)^n = (z - a)^2 h(z)$$

donde $h(z) = a_2 + a_3(z-a) + \cdots + a_{n+2}(z-a)^n + \cdots$ converge en $D(a,r)$.

Si se define $f(a) = h(a) = a_2$ se obtiene una extensión de f que es holomorfa en $\Omega \cup \{a\}$ (pues $f(z) = h(z)$ para todo $z \in D(a,r)$). ■

La proposición anterior justifica el nombre de singularidad evitable dado al tipo de singularidad aislada considerado en ella. Siempre que una función holomorfa f presente una singularidad evitable en un punto a, aunque no se diga explícitamente, se supondrá que a la función se le ha asignado en este punto el valor $f(a) = \lim_{z\to a} f(z)$ con el que se obtiene una extensión holomorfa de f al abierto $\Omega_a = \Omega \cup \{a\}$, que resultará cómodo designarla igual.

Ejemplos 4.3.3

a) La función $f(z) = \dfrac{\operatorname{sen} z}{z}$ presenta una singularidad evitable en $z = 0$ que se elimina definiendo $f(0) = 1$.

b) La función $f(z) = \dfrac{1}{e^z - 1} - \dfrac{1}{z}$ presenta una singularidad evitable en $z = 0$ pues

$$f(z) = \frac{1 + z - e^z}{z(e^z - 1)} = -\frac{z^2/2! + z^3/3! + \cdots}{z^2 + z^3/2! + \cdots} = -\frac{1/2 + z/3! + \cdots}{1 + z/2! + \cdots}$$

La singularidad se elimina definiendo $f(0) = -1/2$.

■

Proposición 4.3.4 *Si $a \notin \Omega$ es una singularidad aislada de $f \in \mathcal{H}(\Omega)$, son equivalentes*

a) a es polo de f.

b) Existe $D^*(a,\delta) \subset \Omega$ y una función $F \in \mathcal{H}(D(a,\delta))$ tal que a es cero aislado de F, y $f(z) = 1/F(z)$ para todo $z \in D^*(a,\delta)$

c) Existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $(z-a)^m f(z)$ tiene límite finito no nulo cuando $z \to a$.

Dem: a) $\Rightarrow$ b): Como $\lim_{z \to a} f(z) = \infty$ existe $D^*(a,\delta) \subset \Omega$ tal que $|f(z)| > 1$ para todo $z \in D^*(a,\delta)$. La función $F(z) = 1/f(z)$ está definida y es holomorfa en $D^*(a,\delta)$ y obviamente $|F| < 1$.

En virtud de 4.3.2 F tiene una singularidad evitable en el punto a que se elimina definiendo $F(a) = 0$. Se obtiene así una función $F \in \mathcal{H}(D(a,\delta))$ con un cero aislado en $z = a$ que cumple b).

b) $\Rightarrow$ c): Si se cumple b) y $m = \nu(F,a)$ es la multiplicidad de a como cero de F es claro que el cociente

$$\frac{F(z)}{(z-a)^m} = \frac{1}{(z-a)^m f(z)}$$

tiene límite finito no nulo cuando $z \to a$. Lo mismo le ocurre a la función $(z-a)^m f(z)$ y por lo tanto se cumple c).

c) $\Rightarrow$ a): Si se cumple c) la función $h(z) = (z-a)^m f(z)$ presenta en a una singularidad evitable que se elimina definiendo $h(a) = \lim_{z \to a}(z-a)^m f(z) \neq 0$. Entonces

$$\lim_{z \to a} f(z) = \lim_{z \to a} \frac{h(z)}{(z-a)^n} = \infty$$

luego a es un polo de f. ■

El número natural m que hace que se cumpla 4.3.4 c) es único lo que permite dar la siguiente

Definición 4.3.5 *En las condiciones de la proposición 4.3.4 se dice que el polo a de la función f tiene multiplicidad $m \in \mathbb{N}$.*

Conviene tener siempre presente que, según se ha visto en la demostración de 4.3.4, a es un polo de f con multiplicidad m si y sólo si a es un cero de la función F que interviene en 4.3.4 b) con la misma multiplicidad.

Proposición 4.3.6 *Si $a \notin \Omega$ es una singularidad aislada de $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ son equivalentes*

a) a es polo de f de multiplicidad m.

b) Existe un único polinomio $P(z)$ de grado m con $P(0) = 0$ tal que a es singularidad evitable de la diferencia $f(z) - P(1/(z-a))$.

DEM: b) $\Rightarrow$ a) Basta ver que se verifica la condición c) de 4.3.4: Como existe y no es nulo el límite $\lim_{z \to a}(z-a)^m P(1/(z-a)) \neq 0$, teniendo en cuenta que

$$\lim_{z \to a} (z-a)^m \left(f(z) - P(1/(z-a))\right) = 0$$

se obtiene que también existe y no es nulo el límite $\lim_{z \to a}(z-a)^m f(z) \neq 0$.
a) $\Rightarrow$ b): Sea $D^*(a,r) \subset \Omega$. Según 4.3.4 c) la función $g(z) = (z-a)^m f(z)$ presenta en a una singularidad evitable que se elimina definiendo $g(a) = b_0 \neq 0$ donde

$$b_0 = \lim_{z \to a}(z-a)^m f(z)$$

Ahora g es holomorfa en el abierto $\Omega \cup \{a\} \supset D(a,r)$ y admite en $D(a,r)$ un desarrollo en serie de potencias $g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n(z-a)^n$. Por consiguiente, si $0 < |z-a| < r$ se verifica

$$f(z) = \frac{g(z)}{(z-a)^m} = \frac{b_0}{(z-a)^m} + \frac{b_1}{(z-a)^{m-1}} + \cdots + \frac{b_{m-1}}{z-a} + h(z)$$

donde $h(z) = b_m + b_{m+1}(z-a) + \cdots + b_{m+k}(z-a)^k + \cdots$.

El polinomio $P(w) = b_0 w^m + b_1 w^{m-1} + \cdots + b_{m-1} w$ hace que se cumpla b) pues

$$\lim_{z \to a}[f(z) - P(1/(z-a)] = \lim_{z \to a} h(z) = h(a) = b_m$$

La condición $P(0) = 0$ garantiza que el polinomio P es único: Si $Q(z)$ es otro polinomio que cumple b) entonces a es singularidad evitable de

$$R(z) := [P(1/(z-a)) - Q(1/(z-a))] = [f(z) - Q(1/(z-a))] - [f(z) - P(1/(z-a)]$$

Eliminando la singularidad se puede considerar que R es una función entera. Como $P(0) = Q(0) = 0$ se sigue que $\lim_{z \to \infty} R(z) = 0$ y por lo tanto R es acotada. El teorema de Liouville implica que R es constante. Obviamente el valor constante es 0, luego $P = Q$. ■

Definición 4.3.7 *En las condiciones de la proposición 4.3.6, si P es el único polinomio que hace que se cumpla 4.3.6 b) se dice que $S_a(z) = P(1/(z-a))$ es la parte principal (o singular) de f en a . La parte regular de f en a es la función $R_a(z) = f(z) - S_a(z)$, que es holomorfa en $\Omega \cup \{a\}$, después de eliminar la singularidad evitable en $z = a$.*

Dada una función holomorfa $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ si $D^*(a,r) \subset \Omega$ si a es polo de f de multiplicidad m, la parte principal de f en a se suele escribir en la forma

$$S_a(z) = \frac{a_{-m}}{(z-a)^m} + \frac{a_{-(m-1)}}{(z-a)^{m-1}} + \cdots + \frac{a_{-1}}{z-a}$$

Por otra parte, si

$$R_a(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-a)^n$$

es el desarrollo en serie de potencias de R_a en $D(a,r)$ se obtiene

$$f(z) = \sum_{n=-m}^{\infty} a_n (z-a)^n \text{ si } 0 < |z-a| < r$$

Nótese que, en virtud de la unicidad de los desarrollos de Laurent, lo que se acaba de obtener es el desarrollo de Laurent de f en $D^*(a,r)$, que sólo tiene un número finito de potencias negativas de $(z-a)$.

Ejemplos 4.3.8

a) Si $\Omega \subset \mathbb{C}$ es un abierto conexo, dadas $f, g \in \mathcal{H}(\Omega)$ donde g no es idénticamente nula el cociente f/g define una función holomorfa en el abierto $G = \Omega \setminus \mathcal{Z}(g)$. Puesto que los ceros de g son aislados, cada cero de g es una singularidad aislada de cociente $f(z)/g(z)$. La singularidad es evitable si y sólo si $a \in \mathcal{Z}(f)$ y $\nu(f,a) \geq \nu(g,a)$. En este caso, después de eliminar la singularidad, si $\nu(f,a) > \nu(g,a)$ se tiene que a es un cero de $f(z)/g(z)$ de multiplicidad $\nu(f,a) - \nu(g,a)$.

   Si $f(a) \neq 0$ entonces a es un polo de f/g con multiplicidad $m = \nu(g,a)$. pero si a es un cero de f de multiplicidad $p = \nu(f,a)$ entonces a es un polo de f/g si y sólo si $m - p > 0$, y en este caso su multiplicidad es $m - p$.

b) La función $f(z) = \dfrac{\operatorname{sen} z}{z^3}$ tiene en $z = 0$ un polo doble con parte principal $\dfrac{1}{z^2}$ pues

$$\frac{\operatorname{sen} z}{z^3} = \frac{z - \frac{1}{3!}z^3 + \frac{1}{5!}z^5 - \cdots}{z^3} = \frac{1}{z^2} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{5!}z^2 - \cdots$$

c) La función $f(z) = \dfrac{1}{e^z - 1}$ presenta polos simples los puntos $2n\pi i$, $n \in \mathbb{Z}$. La parte principal en $z = 0$ es $1/z$. Efectivamente, los polos de f coinciden con los ceros de $e^z - 1$ que son todos simples. Por el método de los coeficientes indeterminados se calculan fácilmente los dos primeros términos del desarrollo en serie de potencias

$$\frac{z}{e^z - 1} = \frac{1}{1 + z/2! + z^2/3! + \cdots} = 1 - \frac{1}{2}z + a_2 z^2 + \cdots$$

luego

$$\frac{1}{e^z - 1} = \frac{1}{z} - \frac{1}{2} + a_2 z + \cdots$$

Se obtiene así que la parte principal de f en $z = 0$ es $1/z$. Claramente $R(z) = f(z) - 1/z$ presenta en $z = 0$ una singularidad evitable que desaparece definiendo $R(0) = -1/2$.

■

Teorema 4.3.9 (Casorati-Weierstrass) *Si $a \notin \Omega$ es una singularidad aislada de $f \in \mathcal{H}(\Omega)$, son equivalentes*

a) a es singularidad esencial;

b) $f(D^*(a, \epsilon))$ es denso en $\mathbb{C}$ para cada $D^*(a, \epsilon) \subset \Omega$;

Dem: b) $\Rightarrow$ a) es inmediato y basta demostrar a) $\Rightarrow$ b).

Si no se cumple b) existe $\epsilon > 0$ tal que $\overline{f(D^*(a, \epsilon))} \neq \mathbb{C}$, luego existe $D(b, R)$, con $R > 0$, tal que $D(b, R) \cap f(D^*(a, \epsilon)) = \emptyset$, es decir $|f(z) - b| \geq R$ para todo $z \in D^*(a, \epsilon)$.

La función $h(z) = 1/(f(z) - b)$ es holomorfa y acotada en $D^*(a, \epsilon)$ y por lo tanto presenta una singularidad evitable en a (4.3.2), es decir existe $\lim_{z \to a} h(z) = \mu \in \mathbb{C}$.

Como $f(z) = b + 1/h(z)$ para todo $z \in D^*(a, \epsilon)$ se sigue que en el plano ampliado $\mathbb{C}_\infty$ existe el límite $\lim_{z \to a} f(z)$ (si $\mu \neq 0$ su valor es $b + 1/\mu$, y en otro caso vale ∞) luego no se cumple a). ■

Si $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ presenta una singularidad aislada en a y conocemos el desarrollo de Laurent de f en $D^*(a, r) \subset \Omega$, podemos utilizarlo para clasificar la singularidad.

Proposición 4.3.10 *Sea $a \notin \Omega$ una singularidad aislada de $f \in \mathcal{H}(\Omega)$. Se supone que conocemos el desarrollo de Laurent de f en $D^*(a, R) \subset \Omega$.*

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n (z - a)^n \text{ si } 0 < |z - a| < R$$

Sea $M = \{n \in \mathbb{Z} : a_n \neq 0\}$. Entonces se verifica:

a) a es singularidad evitable si y sólo si $\inf M \geq 0$*;*

b) a es polo (de multiplicidad m) si y sólo si $\inf M = -m < 0$*;*

c) a es singularidad esencial si y sólo si $\inf M = -\infty$*;.*

DEM: a) Es inmediato, porque en este caso, después de eliminar la singularidad, f es holomorfa en $D(a, R)$ y el desarrollo de Laurent es un desarrollo en serie de potencias. Según lo que se ha visto después de la definición 4.3.7 se cumple b). La condición c) se cumple por exclusión. ■

Más adelante se demostrará que toda función holomorfa en una corona, y en particular en un disco perforado $D^*(a, r)$ admite un desarrollo de Laurent en el mismo. Obsérvese que la proposición anterior no asume este teorema. Asume como hipótesis que disponemos del desarrollo de Laurent. En la práctica la podremos aplicar en situaciones concretas cuando conozcamos el desarrollo que puede haber sido calculado explícitamente con las técnicas explicadas en el capítulo 2.

Corolario 4.3.11 *Si* $g \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ *es una función entera entonces a es singularidad esencial de* $f(z) = g(1/(z - a))$ *si y sólo si g no es un polinomio.*

DEM: Basta utilizar 4.3.10 c). ■

Ejemplo 4.3.12 0 *es una singularidad esencial de* $e^{1/z}$

Aunque es un caso particular de 4.3.11, se puede ver directamente que no existe $\lim_{z \to 0} e^{1/z}$ en $\mathbb{C}_\infty$. Efectivamente, $e^{1/z}$ tiende hacia 0 cuando $z = x < 0$ tiende hacia 0, mientras que $e^{1/z}$ tiende hacia ∞ cuando $z = x > 0$ tiende hacia 0. ■

Un resultado más general que el corolario 4.3.11 lo proporciona la proposición 4.3.17

Singularidades aisladas en ∞. Ahora se considera el comportamiento local de una función holomorfa definida en $D^*(\infty, r) = \{z : \frac{1}{r} < |z| < +\infty\}$.

Definición 4.3.13 *Si* $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ *y* $D^*(\infty, r) \subset \Omega$ *se dice que* ∞ *es singularidad aislada de f. En este caso se dice* ∞ *es singularidad evitable, polo o singularidad esencial de f si* 0 *es, respectivamente, singularidad evitable, polo, o singularidad esencial de* $f(1/z)$*. Si* ∞ *es polo de f se define su multiplicidad como la del polo que tiene* $f(1/z)$ *en* 0*.*

En las condiciones de la definición anterior, aplicando 4.3.10 a la función $f(1/z)$, podemos afirmar que si conocemos el desarrollo de Laurent de f en $D^*(\infty, r)$: $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n z^n$ y consideramos el conjunto $M = \{n \in \mathbb{Z} : a_n \neq 0\}$ entonces:
a) ∞ es singularidad evitable de f si y sólo si $\sup M \leq 0$.
b) ∞ es polo de f, de multiplicidad m, si y sólo si $\sup M = m > 0$.
c) ∞ es singularidad esencial de f si y sólo si $\sup M = +\infty$.
Singularidad evitable en ∞. La noción de función holomorfa se puede extender de modo natural al caso de funciones definidas en un abierto $\Omega \subset \mathbb{C}_\infty$ tal que $\infty \in \Omega$.

Se dice que $f : \Omega \to \mathbb{C}$ es derivable en ∞ si la función auxiliar $F(z) := f(1/z)$, definida en un entorno de 0, es derivable en $z = 0$ (se usa el convenio habitual $1/0 = \infty$, $1/\infty = 0$). En este caso se conviene en definir $f'(\infty) = F'(0)$.

Obsérvese que si f es derivable en ∞ entonces f es continua en este punto porque la función auxiliar $F(z) = f(1/z)$ es continua en 0 y la transformación $\tau(z) = 1/z$ es una isometría de $(\mathbb{C}_\infty, d_\infty)$.

La definición de derivada en ∞ tendrá interés en las cuestiones de transformaciones conformes, pues la condición $f'(\infty) \neq 0$ tiene una interpretación geométrica clara sobre la esfera de Riemann. Desde el punto del cálculo carece de interés el valor de $f'(\infty)$ pues puede ocurrir que $f'(\infty) \neq \lim_{z \to \infty} f'(z)$ (considérese $f(z) = 1/z$).

Si $f : \Omega \to \mathbb{C}$ es derivable en todos los puntos de un abierto $\Omega \subset \mathbb{C}_\infty$ se sigue diciendo que f es holomorfa en Ω, $f \in \mathcal{H}(\Omega)$.

Por otra parte, si ∞ es una singularidad evitable de $f \in \mathcal{H}(\Omega_0)$ entonces existe y es finito el límite $L = \lim_{z \to \infty} f(z)$. En este caso, definiendo $f(\infty) = L$ se extiende f a una función holomorfa en $\Omega = \Omega_0 \cup \{\infty\}$ (basta aplicar 4.3.2 a la función $F(z) = f(1/z)$ en el punto $z = 0$). En lo que sigue, siempre que ∞ sea una singularidad evitable la supondremos eliminada de esta manera.

Si f es holomorfa en un abierto $\Omega \subset \mathbb{C}_\infty$ con $\infty \in \Omega$, dado $D(\infty, r) \subset \Omega$, si consideramos el desarrollo en serie de potencias de $F(z) = f(1/z)$ alrededor de $z = 0$ se obtiene que f se puede desarrollar en $D(\infty, r)$ en serie de potencias de $1/z$

$$f(z) = a_0 + \frac{a_{-1}}{z} + \frac{a_{-2}}{z^2} + \cdots + \frac{a_{-n}}{z^n} + \cdots \text{ si } |z| > \frac{1}{r}$$

es decir, el desarrollo de Laurent de f en $|z| > 1/r$ no contiene potencias positivas de z.

Si $a_0 = 0$ entonces ∞ es un cero de f que será aislado si y sólo si 0 es un cero aislado de F, es decir si y sólo si existe $n \in \mathbb{N}$, con $a_{-n} \neq 0$. En este caso si $m := \min\{n : a_{-n} \neq 0\}$ es la multiplicidad del cero que tiene F en $z = 0$, se dice que ∞ es un cero de f de multiplicidad m. Nótese que m es el único número natural para el cual el límite $\lim_{z \to \infty} z^m f(z)$ existe y es finito no nulo. Por lo tanto, existe $F \in \mathcal{H}(\Omega)$ con $F(\infty) \neq 0$ tal que $f(z) = F(z)/z^m$.

Ejemplos 4.3.14

a) Si $Q(z) = b_0 + b_1 z + \cdots + b_m z^m$ es un polinomio de grado m entonces la función $f(z) = 1/Q(z)$ es holomorfa en $\mathbb{C}_\infty \setminus \mathcal{Z}(Q)$ (se supone definido $f(\infty) = 0$). Es fácil comprobar directamente que f es derivable en ∞. Basta observar que

$$f(1/z) = \frac{z^m}{b_0 z^m + b_1 z^{m-1} + \cdots + b_m}$$

donde $b_m \neq 0$. Además, ∞ es un cero aislado de f de multiplicidad m.

b) Más generalmente, si P,Q son polinomios complejos sin ceros comunes, entonces la función racional $f = P/Q$ es holomorfa en $\mathbb{C} \setminus \mathcal{Z}(Q)$, y presenta una singularidad aislada en ∞. La singularidad es evitable si y sólo si $m :=$ grado $(Q)-$grado $(P) \geq 0$. Si se elimina la singularidad y además $m \geq 1$ entonces ∞ es un cero de f de multiplicidad m.

c) Si $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ entonces ∞ es singularidad evitable de f si y sólo si f es constante. Esto es consecuencia inmediata del teorema de Liouville.

Polo en ∞. Si $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ y $D^*(\infty, r) \subset \Omega$ entonces ∞ es polo de $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ si y sólo si $\lim_{z \to \infty} f(z) = \infty$. Su multiplicidad es (la multiplicidad de 0 como polo de $F(z) = f(1/z)$) es el único $m \in \mathbb{N}$ para el que el que existe el límite $\lim_{z \to \infty} f(z)/z^m$ y es finito no nulo.

Nótese que si ∞ es polo de f, de multiplicidad m, entonces ∞ es singularidad evitable de $1/f$. En este caso, después de eliminar la singularidad, se puede considerar que $1/f$ es holomorfa en $D(\infty, r)$ con un cero en ∞ de multiplicidad m. Nótese que ∞ es polo de f de multiplicidad m si y sólo si $1/f(1/z)$ tiene en $z = 0$ un cero de multiplicidad m.

Por otra parte, si ∞ es un polo de f con multiplicidad m, existe un único polinomio de grado m

$$S(z) = a_1 z + a_2 z^2 + \cdots + a_m z^m$$

con $S(0) = 0$, tal que ∞ es singularidad evitable de $f(z) - S(z)$. (Basta considerar la parte principal de $f(1/z)$ en $z = 0$).

Se dice que este polinomio S es la parte principal o singular de f en ∞ y que $R(z) := f(z) - S(z)$ es la parte regular, que se puede suponer definida y holomorfa en $\Omega \cup \{\infty\}$. Se sigue que ∞ es polo de f con multiplicidad m si y sólo si el desarrollo de Laurent de f en un disco $D^*(\infty, r) \subset \Omega$ es de la forma

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{m} a_n z^n$$

Ejemplos 4.3.15

a) Para una función entera $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ se cumple que ∞ es polo de f (de multiplicidad m) si y sólo si f es un polinomio (de grado m).

b) Si P,Q son polinomios complejos sin ceros comunes, la función racional $f = P/Q$, que es es holomorfa en $\mathbb{C} \setminus \mathcal{Z}(Q)$, presenta un polo en ∞ si y sólo si $m :=$ grado $(P)-$ grado $(Q) > 0$. En este caso su multiplicidad es m.

Singularidad esencial en ∞. Si $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ y ∞ es una singularidad esencial de f, aplicando 4.3.9 a la función $F(z) = f(1/z)$ en $z = 0$ se obtiene que $f(D^*(\infty, \epsilon))$ es denso en $\mathbb{C}$ para cada $D^*(\infty, \epsilon) \subset \Omega$.

Ejemplo 4.3.16 *∞ es singularidad esencial de $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ si y sólo si f no es un polinomio.*

Proposición 4.3.17 *Si a es una singularidad aislada no evitable de $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ y $g \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ no es un polinomio entonces a es singularidad esencial de la composición $g \circ f$.*

DEM: Véase [17] ejerc. 6.10 ■

Proposición 4.3.18 *Si $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ es inyectiva entonces f presenta, a lo más, una singularidad aislada no evitable que sólo puede ser un polo simple.*

DEM: Véase [17] ejerc. 6.9 ■

NOTA: Si f no es globalmente inyectiva, puede tener varias singularidades aisladas no evitables. Después de la proposición anterior, se puede afirmar es que si a es una singularidad aislada de f y $f|_{D^*(a,\epsilon)}$ es inyectiva para algún $D^*(a,\epsilon) \subset \Omega$ entonces a es una singularidad evitable o un polo simple.

Corolario 4.3.19 *Si $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ es inyectiva entonces f es un polinomio de primer grado.*

DEM: Véase [17] ejerc. 6.10 ■

4.4. Funciones meromorfas

Definición 4.4.1 *Una función $f : \Omega \to \mathbb{C}_\infty$ definida en un abierto $\Omega \subset \mathbb{C}_\infty$ se dice que es meromorfa si es continua y verifica*

a) Los puntos de $P(f) = \{z \in \Omega : f(z) = \infty\}$ son aislados (e.d. $\Omega \cap P(f)' = \emptyset$).

b) La restricción de f al abierto $\Omega_0 := \Omega \setminus \mathcal{P}(f)$ es holomorfa.

En lo que sigue $\mathcal{M}(\Omega)$ designa al conjunto de las funciones meromorfas en Ω.

En las condiciones de la definición anterior los puntos de $\mathcal{P}(f)$ son singularidades aisladas, de tipo polo, de la función holomorfa $f|_{\Omega_0}$. Se dice que $\mathcal{P}(f)$ es el conjunto de los polos de f. Recíprocamente, si f_0 es una función holomorfa en un abierto Ω_0 y $S \subset \partial_\infty \Omega_0$ es un conjunto de singularidades aisladas de f de tipo polo y se define $f(a) = \infty$ para cada $a \in S$ se obtiene una extensión meromorfa, de f, definida en $\Omega := \Omega_0 \cup S$ con $\mathcal{P}(f) = S$.

Ejemplos 4.4.2

a) Si $R(z) = P(z)/Q(z)$ es una función racional donde P y Q son polinomios sin ceros comunes de grados n y m respectivamente y se define $R(a) = \infty$ si $Q(a) = 0$ y $R(\infty) = \lim_{z \to \infty} R(z) \in \mathbb{C}_\infty$ se obtiene una función meromorfa $R \in \mathcal{M}(\mathbb{C}_\infty)$. Nótese que si $n > m$ entonces R tiene un polo en ∞ de multiplicidad $n - m$.

b) Si f,g son funciones holomorfas en un abierto conexo $\Omega \subset \mathbb{C}_\infty$ donde g no es idénticamente nula y $\mathcal{Z}(f) \cap \mathcal{Z}(g) = \emptyset$ entonces el cociente $F(z) = f(z)/g(z)$ define en Ω una función meromorfa (usando el convenio habitual $c/0 = \infty$ si $c \neq 0$). $\mathcal{P}(F) = \mathcal{Z}(g)$ y si $a \in \mathcal{P}(F)$, la multiplicidad de a como polo de F coincide con la multiplicidad de a como cero de g.

NOTA: En la segunda parte del curso se demostrará que para cada $F \in \mathcal{M}(\Omega)$ existen $f, g \in \mathcal{H}(\Omega)$ tales que g no es idénticamente nula, $\mathcal{Z}(f) \cap \mathcal{Z}(g) = \emptyset$ y $F(z) = f(z)/g(z)$ para todo $z \in \Omega$.

Operaciones con funciones meromorfas. Si $f \in \mathcal{M}(\Omega)$ es meromorfa en un abierto $\Omega \subset \mathbb{C}_\infty$, y $\mathcal{P}(f)$ es el conjunto de sus polos, la restricción de f al abierto $G = \Omega \setminus \mathcal{P}(f)$ es una función holomorfa tal que cada $a \in \mathcal{P}(f)$ es una singularidad aislada de tipo polo. Dada otra función meromorfa $g \in \mathcal{M}(\Omega)$, la función suma $f(z) + g(z)$ está definida y es holomorfa en el abierto $\Omega \setminus (\mathcal{P}(f) \cup \mathcal{P}(g))$, y cada $a \in \mathcal{P}(f) \cup \mathcal{P}(g)$ es una singularidad aislada de $f + g$. Generalmente a será un polo de $f(z) + g(z)$, pero puede ser una singularidad evitable en el caso de que a sea polo de las dos funciones f, g y las partes singulares de f y g en a se cancelen al sumar. Queda definida así la función meromorfa suma $f + g \in \mathcal{M}(\Omega)$ (Obsérvese que en cada uno de sus polos la parte singular de $f + g$ es la suma de las correspondientes partes singulares de f y g).

De manera similar se procede para definir la función meromorfa producto $fg \in \mathcal{M}(\Omega)$. Dado $a \in \mathcal{P}(f) \cup \mathcal{P}(g)$, si a es polo de f de multiplicidad m entonces el producto fg, inicialmente definido en $\Omega \setminus (\mathcal{P}(f) \cup \mathcal{P}(g))$, presenta en a un polo o una singularidad evitable (esto último ocurre cuando a es cero de g de multiplicidad mayor o igual que m).

Para poder definir la función meromorfa cociente f/g hay que requerir que todos los ceros de g sean aislados. En este caso se obtiene $f/g \in \mathcal{M}(\Omega)$ con polos contenidos en $\mathcal{P}(f) \cup \mathcal{Z}(g)$. Nótese que cuando $a \in (\mathcal{P}(f) \cap \mathcal{P}(g)) \cup (\mathcal{Z}(f) \cap \mathcal{Z}(g))$ puede ocurrir que a sea una singularidad evitable de f/g.

Si $\Omega \subset \mathbb{C}_\infty$ es abierto conexo entonces $\mathcal{M}(\Omega)$ es un cuerpo con la suma y el producto que se acaban de definir. En la segunda parte del curso se probará que si $\Omega \neq \mathbb{C}_\infty$ es conexo entonces $\mathcal{M}(\Omega)$ es el cuerpo de fracciones del anillo $\mathcal{H}(\Omega)$, es decir, cada $F \in \mathcal{M}(\Omega)$ se puede obtener como un cociente $F = f/g$ de dos funciones holomorfas $f, g \in \mathcal{H}(\Omega)$. Cuando $\Omega = \mathbb{C}_\infty$ se verifica:

Teorema 4.4.3 *Las únicas funciones meromorfas en $\mathbb{C}_\infty$ son las funciones racionales. Toda función racional $R(z)$ se representa de modo único en la forma*

$$R(z) = P_0(z) + \sum_{j=1}^{m} P_j\left(\frac{1}{z - a_j}\right)$$

donde P_j, $0 \leq j \leq m$ son polinomios y $P_j(0) = 0$ si $1 \leq j \leq m$.

DEM: Véase [17] ejerc. 6.24 ∎

Corolario 4.4.4 *Si $f \in \mathcal{M}(\mathbb{C}_\infty)$ es inyectiva entonces*

$$f(z) = \frac{az + b}{cz + d} \quad \text{donde } ad - bc \neq 0$$

DEM: Véase [17] ejerc. 6.25 ∎

4.5. Ejercicios

$\diamondsuit$ **4.1** *Sea* $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ *donde el abierto* Ω *es conexo y* $0 \in \Omega$. *Si* $|f(1/n)| < 1/2^n$ *para todo* $n \geq m$, *demuestre que* f *es idénticamente nula ([17] ejerc. 4.38).*

$\diamondsuit$ **4.2** *En cada caso justifique que no existe una función* $f : D(0,2) \to \mathbb{C}$ *desarrollable en serie de potencias, con la propiedad indicada*

i) $\sup\{|f(z)| : |z| = r\} = r^{7/2}$, *si* $0 < r < 2$;

ii) $\text{lím}_{z\to 0} \dfrac{f(z)}{\sqrt{|z|}} = 1$;

([17] ejerc. 4.39).

$\diamondsuit$ **4.3** *En cada uno de los siguientes casos justifique que no existe* $f \in \mathcal{H}(D(0,2))$ *con la propiedad indicada*

i) $f(1/n) = f(-1/n) = 1/n^3$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$.

ii) $(-1)^n/n + e^{f(1/n)} = 1$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$.

([17] ejerc. 4.40).

$\diamondsuit$ **4.4** *Demuestre que existe una única función entera* $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ *tal que* $f(0) = 1$, *y* $f(2^{-(n+1)}) = f'(2^{-n})$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$.

$\diamondsuit$ **4.5** *Sea* $\Omega \subset \mathbb{C}$ *un abierto conexo y* $a_n \in \Omega$ *una sucesión que converge hacia* $a \in \Omega$ *tal que* $a_n \neq a$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$. *Si* $f, g \in \mathcal{H}(\Omega)$ *cumplen* $f(a_n)g'(a_n) = g(a_n)f'(a_n)$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$, *y* g *no es idénticamente nula, demuestre que existe* $c \in \mathbb{C}$ *tal que* $f = c \cdot g$.

$\diamondsuit$ **4.6** *Sea* $\Omega \subset \mathbb{C}$ *abierto conexo y* $f, g \in \mathcal{H}(\Omega)$ *funciones holomorfas que cumplen* $\cos f(z) = \cos g(z)$ *para todo* $z \in \Omega$. *Demuestre que existe* $m \in \mathbb{Z}$ *tal que, o bien* $f + g = 2\pi m$ *o bien* $f - g = 2\pi m$ *([17] ejerc. 4.44).*

$\diamondsuit$ **4.7** *Sea* f *holomorfa en* $\Omega = \{z : \text{Re}\, z > 0\}$ *tal que* $f(z) \in \mathbb{R}$ *si* $z \in \Omega \cap \{z : |z| = 1\}$. *Demuestre que* $f(z) = \overline{f(1/\overline{z})}$ *para cada* $z \in \Omega$ *([17] ejerc. 4.45).*

$\diamondsuit$ **4.8** *Si* f *es holomorfa en* $A = \{z : a < \text{Re}\, z < b,\ 0 < \text{Im}\, z < c\}$ *y* $\text{lím}_{z\to x} f(z) = 0$ *para todo* $x \in (a,b)$, *demuestre que* f *es idénticamente nula ([17] ejerc. 5.18).*

$\diamondsuit$ **4.9** *Se supone que* $f : \overline{D(0,1)} \to \mathbb{C}$ *es continua y que su restricción a* $D(0,1)$ *es holomorfa. Si* $f(e^{it}) = 0$ *para cada* $t \in [0,\epsilon]$ $(\epsilon > 0)$, *demuestre que* f *es idénticamente nula ([17] ejerc. 5.19).*

$\diamondsuit$ **4.10** *Sea* $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{N}$. *Calcule el radio de convergencia de la reordenación de la serie binomial* $\sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} z^n$ *alrededor de* ib, *con* $0 < b < 1$ *([17] ejerc. 5.20).*

♢ **4.11** *Demuestre que la función* $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-2} z^n$*, definida en* $D(0,1)$*, admite una prolongación analítica* F *al abierto* $\Omega = \mathbb{C} - [1, +\infty)$*. Calcule el radio de convergencia del desarrollo en serie de potencias de* F *alrededor de* $a = 2 + i$ *([17] ejerc. 5.21).*

♢ **4.12** *Sea* B_n *la sucesión de los números de Bernoulli, definida por recurrencia:*

$$B_0 = 1, \quad \binom{n}{0} B_0 + \binom{n}{1} B_1 + \binom{n}{2} B_2 + \cdots + \binom{n}{n-1} B_{n-1} = 0 \quad si \quad n \geq 2.$$

i) Obtenga, en términos de la sucesión B_n*, el desarrollo en serie de potencias, alrededor de* 0*, de la función*

$$f(z) = \frac{z}{e^z - 1} \quad si \quad z \neq 0, \quad f(0) = 1$$

Justifique que el radio de convergencia es 2π*, que la sucesión* B_n *no es acotada, y que* $B_{2n+1} = 0$ *para todo* $n \geq 1$*. Obtenga* B_n *para* $0 \leq n \leq 14$*.*
ii) Calcule el desarrollo en serie de potencias, alrededor de 0*, de la función*

$$F(z) = \pi z \cot \pi z \quad si \quad z \neq 0, \quad F(0) = 1$$

Obtenga su radio de convergencia y los coeficientes del desarrollo en términos de los números de Bernoulli ([17] ejerc. 5.22).

♢ **4.13** *Sea* $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n (z-a)^n$ *una serie de potencias convergente en el disco* $D(a,r)$ *(con* $a_n \neq 0$ *para algún* $n \in \mathbb{N}$*). Si* w *es un punto de acumulación de ceros de* f *demuestre que* $|w - a| = r$*. ¿Cual es el radio de convergencia de la serie de potencias reordenada en* $b = (a+w)/2$*?.*

♢ **4.14** *Si* $f \in \mathcal{H}(D(0,1)$ *es inyectiva en* $D^*(0,1)$*, demuestre que también lo es en* $D(0,1)$*.*

♢ **4.15** *Obtenga la relación que hay entre dos funciones enteras* f, g *que verifican*

$$|f(z)| \leq |g(z)| \quad para\ todo \quad z \in \mathbb{C}$$

([17] ejerc. 6.1)

♢ **4.16** *Determine* $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ *sabiendo que* $f(1) = 1$ *y* $|z^3| \leq |f(z)|$ *para todo* $z \in \mathbb{C}$*.*

♢ **4.17** *Sea* $f \in \mathcal{H}(\Omega)$*, con* $\Omega \supset \{z : |z| > r\}$*. Demuestre que la condición*

$$\lim_{z \to \infty} z f(z) = 0$$

implica que $\{z^2 f(z) : |z| > R\}$ *es acotado para algún* $R > r$ *([17] ejerc. 6.2).*

♢ **4.18** *Calcule la parte principal y la parte regular de* $\dfrac{1}{e^z - 1}$ *en* $z = 0$ *([17] ejerc. 6.3).*

♢ **4.19** *Calcule la parte principal y la parte regular de* $\left(\dfrac{\pi}{\operatorname{sen} \pi z}\right)^2$ *en cada uno de sus polos. ¿Cuál es el valor de la parte regular en el polo correspondiente?([17] ejerc. 6.4)*

♢ **4.20** *Sea* $\Omega = D(0,r) \setminus \{a\}$ *con* $|a| = 1 < r$*. Si* a *es polo simple de* $f \in \mathcal{H}(\Omega)$*, y* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ *es el desarrollo en serie de potencias de* f *en* $D(0,1)$ *demuestre que*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} = a.$$

([17] ejerc. 6.5)

♢ **4.21** *Sea* $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ *donde* $\Omega = D^*(0,R)$*, y* $n \in \{0,1,2,\cdots\}$*. Se consideran la integrales*

$$J(f) = \int\int_\Omega |f(x+iy)|dxdy \leq +\infty;$$

$$I_n(f) = \int\int_\Omega |f(x+iy)|^2(x^2+y^2)^n dxdy \leq +\infty$$

Demuestre las siguientes afirmaciones:
i) Si $J(f) < +\infty$ *entonces* 0 *es singularidad evitable o polo simple.*
ii) Si $I_0(f) < \infty$ *entonces* 0 *es singularidad evitable.*
iii) Si $I_n(f) < \infty$ *con* $n > 0$ *entonces* 0 *es polo de multiplicidad* $\leq n$*.*
([17] ejerc. 6.8)

♢ **4.22** *Si* $f \in \mathcal{H}(D^*(a,r))$ *no es idénticamente nula y* $a \in \mathbb{C}_\infty$ *es un punto de acumulación de* $\mathcal{Z}(f)$*, demuestre que* a *es una singularidad esencial de* f *([17] ejerc. 6.11).*

♢ **4.23** *Sea* $g \in \mathcal{H}(D^*(0,1))$ *y* $A = \{z \in D^*(0,1) : g(z) = z\}$*. Si* 0 *es punto de acumulación de* A *y* $g(1/2) = 0$*, demuestre que* 0 *es una singularidad esencial de* g *([17] ejerc. 6.12).*

♢ **4.24** *Demuestre que* $f \in \mathcal{H}(D^*(0,2))$ *tiene en* $z = 0$ *una singularidad esencial si cumple las condiciones que se indican en cada caso*

i) $f(1/2) = 0$ *y* $f(1/n) = 1/n$*, para cada* $n \geq 3$*.*

ii) $f(1/n) = n^n$*, para cada* $n \in \mathbb{N}$*.*

iii) $f(1/\sqrt{n}) = \sqrt[3]{n}$*, para cada* $n \in \mathbb{N}$*.*

([17] ejerc. 6.13)

♢ **4.25** *Una función* f *es holomorfa en* $\{z : |z| > R\}$ *y verifica* $f(n) = (-1)^n/n$ *cuando* $n \in \mathbb{N}$ *y* $n > R$*. ¿Qué tipo de singularidad presenta en* ∞*? ([17] ejerc. 6.14).*

♢ **4.26** *Determine las singularidades aisladas de las siguientes funciones, indicando el tipo de singularidad:*

$$a)\ \frac{e^{az}}{(1+e^z)}; \quad b)\ \cos\left(\frac{1}{e^z-1}\right); \quad c)\ \cos\left(\frac{z}{e^{z^2}-1}\right); \quad d)\ e^{1/(z^2-1)}.$$

♢ **4.27** *Sea* a *una singularidad aislada no evitable de* $f \in \mathcal{H}(\Omega)$*. Demuestre que para cada* $D^*(a,\epsilon) \subset \Omega$ *la imagen* $f(D^*(a,\epsilon))$ *corta al eje real ([17] ejerc. 6.15).*

♢ **4.28** *(Mejora del teorema de Casorati-Weierstrass) Si* a *es singularidad esencial de* $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ *y* $D^*(a,\delta) \subset \Omega$*, demuestre que el conjunto de los* $w \in \mathbb{C}$ *tales que* $f(z) = w$ *tiene infinitas soluciones en* $D^*(a,\delta)$ *es denso en* $\mathbb{C}$ *([17] ejerc. 6.16).*

Capítulo 5

Versión general de los teoremas de Cauchy

Este capítulo comienza con la noción de índice de un camino cerrado respecto a un punto, que se extiende luego al caso de los ciclos (familias finitas de caminos cerrados). Esta es la noción clave que interviene en la formulación homológica de los teoremas de Cauchy de los que se ofrece la moderna demostración basada en una ingeniosa combinación de los teoremas de Morera y Liouville. Se obtiene luego la clásica versión homotópica de estos teoremas y la caracterización analítica de los abiertos simplemente conexos.

5.1. Índice de un camino cerrado respecto a un punto

Proposición 5.1.1 *Todo camino continuo $\gamma : [0,1] \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$ posee un logaritmo continuo.*

DEM: La siguiente observación se aplicará varias veces: Si $0 \leq x \leq y \leq z \leq 1$ y los caminos $\gamma|_{[x,y]}$, $\gamma|_{[y,z]}$ poseen logaritmo continuo entonces $\gamma|_{[x,z]}$ también posee logaritmo continuo. Efectivamente, si $g_1 : [x,y] \to \mathbb{C}$ es un logaritmo continuo de $\gamma|_{[x,y]}$ y $g_2 : [y,z] \to \mathbb{C}$ es un logaritmo continuo de $\gamma|_{[y,z]}$ se verifica que $g_1(y), g_2(y) \in \log \gamma(y)$ luego $g_1(y) - g_2(y) = 2m\pi i$ para algún $m \in \mathbb{Z}$. La función $g : [x,z] \to \mathbb{C}$ definida por $g(t) = g_1(t)$ si $t \in [x,y]$, $g(t) = g_2(t) + 2m\pi i$ si $t \in [y,z]$ es un logaritmo continuo de $\gamma|_{[x,z]}$.

Sea $X \subset [0,1]$ el conjunto de los puntos $x \in [0,1]$ tales que $\gamma|_{[0,x]}$ posee un logaritmo continuo. Basta probar que $1 \in X$. Para ello se empezará viendo que X no es vacío y que si $\alpha = \sup X$ entonces $\alpha \in X$ y $\alpha = 1$.

Por la continuidad de γ en 0 existe $\delta > 0$ tal que $\gamma([0,\delta]) \subset D(\gamma(0), |\gamma(0)|)$. En el disco $D(\gamma(0), |\gamma(0)|)$ hay definido un logaritmo continuo de la identidad y por lo tanto existe un logaritmo continuo de $\gamma|_{[0,\delta]}$, es decir, $[0,\delta] \subset X$, luego $X \neq \emptyset$ y $\alpha = \sup X > 0$.

Por la continuidad de γ en α existe $0 < c < \alpha$ tal que $\gamma([c,\alpha]) \subset D(\gamma(\alpha), |\gamma(\alpha)|)$ y razonando como antes se obtiene que $\gamma|_{[c,\alpha]}$ posee un logaritmo continuo. Por definición de supremo, $\alpha = \sup X$, existe $x \in X$ tal que $c < x \leq \alpha$. Como $\gamma|_{[0,x]}$ y $\gamma|_{[x,\alpha]}$ poseen logaritmo continuo utilizando la observación preliminar se obtiene que $\alpha \in X$. La prueba se concluye demostrando, por reducción al absurdo, que $\alpha = 1$. Si fuese $\alpha < 1$, razonando como antes se encontraría $d \in (\alpha, 1]$ tal que $\gamma|_{[\alpha,d]}$ posee logaritmo continuo. Como ya hemos visto que $\gamma|_{[0,\alpha]}$ posee logaritmo continuo, usando la observación preliminar se obtendría que $\gamma|_{[0,d]}$ también lo tiene, es decir $d \in X$, lo que contradice la definición de $\alpha = \sup X$. ■

Cuando γ es un camino regular a trozos se puede dar una fórmula explícita para un logaritmo continuo de γ:

Lema 5.1.2 *Si $\gamma : [0,1] \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$ es un camino regular a trozos y $\alpha \in \log \gamma(0)$, la función*

$$g(t) = \alpha + \int_0^t \frac{\gamma'(s)}{\gamma(s)} ds, \quad 0 \le t \le 1;$$

es un logaritmo continuo de γ.

Dem: En virtud del teorema fundamental del cálculo integral la función g es continua en $[0,1]$ y existe un conjunto finito $H \subset [0,1]$ tal que g es derivable en cada $t \in [0,1] \setminus H$ con derivada $g'(t) = \gamma'(t)/\gamma(t)$. Puesto que la derivada de $\gamma(t)e^{-g(t)}$ existe y es nula para cada $t \in [0,1] \setminus H$, se sigue que la función $\gamma(t)e^{-g(t)}$ permanece constante entre cada par de puntos consecutivos de H. En virtud de la continuidad esta función es constante en $[0,1]$ con valor constante $\gamma(0)e^{-g(0)} = \gamma(0)e^{-\alpha} = 1$. Se obtiene así que $\gamma(t) = e^{g(t)}$ para todo $t \in [0,1]$. ■

En lo que sigue se supone que $\gamma : [0,1] \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$ es un camino continuo y cerrado. En este caso, si $g : [0,1] \to \mathbb{C}$ es un logaritmo continuo de γ se verifica que $g(0)$ y $g(1)$ son logaritmos de $\gamma(0) = \gamma(1)$ por lo que existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $g(1) - g(0) = 2m\pi i$. Nótese que si $h : [0,1] \to \mathbb{C}$ es otro logaritmo continuo de γ, en virtud de 2.6.5 existe $n \in \mathbb{Z}$ tal que $h(t) = g(t) + 2n\pi i$, luego $h(1) - h(0) = g(1) - g(0)$. Por consiguiente el número entero m no depende del logaritmo continuo de γ que se haya considerado. La interpretación geométrica de este número entero se obtiene teniendo en cuenta que $\varphi(t) = \operatorname{Im} g(t)$ es un argumento continuo de γ definido en $[0,1]$, de modo que

$$m = \frac{1}{2\pi i}(g(1) - g(0)) = \frac{1}{2\pi}(\varphi(1) - \varphi(0))$$

indica el número de vueltas, en sentido positivo, que da el camino $\gamma(t)$ alrededor de 0 cuando t recorre, de modo creciente, el intervalo $[0,1]$. En general, el número de vueltas que da un camino cerrado continuo γ, alrededor de un punto $a \notin \gamma([0,1])$, se obtiene contando las vueltas que da alrededor del origen el camino trasladado $\gamma(t) - a$.

Definición 5.1.3 *Si $\gamma : [0,1] \to \mathbb{C}$ es un camino cerrado continuo y $a \notin \gamma([0,1])$, se define el índice (o número de vueltas) del camino γ respecto al punto a como el número entero*

$$Ind(\gamma, a) = \frac{1}{2\pi i}(g(1) - g(0))$$

donde $g : [0,1] \to \mathbb{C}$ es un logaritmo continuo del camino $\gamma(t) - a$.

Si γ es un camino cerrado regular a trozos, utilizando el logaritmo continuo dado en 5.1.2 se obtiene

$$\operatorname{Ind}(\gamma, a) = \frac{1}{2\pi i} \int_0^1 \frac{\gamma'(s)}{\gamma(s) - a} ds = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{dz}{z - a}$$

Proposición 5.1.4 *Si* $\gamma_0, \gamma_1 : [a, b] \to \mathbb{C}\setminus\{0\}$ *son caminos cerrados continuos, se verifica:*

a) $Ind(\gamma_0\gamma_1, 0) = Ind(\gamma_0, 0) + Ind(\gamma_1, 0)$;

b) $Ind(\gamma_1, 0) = Ind(\gamma_0, 0)$ *si* $|\gamma_0(t) - \gamma_1(t)| \leq |\gamma_1(t)|$ *para todo* $t \in [a, b]$.

Dem: a) $\mathrm{Ind}(\gamma_i, 0) = \frac{1}{2\pi i}(g_i(1) - g_i(0))$ donde g_i es un logaritmo continuo de γ_i en $[0, 1]$, $i = 1, 2$. Como $g = g_0 + g_1$ es un logaritmo continuo de $\gamma = \gamma_0\gamma_1$ se tiene

$$\mathrm{Ind}(\gamma, 0) = \frac{1}{2\pi i}(g(1) - g(0)) = \mathrm{Ind}(\gamma_0, 0) + \mathrm{Ind}(\gamma_1, 0)$$

b) En virtud de la desigualdad $|\gamma_0 - \gamma_1| \leq |\gamma_1|$ el camino cerrado $\gamma = \gamma_0/\gamma_1$ está contenido en $\{z : |z - 1| \leq 1\} \setminus \{0\} \subset \{z : \mathrm{Re}\, z > 0\}$. En el semiplano $\{z : \mathrm{Re}\, z > 0\}$ está definido el logaritmo principal luego $g(t) = \mathrm{Log}\,\gamma(t)$ que es un logaritmo continuo de $\gamma(t)$ que verifica $g(1) = g(0)$. Entonces $\mathrm{Ind}(\gamma, 0) = 0$ y aplicando a) al producto $\gamma_0 = \gamma\gamma_1$ se obtiene b). ■

Proposición 5.1.5 *Sea* $\gamma : [0, 1] \to \mathbb{C}$ *un camino cerrado continuo. La función* $z \to Ind(\gamma, z)$ *definida en el abierto* $V := \mathbb{C} \setminus \gamma([0, 1])$ *permanece constante en cada componente conexa de* V *y vale* 0 *en la componente conexa no acotada.*

Dem: Si $z \in V$ existe $D(z, r) \subset V$ lo que significa que $|\gamma(t) - z| \geq r$ para todo $t \in [0, 1]$. Entonces para cada $w \in D(z, r)$ los caminos $\gamma(t) - z$ y $\gamma(t) - w$ verifican

$$|(\gamma(t) - z) - (\gamma(t) - w)| \leq |z - w| < r \leq |\gamma(t) - z|$$

y aplicando 5.1.4 b) se deduce que $\mathrm{Ind}(\gamma, w) = \mathrm{Ind}(\gamma, z)$ para cada $w \in D(z, r)$. Esto prueba que la función $z \to \mathrm{Ind}(\gamma, z)$ es localmente constante sobre V y por lo tanto constante en cada componente conexa de V.

Sea V_∞ la componente conexa no acotada de V y $b \in V_\infty$ tal que $|b| > \max\{|\gamma(t)| : t \in [0, 1]\}$. El par de caminos $\gamma_0(t) = -b$, $\gamma_1(t) = \gamma(t) - b$ verifican

$$|\gamma_0(t) - \gamma_1(t)| = |\gamma(t)| < |b| = |\gamma_0(t)|$$

y aplicando otra vez 5.1.4 b) se concluye que $\mathrm{Ind}(\gamma, b) = \mathrm{Ind}(\gamma_1, 0) = \mathrm{Ind}(\gamma_0, 0) = 0$ ■

Definición 5.1.6 *Una cadena* Γ *en el plano complejo es una sucesión finita de caminos que se acostumbra a denotar como una suma formal*

$$\Gamma = \gamma_1 \oplus \gamma_2 \oplus .... \oplus \gamma_m.$$

Si todos los caminos que componen la cadena son cerrados se dice que la cadena es un ciclo.

Se llama cadena opuesta de Γ a la cadena $\sim \Gamma = (\sim \gamma_1) \oplus (\sim \gamma_2) \oplus ... \oplus (\sim \gamma_m)$. Si $\Delta = \gamma_{m+1} \oplus \gamma_{m+2} \oplus .. \oplus \gamma_{m+k}$ es otra cadena, se define la suma formal

$$\Gamma \oplus \Delta = \gamma_1 \oplus \gamma_2 \oplus ... \oplus \gamma_m \oplus \gamma_{m+1} \oplus \gamma_{m+2} \oplus .. \oplus \gamma_{m+k}$$

y la diferencia $\Gamma \oplus (\sim \Delta)$, que se designa más brevemente $\Gamma \sim \Delta$. Si $m \in \mathbb{N}$, resulta conveniente definir $m\Gamma = \Gamma \oplus \Gamma \oplus \overset{m}{\cdots} \oplus \Gamma$ y $(-m)\Gamma = \sim (m\Gamma)$.

Se llama imagen de la cadena $\Gamma = \gamma_1 \oplus \gamma_2 \oplus .... \oplus \gamma_m$ a la unión de las imágenes de sus componentes,

$$\text{Imagen}(\Gamma) = \bigcup \{\text{Imagen}(\gamma_j) : 1 \leq j \leq m\}$$

Si $a \notin \text{Imagen}(\Gamma)$ se dirá que la cadena Γ no pasa por el punto a, y si $\text{Imagen}(\Gamma) \subset \Omega$ se dirá que Γ es una cadena en Ω. Una cadena Γ se dice que es regular a trozos si los caminos que la componen son regulares a trozos.

Definición 5.1.7 *Si $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ y $\Gamma = \gamma_1 \oplus \gamma_2 \oplus .... \oplus \gamma_m$ es una cadena regular a trozos en Ω, se define*

$$\int_\Gamma f(z)dz = \sum_{j=1}^{m} \int_{\gamma_j} f(z)dz.$$

Definición 5.1.8 *Si Γ es un ciclo regular a trozos que no pasa por el punto $z \in \mathbb{C}$, se define el índice de Γ respecto al punto z como la suma de los índices de los caminos cerrados que componen el ciclo:*

$$Ind(\Gamma, z) = \sum_{j=1}^{m} Ind(\gamma_j, z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{dw}{w - z}.$$

Se sigue de la proposicion 5.1.5 que para cada $z \notin \text{Imagen}(\Gamma)$ el índice $\text{Ind}(\Gamma, z)$ es un número entero, que permanece constante en cada componente conexa de $\mathbb{C} \setminus \text{Imagen }(\Gamma)$ y vale 0 en la componente conexa no acotada.

Definición 5.1.9 *Dos ciclos Γ, Δ en el abierto $\Omega \subset \mathbb{C}$ se dice que son Ω-homólogos si*

$$Ind(\Gamma, z) = Ind(\Delta, z) \text{ para cada } z \notin \Omega$$

Un ciclo Γ en Ω se dice que es Ω-homólogo a 0 si $Ind(\Gamma, z) = 0$ para cada $z \notin \Omega$.

Evidentemente, los ciclos Γ, Δ son Ω-homólogos si y sólo si $\Gamma \sim \Delta$ es Ω-homólogo a 0.

5.2. Versión homológica de los teoremas de Cauchy

Dos cadenas Γ, Δ, regulares a trozos en $\Omega \subset \mathbb{C}$, diremos que son Ω-*equivalentes* si para cada $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ se verifica $\int_\Gamma f(z)dz = \int_\Delta f(z)dz$.

Dada una cadena regular a trozos $\Gamma = \gamma_1 \oplus \gamma_2 \oplus .... \oplus \gamma_m$ es fácil comprobar que las siguientes operaciones la transforman en otra cadena Ω-equivalente, independientemente del abierto $\Omega \supset \text{Imagen}(\Gamma)$ que se considere:

a) Permutar dos de los caminos que componen Γ;

b) Reemplazar uno de los caminos γ_i de Γ por $\gamma_i^1 \oplus \gamma_i^2$, cuando $\gamma_i = \gamma_i^1 \vee \gamma_i^2$;

c) Eliminar dos de los caminos γ_i, γ_j, de Γ, cuando $\gamma_i = \sim \gamma_j$;

d) Reemplazar alguno de los caminos que forman Γ por caminos equivalentes con la misma orientación.

Con la versión homológica del teorema de Cauchy se va a demostrar que dos ciclos Γ, Δ en Ω son Ω-equivalentes si y sólo si son Ω-homólogos. Esto significa que son equivalentes:

i) $\displaystyle\int_\Gamma f(z)dz = \int_\Delta f(z)dz$ para cada $f \in \mathcal{H}(\Omega)$;

ii) $\displaystyle\int_\Gamma \frac{dz}{z-a} = \int_\Delta \frac{dz}{z-a}$ para cada $a \notin \Omega$;

Es decir, el subconjunto de $\mathcal{H}(\Omega)$ formado por las funciones $\dfrac{1}{z-a}$ con $a \notin \Omega$ basta para decidir si dos ciclos Γ, Δ proporcionan la misma integral para todas las funciones holomorfas en Ω.

Lema 5.2.1 *Si $f \in \mathcal{H}(\Omega)$, la función $g : \Omega \times \Omega \to \mathbb{C}$ definida por*

$$g(z,w) = \frac{f(z)-f(w)}{z-w} \text{ si } z \neq w; \qquad g(z,z) = f'(z)$$

es continua en $\Omega \times \Omega$.

DEM: Basta demostrar que g es continua en los puntos de la forma $(a,a) \in \Omega \times \Omega$. Como f' es continua, dado $\epsilon > 0$ existe $D(a,r) \subset \Omega$ tal que $|f'(b) - f'(a)| < \epsilon$ para todo $b \in D(a,r)$. Entonces para cada par de puntos $z, w \in D(a,r)$ el segmento que los une $\sigma(t) = (1-t)z+tw$, $t \in [0,1]$ está contenido en $D(a,r)$ y por lo tanto $|f'(\sigma(t))-f'(a)| < \epsilon$ para todo $t \in [0,1]$. Como

$$f(w) - f(z) = \int_0^1 f'(\sigma(t))\sigma'(t)dt = (w-z)\int_0^1 f'(\sigma(t))dt$$

resulta

$$|g(z,w) - g(a,a)| = \left|\int_0^1 (f'(\sigma(t)) - f'(a))dt\right| \leq \int_0^1 |f'(\sigma(t)) - f'(a)|dt \leq \int_0^1 \epsilon dt = \epsilon$$

(Nótese que cuando $z = w$ se tiene $|g(z,z) - g(a,a)| = |f'(z) - f'(a)| < \epsilon$). ■

Teorema 5.2.2 [Versión homológica de la fórmula integral de Cauchy] *Si Γ es un ciclo regular a trozos en el abierto $\Omega \subset \mathbb{C}$, Ω-homólogo a 0 (e.d. $Ind(\Gamma, a) = 0$ para cada $a \notin \Omega$) entonces para cada $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ y cada $z \in \Omega \setminus Imagen(\Gamma)$ se verifica:*

$$Ind(\Gamma, z)f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{f(w)}{w-z}dw.$$

DEM: Obsérvese en primer lugar que $V := \{z \notin \text{Imagen}(\Gamma) : \text{Ind}(\gamma, z) = 0\}$ es la unión de una familia de componentes conexas de $\mathbb{C} \setminus \text{Imagen}(\Gamma)$, entre las que figura la no acotada. Por lo tanto V es abierto y existe $R > 0$ tal que $\{z : |z| > R\} \subset V$. En virtud del lema 3.3.3 la integral

$$G(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{f(w)}{w - z} dw$$

define en V una función holomorfa $G \in \mathcal{H}(V)$ que verifica $\lim_{z \to \infty} G(z) = 0$.

Por otra parte, si $g : \Omega \times \Omega \to \mathbb{C}$ es la función continua del lema 5.2.1 y se define $F : \Omega \to \mathbb{C}$ mediante la integral

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma g(z, w) dw$$

se tiene que F es holomorfa en Ω. (Basta aplicar 3.3.15 teniendo en cuenta que $\int_\Gamma g(z, w) dw$ es una suma finita de integrales del tipo $\int_0^1 g(z, \gamma(t))\gamma'(t) dt$, donde γ es de clase C^1).

Si $z \in V \cap \Omega$ entonces $\text{Ind}(\Gamma, z) = 0$ luego

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{f(w)}{w - z} dw - \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{f(z)}{w - z} dw = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{f(w)}{w - z} dw - \text{Ind}(\Gamma, z) f(z) = G(z)$$

La condición de que Γ es Ω-homólogo a 0 significa que $\mathbb{C} = V \cup \Omega$. Como F y G coinciden en $\Omega \cap V$ se puede definir una función entera $h \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ tal que $h(z) = F(z)$ si $z \in \Omega$ y $h(z) = G(z)$ si $z \in V$. Teniendo en cuenta que $h(z) = G(z)$ si $|z| > R$ se sigue que $\lim_{z \to \infty} h(z) = \lim_{z \to \infty} G(z) = 0$ y por lo tanto h es acotada. Aplicando el teorema de Liouville 3.3.11 se concluye que h es es constante. El valor constante de h es 0, pues $\lim_{z \to \infty} h(z) = 0$.

Puesto que F es idénticamente nula en Ω, para todo $z \in \Omega \setminus \text{Imagen}(\Gamma)$ se verifica

$$0 = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{f(w) - f(z)}{w - z} dw = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{f(w)}{w - z} dw - \text{Ind}(\Gamma, z) f(z)$$

■

Teorema 5.2.3 [Versión homológica del Teorema de Cauchy] *Si Γ, Δ son ciclos regulares a trozos Ω-homólogos en un abierto $\Omega \subset \mathbb{C}$ y $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ se verifica*

$$\int_\Gamma f(z) dz = \int_\Delta f(z) dz$$

En particular, si Γ es Ω-homólogo a 0 se cumple $\int_\Gamma f(z) dz = 0$.

DEM: Como $\Gamma \sim \Delta$ es un ciclo Ω-homólogo a 0 basta demostrar la segunda afirmación. Sea pues Γ un ciclo Ω-homólogo a 0 en el abierto Ω. Fijado $a \in \Omega \setminus \text{Imagen}(\Gamma)$, aplicando 5.2.2 a la función $g(z) = (z - a) f(z)$ se obtiene

$$0 = g(a)\text{Ind}(\Gamma, a) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma f(z) dz$$

■

El siguiente teorema contiene una caracterización topológica de los abiertos holomórficamente conexos:

Teorema 5.2.4 *Las siguientes propiedades de un abierto conexo $\Omega \subset \mathbb{C}$ son equivalentes:*

a) $\mathbb{C}_\infty \setminus \Omega$ *es conexo;*

b) Cada ciclo regular a trozos en Ω es Ω-homólogo a 0;

c) Para cada ciclo regular a trozos Γ en Ω, cada $z \in \Omega \setminus Imagen(\Gamma)$ y cada $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ se cumple:

$$f(z)Ind(\Gamma, z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{f(w)}{w-z}dw;$$

d) Para cada ciclo regular a trozos Γ en Ω, y cada $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ se cumple $\int_\Gamma f(z)dz = 0$;

e) Ω es holomórficamente conexo, e.d. para cada $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ existe $F \in \mathcal{H}(\Omega)$ con $F' = f$;

f) Para cada $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ con $0 \notin f(\Omega)$ existe $g \in \mathcal{H}(\Omega)$ tal que $e^g = f$;

DEM: a) $\Rightarrow$ b): Si $\mathbb{C}_\infty \setminus \Omega$ es conexo y Γ es un ciclo en Ω entonces $\mathbb{C}_\infty \setminus \Omega$ está contenido en la componente conexa de ∞ en $\mathbb{C}_\infty \setminus$Imagen$(\Gamma)$ lo que significa que $\mathbb{C} \setminus \Omega$ es un subconjunto de la componente conexa no acotada de $\mathbb{C} \setminus$ Imagen(Γ) y por lo tanto Ind$(\Gamma, a) = 0$ para todo $a \notin \Omega$, es decir, se cumple b).
b) $\Rightarrow$ c) es el teorema 5.2.2. La prueba de 5.2.3 muestra que c) $\Rightarrow$ d). En 3.2.11 se probó que d) $\Rightarrow$ e).
e) $\Rightarrow$ f). Si $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ con $0 \notin f(\Omega)$, entonces f'/f es holomorfa en Ω, y en virtud de 3.3.8 se cumple f).
g) $\Rightarrow$ b): Para cada $a \notin \Omega$ la función $z-a$ no se anula en Ω y por hipótesis existe $g \in \mathcal{H}(\Omega)$ tal que $e^{g(z)} = z - a$ para todo $z \in \Omega$. Entonces g es una primitiva de $1/(z-a)$ en Ω y por lo tanto para cada ciclo regular a trozos Γ en Ω se cumple

$$\text{Ind}(\Gamma, a) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{dz}{z-a} = 0$$

es decir, se cumple b).
b) $\Rightarrow$ a): Demostraremos que [no a)] $\Rightarrow$ [no b)]. Supongamos que a) es falso. Esto significa que $\mathbb{C}_\infty \setminus \Omega = A \cup B$ donde $A \neq \emptyset$ y $B \neq \emptyset$ son conjuntos cerrados (en $\mathbb{C}_\infty \setminus \Omega$) y disjuntos. Como Ω es abierto en $\mathbb{C}$, también es abierto en $\mathbb{C}_\infty$, por lo que $\mathbb{C}_\infty \setminus \Omega$ es cerrado de $\mathbb{C}_\infty$. Esto garantiza que A y B son subconjuntos cerrados de $\mathbb{C}_\infty$, y por lo tanto compactos. Si $\infty \in B$ podemos afirmar que $A = A \cap \mathbb{C} \neq \emptyset$ es un subconjunto compacto de $\mathbb{C}$, y que $C := B \setminus \{\infty\} = B \cap \mathbb{C}$ es un subconjunto cerrado de $\mathbb{C}$. Como A y C son disjuntos, elegido un punto $a \in A$ es posible construir un ciclo Γ en $\mathbb{C} \setminus (A \cup C) = \Omega$, regular a trozos, tal que Ind$(\Gamma, a) = 1$, luego no se cumple b). ■

Lema 5.2.5 *Sean $A, C \subset \mathbb{C}$ conjuntos disjuntos donde A es compacto no vacío y C es cerrado. Para cada $a \in A$ existe un ciclo Γ en $\mathbb{C} \setminus (A \cup C)$ tal que $Ind(\Gamma, a) = 1$.*

Dem: Véase [17] ejerc. 7.6 ■

Combinando la versión homológica de la fórmula integral de Cauchy con el lema 3.3.2 se demuestra a continuación que toda función holomorfa en una corona admite un desarrollo de Laurent en la corona.

Lema 5.2.6 *Sea f una función holomorfa en la corona $A := \{z : r < |z-a| < R\}$. Una condición necesaria y suficiente para que f admita un desarrollo de Laurent en A es que exista una función f_1 holomorfa en $\{z : |z-a| < R\}$ y una función f_{-1} holomorfa en $\{z : |z-a| > r\}$ con $\lim_{z \to \infty} f_{-1}(z) = 0$, de modo que*

$$f(z) = f_{-1}(z) + f_1(z) \text{ si } r < |z-a| < R$$

Las funciones f_1, f_{-1} son únicas bajo las condiciones anteriores

Dem: Suficiencia: Si f admite una descomposición $f = f_{-1} + f_1$ del tipo indicado en el enunciado, la función $g(w) = f_{-1}(a + 1/w)$ si $w \neq 0$ tiene una singularidad evitable en $w = 0$ que se elimina definiendo $g(0) = 0$. Así, como g es holomorfa en el disco $D(0, 1/r)$, admite en el mismo un desarrollo en serie de potencias $g(w) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n w^n$ si $|w| < 1/r$. Sustituyendo $w = (z-a)^{-1}$ resulta

$$f_{-1}(z) = g((z-a)^{-1}) = \sum_{n=1}^{\infty} a_{-n}(z-a)^{-n} \text{ si } |z-a| > r$$

Combinando esta serie con la serie de potencias

$$f_1(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-a)^n \text{ si } \{z : |z-a| < R\}$$

se obtiene el desarrollo de Laurent de f en Ω.
Necesidad: Se ha visto en el capítulo 2.
Unicidad: Sea $f = g_{-1} + g_1$ otra descomposición similar. $f_{-1}(z) - g_{-1}(z) = g_1(z) - f_1(z)$ si $r < |z-a| < R$ y se puede definir $h \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ por $h(z) = f_{-1}(z) - g_{-1}(z)$ si $|z-a| > r$ y $h(z) = g_1(z) - f_1(z)$ si $|z-a| < R$. Como $\lim_{z \to \infty} h(z) = \lim_{z \to \infty}(f_{-1}(z) - g_{-1}(z)) = 0$ resulta que h es acotada, y por lo tanto constante en virtud del teorema de Liouville 3.3.11. Claramente el valor constante de h es 0, lo que significa que $f_1 = g_1$ y que $f_{-1} = g_{-1}$. ■

Teorema 5.2.7 *Si $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ y $A = \{z : r < |z-a| < R\} \subset \Omega$, entonces f admite un desarrollo de Laurent en A:*

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n(z-a)^n \text{ si } r < |z-a| < R$$

cuyos coeficientes vienen dados por

$$a_n = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_\rho} \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}} dz$$

donde $C_\rho(t) = a + \rho e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$ con $r < \rho < R$.

DEM: Dado $z \in A$ se eligen r' y R' tales que $r < r' < |z-a| < R' < R$. Con las circunferencias $C_{R'}(t) = a + R'e^{it}$ y $C_{r'}(t) = a + r'e^{it}$ $(t \in [0,2\pi])$ se forma el ciclo $\Gamma = C_{R'} \sim C_{r'}$ que es A-homólogo a 0 y verifica $\operatorname{Ind}(\Gamma, z) = \operatorname{Ind}(C_{R'}, z) - \operatorname{Ind}(C_{r'}, z) = 1 - 0 = 1$. Aplicando la fórmula integral de Cauchy, 5.2.2 se obtiene

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{f(w)}{w-z}dw = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_{R'}} \frac{f(w)}{w-z}dw - \frac{1}{2\pi i}\int_{C_{r'}} \frac{f(w)}{w-z}dw$$

Luego $f(z) = f_1(z) + f_{-1}(z)$ donde

$$f_1(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_{R'}} \frac{f(w)}{w-z}dw; \qquad f_{-1}(z) = -\frac{1}{2\pi i}\int_{C_{r'}} \frac{f(w)}{w-z}dw$$

Obsérvese que cuando $|z-a| < R' < R$ el valor de la integral $f_1(z)$ no depende de R' (Esto es consecuencia del teorema de Cauchy 5.2.3 porque si $|z-a| < R'' < R$ los ciclos $C_{R'}$ y $C_{R''}$ son homólogos en el abierto $A \setminus \{z\}$ donde $w \to f(w)/(w-z)$ es holomorfa). Análogamente, cuando $r < r' < |z-a|$, el valor de la integral f_{-1} no depende de r'.

Aplicando el Lema 3.3.3 se obtiene que $f_1(z)$ es holomorfa en $\{z : |z-a| < R\}$, que f_{-1} es holomorfa en $\{z : r < |z-a|\}$ y que $\lim_{z \to \infty} f_{-1}(z) = 0$. Utilizando el lema 5.2.6 se concluye que f admite un desarrollo de Laurent en A:

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-z)^n \quad \text{si} \quad r < |z-a| < R$$

Para cada $n \in \mathbb{Z}$ la función $\dfrac{f(z)}{(z-a)^{n+1}} - \dfrac{a_n}{z-a}$ tiene primitiva en A luego

$$\int_{C_\rho} \frac{f(z)dz}{(z-a)^{n+1}} = \int_{C_\rho} \frac{a_n}{z-a} = 2\pi i a_n$$

NOTA: Si f es holomorfa en $A := \{z : r < |z-a| < R\}$ y $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n(z-a)^n$ es su desarrollo de Laurent entonces la diferencia $f(z) - \dfrac{a_{-1}}{z-a}$ tiene primitiva en A. Por consiguiente, si γ es un camino cerrado regular a trozos en A se verifica

$$\int_\gamma f(z)dz = \int_\gamma \frac{a_{-1}}{z-a}dz = a_{-1}2\pi i \operatorname{Ind}(\gamma, a)$$

Por otra parte, según 5.2.7 los coeficientes del desarrollo están unívocamente determinados por la función f. Utilizando este hecho se prueba fácilmente

Proposición 5.2.8 *Si f es una función par holomorfa en $A := \{z : r < |z| < R\}$ entonces f tiene primitiva en A.*

5.3. Teorema de los residuos

Proposición 5.3.1 *Si $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ y $a \in \mathbb{C}$ es una singularidad aislada de f existe un único $\alpha \in \mathbb{C}$ tal que la función $f(z) - \dfrac{\alpha}{z-a}$ tiene primitiva en cada $D^*(a,r) \subset \Omega$.*

Dem: Sea $C_\rho(t) = a + \rho e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$. En virtud de la versión homológica del teorema de Cauchy, cuando $\{z : 0 < |z - a| \leq \rho\} \subset \Omega$ todas las integrales $\int_{C_\rho} f(z)dz$ tienen el mismo valor. Sea α el valor común de estas integrales. Bastará probar que si γ es un camino cerrado regular a trozos en $D^*(a, r)$ entonces $I(\gamma) = 0$ donde

$$I(\gamma) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \left(f(z) - \frac{\alpha}{z-a}\right) dz$$

Efectivamente, si $m = \text{Ind}(\gamma, a)$ y $0 < \rho < r$ los ciclos mC_ρ y γ son $D^*(a, r)$-homólogos luego

$$I(\gamma) = I(mC_\rho) = \frac{1}{2\pi i}\int_{mC_\rho} f(z)dz - \frac{1}{2\pi i}\int_{mC_\rho} \frac{\alpha}{z-a}dz = m\alpha - m\alpha = 0$$

La unicidad de α es inmediata: Si $\beta \in \mathbb{C}$ tiene la misma propiedad que α entonces $\dfrac{\alpha-\beta}{z-a}$ tiene primitiva en $D^*(a, r)$ y esto ocurre si y sólo si $\alpha - \beta = 0$. ■

Definición 5.3.2 *Si $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ y $a \in \mathbb{C}$ es una singularidad aislada de f, el residuo de f en a, denotado Res(f, a), es el único $\alpha \in \mathbb{C}$ que hace que la función $f(z) - \dfrac{\alpha}{z-a}$ tenga primitiva en cada $D^*(a, \rho) \subset \Omega$. Si ∞ es singularidad aislada de f se define Res$(f, \infty) =$ Res$(g, 0)$ donde $g(z) = -f(1/z)/z^2$.*

El residuo se puede calcular acudiendo al desarrollo de Laurent de la función f alrededor de la singularidad:

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n(z-a)^n \qquad 0 < |z-a| < r$$

En virtud de los resultados que ya se han visto para las series de Laurent se tiene que $\text{Res}(f, a) = a_{-1}$. Si $a \in \mathbb{C}$ es un polo simple de f entonces

$$\text{Res}(f, a) = \lim_{z \to a}(z-a)f(z)$$

Cuando $a \in \mathbb{C}$ es un polo de multiplicidad $m > 1$ se tiene que a es singularidad evitable de $h(z) = (z-a)^m f(z)$ y

$$\text{Res}(f, a) = \lim_{z \to a} \frac{h^{(m-1)}(z)}{(m-1)!}$$

En efecto, basta observar que si

$$f(z) = \frac{a_{-m}}{(z-a)^m} + \cdots + \frac{a_{-1}}{z-a} + a_0 + a_1(z-a) + \cdots$$

es el desarrollo de Laurent en $D^*(a, r)$ entonces

$$(z-a)^m f(z) = a_{-m} + a_{-(m-1)}(z-a) + \cdots + a_{-1}(z-a)^{m-1} + \cdots$$

Si ∞ es singularidad aislada de f y se considera el desarrollo de Laurent de f en $D^*(\infty, r) \subset \Omega$

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n z^n$$

se comprueba fácilmente que $\text{Res}(f, a) = -a_{-1}$.

Teorema 5.3.3 [de los residuos] *Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$ abierto y $S \subset \Omega$, con $S' \cap \Omega = \emptyset$, el conjunto de las singularidades aisladas de una función $f \in \mathcal{H}(\Omega \setminus S)$. Si Γ es un ciclo en $\Omega \setminus S$ regular a trozos y Ω-homólogo a 0 se verifica*

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma f(z)dz = \sum_{a \in S} \mathit{Ind}(\Gamma, a) \mathit{Res}(f, a)$$

donde la suma contiene sólo una cantidad finita de sumandos no nulos.

DEM: Como Γ es homólogo a cero $\mathbb{C} \setminus \Omega \subset V = \{z \in \mathbb{C} \setminus \text{Imagen}(\Gamma) : \text{Ind}(\Gamma, z) = 0\}$. Como V es unión de algunas de las componentes conexas de $\mathbb{C} \setminus \text{Imagen}(\Gamma)$, entre las que figura la no acotada, se tiene que $K := \mathbb{C} \setminus V$ es cerrado y acotado. Puesto que K es un subconjunto compacto de Ω y $S' \cap \Omega = \emptyset$ se obtiene que

$$K \cap S = \{a \in S : \text{Ind}(\Gamma, a) \neq 0\}$$

es finito (véase 1.2.2). Si $\{a_1, a_2, \cdots a_p\} = \{a \in S : \text{Ind}(\Gamma, a) \neq 0\}$ eligiendo $r_j > 0$ $1 \leq j \leq p$ suficientemente pequeños se consigue que todos los discos perforados $D^*(a_j, r_j)$ estén contenidos en $\Omega \setminus S$ y sean disjuntos dos a dos.

Para $j = 1, 2 \cdots p$ se consideran las circunferencias $C_j(t) = a_j + \rho_j e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$, con $0 < \rho_j < r_j$ y con ellas se forma el ciclo

$$\Delta := m_1 C_1 \oplus m_2 C_2 \oplus \cdots \oplus m_p C_p$$

donde $m_j = \text{Ind}(\Gamma, a_j)$. Es claro que $\text{Ind}(\Delta, a) = \text{Ind}(\Gamma, a)$ para cada $a \in S$ y que $\text{Ind}(\Delta, z) = 0 = \text{Ind}(\Gamma, z)$ para cada $z \in \mathbb{C} \setminus \Omega$. Resulta así que los ciclos Γ y Δ son $\Omega \setminus S$-homólogos y aplicando el teorema de Cauchy 5.2.3

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma f(z)dz = \frac{1}{2\pi i} \int_\Delta f(z)dz = \frac{1}{2\pi i} \sum_{j=1}^{p} m_j \int_{C_j} f(z)dz$$

Con esto termina la demostración ya que $\text{Res}(f, a_j) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_j} f(z)dz$. ■

Corolario 5.3.4 *Si f es una función holomorfa en $\Omega := \mathbb{C} \setminus S$, donde S es finito, se verifica*

$$\sum_{a \in S} \mathit{Res}(f, a) + \mathit{Res}(f, \infty) = 0$$

DEM: Véase [17] ejerc. 7.23 ■

El ejercicio 5.27 puede resolverse fácilmente usando este corolario, que resulta útil a la hora de calcular residuos.

5.4. Principio del argumento y sus aplicaciones

Si f es una función meromorfa no idénticamente nula en un abierto conexo entonces los ceros y los polos de f singularidades aisladas del cociente $f'(z)/f(z)$. Si a es un cero o un polo de f se denotará por $\nu(f, a)$ su multiplicidad.

Teorema 5.4.1 [Principio del Argumento] *Sea $f \in \mathcal{M}(\Omega)$ una función meromorfa no idénticamente nula en un abierto conexo $\Omega \subset \mathbb{C}$, y $S = \mathcal{P}(f) \cup \mathcal{Z}(f)$. Si Γ es un ciclo regular a trozos en $\Omega \setminus S$, que es Ω-homólogo a 0 se verifica*

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{f'(z)}{f(z)}dz = \sum_{a\in\mathcal{Z}(f)} Ind(\Gamma, a)\nu(f, a) - \sum_{a\in\mathcal{P}(f)} Ind(\Gamma, a)\nu(f, a)$$

donde sólo hay una cantidad finita de sumandos no nulos.

DEM: Como Ω es conexo y $P(f)' \cap \Omega = \emptyset$ entonces $\Omega_0 = \Omega \setminus P(f)$ también es conexo. Como f es una función holomorfa, no idénticamente nula, en el abierto conexo Ω_0, sus ceros son aislados. Se sigue que todos los puntos de S son aislados, por lo que la función $f'(z)/f(z)$ es holomorfa en $\Omega \setminus S$ con singularidades aisladas en los puntos de S. Si $a \in S$ existe $D^*(a, r) \subset \Omega$ y una función $F \in \mathcal{H}(D(a, r))$ tal que $0 \notin F(D(a, r))$ verificando $f(z) = (z-a)^m F(z)$ para todo $z \in D^*(a, r)$ donde $m = \nu(f, a)$ si $a \in \mathcal{Z}(f)$ y $m = -\nu(f, a)$ si $a \in \mathcal{P}(f)$. Se sigue que

$$\frac{f'(z)}{f(z)} - \frac{m}{z-a} = \frac{F'(z)}{F(z)} \text{ para todo } z \in D^*(a, r)$$

Como F'/F tiene primitiva en $D(a, r)$ (porque es holomorfa en $D(a, r)$) se tiene que $\text{Res}(f'/f, a) = m$ y aplicando el teorema de los residuos se obtiene el resultado. ∎

La integral que aparece el principio del argumento se puede interpretar como el índice respecto al origen del ciclo imagen $\Gamma^* = f(\Gamma)$, por lo que el principio del argumento resulta muy útil para el cálculo de índices de ciclos.

Proposición 5.4.2 *Sea γ un camino cerrado en $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ de la forma $\gamma(t) = f(e^{it})$, $t \in [0, 2\pi]$ donde $f \in \mathcal{M}(\Omega)$ no tiene ceros ni polos sobre la circunferencia $\{z : |z| = 1\}$ y $\{z : |z| \leq 1\} \subset \Omega$. Entonces $Ind(\gamma, 0) = n - m$ donde n y m son, respectivamente, el número de ceros y el número de polos de f en $D(0, 1)$ (con el convenio habitual de contarlos repetidos según sus multiplicidades)*

DEM: Si $C(t) = e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$, aplicando 5.4.1 resulta

$$\text{Ind}(\gamma, 0) = \frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi} \frac{f'(e^{it})ie^{it}}{f(e^{it})}dt = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f'(z)}{f(z)}dz = n - m$$

∎

El principio del argumento proporciona un método muy eficaz para el cálculo de las integrales involucradas en la proposición 3.3.8. con lo cual se simplifica el estudio de las regiones del plano donde una cierta función holomorfa tiene logaritmo holomorfo.

De manera similar, el principio del argumento junto con la siguiente proposición, permite averiguar en qué regiones del plano una cierta función holomorfa tiene tiene raíces m-ésimas holomorfas:

Proposición 5.4.3 *Dada una función holomorfa $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ y $m \in \mathbb{N}$, son equivalentes:*

i) Existe $g \in \mathcal{H}(\Omega)$ tal que $g^m = f$.

ii) Para cada camino cerrado regular a trozos γ en $\Omega \setminus \mathcal{Z}(f)$ se cumple

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)} dz \in m\mathbb{Z}$$

DEM: Véase [17] ejerc. 7.36 ■

Teorema 5.4.4 [Rouché] *Sean $f, g \in \mathcal{M}(\Omega)$ funciones meromorfas no idénticamente nulas en un abierto conexo $\Omega \subset \mathbb{C}$ y sea $S = \mathcal{Z}(f) \cup \mathcal{Z}(g) \cup \mathcal{P}(f) \cup \mathcal{P}(g)$. Se supone que Γ es un ciclo regular a trozos en $\Omega \setminus S$ que es Ω-homólogo a 0. Si*

$$|f(z) + g(z)| < |f(z)| + |g(z)| \text{ para todo } z \in Imag(\Gamma)$$

entonces

$$\sum_{a \in \mathcal{Z}(f)} Ind(\Gamma, a)\nu(f, a) - \sum_{a \in \mathcal{P}(f)} Ind(\Gamma, a)\nu(f, a) = \sum_{a \in \mathcal{Z}(g)} Ind(\Gamma, a)\nu(g, a) - \sum_{a \in \mathcal{P}(g)} Ind(\Gamma, a)\nu(g, a)$$

donde en cada sumatorio sólo interviene una cantidad finita de sumandos no nulos.

DEM: Como $\Omega \setminus \mathcal{P}(f)'$ es un abierto conexo no vacío (véase 1.5.2) sobre el que f es holomorfa y no idénticamente nula se sigue que todos los ceros de f son aislados. Análogamente los ceros de g son aislados luego cada $a \in S$ es una singularidad aislada de $F := f/g$. En virtud de la hipótesis para todo $w \in$ Imagen(Γ) es $|F(w) + 1| < 1 + |F(w)|$ luego $F(w)$ no puede ser real positivo. Esto significa que F transforma el ciclo Γ en un ciclo $\Delta = F(\Gamma)$ que no pasa por el semieje real positivo, lo que garantiza que 0 pertenece a la componente conexa no acotada de Imagen(Δ). Entonces

$$0 = \operatorname{Ind}(\Delta, 0) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{F'(z)}{F(z)} dz = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{f'(z)}{f(z)} dz - \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{g'(z)}{g(z)} dz$$

Aplicando el principio del argumento 5.4.1 se obtiene el resultado. ■

NOTA: Si un ciclo Γ verifica que $\operatorname{Ind}(\Gamma, a) \in \{0, 1\}$ para todo $a \notin$ Imagen(Γ) diremos que es un ciclo simple. En este caso diremos que a está rodeado por Γ si $\operatorname{Ind}(\Gamma, a) = 1$.

En las condiciones del teorema de Rouché, si el ciclo Γ es simple, y se denota por $Z(f, \Gamma)$ (resp. $P(f, \Gamma)$) el número de ceros (resp. polos) de f rodeados por Γ, la conclusión del teorema de Rouché es la igualdad

$$Z(f, \Gamma) - P(f, \Gamma) = Z(g, \Gamma) - P(g, \Gamma)$$

Este resultado es muy útil para localizar ceros y polos de funciones meromorfas.

Frecuentemente se aplica el teorema de Rouché comprobando la desigualdad

$$|f(z) + g(z)| < |f(z)| \text{ para todo } z \in \text{Imagen}(\Gamma)$$

la cual implica la desigualdad que aparece del enunciado de 5.4.4.

5.5. Complementos

5.5.1. Versión homotópica de los teoremas de Cauchy

Teorema 5.5.1 *Si γ es un camino cerrado en Ω, regular a trozos y Ω-homotópico a un camino constante, para cada $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ se verifica*

$$\int_\gamma f(z)dz = 0; \quad Ind(\gamma, a)f(a) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(z)}{z-a}dz \quad si \quad a \notin Imagen(\gamma)$$

Si γ_0, γ_1 son caminos regulares a trozos en Ω, con los mismos extremos, y Ω-homotópicos como caminos con extremos fijos, para cada $f \in cH(\Omega)$ se cumple

$$\int_{\gamma_1} f(z)dz = \int_{\gamma_2} f(z)dz$$

DEM: Las afirmaciones referentes al camino cerrado γ son consecuencia del lema 9.3.3 y de la versión homológica de los teoremas de Cauchy (5.2.2 y 5.2.3). Para demostrar la afirmación relativa a los caminos γ_0, γ_1 basta ver que el camino cerrado

$$\hat{\gamma} = (\sim \gamma_0) \vee \gamma_1 : [-1, 1] \to \Omega$$

definido por $\hat{\gamma}(t) = \gamma_0(-t)$ si $-1 \le t \le 0$, $\hat{\gamma}(t) = \gamma_1(t)$ si $0 \le t \le 1$ es Ω-homotópico a un camino constante. La Ω-homotopía requerida se puede conseguir en dos etapas, aplicando dos homotopías sucesivas: En la primera etapa el trozo $(\sim \gamma_0)$ no cambia, mientras que el segundo trozo γ_1 se deforma continuamente en γ_0. Con esta primera Ω-homotopía de caminos cerrados $\hat{\gamma}$ se transforma en $\Gamma = (\sim \gamma_0) \vee \gamma_0$. En la segunda etapa, la homotopía de caminos cerrados $(s, t) \to \Gamma(st)$ transforma Γ en un camino constante. ■

NOTA: La versión homotópica de los teoremas de Cauchy también se puede obtener utilizando los siguientes resultados de integración curvilínea vistos en la asignatura Análisis Matemático II:
Sea $\omega : \Omega \to \mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ una forma diferencial cerrada, definida y continua en un abierto $\Omega \subset \mathbb{R}^2$. Si $\gamma_0, \gamma_1 : [0, 1] \to \Omega$ son caminos regulares a trozos con los mismos extremos Ω-homotópicos como caminos con los extremos fijos (o caminos cerrados regulares a trozos Ω-homotópicos como caminos cerrados) se cumple $\int_{\gamma_0} \omega = \int_{\gamma_1} \omega$.

Basta tener en cuenta que para una función holomorfa $f \in \mathcal{H}(\Omega)$, $f = u + iv$, la forma diferencial compleja $f(z)dz = [u(x, y)dx - v(x, y)dy] + i[v(x, y)dx + u(x, y)dy]$ es cerrada y por lo tanto las formas diferenciales reales $\omega_1(x, y) = u(x, y)dx - v(x, y)dy$, $\omega_2(x, y) = v(x, y)dx + u(x, y)dy$ también lo son, luego según el teorema anterior, para $i = 1, 2$, se cumple $\int_{\gamma_1} \omega_i = \int_{\gamma_2} \omega_i$, $\int_\gamma \omega_i = 0$.

5.5.2. Aplicaciones abiertas y funciones inversas

Usando las propiedades del índice de un camino respecto a un punto y el principio del argumento se puede dar una demostración alternativa, con técnicas de variable compleja del teorema de la aplicación abierta y de la función inversa

Teorema 5.5.2 [Aplicación abierta] *Sea $\Omega \subset \mathbb{C}_\infty$ un abierto conexo, $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ una función holomorfa no constante. y $a \in \Omega$.*

Si $b = f(a)$ y m es la multiplicidad de a como cero de $f(z) - b$, entonces un entorno abierto de a, $U_a \subset \Omega$ tal que $V_b = f(U_a)$ es un entorno abierto de b que verifica: Para cada $w \in V_b \setminus \{b\}$ la función $z \to f(z) - w$ posee m ceros distintos en U_a, y todos son simples. Por consiguiente f es una transformación abierta.

Dem: Basta hacer la prueba en el caso $a \neq \infty$ pues el caso $a = \infty \in \Omega$ se reduce al anterior considerando la función auxiliar $F(z) = f(1/z)$ y el punto $z = 0$.

En virtud de las hipótesis las funciones $f(z) - f(a)$ y $f'(z)$ no son idénticamente nulas en el abierto conexo Ω por lo que sus ceros son aislados (4.1.2) y existe $D(a, 2r) \subset \Omega$ tal que

$$z \in D^*(a, 2r) \Rightarrow f(z) - f(a) \neq 0, \text{ y } f'(z) \neq 0$$

Entonces el camino $\gamma(t) = f(a + re^{it})$, $t \in [0, 2\pi]$ no pasa por b y en virtud de 5.4.2 se tiene $\operatorname{Ind}(\gamma, b) = m$, pues si $C_r(t) = a + re^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$ se verifica:

$$\operatorname{Ind}(\gamma, b) = \operatorname{Ind}(\gamma - b, 0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_r} \frac{f'(z)}{f(z) - b} dz = m$$

Si V_b es la componente conexa de b en $\mathbb{C} \setminus \operatorname{Imagen}(\gamma)$, entonces $U_a = f^{-1}(V_b) \cap D(a, r)$ es un entorno abierto de a que cumple las condiciones del enunciado. Efectivamente, en virtud de 5.1.5 si $w \in V_b$ también se cumple que $\operatorname{Ind}(\gamma, w) = m$ y aplicando otra vez 5.4.2 se obtiene que la función $f(z) - w$ tiene m ceros en $D(a, r)$, luego $w = f(z)$ para algún $z \in D(a, r)$. Queda probado que para cada $w \in V_b$ existe $z \in f^{-1}(V_b) \cap D(a, r)$ con $f(z) = w$, luego $V_b \subset f(U_a)$. Como la inclusión $f(U_a) \subset V_b$ es obvia resulta $f(U_a) = V_b$. Nótese que si $w \in V_b$ y $w \neq b$ entonces los m ceros que la función $f(z) - w$ tiene en $U_a \setminus \{a\}$ son simples porque $f'(z) \neq 0$ para todo $z \in D^*(a, r)$.

Por lo que se acaba de probar $f(\Omega)$ abierto. Por la misma razón $f(D(a, r))$ es abierto para cada $D(a, r) \subset \Omega$ y se sigue de esto que $f(G)$ es abierto para cada abierto $G \subset \Omega$. ■

nota: En las condiciones del teorema 5.5.2 cuando $a \neq \infty$ y $m = 1$, la prueba de 5.5.2 pone de manifiesto que cuando r es pequeño los caminos cerrados $\gamma_r(t) = f(a + re^{it})$, $t \in [0, 2\pi]$ son simples, e.d. $\operatorname{Ind}(\gamma_r, w) \in \{0, 1\}$ para todo $w \in \mathbb{C} \setminus \operatorname{Imagen}(\gamma_r)$. Más concretamente, si ρ es el supremo de los valores de $r > 0$ tales que f es inyectiva en $D(a, r)$ entonces γ_r es simple si $r \leq \rho$ y no es simple si $r > \rho$. Por ejemplo, para $f(z) = e^z$ y $a = 0$ es $\rho = \pi$. Si $2\pi > r > \pi$ se aprecia que los puntos del bucle sombreado son imágenes de dos puntos de $D(a, r)$ (uno en cada uno de los dos segmentos circulares sombreados). Con este ejemplo se aprecia claramente la necesidad de considerar $U_a = D(a, r) \cap f^{-1}(V_a)$ para conseguir la inyectividad de f.

Teorema 5.5.3 [Función inversa] *Si $\Omega \subset \mathbb{C}$ es abierto, $f \in \mathcal{H}(\Omega)$, $a \in \Omega$ y $f'(a) \neq 0$, entonces existe un entorno abierto de a, $U_a \subset \Omega$, tal que $f|U_a$ es inyectiva, $V = f(U_a)$ es abierto y la transformación inversa $g = (f|U_a)^{-1} : V \to U_a$ es holomorfa.*

DEM: Sea Ω_a la componente conexa de a en Ω. La hipótesis $f'(a) \neq 0$ implica que f no es constante sobre Ω_a y que a es un cero aislado de $f(z) - f(a)$ con multiplicidad $m = 1$. Aplicando 5.5.2 a la restricción de f al abierto conexo Ω_a se obtiene que existe un entorno abierto de a, $U_a \subset \Omega_a$, tal que $f|U_a$ es inyectiva. La prueba se concluye acudiendo a 4.2.4. ■

5.6. Ejercicios

♢ **5.1** *Si γ es un camino cerrado y regular a trozos en $A = \{z : r < |z| < R\}$ y la función $f \in \mathcal{H}(A)$ es par ($f(z) = f(-z)$ para cada $z \in A$) demuestre que $\int_\gamma f(z)dz = 0$.*
([17] ejerc. 5.5).

♢ **5.2** *Sea a un polo simple de $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ y g es holomorfa en un entorno de a, compruebe que $Res(fg, a) = g(a)Res(f, a)$.*

♢ **5.3** *Sean $f, g \in \mathcal{H}(\Omega)$ y $a \in \Omega$ tal que $f(a) \neq 0 = g(a)$. Justifique las siguientes fórmulas para el cálculo de $Res(f/g, a)$*

i) Si a es cero simple de g, $\quad Res(f/g, a) = \dfrac{f(a)}{g'(a)}.$

ii) Si a es cero doble de g, $\quad Res(f/g, a) = \dfrac{6f'(a)g''(a) - 2f(a)g'''(a)}{3g''(a)^2}.$

([17] ejerc. 6.17)

♢ **5.4** *Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$ un abierto simétrico respecto al origen y $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ una función par. Si $D^*(a, r) \subset \Omega$ y a es polo (resp. singularidad esencial) de f demuestre que $-a$ también es polo (resp. singularidad esencial) de f y que $Res(f, a) + Res(f, -a) = 0$ ([17] ejerc. 6.18).*

♢ **5.5** *Determine el tipo de singularidad que $f(z) = \dfrac{1}{1 - \sqrt[3]{2 - z}}$ tiene en $z = 1$ y calcule el residuo ([17] ejerc. 6.19).*

♢ **5.6** *Determine el tipo de singularidad presentan en $z = 0$ las funciones*

$$f(z) = \frac{1}{e^z - \dfrac{\operatorname{sen} z}{z}}; \qquad g(z) = \frac{e^{\operatorname{sen} z} - e^{\operatorname{tg} z}}{z^4}$$

y calcule el correspondiente residuo ([17] ejerc. 6.20).

♢ **5.7** *Determine las singularidades aisladas de las siguientes funciones. Indique en cada caso el tipo de singularidad y calcule el residuo.*

$$f(z) = \frac{1}{e^{z^2} - 1}; \qquad g(z) = \frac{e^{1/z^2}}{z^2 - 1};$$

([17] ejerc. 6.22).

♢ **5.8** *Para $r > 0$ sea $C_r(t) = a + re^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$. Demuestre que $Ind(C_r, z) = 1$ si $|z - a| < r$ y $Ind(C_r, z) = 0$ si $|z - a| > r$. Demuestre también que si a es interior al rectángulo cerrado R entonces $Ind(\partial R, a) = 1$. ([17] ejerc. 7.1).*

♢ **5.9** *Sea* γ *la parametrización usual de la elipse* $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$.
Utilice la integral $\displaystyle\int_\gamma \frac{dz}{z}$ *para calcular* $\displaystyle I = \int_0^{2\pi} \frac{dt}{a^2\cos^2 t + b^2 \operatorname{sen}^2 t}$ *([17] ejerc. 7.3).*

♢ **5.10** *Calcule* $\displaystyle\int_\gamma \frac{dz}{z^2+1}$ *donde* $\gamma(t) = r\cos t + i(1+r)\operatorname{sen} t$, $t \in [0, 2\pi]$, *con* $0 < r \neq 1$.

♢ **5.11** *Calcule* $\displaystyle\int_C \frac{dz}{z(z-1)(z-2)}$, *donde* $C(t) = 3e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$.

♢ **5.12** *Estudie la existencia de un logaritmo holomorfo de* $f(z) = \dfrac{z}{(z-1)(z-2)}$ *en cada una de las coronas* $A_j = \{z : j < |z| < j+1\}$, $j = 0, 1, 2$ *([17] ejerc. 7.7).*

♢ **5.13** *Se supone que* $T \subset \mathbb{C}$ *es un conjunto compacto y conexo con* $\{1, -1, 1/2\} \subset T$. *Justifique que la función*

$$f(z) = \frac{z^2 - 1}{(2z-1)^2}$$

posee un logaritmo holomorfo en $\mathbb{C} \setminus T$. *Obtenga el desarrollo de Laurent de un logaritmo holomorfo de* f *en* $\{z : |z| > R\}$, *con* $R = \max\{|z| : z \in T\}$ *([17] ejerc. 7.8).*

♢ **5.14** *Justifique que la función entera*

$$f(z) = 1 - \frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} - \frac{z^6}{7!} + \cdots$$

posee un logaritmo holomorfo en $\Omega = \mathbb{C} \setminus \{x \in \mathbb{R} : |x| \geq \pi\}$. *Obtenga su desarrollo en serie de potencias alrededor de* 0 *y el radio de convergencia del desarrollo ([17] ejerc. 7.9).*

♢ **5.15** *Demuestre que una condición necesaria y suficiente para que la función*

$$f(z) = \frac{1}{(z-a)(z-b)} \quad (a, b \in \mathbb{C},\ a \neq b)$$

tenga primitiva en un abierto $\Omega \subset \mathbb{C}$ *es que* a *y* b *estén en la misma componente conexa de* $\mathbb{C}_\infty \setminus \Omega$ *([17] ejerc. 7.10).*

♢ **5.16** *Si* $\Omega \subset \mathbb{C}$ *es abierto, demuestre que son equivalentes*

a) En Ω *se puede definir un logaritmo holomorfo de* z.

b) ∞ *y* 0 *están en la misma componente conexa de* $\mathbb{C}_\infty \setminus \Omega$.

([17] ejerc. 7.11).

♢ **5.17** *Justifique que el polinomio* $(z-1)(z-2)$ *no posee raíz cuadrada continua en el abierto* $\Omega = \{z : 1 < |z| < 2\}$ *([17] ejerc. 7.12).*

♢ **5.18** *Demuestrese que las siguientes propiedades de un abierto* $\Omega \subset \mathbb{C}$ *son equivalentes* *i) Los dos puntos* $-1, 1$ *están en la misma componente conexa de* $\mathbb{C}_\infty \setminus \Omega$.

ii) $z^2 - 1$ *tiene raíz cuadrada holomorfa en* Ω.

([17] ejerc. 7.13).

♢ **5.19** *Sea* $\Omega = \{z : |z-1| > 1/2, |z+1| > 1/2\}$. *Según la posición de* a, b *en* $\mathbb{C} \setminus \Omega$, *determine los valores de* n *para los que* $f(z) = (z-a)^3(z-b)^7$ *posee una raíz n-ésima holomorfa en* Ω *([17] ejerc. 7.14).*

♢ **5.20** *Demuestre que son equivalentes las siguientes propiedades de un abierto* $\Omega \subset \mathbb{C}$

a) Existe $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ *tal que* $\operatorname{tg} f(z) = z$ *para cada* $z \in \Omega$.

b) La función $\dfrac{1}{1+z^2}$ *tiene primitiva en* Ω.

c) La función $S(z) = \dfrac{i-z}{i+z}$ *posee logaritmo holomorfo en* Ω.

d) Los puntos $i, -i$ *están en la misma componente conexa de* $\mathbb{C}_\infty \setminus \Omega$.

([17] ejerc. 7.15).

♢ **5.21** *Demuestre que para un abierto conexo* $\Omega \subset \mathbb{C}$ *son equivalentes:*

a) Existe $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ *tal que* $\operatorname{sen} f(z) = z$ *para todo* $z \in \Omega$ *(e.d. se puede definir en* Ω *una rama holomorfa de* $\operatorname{arc\,sen} z$*).*

b) Los tres puntos ∞, 1, -1 *están en la misma componente conexa de* $\mathbb{C}_\infty \setminus \Omega$ *([17] ejerc. 7.16).*

♢ **5.22** *Sea* $\Omega = \mathbb{C} \setminus T$ *donde* $T \subset \{z : |z| < R\}$ *es cerrado y conexo. Demuestre que si* $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ *tiene primitiva en* $A = \{z : |z| > R\}$ *también la tiene en* Ω. *Obtenga que la función* $g(z) = e^{1/z^2}/(z^2-1)$ *tiene primitiva en* $\mathbb{C} \setminus [-1, 1]$ *([17] ejerc. 7.17).*

♢ **5.23** *Si* f *es holomorfa en* $\Omega \supset \{z : |z| \geq \rho\}$ *y existe el límite* $\lim_{z\to\infty} f(z) = \alpha$, *calcule*

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{C_\rho} \frac{f(z)}{z-a}dz$$

donde $|a| \neq \rho$, *y* $C_\rho(t) = \rho e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$ *(análogo a [17] ejerc. 7.18).*

♢ **5.24** *Si* f *es holomorfa en* $\mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$ *y* $\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} a_n z^n$, $\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} b_n(z-1)^n$ *son sus desarrollos de Laurent en* $\{z : |z| > 1\}$ *y* $\{z : |z-1| > 1\}$, *demuestre que* $a_{-1} = b_{-1}$.

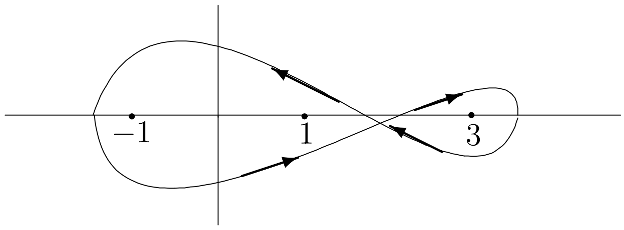
♢ **5.25** *Sea* $f(z)$ *la raíz cúbica holomorfa de* $(z-1)(z+1)^2$, *en* $A = \{z : |z| > 1\}$, *determinada por* $f(3) = 2\sqrt[3]{4}$ *Calcule el valor de la integral*

$$\int_{C_\rho} \frac{f(z)}{z-3}dz$$

donde $1 < \rho \neq 3$ *y* $C_\rho(t) = \rho e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$ *([17] ejerc. 7.19).*

$\diamondsuit$ **5.26** *i) Justifique que en el abierto* $\Omega = \mathbb{C} \setminus [-1, +1]$ *queda determinada una raíz cúbica holomorfa* f *del polinomio* $p(z) = (z-1)(z+1)^2$ *que verifica* $f(2) = \sqrt[3]{9}$.

ii) Calcule las integrales $I = \int_\gamma f(z)dz$, $J = \int_\Gamma \frac{f(z)}{z-3}dz$ *donde* Γ *es el camino indicado en la figura*



iii) Justifique que $\lim_n r^{-n} \int_{C_\rho} z^{n-1} f(z)dz = 0$ *donde* $C_\rho(t) = \rho e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$, *y* $\rho > r > 1$.
([17] ejerc. 7.20)

$\diamondsuit$ **5.27** *Se considera la función* $f(z) = \frac{1}{z-b} P\left(\frac{1}{z-a}\right)$ *donde* $b \neq a$ *y* P *es un polinomio de grado* $n \geq 1$ *con* $P(0) = 0$. *Calcule el residuo* $Res(f, a)$ *([17] ejerc. 7.25).*

$\diamondsuit$ **5.28** *Sean* $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n z^n$, *y* $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} b_n z^n$ *los desarrollos de Laurent de la función* $f(z) = 1/(\operatorname{sen} z)$ *en* $A = \{z : 0 < |z| < \pi\}$ *y* $B = \{z : \pi < |z| < 2\pi\}$.

i) Demuestre que el desarrollo de f *en* A *es de la forma*

$$\frac{1}{\sin z} = \frac{1}{z} + \frac{1}{6}z + \frac{7}{360}z^3 + \cdots + a_n z^n + \cdots \quad \textit{donde} \quad a_n = 0 \textit{ si } n \textit{ es par}$$

ii) Obtenga b_n *en términos de* a_n.

iii) Calcule $I_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_r} z^n f(z)dz$, *con* $n \in \mathbb{N}$, $\pi < r < 2\pi$, *y* $C_r(t) = re^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$.
([17] ejerc. 7.28)

$\diamondsuit$ **5.29** *Obtenga el desarrollo de Laurent de* $\pi \cot \pi z$ *en las coronas*

$$A = \{z : 0 < |z| < 1\}, \quad B = \{z : 1 < |z| < 2\}$$

([17] ejerc. 7.29)

$\diamondsuit$ **5.30** *Demuestre que, para todo* $n \in \mathbb{N}$ *la función*

$$f(z) = \frac{1}{z \operatorname{sen} \pi z}$$

no tiene primitiva en la corona $A_n = \{z : n + 1/2 < |z - 1/2| < n + 3/2\}$
([17] ejerc. 7.30)

♢ **5.31** *Se supone que* $|a| \neq 1$ *y que* $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ *con* $\Omega \supset \overline{D(0,1)}$. *Calcule el valor de*

$$I(a) = \int_C \frac{\overline{f(z)}}{z-a} dz \ , \ donde \ C(t) = e^{it}, \ t \in [0, 2\pi]$$

([17] ejerc. 7.31)

♢ **5.32** *Sea* $\Omega \subset \mathbb{C}$ *abierto,* $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ *y* $a \in \Omega$ *con* $f'(a) \neq 0$. *Entonces existe* $\overline{D(a,r)} \subset \Omega$ *tal que* $f|_{D(a,r)}$ *es inyectiva y su función inversa* $g : f(D(a,r)) \to D(a,r)$ *viene dada por la integral*

$$g(w) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_r} \frac{zf'(z)}{f(z) - w} dz$$

donde $C_r(t) = a + re^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$ *([17] ejerc. 7.33).*

♢ **5.33** *Calcule* $Ind(\gamma, 0)$ *donde* $\gamma(t) = e^{it}/(1 + 2e^{it})$, $t \in [0, 4\pi]$.

♢ **5.34** *Sea* f *una función holomorfa e inyectiva en el disco* $D(0,1)$, *con* $f(0) = 0$ *y* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k z^k$ *el desarrollo en serie de potencias, alrededor de 0, de su inversa. Pruébese que*

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_r} \frac{zf'(z)}{f(z)^{n+1}} dz = \frac{1}{2\pi n i} \int_{C_r} \frac{dz}{f(z)^n} = \frac{1}{n!} \lim_{z \to 0} D^{(n-1)}\left(\frac{z^n}{f(z)^n}\right)$$

donde $0 < r < 1$ *y* $C_r(t) = re^{it}, 0 \leq t \leq \pi$ *([17] ejerc. 7.35).*

♢ **5.35** *Demuestre que la función* $f(z) = \dfrac{\operatorname{sen} \pi z}{z^3 - 1}$ *posee un logaritmo holomorfo en la corona* $\{z : 1 < |z| < 2\}$ *y una raíz cuadrada holomorfa en la corona* $\{z : 2 < |z| < 3\}$. *([17] ejerc. 7.37).*

♢ **5.36** *Calcule la integral* $I = \int_\gamma f(z) dz$ *donde*

$$f(z) = z^2 \cos \frac{1}{z-1}, \quad \gamma(t) = \frac{2e^{it}}{1 + 2e^{it}}, \quad t \in [0, 2\pi].$$

([17] ejerc. 7.38)

♢ **5.37** *Demuestre que el camino* $\gamma(t) = \cos(3e^{it})$, $t \in [0, 2\pi]$, *no pasa por* $z = 2$ *y calcule el valor de la integral*

$$\int_\gamma (z-1)^2 e^{1/(z-2)} dz$$

♢ **5.38** *Demuestre que la función* $(z^3 - 1)^{-1}(z - 3)^{-1}$ *posee una raiz cúbica holomorfa* $g(z)$ *en* $\{z : 1 < |z| < 3\}$. *Calcule* $\int_C g(z) dz$ *donde* $C(t) = 2e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$.

♢ **5.39** *Sea* $T \subset \mathbb{C}$ *compacto conexo y* $a, b, c \in T$ *tres puntos distintos. Obtenga una condición necesaria y suficiente para que la función* $(z-a)^p(z-b)^q(z-c)^m$, $(m, p, q \in \mathbb{Z})$ *posea un logaritmo holomorfo en* $\mathbb{C} \setminus T$.

$\diamondsuit$ **5.40** *Sea* $f \in \mathcal{H}(D(0,r))$ *con* $r > 1$. *Si* $|f(z)| < 1$ *cuando* $|z| = 1$ *demuestre que existe* $a \in D(0,1)$ *tal que* $f(a) = a$ *y* $f'(a) \neq 1$ *([17] ejerc. 7.46).*

$\diamondsuit$ **5.41** *Sea* $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ *donde* $\overline{D(0,1)} \subset \Omega$. *Se supone que* $|f(z) - z| < |z|$ *cuando* $|z| = 1$. *Demuestre que* f *tiene un cero en* $D(0,1)$ *y* $|f'(\frac{1}{2})| \leq 4$

$\diamondsuit$ **5.42** *Determinación del número de ceros que tiene cada uno de los siguientes polinomios en el abierto indicado:*

a) $z^8 - 4z^5 + z^2 - 1$ *en* $D(0,1)$;

b) $z^5 - z + 16$ *en* $\{z : 1 < |z| < 2\}$;

c) $z^4 + 26z + 2$ *en* $\{z : \frac{3}{2} < |z| < 3\}$;

([17] ejerc. 7.47)

$\diamondsuit$ **5.43** *Determine el número de ceros que cada uno de los siguientes polinomios tiene en los abiertos que se indican:*

a) $z^8 - 5z^5 - 2z + 1$ *en* $D(0,1)$;

b) $z^3 + 13z^2 + 15$ *en* $\{z : 1 < |z| < 2\}$ *y en* $\{z : 2 < |z| < 5/2\}$.

$\diamondsuit$ **5.44** *¿Cuantas soluciones tiene la ecuación* $e^z - 4z^n = 1$ *en el disco* $D(0,1)$*?*

$\diamondsuit$ **5.45** *Si* $|a| > e$ *y* $n \in \mathbb{N}$, *determine el número de soluciones de la ecuación* $e^z = az^n$, *en el disco D(0,1) y en el rectángulo* $\{x + iy : |x| < \mu, |y| < \rho\}$, *donde* $1 \leq \mu < \log|a|$, *y* $1 < \rho$.

$\diamondsuit$ **5.46** *Si* $\alpha \in \mathbb{R}$ *y* $\alpha > 1$ *entonces la ecuación* $e^{-z} + z = \alpha$ *tiene una única solución en el semiplano* $\{z : \operatorname{Re} z > 0\}$ *([17] ejerc. 7.49).*

$\diamondsuit$ **5.47** *Si* $|a| < 1$ *y* $p \in \mathbb{N}$ *demuestre que la ecuación* $(z-1)^p e^z = a$ *tiene exactamente* p *soluciones en* $\{z : \operatorname{Re} z > 0\}$, *y que todas ellas están en el disco* $D(1,1)$.
([17] ejerc. 7.50).

$\diamondsuit$ **5.48** *Demuestre que desde un valor de* n *en adelante el polinomio*

$$1 + z + \frac{1}{2!}z^2 + ... + \frac{1}{n!}z^n$$

no tiene ceros en el disco $D(0,R)$.

Capítulo 6

Aplicaciones

6.1. Cálculo de integrales

El teorema de los resíduos se puede aplicar para calcular el valor de ciertas integrales. Se exponen a continuación algunos tipos de integrales que se pueden evaluar utilizando este teorema:

Proposición 6.1.1 *Sea $\varphi(t) = R(\cos t, \operatorname{sen} t)$ continua en $[0, 2\pi]$, donde $R(z, w)$ es una función racional. Si la función racional*

$$f(z) = R\left(\frac{1}{2}(z + 1/z), \frac{1}{2i}(z - 1/z)\right)\frac{1}{iz}$$

no tiene polos en la circunferencia $C(t) = e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$, se verifica

$$\int_0^{2\pi} \varphi(t)dt = \int_C f(z)dz = \sum_{|a|<1} Res(f, a)$$

Utilizando este resultado se pueden calcular las integrales de los ejercicios 6.1 y 6.2

Proposición 6.1.2 *Sean P, Q polinomios con grado(Q) − grado$(P) \geq 2$. Si $f = P/Q$ no tiene polos en el eje real, la siguiente integral impropia es convergente y*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 2\pi i \sum_{\operatorname{Im} a>0} Res(f, a)$$

DEM: En virtud de la hipótesis, $z^2 f(z)$ tiene límite finito cuando $z \to \infty$ y se sigue de esto que existen $\rho > 0$ y $M > 0$ tales que $|z^2 f(z)| \leq M$ si $|z| \geq \rho$.

Como $|f(x)| \leq M/x^2$ si $|x| \geq \rho$, la convergencia de la integral se obtiene por el criterio de comparación teniendo en cuenta la convergencia de las integrales $\int_{-\infty}^{-\rho} x^{-2}dx$, $\int_{\rho}^{+\infty} x^{-2}dx$.

Cuando $R > \rho$ todos los polos de f están contenidos en $D(0, R)$ y si Γ_R es el borde de $\{z : |z| \leq R, \operatorname{Im} z \geq 0\}$ recorrido en sentido positivo, aplicando el teorema de los residuos se obtiene

$$2\pi i \sum_{\operatorname{Im} a>0} \operatorname{Res}(f, a) = \int_{\Gamma_R} f(z)dz = I(R) + J(R)$$

donde
$$I(R) = \int_{-R}^{+R} f(x)dx, \quad J(R) = \int_0^{\pi} f(Re^{it})iRe^{it}dt$$
Como $|f(Re^{it})| \leq M/R^2$ resulta $|J(R)| \leq \pi M/R$, luego $\lim_{R \to +\infty} J(R) = 0$ y así
$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \lim_{R \to +\infty} I(R) = \lim_{R \to +\infty} \int_{\Gamma_R} f(z)dz = 2\pi i \sum_{\operatorname{Im} a>0} \operatorname{Res}(f,a)$$

■

Proposición 6.1.3 *Sean P, Q polinomios con grado$(Q) -$ grado$(P) \geq 1$. Si $f = P/Q$ no tiene polos en el eje real, la siguiente integral impropia converge y su valor es*
$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{ix}dx = 2\pi i \sum_{\operatorname{Im} a>0} Res(f(z)e^{iz}, a)$$

DEM: Por hipótesis $zf(z)$ tiene límite finito cuando $z \to \infty$. Lo mismo le ocurre a $z^2 f'(z)$, ya que $f' = (PQ' - QP')/Q^2$ con grado$(PQ' - QP') -$ grado$(Q^2) \geq 2$. Por lo tanto existen $\rho > 0$ y $M > 0$ tales que
$$|z| \geq \rho \Rightarrow |zf(z)| \leq M, \quad |z^2 f'(z)| \leq M$$
La desigualdad $|f'(x)| \leq M/x^2$ válida para $|x| \geq \rho$ garantiza la convergencia absoluta de la integral impropia $\int_\rho^{+\infty} f'(x)e^{ix}dx$. Efectuando una integración por partes, y teniendo en cuenta que $\lim_{y \to +\infty} f(y) = 0$, se obtiene que la integral
$$\int_\rho^y f(x)e^{ix}dx = if(\rho)e^{i\rho} - if(y)e^{iy} - \int_\rho^y f'(x)e^{ix}dx$$
tiene límite cuando $y \to +\infty$. Esto prueba que la integral $\int_\rho^{+\infty} f(x)e^{ix}dx$ es convergente. Análogamente se prueba la convergencia de $\int_{-\infty}^{-\rho} f(x)e^{ix}dx$. Teniendo en cuenta que $f(x)e^{ix}$ es continua en $[-\rho, \rho]$ se concluye que $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{ix}dx$ es convergente.

Todos los polos de $f(z)e^{iz}$ están contenidos en $D(0, R)$ y si Γ_R es el borde de del semidisco $\{z : |z| \leq R, \operatorname{Im} z \geq 0\}$ recorrido en sentido positivo, en virtud del teorema de los residuos
$$2\pi i \sum_{\operatorname{Im} a>0} \operatorname{Res}(f(z)e^{iz}, a) = \int_{\Gamma_R} f(z)e^{iz}dz = I(R) + J(R)$$
donde
$$I(R) = \int_{-R}^{+R} f(x)e^{ix}dx, \quad J(R) = \int_0^{\pi} f(Re^{it})\exp(iRe^{it})iRe^{it}dt$$
Cuando $0 \leq t \leq \pi$ se verifica $|f(Re^{it})\exp(iRe^{it})iRe^{it}| \leq Me^{-R\operatorname{sen} t}$ luego
$$|J(R)| \leq M \int_0^{\pi} e^{-R\operatorname{sen} t}dt = \alpha(R)$$

Basta probar que $\alpha(R)$ tiende hacia 0 cuando $R \to \infty$ para deducir que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{ix}dx = \lim_{R \to +\infty} I(R) = 2\pi i \sum_{\operatorname{Im} a>0} \operatorname{Res}(f(z)e^{iz}, a)$$

Para demostrar que $\alpha(R)$ tiende hacia 0 basta observar que cuando $0 < \delta < \pi/2$ el mayor valor de $e^{-R\operatorname{sen} t}$ en el intervalo $\delta \leq t \leq \pi - \delta$ es $e^{-R\operatorname{sen}\delta}$, con lo cual

$$\int_0^{\pi} e^{-R\operatorname{sen} t}dt \leq 2\delta + \int_{\delta}^{\pi-\delta} e^{-R\operatorname{sen}\delta}dt < 2\delta + \pi e^{-R\operatorname{sen}\delta}$$

Dado $\epsilon > 0$ y $0 < \delta < \min\{\epsilon/4, \pi/2\}$, existe $C > 0$ tal que $R > C \Rightarrow \pi e^{-R\operatorname{sen}\delta} < \epsilon/2$ luego

$$R > C \Rightarrow \int_0^{\pi} e^{-R\operatorname{sen} t}dt \leq 2\delta + \epsilon/2 \leq \epsilon/2 + \epsilon/2 = \epsilon$$

■

Las integrales del ejercicio 6.8 se pueden calcular usando la proposición anterior.

En las condiciones de la proposición 6.1.3, si se permite que f tenga polos simples en el eje real, se puede obtiene un resultado similar usando el siguiente

Lema 6.1.4 *Sea a un polo simple de f y $C_\epsilon(t) = a + \epsilon e^{it}$, $\alpha \leq t \leq \beta$, un arco de circunferencia de amplitud $\beta - \alpha \leq 2\pi$, centrado en a. Entonces se verifica*

$$\lim_{\epsilon \to 0} \int_{C_\epsilon} f(z)dz = i(\beta - \alpha)Res(f, a)$$

En el caso particular de que en el eje real hay un sólo polo simple, situado en el origen, se tiene:

Proposición 6.1.5 *Sean P, Q polinomios tales que grado(Q) − grado$(P) \geq 1$. Se supone que $f = P/Q$ no tiene polos en el eje real, excepto en el origen, donde puede tener un polo simple. Entonces, para todo $\epsilon > 0$, las integrales*

$$\int_{-\infty}^{-\epsilon} f(x)e^{ix}dx, \quad \int_{\epsilon}^{+\infty} f(x)e^{ix}dx$$

son convergentes y su suma converge, cuando $\epsilon \to 0$, hacia

$$\lim_{\epsilon \to 0} \int_{|x| \geq \epsilon} f(x)e^{ix}dx = 2\pi i \sum_{\operatorname{Im} a>0} Res(f(z)e^{iz}, a) + \pi i Res(f(z)e^{iz}, 0)$$

NOTA *Puede ocurrir que $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{ix}dx$ no sea convergente pero que exista el límite anterior, llamado valor principal de la integral, denotado v. p. $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{ix}dx$.*

DEM: El razonamiento efectuado en la proposición 6.1.2 sirve para demostrar que para cada $\epsilon > 0$ son convergentes las integrales

$$\int_{-\infty}^{-\epsilon} f(x)e^{ix}dx, \quad \int_{\epsilon}^{+\infty} f(x)e^{ix}dx.$$

Cuando $R > 0$ es suficientemente grande y $\epsilon > 0$ suficientemente pequeño todos los polos que tiene $f(z)e^{iz}$ en el semiplano $\operatorname{Re} z > 0$ están contenidos en $\{z : \epsilon < |z| < R\}$. Si $\Gamma_{\epsilon,R}$ es el borde de $\{z : \epsilon \le |z| \le R, \ \operatorname{Im} z \ge 0\}$ recorrido en sentido positivo, y $S_r(t) = re^{it}$, $t \in [0, \pi]$, aplicando el teorema de los residuos se obtiene

$$2\pi i \sum_{\operatorname{Im} a>0} \operatorname{Res}(f, a) = \int_{\Gamma_{\epsilon,R}} f(z)e^{iz}dz = I(\epsilon, R) + J(R) - \int_{S_\epsilon} f(z)e^{iz}dz$$

donde

$$I(\epsilon, R) = \int_{-R}^{-\epsilon} f(x)e^{ix} + \int_{\epsilon}^{R} f(x)e^{ix}, \quad J(R) = \int_{S_R} f(z)e^{iz}dz$$

Razonando como en la proposición 6.1.3 se obtiene que $\lim_{R \to +\infty} J(R) = 0$ luego

$$\int_{-\infty}^{-\epsilon} f(x)e^{ix}dx + \int_{\epsilon}^{+\infty} f(x)e^{ix}dx = 2\pi i \sum_{\operatorname{Im} a>0} \operatorname{Res}(f, a) + \int_{S_\epsilon} f(z)e^{iz}dz$$

Si $f(z)e^{iz}$ tiene un polo simple en $z = 0$ con resíduo μ, en virtud del lema 6.1.4

$$\lim_{\epsilon \to 0} \int_{S_\epsilon} f(z)e^{iz}dz = \pi i\mu$$

(lo mismo ocurre si 0 no es polo de f, pues en ese caso $\mu = 0$). Se obtiene así que

$$\lim_{\epsilon \to 0} \left(\int_{-\infty}^{-\epsilon} + \int_{\epsilon}^{+\infty} \right) f(x)e^{ix}dx = 2\pi i \sum_{\operatorname{Im} a>0} \operatorname{Res}(f, a) + \pi i\mu$$

■

Con el método expuesto en la proposición 6.1.5 se puede calcular la integral del ejercicio 6.7.

Proposición 6.1.6 *Sean P, Q son polinomios tales que grado(Q) − grado$(P) \ge 2$. Se supone que $f = P/Q$ no tiene polos en el eje real positivo, aunque puede tener un polo simple en el origen. Entonces, si $0 < \alpha < 1$, la siguiente integral converge y su valor es*

$$\int_0^{+\infty} f(x)x^\alpha dx = \frac{4\pi i}{1 - e^{2\pi\alpha i}} \sum_{\operatorname{Im} a>0} Res(f(z^2)z^{2\alpha+1}, a)$$

NOTA: *Se puede probar que la suma de los residuos de $z^{2\alpha+1}f(z^2)$ en el semiplano $\operatorname{Im} z > 0$ coincide con la suma de los residuos de $z^\alpha f(z)$ en todo el plano (véase [17] ejerc. 7.22).*

DEM: En virtud de la hipótesis $z^2 f(z)$ tiene límite finito cuando $z \to \infty$, luego existen $\rho > 0$ y $M > 0$ tales que $|z| \geq \rho \Rightarrow |z^2 f(z)| \leq M$. La convergencia absoluta de la integral se obtiene comparándola con $\int_\rho^{+\infty} x^{\alpha-2} dx < +\infty$. Con el cambio de variable $x = t^2$ la integral del enunciado se transforma en

$$I = 2\int_0^{+\infty} f(t^2) t^{2\alpha+1} dt$$

Consideremos la rama holomorfa de $z^{2\alpha+1}$ definida en $\Omega = \mathbb{C} \setminus \{yi : y \leq 0\}$ por $e^{(2\alpha+1)L(z)}$ donde $L \in \mathcal{H}(\Omega)$ es la rama de $\log z$ determinada por $-\frac{\pi}{2} < \operatorname{Im} L(z) < \frac{3\pi}{2}$.

Cuando $R > 0$ es suficientemente grande y $\epsilon > 0$ es suficientemente pequeño, todos los polos que tiene $g(z) = f(z^2) e^{(2\alpha+1)L(z)}$ en el semiplano $\operatorname{Im} z > 0$ están contenidos en el recinto $\{z : \epsilon < |z| < R, \ \operatorname{Im} z > 0\}$. Si S_r denota la semicircunferencia $S_r(t) = re^{it}$, $t \in [0, \pi]$, aplicando el teorema de los residuos se obtiene

$$2\pi i \sum_{\operatorname{Im} a > 0} \operatorname{Res}(g, a) = \int_{-R}^{-\epsilon} g(x)dx + \int_\epsilon^R g(x)dx + \int_{S_R} g(z)dz - \int_{S_\epsilon} g(z)dz \tag{6.1}$$

Las integrales $J(R) = \int_{S_R} g(z)dz$, $J(\epsilon) = \int_{S_\epsilon} g(z)dz$ tienden hacia 0 cuando $R \to +\infty$ y $\epsilon \to 0$. En efecto, cuando $R^2 > \rho$, sobre la imagen de S_R se verifica

$$|g(z)| = |f(z^2) e^{(2\alpha+1)L(z)}| \leq \frac{M}{R^4} R^{2\alpha+1} = MR^{2\alpha-3}$$

luego $|J(R)| \leq \pi M / R^{2\alpha-2}$ con $2\alpha - 2 < 0$ y se obtiene $\lim_{R \to +\infty} J(R) = 0$.

Por otra parte, teniendo en cuenta que f es holomorfa o presenta un polo simple en $z = 0$, se puede asegurar que existen $r, C > 0$ tales que $0 < |z| < r \Rightarrow |zf(z)| < C$. Si $0 < \epsilon^2 < r$, sobre la imagen de S_ϵ se cumple

$$|g(z)| = |f(z^2) z^{2\alpha+1}| \leq \frac{C}{\epsilon^2} \epsilon^{2\alpha+1} = C\epsilon^{2\alpha-1}$$

luego $|J(\epsilon)| \leq \pi\epsilon C \epsilon^{2\alpha-1} = \pi C \epsilon^{2\alpha}$ y se obtiene que $\lim_{\epsilon \to 0} J(\epsilon) = 0$.

Cuando $\epsilon \to 0$ y $R \to +\infty$ la suma de integrales

$$\int_{-R}^{-\epsilon} g(x)dx + \int_\epsilon^R g(x)dx = \int_{-R}^{-\epsilon} f(x^2)|x|^{2\alpha+1} e^{(2\alpha+1)\pi i} dx + \int_\epsilon^R f(x^2) x^{2\alpha+1} dx$$

$$= (1 - e^{2\pi i \alpha}) \int_\epsilon^R f(x^2) x^{2\alpha+1} dx$$

converge hacia $(1 - e^{2\pi i\alpha}) I/2$ y pasando al límite en la igualdad 6.1 se obtiene

$$\int_0^{+\infty} f(x) x^\alpha dx = \frac{4\pi i}{1 - e^{2\pi\alpha i}} \sum_{\operatorname{Im} a > 0} \operatorname{Res}(f(z^2) z^{2\alpha+1}, a)$$

■

Con el método expuesto en la última proposición 6.1.5 se puede calcular la integral del ejercicio 6.6.

6.2. Sumación de series

El teorema de los residuos se puede utilizar para sumar series. Se exponen a continuación algunos tipos de series cuyas sumas se pueden calcular con este método.

Llamaremos *función sumadora* a una función meromorfa $\alpha \in \mathcal{M}(\mathbb{C})$ con polos $\mathcal{P}(\alpha) = \mathbb{Z}$, todos simples, que permanece acotada sobre $\cup_{n\in\mathbb{N}}\{z : |z| = R_n\}$, donde R_n es una sucesión que verifica $n < R_n < n+1$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Con el siguiente lema se justifica que las funciones $\alpha(z) = \pi \cot \pi z$ y $\beta(z) = \pi/\operatorname{sen} \pi z$ cumplen las condiciones anteriores con $R_n = n + 1/2$ siendo $\operatorname{Res}(\alpha, k) = 1$ y $\operatorname{Res}(\beta, k) = (-1)^{|k|}$ para todo $k \in \mathbb{Z}$.

Lema 6.2.1 *Sea A_ϵ es el complementario en $\mathbb{C}$ de la unión de los discos $D(n\pi, \epsilon)$, $n \in \mathbb{Z}$, donde se supone $0 < \epsilon < 1$. Entonces existe una constante $C_\epsilon > 0$ tal que $|\operatorname{sen} z| \geq C_\epsilon$, y $|\operatorname{tg} z| \geq C_\epsilon$ para todo $z \in A_\epsilon$.*

DEM: Véase el ejercicio 3.16 de [17] ■

En la demostración del apartado b) de la proposición 6.2.3 se usa el siguiente resultado, ya considerado en el ejercicio 5.4

Lema 6.2.2 *Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$ un abierto simétrico respecto al origen y $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ una función par. Si $D^*(a, r) \subset \Omega$ y a es polo (resp. singularidad esencial) de f entonces $-a$ también es polo (resp. singularidad esencial) de f y se cumple $Res(f, a) + Res(f, -a) = 0$.*

DEM: Véase el ejercicio 6.18 de [17]. ■

Proposición 6.2.3 *Sea $\alpha \in \mathcal{M}(\mathbb{C})$ una función sumadora y $\alpha_k = Res(\alpha, k)$, $k \in \mathbb{Z}$.*

Si P, Q son polinomios y $f = P/Q$ no tiene polos en $\mathbb{Z}$, cada una de las condiciones

a) $grado(Q) - grado(P) \geq 2$;

b) $grado(Q) - grado(P) = 1$ y la función α es impar;

implica

$$\lim_n \sum_{|k|\leq n} \alpha_k f(k) = -\sum_{a\in\mathcal{P}(f)} Res(\alpha f, a)$$

Si se cumple a) y la sucesión α_k es acotada entonces la serie $\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \alpha_k f(k)$ es absolutamente convergente.

NOTA: *Puede ocurrir que exista $\lim_n \sum_{|k|\leq n} \alpha_k f(k)$ aunque la serie $\sum_{-\infty}^{+\infty} \alpha_k f(k)$ no sea convergente. En ese caso se define el valor principal de la suma:*

$$v.p. \sum_{k=-\infty}^{\infty} \alpha_k f(k) = \lim_n \sum_{|k|\leq n} \alpha_k f(k)$$

que coincide con la suma de la serie convergente $\alpha_0 f(0) + \sum_{n=1}^{+\infty} (\alpha_k f(k) + \alpha_{-k} f(-k))$.

DEM: La función meromorfa αf tiene polos en los polos de f y en los enteros que no son ceros de f. Cada $k \in \mathbb{Z}$ es polo simple (o singularidad evitable) de αf con resíduo $\text{Res}(\alpha f, k) = \alpha_k f(k)$ (es singularidad evitable cuando $f(k) = 0$).

Si n es suficientemente grande $\mathcal{P}(f) \subset \{z : |z| < R_n\}$ y la circunferencia $C_n(t) = R_n e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$ no pasa por los polos de αf. Aplicando el teorema de los residuos

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{C_n} \alpha(z)f(z)dz = \sum_{|k|\le n} \alpha_k f(k) + \sum_{a\in\mathcal{P}(f)} \text{Res}(\alpha f, a)$$

Bastará probar que si se cumple una de las dos condiciones del enunciado entonces la integral $\int_{C_n} \alpha(z)f(z)dz$ tiende hacia 0 cuando $n \to \infty$. Por hipótesis existe una constante $M > 0$ tal que para cada $n \in \mathbb{N}$ se verifica

$$|z| = R_n \ \Rightarrow |\alpha(z)| \le M$$

Cuando se cumple a) existe y es finito el límite $\lim_{z\,\to\,\infty} z^2 f(z)$ luego existen $C > 0$ y $R > 0$ tales que

$$|z| \ge R \ \Rightarrow \ |z^2 f(z)| \le C$$

Por lo tanto, cuando $R_n > R$ se verifica

$$|z| = R_n \ \Rightarrow \ |\alpha(z)f(z)| \le \frac{MC}{R_n^2}$$

y se obtiene

$$\left|\int_{C_n} \alpha(z)f(z)dz\right| \le 2\pi R_n \frac{MC}{R_n^2} = 2\pi\frac{MC}{R_n}, \quad \text{luego} \ \lim_n \int_{C_n} \alpha(z)f(z) = 0.$$

Si $B = \sup_{k\in\mathbb{Z}} |\alpha_k| < +\infty$ entonces $|\alpha_k f(k)| \le BC/|k|^2$ cuando $|k| > R$ luego $\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \alpha_k f(k)$ es absolutamente convergente.

Cuando se cumple b) el desarrollo de Laurent de f en un entorno de ∞ es de la forma

$$f(z) = \frac{a_{-1}}{z} + \frac{a_{-2}}{z^2} + \cdots + \frac{a_{-n}}{z^n} + \cdots$$

Si $g(z) = f(z) - \dfrac{a_{-1}}{z}$ es claro que existen $A > 0$ y $\rho > 0$ tales que

$$|z| \ge \rho \Rightarrow |g(z)| \le A/|z|^2$$

y razonando como antes se obtiene que $\lim_n \int_{C_n} \alpha(z)g(z) = 0$. Como la función $\alpha(z)/z$ es par, según el lema 6.2.2 se cumple

$$\text{Res}(\alpha(z)/z, k) + \text{Res}(\alpha(z)/z, -k) = \text{Res}(\alpha(z)/z, 0) = 0$$

luego, en virtud del teorema de los residuos, para todo $n \in \mathbb{N}$ se cumple

$$\int_{C_n} \alpha(z)f(z)dz - \int_{C_n} \alpha(z)g(z)dz = a_{-1}\int_{C_n} \frac{\alpha(z)}{z}dz = 0$$

y se concluye que

$$\lim_n \int_{C_n} \alpha(z)f(z) = 0.$$

■

Ejemplo 6.2.4 *Utilizando la función sumadora* $\alpha(z) = \pi \cot \pi z$ *y la función racional*

$$R(z) = \frac{a}{a^2 + 4\pi^2 z^2}$$

se obtiene la suma de la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2z}{z^2 + 4\pi^2 n^2} = \frac{1}{e^z - 1} - \frac{1}{z} + \frac{1}{2}$$

DEM: Los polos, simples, de R son $\{p, -p\}$, donde $p = ia/(2\pi)$. Además

$$\operatorname{Res}(\alpha R, p) = \lim_{z \to p} (z-p)R(z)\alpha(z) = \lim_{z \to p} \frac{(z-p)a}{(z-p)(z+p)4\pi^2}\pi \cot \pi z =$$

$$= \frac{a \cot \pi p}{2p4\pi} = \frac{\cot(ia/2)}{4i} = \frac{1+e^a}{4(1-e^a)}$$

Es fácil ver que $\operatorname{Res}(\alpha R, -p) = \operatorname{Res}(\alpha R, p)$ luego, en virtud de la proposición 6.2.3

$$\lim_n \sum_{|k| \leq n} R(n) = -2\operatorname{Res}(\alpha R, p) = \frac{e^a + 1}{2(e^a - 1)} = \frac{1}{2} + \frac{1}{e^a - 1}$$

es decir

$$\frac{1}{a} + 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a}{4\pi^2 n^2 + a^2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{e^a - 1}$$

Se obtiene así la suma de la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2z}{z^2 + 4\pi^2 n^2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{e^z - 1} - \frac{1}{z}$$

■

Utilizando el método expuesto en la proposición 6.2.3, se pueden calcular las sumas consideradas en ejercicio 6.19. En el ejercicio 6.20 se indica como se puede utilizar el teorema de los residuos para calcular las sumas de las series

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{2m}}, \quad m = 1, 2, 3, 4 \cdots$$

(véase [17] ejerc. 8.21).

6.3. Ejercicios

♢ **6.1** *Calcule la integral* $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{dx}{a + \operatorname{sen}^2 x}$ *donde* $a > 0$. *([17] ejerc. 8.1).*

♢ **6.2** *Calcule la integral* $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{dx}{1 - 2a\cos x + a^2}$ *donde* $|a| \neq 1$ *([17] ejerc. 8.2).*

♢ **6.3** *Justifique la convergencia de la siguiente integral impropia y calcule su valor:*

$$\int_{-1}^{+1} \frac{dx}{(x-a)\sqrt{1-x^2}}, \qquad a \in \mathbb{C} \setminus [-1, 1].$$

([17] ejerc. 8.3)

♢ **6.4** *Calcule* $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2 - x + 2}{(x^4 + 10x^2 + 9)^3} dx$ *([17] ejerc. 8.4),*

♢ **6.5** *Calcule* $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x^2 dx}{(x^2 + a^2)^3}$, *donde* $a > 0$ *([17] ejerc. 8.5).*

♢ **6.6** *Justifique la convergencia y calcule el valor de la integral* $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x^a}{x+b} dx$, *donde* $-1 < a < 0$, $b > 0$ *([17] ejerc. 8.6).*

♢ **6.7** *Justifique la convergencia y calcule el valor de la integral*

$$\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x} dx$$

([17] ejerc. 8.7).

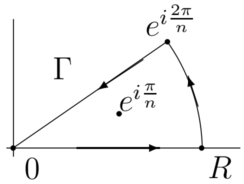
♢ **6.8** *Calcule las integrales* $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\cos bt}{t^2 + a^2} dt$, $\quad J = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t \operatorname{sen} t}{t^2 + a^2} dt$, *donde* $a, b > 0$ *([17] ejerc. 8.8).*

♢ **6.9** *Compruebe que la integral impropia*

$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos ax - \cos bx}{x^2} dx \qquad a, b \in \mathbb{R}$$

es convergente y calcule su valor ([17] ejerc. 8.9).

♢ **6.10** *Considerando el camino* Γ *indicado en la figura calcule la integral* $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1 + x^n}$, *donde* $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$ *([17] ejerc. 8.10).*



♢ **6.11** *Aplicando el teorema de los resíduos a la función* $(e^{2iz}-1)/z^2$ *calcule*

$$\int_0^{+\infty}\left(\frac{\operatorname{sen} x}{x}\right)^2 dx$$

([17] ejerc. 8.11)

♢ **6.12** *Compruebe que la integral impropia*

$$\int_0^{+\infty}\frac{\log x}{(1+x^2)^2}dx$$

es convergente y calcule su valor utilizando el teorema de los resíduos ([17] ejerc. 8.12).

♢ **6.13** *Compruebe que es convergente la integral impropia*

$$\int_0^{+\infty}\frac{x-\operatorname{sen} x}{x^3(x^2+a^2)}dx \qquad (a>0)$$

y calcule su valor considerando $f(z)=[z+i(e^{iz}-1)]/[z^3(z^2+a^2)]$ *([17] ejerc. 8.13).*

♢ **6.14** *Aplicando el teorema de los resíduos a la función* $f(z)=(1-e^{2imz})z^{-2}(z^2+a^2)^{-1}$ *obtenga la igualdad*

$$\int_0^{+\infty}\frac{\operatorname{sen}^2 mx}{x^2(x^2+a^2)}dx=\pi\frac{e^{-2am}+2am-1}{4a^3}, \qquad \textit{donde}\ \ a>0,\ m>0.$$

([17] ejerc. 8.14)

♢ **6.15** *Justifique la converjencia de la integral impropia*

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{ax}}{1+e^x}dx, \quad \textit{con} \quad 0<a<1,$$

y calcule su valor aplicando el teorema de los resíduos a una integral sobre el borde del rectángulo $[-R,R]\times[0,2\pi]$*([17] ejerc. 8.15).*

♢ **6.16** *Aplicando el teorema de los resíduos a la integral de* $f(z)=e^{iz}/(e^z+e^{-z})$ *sobre el borde del rectángulo* $A=\{x+iy:|x|<R,\ 0<|y|<\pi\}$ *calcule el valor de*

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos x}{e^x+e^{-x}}dx$$

([17] ejerc. 8.16)

♢ **6.17** *Justifique la convergencia de la integral impropia*

$$\int_0^{+\infty}\frac{\operatorname{sen} x}{\operatorname{sh} x}dx$$

y calcule su valor aplicando el teorema de los resíduos a la integral de $e^{iz}/\operatorname{sh} z$ *sobre el borde del recinto*

$$\{z=x+iy:|x|<R,\quad 0<y<2\pi,\quad |z|>\epsilon,\quad |z-2\pi i|>\epsilon\}$$

([17] ejerc. 8.17)

♢ **6.18** *Aplicando el teorema de los resíduos a la integral de $f(z) = z/(a - e^{-iz})$ sobre el borde de $A = \{x + iy : |x| < \pi,\ 0 < y < R\}$, calcule el valor de*

$$\int_0^\pi \frac{x \operatorname{sen} x}{1 - 2a\cos x + a^2} dx, \quad \textit{con } 0 < a \neq 1$$

([17] ejerc. 8.18)

♢ **6.19** *Utilice las funciones sumadoras $\pi \cot \pi z$ y $\pi / \operatorname{sen} \pi z$ para calcular las siguientes sumas, donde $a \notin \mathbb{Z}$.*

a) $\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(a+n)^2}; \quad \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(a+n)^2};$

b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^2+a^2}; \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2+a^2};$

c) $\displaystyle v.p. \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{a-n}; \quad v.p. \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{(-1)^{|n|}}{a-n}.$

([17] ejerc. 8.20)

♢ **6.20** *Considerando el ejercicio 2.19 y la integral*

$$\int_{C_n} \frac{\pi \operatorname{cotg} \pi z}{z^{2m}} dz, \quad \textit{con } C_n(t) = (n + 1/2)e^{it},\ t \in [0, 2\pi]$$

calcule las sumas de las series $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{2m}}$, $m = 1, 2, 3, 4$ *([17] ejerc. 8.21).*

♢ **6.21** *Demuestre que*

$$\frac{\pi^2}{\operatorname{sen}^2 \pi z} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(z-n)^2}$$

y deduzca de ello que $\displaystyle\frac{\pi^2}{6} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ *(véase [17] ejerc. 8.22).*

♢ **6.22** *Este problema muestra cómo se puede aplicar el teorema de los residuos para sumar una serie de Fourier $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(n)e^{in\xi}$ donde f es una función racional con un cero de orden ≥ 2 en el infinito, sin polos en $\mathbb{Z}$.*

i) Sea $\alpha(z) = 2\pi i e^{i\xi z}/(e^{2\pi i z} - 1)$, con $0 < \xi < 2\pi$, y $Q_n = [-r_n, r_n] \times [-r_n, r_n]$ donde $r_n = n + 1/2$. Demuestre que existe $M > 0$ tal que $|\alpha(z)| \leq M$ para todo z en la unión de los bordes de Q_n, $n \in \mathbb{N}$.

ii) See $f \in \mathcal{M}(\mathbb{C})$, con $\mathcal{P}(f)$ finito y disjunto de $\mathbb{Z}$, una función meromorfa tal que existe $\lim_{z\to\infty} z^2 f(z) \in \mathbb{C}$. Considerando la integral de $f(z)\alpha(z)$ sobre el borde de Q_n establezca la igualdad

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(n)e^{in\xi} = -\sum_{a\in\mathcal{P}(f)} Res(\alpha f, a)$$

iii) Como aplicación, calcule la suma de la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n\xi}{n^2+a^2}$, *con* $a\in\mathbb{R}$.

♢ **6.23** *Aplicando el teorema de los resíduos a la integral de la función*

$$\frac{\operatorname{sen} z}{(z-a)\cos^2 z}$$

sobre el borde del cuadrado $[-m\pi, m\pi]\times[-m\pi, m\pi]$, *establezca la igualadad*

$$\frac{\operatorname{sen} a}{\cos^2 a}=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(a-(n+\frac{1}{2})\pi)^2}.$$

♢ **6.24** *Considerando la integral de la función*

$$\frac{\pi\operatorname{sen} az}{z^3\operatorname{sen}\pi z}\quad \textit{con } a\in[-\pi,\pi]$$

a lo largo del borde del cuadrado $[-r_m, r_m]\times[-r_m, r_m]$, $r_m=m+1/2$, *demuestre que*

$$\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\frac{\operatorname{sen} an}{n^3}=\frac{a}{12}(a^2-\pi^2)$$

y en particular $\frac{\pi^3}{32}=\frac{1}{1^3}-\frac{1}{3^3}+\frac{1}{5^3}-\frac{1}{7^3}\cdots$.

♢ **6.25** *Sea* $f\in\mathcal{M}(\mathbb{C})$ *una función meromorfa impar cuyos polos, todos simples son* $\mathcal{P}(f)=\{\pm a_n : n\in\mathbb{N}\}$, *donde* $a_n\geq 0$ *es una sucesión estrictamente creciente no acotada.*

Se supone que hay una sucesión r_n, $a_n<r_n<a_{n+1}$, *tal que* $\lim_{n\to\infty}M(r_n)/r_n=0$, *donde* $M(r_n)=\sup\{|f(z)| : |z|=r_n\}$. *Demuestre*

i) $\displaystyle f(z)=2z\sum_{n=1}^{\infty}\frac{Res(f,a_n)}{z^2-a_n^2}$ *si* $0\notin P(f)$;

ii) $\displaystyle f(z)=\frac{Res(f,0)}{z}+2z\sum_{n=2}^{\infty}\frac{Res(f,a_n)}{z^2-a_n^2}$ *si* $a_1=0\in P(f)$.

Capítulo 7

Representación de funciones

7.1. Desarrollos de Mittag-Leffler

Según el teorema 4.4.3 toda función meromorfa $f \in \mathcal{M}(\mathbb{C}_\infty)$ es racional y admite una única representación

$$f(z) = p(z) + \sum_{n=1}^{m} P_n\left(\frac{1}{z-a_n}\right)$$

donde p es un polinomio (constante cuando ∞ no es polo de f) y cada P_n es un polinomio con $P_n(0) = 0$. Esta es la llamada *descomposición en fracciones simples* de la función racional f cuyo interés reside en que hace explícitos los polos $\{a_n : 1 \leq n \leq m\}$ y las correspondientes partes principales $P_n(1/(z-a_n))$. Cuando $p(z)$ no es constante, $p(z)-p(0)$ es la parte principal de f en ∞.

Análogamente, si f es meromorfa en un abierto $\Omega \subset \mathbb{C}_\infty$, y tiene un número finito de polos, podemos considerar el conjunto de sus polos finitos $P(f) \cap \mathbb{C} = \{a_1, a_2 \cdots a_m\}$ y las correspondientes partes principales $P_n(1/(z-a_n))$, donde cada P_n es un polinomio no idénticamente nulo con $P_n(0) = 0$. Razonando como en el teorema 4.4.3 se obtiene que existe una función holomorfa $g \in \mathcal{H}(\Omega)$ que hace válida la descomposición

$$f(z) = g(z) + \sum_{n=1}^{m} P_n\left(\frac{1}{z-a_n}\right)$$

El objetivo de esta sección es el de conseguir una descomposición análoga para una función meromorfa $f \in \mathcal{M}(\mathbb{C})$ con infinitos polos $\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$. En esta situación parece natural que intervenga la serie de las partes principales

$$\sum_{n=1}^{\infty} P_n\left(\frac{1}{z-a_n}\right)$$

pero se presenta el problema de que una serie de este tipo en general no es convergente. El problema se resolverá demostrando que es posible elegir polinomios $Q_n(z)$ tales que la serie modificada

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[P_n\left(\frac{1}{z-a_n}\right) - Q_n(z)\right]$$

converge según la definición que se formula a continuación.

Definición 7.1.1 *Una serie* $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ *de funciones meromorfas* $f_n \in \mathcal{M}(\Omega)$ *en un abierto* $\Omega \subset \mathbb{C}$*, se dice que converge uniformemente sobre compactos cuando para cada compacto* $K \subset \Omega$ *existe* $m \in \mathbb{N}$ *que verifica*

i) $P(f_n) \cap K = \emptyset$ *para cada* $n > m$.

ii) La serie $\sum_{n>m} f_n$ *converge uniformemente sobre* K.

Dada una serie de funciones meromorfas que cumple la definición 7.1.1, para definir su suma conviene hacer algunas observaciones preliminares. La primera de ellas es que el conjunto $M = \bigcup_{n=1}^{\infty} P(f_n)$ no tiene puntos de acumulación en Ω. Para justificar esta afirmación basta ver que $M \cap K$ es finito para cada compacto $K \subset \Omega$: Efectivamente, según la definición de función meromorfa, para cada $n \in \mathbb{N}$ es $P(f_n)' \cap \Omega = \emptyset$ luego, en virtud de 1.2.2 iii) los conjuntos $P(f_n) \cap K$ son finitos. Según la condición 7.1.1 i), para algún $m \in \mathbb{N}$ es $M \cap K = \bigcup_{n=1}^{m} P(f_n) \cap K$, y por lo tanto $M \cap K$ es finito.

Por otra parte, como las funciones f_n son holomorfas en el abierto $\Omega_0 = \Omega \setminus M$ y la serie $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ converge uniformemente sobre cada compacto $K \subset \Omega_0$, el teorema de Weierstrass 3.3.13 nos asegura que la suma $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ está definida y es holomorfa en Ω_0, presentando una singularidad aislada en punto de M. Fijada una de ellas $a \in M$, podemos encontrar $r > 0$ tal que $\{z : 0 < |z - a| \leq r\} \subset \Omega_0$.

El compacto $K = \{z : |z - a| \leq r\}$ está contenido en Ω y según 7.1.1 i) existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $n > m \Rightarrow P(f_n) \cap K = \emptyset$ luego, sobre el disco $D(a, r)$, hay una descomposición

$$f(z) = f_1(z) + f_2(z) + \cdots + f_m(z) + R_m(z), \quad z \in D^*(a, r)$$

donde $R_m(z) = \sum_{n>m} f_n(z)$ es holomorfa en $D(a, r)$ y las funciones $f_1, f_2, \cdots f_m$ son holomorfas en $D^*(a, r)$, siendo a polo de algunas de ellas. En virtud de esta descomposición podemos asegurar que a es polo o singularidad evitable de f (lo último ocurrirá cuando se anule la suma de las partes principales de las funciones $f_1, f_2 \cdots f_m$ en el punto a). En definitiva, en cada $a \in M$ existe el límite $\lim_{z \to a} f(z) \in \mathbb{C}_\infty$ y queda definida la función meromorfa suma

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(z) \text{ con polos } P(f) \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} P(f_n)$$

Además, cuando se cumpla la condición $n \neq m \Rightarrow P(f_n) \cap P(f_m) = \emptyset$ se podrá asegurar que se da la igualdad $P(f) = \bigcup_{n=1}^{\infty} P(f_n)$ y que la parte principal de f en $a \in P(f)$ es la suma (necesariamente finita) de las partes principales de los sumandos.

En lo que sigue, dada una serie de funciones meromorfas que converge uniformemente sobre compactos, la función meromorfa suma es la que queda definida mediante el proceso que acabamos de describir.

El primer problema que debemos abordar para obtener una generalización adecuada de la descomposición en fracciones simples de una función racional es el de fabricar funciones meromorfas con polos y partes principales prefijados de antemano. En general una serie de partes principales no es convergente. El siguiente teorema muestra que es posible corregir las partes principales mediante polinomios adecuados Q_n que provoquen la convergencia uniforme sobre compactos de la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left[P_n\left(\frac{1}{z-a_n}\right)-Q_n(z)\right]$$

consiguiendo con su suma una función meromorfa $f \in \mathcal{M}(\mathbb{C})$ con los polos y partes principales prefijados.

Teorema 7.1.2 [Mittag-Leffler] *Sea P_n una sucesión de polinomios con $P_n(0) = 0$ y $a_n \in \mathbb{C}$ una sucesión de puntos distintos dos a dos, tal que*

$$|a_1| \leq |a_2| \leq |a_3| \leq \cdots |a_n| \leq \cdots \ \ y \ \ \lim_n |a_n| = +\infty$$

Entonces existe una sucesión de polinomios Q_n tal que la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left[P_n\left(\frac{1}{z-a_n}\right)-Q_n(z)\right]$$

converge uniformemente sobre compactos y define una función $f \in \mathcal{M}(\mathbb{C})$ con polos $P(f) = \{a_n : n \in \mathbb{N}\}$, tal que la parte principal de f en cada a_n es $P_n(1/(z-a_n))$.

Dem: Suponemos en primer lugar que $a_1 \neq 0$. Entonces, para cada $n \geq 1$ la función $f_n(z) = P_n(1/(z-a_n))$ es holomorfa en el disco $D(0, |a_n|)$ donde tiene un desarrollo en serie de potencias

$$f_n(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k^n z^k$$

Según las propiedades generales de las series de potencias, este desarrollo converge uniformemente sobre cada compacto contenido en el disco de convergencia. En particular converge uniformemente sobre $D_n = \{z : |z| \leq \frac{1}{2}|a_n|\}$, luego existe $k(n) \in \mathbb{N}$ tal que la suma parcial $Q_n(z) = \sum_{k=0}^{k(n)} a_k^n z^k$ cumple

$$|f_n(z) - Q_n(z)| \leq 2^{-n} \quad \text{para todo} \quad z \in D_n$$

La serie $\sum_{n=1}^{\infty}(f_n - Q_n)$ converge en $\mathbb{C}$ uniformemente sobre compactos (véase 7.1.1): Efectivamente, si $K \subset \mathbb{C}$ es compacto y $R = \max\{|z| : z \in K\}$, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $|a_n| > 2R$ para todo $n > m$, luego $K \subset D_n$ y se cumple

i) $P(f_n - Q_n) \cap K = \{a_n\} \cap K = \emptyset$ si $n > m$

ii) $|f_n(z) - Q_n(z)| \leq 2^{-n}$ para todo $z \in K$

En virtud del criterio de Weierstass, la condición ii) asegura que la serie $\sum_{n>m}(f_n - Q_n)$ converge uniformemente sobre K. Según lo indicado después de la definición 7.1.1, la función suma $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty}(f_n(z) - Q_n(z))$ es meromorfa en $\mathbb{C}$ y cumple las condiciones requeridas.

Finalmente, si $a_1 = 0$, tomamos $Q_1 \equiv 0$ y aplicamos el razonamiento anterior a la sucesión $\{a_n : n \geq 2\}$ para obtener los polinomios Q_n con $n \geq 2$. ■

Corolario 7.1.3 *Sea $M \subset \mathbb{C}$ sin puntos de acumulación finitos (e.d. ($M' \cap \mathbb{C} = \emptyset$) y para cada $a \in M$ sea $P_a(z)$ un polinomio con $P_a(0) = 0$. Entonces existe $f \in \mathcal{M}(\mathbb{C})$ con polos $P(f) = M$, tal que en cada polo $a \in P(f)$ la parte principal de f es $P_a(1/(z-a))$.*

DEM: Si M es finito el asunto queda resuelto con la suma $f(z) = \sum_{a \in M} P_a(1/(z-a)$. La condición $M' \cap \mathbb{C} = \emptyset$ implica que cada disco compacto $\overline{D(0,R)}$ sólo contiene una cantidad finita de puntos de M. Por lo tanto M es numerable y sus elementos se pueden ordenar en sucesión $M = \{a_n : n \in \mathbb{N}\}$, de modo que sus módulos formen una sucesión creciente:

$$|a_1| \leq |a_2| \leq \cdots \leq |a_n| \leq |a_{n+1}| \leq \cdots$$

que necesariamente cumple $\lim_n |a_n| = +\infty$. Entonces invocando el teorema 7.1.2 con, $P_n = P_{a_n}$, se obtiene el resultado. ■

Corolario 7.1.4 *Sea $f \in \mathcal{M}(\mathbb{C})$ con infinitos polos $P(f) = \{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ que se suponen ordenados según módulos crecientes $|a_1| \leq |a_2| \leq \cdots \leq |a_n| \leq |a_{n+1}| \leq \cdots$. Para cada $n \in \mathbb{N}$ sea $P_n(1/(z-a_n))$ la parte principal de f en a_n.*

Entonces existe una función entera $g \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ y una sucesión de polinomios Q_n tales que f admite un desarrollo de la forma

$$f(z) = g(z) + \sum_{n=1}^{\infty} \left[P_n \left(\frac{1}{z-a_n} \right) - Q_n(z) \right]$$

uniformemente convergente sobre compactos.

DEM: Según el teorema 7.1.2 existe una sucesión de polinomios Q_n tal que la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[P_n \left(\frac{1}{z-a_n} \right) - Q_n(z) \right]$$

converge uniformemente sobre compactos y define una función meromorfa $F \in \mathcal{M}(\mathbb{C})$ con los mismos polos y partes principales que f. La diferencia $g := f - F$ presenta singularidades evitables en cada a_n y eliminando estas singularidades evitables se obtiene la función entera $g \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ que figura en el enunciado. ■

Los polinomios Q_n que intervienen en el teorema 7.1.2 y en el corolario 7.1.4 no están unívocamente determinados y en cada caso particular convendrá elegirlos del mínimo grado posible. Cuando una serie de partes principales $\sum_{n=1}^{\infty} P_n(1/(z-a_n))$ ya converge uniformemente sobre compactos no es necesaria la intervención de los polinomios Q_n para conseguir una función meromorfa $f \in \mathcal{M}(\Omega)$ con polos $P(f) = \{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ y partes principales $P_n(1/(z-a_n))$. Es lo que ocurre en la serie considerada en el ejercicio 7.1.

El resultado que se ha obtenido en el corolario 7.1.3 es válido para funciones meromorfas en un abierto arbitrario:

Teorema 7.1.5 *Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$ abierto y $M \subset \Omega$ un subconjunto sin puntos de acumulación en Ω (e.d. ($M' \cap \Omega = \emptyset$) y para cada $a \in M$ sea $P_a(z)$ un polinomio con $P_a(0) = 0$. Entonces existe una función meromorfa $f \in \mathcal{M}(\Omega)$ tal que $P(f) = M$ y la parte principal de f y en cada polo $a \in P(f)$ es $P_a(1/(z-a))$.*

Dem: La demostración habitual, que usa un teorema de Runge sobre aproximación de funciones holomorfas mediante funciones racionales, queda fuera del alcance de los resultados expuestos hasta ahora. Se puede ver en [14] Teorema 13.10. ■

Aunque las dos proposiciones que siguen se pueden demostrar con la técnica de sumación de series expuesta en 6.2 (véanse los apartados a) y c) del ejercicio 6.19) merece la pena volverlas a considerar enmarcadas en la teoría de los desarrollos de Mittag-Leffler 7.1.4. Los dos puntos de vista son opuestos: Mientras que en 6.2 el objetivo era calcular la suma de cierto tipo de series, ahora nos ocupamos del problema inverso consistente en obtener el desarrollo de Mittag-Leffler una función meromorfa dada.

Proposición 7.1.6

$$\left(\frac{\pi}{\operatorname{sen} \pi z}\right)^2 = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(z-n)^2} \tag{7.1}$$

donde la serie que interviene,

$$\frac{1}{z^2} + \frac{1}{(z-1)^2} + \frac{1}{(z+1)^2} + \frac{1}{(z-2)^2} + \frac{1}{(z+2)^2} + \cdots$$

converge uniformemente sobre compactos.

Dem: Véase [17] ejerc. 8.22 ■

nota: La serie considerada en 7.1.6 se puede escribir en la forma $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(z+n)^2}$ cuya suma se puede calcular directamente usando la técnica de sumación de series expuesta en 6.2 (véase el ejercicio 6.19).

La proposición 7.1.6 se puede aplicar para calcular la suma de la serie armónica: $S = \sum_{n=1}^{\infty}(1/n^2)$: La función $h(z) = f(z) - \frac{1}{z^2}$ tiene una singularidad evitable en $z = 0$, que se elimina definiendo $h(0) = \pi^2/3$. Según la fórmula 7.1 se tiene

$$h(z) = \sum_{0 \neq n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{(z-n)^2}$$

luego $2S = h(0) = \pi^2/3$.

Proposición 7.1.7

$$\pi \cot \pi z = \frac{1}{z} + \sum_{0\neq n\in\mathbb{Z}} \left(\frac{1}{z-n} + \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{z} + \sum_{0\neq n\in\mathbb{Z}} \frac{z}{n(z-n)} = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2z}{z^2-n^2} \tag{7.2}$$

y la serie converge uniformemente sobre compactos.

Dem: Véase [17] ejerc. 8.23 ■

nota: La serie que interviene en 7.1.7 también se puede escribir en la forma

$$\frac{1}{z} + \lim_m \sum_{n=1}^{m} \left(\frac{1}{z-n} + \frac{1}{z+n}\right) = \lim_m \sum_{n=-m}^{m} \frac{1}{z-n} = v.p. \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{z-n}$$

cuya suma se puede calcular con las técnicas expuestas en 6.2 (véase el ejercicio 6.19 c))

7.2. Productos infinitos de funciones holomorfas

Todo polinomio complejo p admite una única representación en la forma

$$p(z) = k(z - a_1)^{m(a_1)}(z - a_2)^{m(a_2)} \cdots (z - a_k)^{m(a_k)} \tag{7.3}$$

donde k es una constante no nula. Esta representación, al hacer explícitos los ceros y las correspondientes multiplicidades, revela más información que la representación habitual.

El objetivo de esta sección es conseguir una representación análoga para funciones holomorfas en un abierto $\Omega \subset \mathbb{C}$ y en particular para funciones enteras.

Si $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ no es idénticamente nula en un abierto conexo $\Omega \subset \mathbb{C}$ se sabe que el conjunto de sus ceros $\mathcal{Z}(f) = \{z \in \Omega : f(z) = 0\}$ no tiene puntos de acumulación en Ω (luego es finito o numerable) y además cada $a \in \mathcal{Z}(f)$ tiene una multiplicidad $m(a) \in \mathbb{N}$. La primera tarea que se aborda es la de resolver el problema inverso: Dado un conjunto $M \subset \Omega$ tal que $M' \cap \Omega = \emptyset$ y una función $m : M \to \mathbb{N}$ que asigna a cada $a \in M$ un número natural, se demuestra que existe $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ tal que $\mathcal{Z}(f) = M$ y cada $a \in M$ es un cero de f con multiplicidad $m(a)$. (Corolario 7.2.13 y teorema 7.2.17).

Si el conjunto $M = \{a_1, a_2, \cdots a_k\}$ es finito, la solución trivial de este problema la proporciona el polinomio (7.3). Si $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ tiene un número finito de ceros $\mathcal{Z}(f) = \{a_1, a_2 \cdots a_k\}$ con multiplicidades $m_j = m(a_j)$, $1 \leq j \leq k$, podemos formar el polinomio $p(z) = (z - a_1)^{m(a_1)}(z - a_2)^{m(a_2)} \cdots (z - a_k)^{m(a_k)}$ que tiene los ceros de f con las mismas multiplicidades. De este modo el cociente $g(z) = f(z)/p(z)$ presenta singularidades evitables en cada $a \in \mathcal{Z}(f)$, y al eliminarlas se consigue una función $G \in \mathcal{H}(\Omega)$, sin ceros, que hace válida la factorización

$$f(z) = G(z)(z - a_1)^{m(a_1)}(z - a_2)^{m(a_2)} \cdots (z - a_k)^{m(a_k)}$$

El objetivo de esta sección es conseguir una factorización análoga para funciones holomorfas con infinitos ceros $\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$, reemplazando el polinomio p por un producto infinito que haga explícitos los ceros y las multiplicidades. En general un producto infinito de la forma $\prod_{n=1}^{\infty}(z - a_k)^{m_k}$ no es convergente. La convergencia se consigue considerando productos $\prod_{k=1}^{\infty} A_k(z)$ de factores especiales $A_k(z)$, donde cada A_n tiene un único cero simple en a_n (teorema 7.2.12).

Productos infinitos de números complejos. Comenzaremos definiendo la noción de convergencia de un producto infinito de números complejos adecuada para los fines que se persiguen. Dada una sucesión $z_n \in \mathbb{C}$, si la sucesión de los productos parciales $p_n = z_1 z_2 \cdots z_n$ es convergente hacia un valor no nulo, $\lim_n p_n = p \neq 0$, diremos que el producto infinito $\prod_{n=1}^{\infty} z_n$ es *estrictamente convergente* hacia p. En este caso el símbolo $\prod_{n=1}^{\infty} z_n$ denota también el valor p.

La razón de excluir el valor $p = 0$ se debe a dos motivos: En primer lugar, sin esa exigencia cualquier producto infinito con un factor nulo sería convergente hacia 0 y la convergencia no dependería del los restantes factores. En segundo lugar, para los problemas de factorización de funciones que se van a estudiar debemos excluir la consideración productos infinitos como $\prod_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, cuyos factores no se anulan, pero $\lim_n p_n = 0$.

La siguiente definición de convergencia de un producto infinito, que no es tan radical como la convergencia estricta, es la adecuada para los problemas de factorización

Definición 7.2.1 *Si existe $m \in \mathbb{N}$ tal que el producto $\prod_{n=m+1}^{\infty} z_n$ es estrictamente convergente se dice que el producto $\prod_{n=1}^{\infty} z_n$ es convergente hacia*

$$p = z_1 z_2 \cdots z_m \prod_{n=m+1}^{\infty} z_n$$

Es fácil ver que en esta definición el valor de p no depende de m. Igual que antes, cuando el producto infinito sea convergente, el símbolo $\prod_{n=1}^{\infty} z_n$ designa también su valor. Según la definición, un producto infinito convergente se puede anular pero, en ese caso, algún factor debe ser nulo y sólo puede haber una cantidad finita de factores nulos.

Proposición 7.2.2 *Si el producto infinito $\prod_{n=1}^{\infty} z_n$ es convergente hacia p, se cumple:*

i) *Si $n \geq 1$ el producto $\prod_{k=n+1}^{\infty} z_k$ converge y su valor R_n cumple $z_1 z_2 \cdots z_n R_n = p$.*

ii) $\lim_n R_n = 1$ *y* $\lim_n z_n = 1$.

Dem: Según la definición 7.2.1 existe $m \in \mathbb{N}$ tal que el producto $\prod_{k=m+1}^{\infty} z_k = R_m \neq 0$ es estrictamente convergente. Cuando $1 \leq n < m$ es clara la convergencia del producto

$$R_n = \lim_k (z_{n+1} z_{n+2} \cdots z_m) z_{m+1} z_{m+2} \cdots z_{m+k} = z_{n+1} z_{n+2} \cdots z_m R_m$$

que cumple $z_1 z_2 \cdots z_n R_n = z_1 z_2 \cdots z_m R_m = p$.

Para $n \geq m$ también es inmediata la convergencia estricta del producto

$$R_n = \prod_{k=n+1}^{\infty} z_k = \lim_k \frac{(z_{m+1} z_{m+2} \cdots z_n) z_{n+1} \cdots z_{n+k}}{z_{m+1} z_{m+2} \cdots z_n} = \frac{R_m}{z_{m+1} \cdots z_n} \tag{7.4}$$

que también cumple $z_1 z_2 \cdots z_m z_{m+1} \cdots z_n R_n = z_1 z_2 \cdots z_m R_m = p$.

Pasando al límite en 7.4 cuando $n \to +\infty$ se obtiene que $\lim_n R_n = 1$, de donde se sigue que $\lim_n z_n = \lim_n (R_{n-1}/R_n) = 1$ ■

En la siguiente proposición $\operatorname{Log} z$ denota el logaritmo principal de $z \neq 0$ determinado por $-\pi < \operatorname{Im}(\operatorname{Log} z) \leq \pi$.

Proposición 7.2.3 *Una condición necesaria y suficiente para que el producto $\prod_{n=1}^{\infty} z_n$ sea estrictamente convergente es que $z_n \neq 0$ para a cada $n \in \mathbb{N}$ y la serie $\sum_{k=1}^{\infty} \operatorname{Log} z_n$ sea convergente.*

Dem: Véase [17] ejerc. 11.1 ■

Proposición 7.2.4 *Dado un producto infinito de números complejos $\prod_{n=1}^{\infty}(1 + a_n)$, se verifica a) $\Leftrightarrow$ b) $\Leftrightarrow$ c) $\Rightarrow$ d):*

a) $\sum_{k=1}^{\infty} |a_n| < +\infty$.

b) *Existe $m \in \mathbb{N}$ tal que* $\sum_{n>m} |\operatorname{Log}(1 + a_n)| < +\infty$.

c) El producto $\prod_{n=1}^{\infty}(1+|a_n|)$ *converge.*

d) El producto $\prod_{n=1}^{\infty}(1+a_n)$ *converge.*

DEM: Cada una de las propiedades a), b), c) implica que $\lim_n a_n = 0$, (véase 7.2.2) y así podemos suponer en lo que sigue que se cumple esta condición.
a) $\Leftrightarrow$ b): Para $|z| < 1$ vale el desarrollo en serie de potencias

$$\operatorname{Log}(1+z) = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \cdots$$

luego $\displaystyle\lim_{z \to 0} \frac{\operatorname{Log}(1+z)}{z} = 1$. Por la definición de límite existe $m \in \mathbb{N}$ tal que

$$n > m \Rightarrow \left|\frac{\operatorname{Log}(1+a_n)}{a_n} - 1\right| < \frac{1}{2}$$

Entonces para $n > m$ se cumplen las desigualdades

$$\frac{1}{2}|a_n| \leq |\operatorname{Log}(1+a_n)| \leq \frac{3}{2}|a_n|$$

con las que se obtiene la equivalencia a) $\Leftrightarrow$ b).
a) $\Leftrightarrow$ c): Según lo que acabamos de demostrar, a) equivale a la convergencia de la serie

$$\sum_{n\geq 1} |\operatorname{Log}(1+|a_n|)| = \sum_{n\geq 1} \operatorname{Log}(1+|a_n|)$$

y esto, en virtud de la proposición 7.2.3, equivale a la condición c).
b) $\Rightarrow$ d): Basta tener en cuenta que toda serie absolutamente convergente es convergente, y la proposición 7.2.3. ■

Definición 7.2.5 *El producto infinito* $\prod_{n=1}^{\infty}(1+a_n)$ *se dice que es absolutamente convergente cuando se cumple alguna de las condiciones equivalentes a)* $\Leftrightarrow$ *b)* $\Leftrightarrow$ *c) que intervienen en la proposición 7.2.4.*

Después de la proposición 7.2.4 podemos afirmar que todo producto infinito absolutamente convergente es convergente.

Productos infinitos de funciones.

Definición 7.2.6 *Dada una sucesión de funciones* $f_n : \Omega \to \mathbb{C}$*, si el producto* $\prod_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ *converge para cada* $z \in \Omega$*, se dice que converge puntualmente en* Ω*. Si además la sucesión* $R_n(z) = \prod_{k=n+1}^{\infty} f_k(z)$ *converge hacia* 1 *uniformemente sobre cada compacto* $K \subset \Omega$ *se dice que el producto converge uniformemente sobre compactos.*

La siguiente proposición proporciona una condición suficiente para la convergencia uniforme sobre compactos de un producto infinito.

Proposición 7.2.7 *Dada una sucesión de funciones $a_n : \Omega \to \mathbb{C}$ y un compacto $K \subset \Omega$ se verifica a) $\Leftrightarrow$ b) $\Rightarrow$ c):*

a) La serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} |a_n(z)|$ converge uniformemente sobre K

b) El producto $\displaystyle\prod_{n=1}^{\infty}(1 + |a_n(z)|)$ converge uniformemente sobre K.

c) El producto $\displaystyle\prod_{n=1}^{\infty}(1 + a_n(z))$ converge uniformemente sobre K.

DEM: Sea $x_j \geq 0$ para $m < j \leq n$. Multiplicando miembro a miembro las desigualdades $1 + x_j \leq e^{x_j}$ resulta

$$\prod_{j=m+1}^{n} (1 + x_j) \leq \exp\left(\sum_{j=m+1}^{n} x_j\right)$$

Aplicando esta desigualdad, con $x_j = |a_j(z)|$, resulta la desigualdad de la derecha:

$$\sum_{j=m+1}^{n} |a_j(z)| \leq \prod_{j=m+1}^{n} (1 + |a_j(z)|) - 1 \leq \exp\left(\sum_{j=m+1}^{n} |a_j(z)|\right) - 1 \qquad (7.5)$$

(la desigualdad de la izquierda se obtiene observando que al desarrollar el producto del centro además de los sumandos $\sum_{j=m+1}^{n} |a_j(z)|$ aparecen otros sumandos positivos).
a) $\Rightarrow$ b): Si se cumple a), en virtud de la proposición 7.2.4 el producto que interviene en b) converge puntualmente en Ω. Entonces, para cada $z \in \Omega$ y cada $n \in \mathbb{N}$ están definidas las funciones $R_n^*(z) = \prod_{j=n+1}^{\infty}(1 + |a_j(z)|)$ y tenemos que demostrar la sucesión $R_n^*(z)$ converge hacia 1 uniformemente sobre K: Dado $\epsilon > 0$ sea $\delta > 0$ tal que $0 < e^{\delta} - 1 < \epsilon$. Por cumplirse a) existe $m(\delta) \in \mathbb{N}$ tal que para todo $m \geq m(\delta)$ y todo $z \in K$ se verifica $\sum_{j=m+1}^{\infty} |a_j(z)| < \delta$, y usando la desigualdad de la derecha en 7.5 se obtiene que para todo $m \geq m(\delta)$ y todo $z \in K$ se cumple

$$\prod_{j=m+1}^{n} (1 + |a_j(z)|) - 1 \leq \exp\left(\sum_{j=m+1}^{n} |a_j(z)|\right) - 1 \leq e^{\delta} - 1 < \epsilon$$

y pasando al límite cuando $n \to +\infty$ se llega a que para todo $m \geq m(\delta)$ y todo $z \in K$ se verifica

$$0 \leq R_m^*(z) - 1 \leq \epsilon$$

b) $\Rightarrow$ a): Si se cumple b) en virtud de la proposición 7.2.4 la serie que interviene en a) converge puntualmente en Ω. Pasando al límite, cuando $n \to +\infty$, en la desigualdad de la izquierda de 7.5 se obtiene $\sum_{j=m+1}^{\infty} |a_j(z)| \leq R_m^*(z) - 1$ y utilizando que $R_n^*(z)$ converge hacia 1 uniformemente sobre K se obtiene que $\sum_{j=m+1}^{\infty} |a_j(z)|$ converge hacia 0 uniformemente sobre K, lo que significa que se cumple a).

b) $\Rightarrow$ c): Si se cumple b) el producto $\prod_{n=1}^{\infty}(1+a_n(z))$ converge absolutamente para cada $z \in \Omega$ y por lo tanto converge puntualmente en Ω. Utilizando la desigualdad

$$\left|\prod_{j=m+1}^{n}(1+a_j(z))-1\right| \leq \prod_{j=m+1}^{n}(1+|a_j(z)|)-1$$

(obtenida aplicando la desigualdad triangular a las sumas que resultan al desarrollar el producto $\prod_{j=m+1}^{n}(1+a_j(z))-1$) y pasando al límite cuando $n \to +\infty$ se obtiene que las funciones $R_m(z)=\prod_{j=m+1}^{\infty}(1+a_j(z))$ cumplen la desigualdad

$$|R_m(z)-1| \leq |R_m^*(z)-1|$$

para todo $m \in \mathbb{N}$ y todo $z \in K$. Como $R_m^*(z)$ converge hacia 1 uniformemente sobre K se concluye que $R_m(z)$ converge hacia 1 uniformemente sobre K, es decir, se cumple c). ■

Aplicando la proposición anterior en cada compacto $K \subset \Omega$ se obtiene que la convergencia uniforme sobre compactos de la serie $\sum_{n=1}^{\infty}|f_n(z)-1|$ es condición suficiente para la convergencia uniforme sobre compactos del producto $\prod_{n=1}^{\infty} f_n(z)$.

Proposición 7.2.8 *Sea $f(z)=\prod_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ un producto infinito de funciones continuas $f_n \in C(\Omega)$ que converge uniformemente sobre cada compacto $K \subset \Omega$. Entonces la sucesión de los productos parciales $\pi_n(z)=f_1(z)f_2(z)\cdots f_n(z)$ converge uniformemente sobre compactos hacia f, y para cada compacto $K \subset \Omega$ existe $m \in \mathbb{N}$ tal que el producto $R_m(z)=\prod_{k=m+1}^{\infty} f_k(z)$ no se anula en K.*

DEM: Si $K \subset \Omega$ es compacto, por la hipótesis $R_n(z)=\prod_{k=n+1}^{\infty} f_k(z)$ es una sucesión de funciones que converge hacia 1 uniformemente sobre K, luego existe $m \in \mathbb{N}$ tal que para cada $n \geq m$ y cada $z \in K$ se cumple $|R_n(z)-1|<1/2$, luego $1/2 \leq |R_n(z)| \leq 3/2$, y en particular $0 \notin R_m(K)$. Por otra parte, para cada $n > m$ y cada $z \in K$, se cumple

$$\left|\prod_{k=m+1}^{n} f_k(z)\right| = \left|\frac{R_m(z)}{R_n(z)}\right| \leq \frac{3/2}{1/2}=3$$

luego

$$|\pi_n(z)| = |\pi_m(z)|\left|\prod_{k=m+1}^{n} f_k(z)\right| \leq 3C_m$$

donde $C_m=\max\{|\pi_m(z)| : z \in K\}$. Se obtiene así la desigualdad

$$|\pi_n(z)-f(z)| = |\pi_n(z)||1-R_n(z)| \leq 3C_m|1-R_n(z)|$$

válida para todo $n > m$ y todo $z \in K$, con la que se obtiene que $\pi_n(z)$ converge hacia $f(z)$ uniformemente sobre K. ■

Teorema 7.2.9 *Sea $f(z)=\prod_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ un producto de funciones holomorfas $f_n \in \mathcal{H}(\Omega)$ que converge uniformemente sobre compactos. Entonces $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ y $\mathcal{Z}(f)=\bigcup_n \mathcal{Z}(f_n)$.*

Si los ceros de cada factor f_n son aislados, los ceros de f también son aislados y para cada $a \in \mathcal{Z}(f)$ el conjunto $\{n \in \mathbb{N} : f_n(a) = 0\}$ es finito y tiene multiplicidad

$$\nu(f, a) = \sum_{n=1}^{\infty} \nu(f_n, a) \quad \textit{(hay un número finito de sumandos no nulos)}$$

DEM: Según 7.2.8, las funciones holomorfas $\pi_n = f_1 f_2 \cdots f_n$ convergen uniformemente sobre compactos hacia f, luego f es holomorfa en virtud del teorema 3.3.13.

La inclusión $\mathcal{Z}(f) \supset \bigcup_n \mathcal{Z}(f_n)$ es inmediata. Recíprocamente, dado $a \in \mathcal{Z}(f)$ sea $\epsilon > 0$ tal que $K = \overline{D(a, \epsilon)} \subset \Omega$. Según la proposición 7.2.8, para el compacto K existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $0 \notin R_m(K)$ y teniendo en cuenta el producto finito

$$f(z) = f_1(z) f_2(z) \cdots f_m(z) R_m(z)$$

se obtiene que

$$\{1, 2, \cdots m\} \supset \{n \in \mathbb{N} : f_n(a) = 0\} \neq \emptyset$$

Si los ceros de cada f_k son aislados, con el producto finito anterior también se obtiene que f tiene un número finito de ceros en el compacto $K = \overline{D(a, \epsilon)}$ y por lo tanto a es cero aislado de f, con multiplicidad $\nu(f, a) = \sum_{n=1}^{m} \nu(f_n(a)$. ■

Lema 7.2.10 *Las funciones*

$$E_0(z) = 1 - z; \quad E_n(z) = (1 - z)\exp\left(z + \frac{z^2}{2} + \cdots + \frac{z^n}{n}\right), \quad \textit{si} \ \ n \geq 1$$

(llamadas factores de Weierstrass) verifican las desigualdades:

$$|z| \leq 1 \Rightarrow |E_n(z) - 1| \leq |z|^{n+1}$$

DEM: El resultado es inmediato para $n = 0$. La demostración para $n \geq 1$ se basa en la consideración del desarrollo en serie de potencias

$$E_n(z) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k z^k$$

Se comprueba fácilmente que

$$E_n'(z) = -z^n \exp\left(z + \frac{z^2}{2} + \cdots + \frac{z^n}{n}\right)$$

Usando esta expresión se deduce que $E_n'(z)$ tiene en $z = 0$ un cero de multiplicidad n y que las derivadas sucesivas de E_n en $z = 0$ cumplen $E_n^{(k)}(0) \leq 0$. Por otra parte,

$$E_n'(z) = a_1 + 2a_2 z + 3a_3 z^2 + \cdots n a_n z^{n-1} + (n+1) a_{n+1} z^n + \cdots$$

luego $0 = a_1 = a_2 = \cdots = a_n$ y $a_k \leq 0$ para todo $k > n$. Con esta información sobre los coeficientes a_k se obtiene

$$0 = E_n(1) = 1 + \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k = 1 - \sum_{k=n+1}^{\infty} |a_k|$$

Si $|z| \leq 1$, usando esta igualdad se establece la desigualdad

$$|E_n(z) - 1| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} |a_k||z|^k = |z|^{n+1} \sum_{k=n+1}^{\infty} |a_k||z|^{k-n-1} \leq |z|^{n+1} \sum_{k=n+1}^{\infty} |a_k| = |z|^{n+1}$$

■

Lema 7.2.11 *Dada una sucesión $a_k \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ con $\lim_k |a_k| = +\infty$, existe una sucesión $n_k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ tal que para todo $R > 0$ se cumple*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{R}{|a_k|}\right)^{n_k+1} < +\infty$$

DEM: La sucesión $n_k = k - 1$ cumple los requisitos del enunciado pues dado $R > 0$, para $k \in \mathbb{N}$ suficientemente grande se cumple $|a_k| > 2R$ y y por lo tanto

$$\left(\frac{R}{|a_k|}\right)^k \leq \left(\frac{1}{2}\right)^k$$

■

En las condiciones del lema 7.2.11 diremos que $n_k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ es una sucesión adaptada a la sucesión de números complejos a_k.

Teorema 7.2.12 *Sea $a_k \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ una sucesión tal que $\lim_k |a_k| = +\infty$ y $n_k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ una sucesión adaptada a ella (p.e. $n_k = k - 1$). Entonces el producto*

$$f(z) = \prod_{k=1}^{\infty} E_{n_k}(z/a_k)$$

converge uniformemente sobre compactos y define una función entera $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ tal que $\mathcal{Z}(f) = \{a_k : k \in \mathbb{N}\}$. Para cada $a \in \mathcal{Z}(f)$ la multiplicidad $\nu(f, a)$ es el número de elementos del conjunto $\{k : a_k = a\}$.

DEM: Cada función $f_k(z) = E_{n_k}(z/a_k)$ tiene un único cero simple para $z = a_k$ y después del teorema 7.2.9 basta demostrar que el producto infinito $f(z) = \prod_{k=1}^{\infty} f_k(z)$ converge uniformemente sobre compactos. En virtud de la proposición 7.2.7 basta ver que la serie $\sum_{k=1}^{\infty} |f_k(z) - 1|$ converge uniformemente sobre compactos. Esto es una sencilla consecuencia del lema 7.2.10 que desempeña un papel esencial en este asunto:

Dado un compacto $K \subset \overline{D(0,R)}$ existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que $k \geq k_0 \Rightarrow |a_k| \geq R$ luego $|z/a_k| \leq 1$ para todo $z \in K$. Entonces para $k \geq k_0$ y todo $z \in K$ se cumple

$$|f_k(z) - 1| = |E_{n_k}(z/a_k) - 1| \leq \left|\frac{z}{a_k}\right|^{n_k+1} \leq \left|\frac{R}{a_k}\right|^{n_k+1} = \rho_k$$

Por hipótesis $\sum_{k\geq 1} \rho_k < +\infty$ y aplicando el criterio de Weierstrass se concluye que la serie $\sum_{k=1}^{\infty} |f_k(z) - 1|$ converge uniformemente sobre K. ■

NOTA: A la hora de aplicar el teorema anterior conviene elegir la sucesión n_k lo más sencilla posible. A veces sirve una sucesión constante, $n_k = p$ para todo $k \in \mathbb{N}$, y en ese caso convendrá tomar la constante p todo lo pequeña que se pueda. Así por ejemplo, si $\sum_k (1/|a_k|) < +\infty$ se puede tomar $p = 0$, y si $\sum_k (1/|a_k|) = +\infty$ pero $\sum_k (1/|a_k|^2) < +\infty$ se puede tomar $p = 1$.

Corolario 7.2.13 *Sea $M \subset \mathbb{C}$ un conjunto sin puntos de acumulación ($M' = \emptyset$) y $m : M \to \mathbb{N}$ una aplicación que asigna a cada $a \in M$ un número natural $m(a) \in \mathbb{N}$. Entonces existe una función entera $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ tal que $\mathcal{Z}(f) = M$ y la multiplicidad de cada $a \in \mathcal{Z}(f)$ es $\nu(f,a) = m(a)$.*

DEM: El resultado es trivial si M es finito. Suponemos en lo que sigue que M es infinito. Consideremos primero el caso $0 \notin M$. Según 1.5.2 M es numerable y lo podemos ordenar formando una sucesión $\{z_n : n \in \mathbb{N}\}$ tal que $0 < |z_1| \leq |z_2| \leq |z_3| \leq \cdots$. Esta sucesión, al no tener puntos de acumulación, cumple $\lim_n |z_n| = +\infty$. Sea (a_k) la sucesión obtenida a partir de (z_n) repitiendo términos de acuerdo con la función m (el término z_j se repite $m(z_j)$ veces). La sucesión a_k también cumple que $\lim_k |a_k| = +\infty$ y aplicando el teorema 7.2.12 se obtiene una función entera de la forma $f(z) = \prod_{k=1}^{\infty} E_{n_k}(z/a_k)$ que tiene las propiedades requeridas.

El caso $0 \in M$, se reduce al anterior considerando $M_0 = M \setminus \{0\}$. Ahora se obtiene una función entera de la forma $f(z) = z^p \prod_{k=1}^{\infty} E_{n_k}(z/a_k)$ donde $p = m(0)$. ■

Teorema 7.2.14 *Sea $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ una función entera no idénticamente nula con infinitos ceros y $a_k \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ la sucesión de sus ceros no nulos, repetidos según multiplicidades. Entonces existe una sucesión $n_k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ y una función entera $g \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ tal que*

$$f(z) = e^{g(z)} z^p \prod_{k=1}^{\infty} E_{n_k}(z/a_k)$$

donde $p = 0$ si $f(0) \neq 0$, $p = \nu(f,0)$ si $f(0) = 0$, y el producto infinito converge uniformemente sobre compactos.

DEM: Por el principio de identidad, los ceros de f no tienen puntos de acumulación y por lo tanto $\lim_k |a_k| = +\infty$. Sea $n_k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ una sucesión adaptada a la sucesión a_k (p.e. $n_k = k - 1$). Según el teorema 7.2.12 la función $F(z) = z^p \prod_{k=1}^{\infty} E_{n_k}(z/a_k)$ tiene los mismos ceros que f, con las mismas multiplicidades, luego $G = f/F$ presenta una singularidad evitables en cada $a \in \mathcal{Z}(f)$.

Eliminando estas singularidades evitables podemos considerar que G es una función entera sin ceros, luego existe $g \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ tal que $G = e^g$ (véase 5.2.4). ■

Proposición 7.2.15 *Sea $f(z) = \prod_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ un producto infinito de funciones holomorfas $f_n \in \mathcal{H}(\Omega)$ que converge uniformemente sobre compactos. Se supone que los ceros de todas las funciones f_n son aislados. Entonces*

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f_n'(z)}{f_n(z)}$$

donde la serie de funciones meromorfas converge uniformemente sobre compactos.

Dem: Como los ceros de cada f_n son aislados, el cociente f_n'/f_n es una función meromorfa en Ω, cuyos polos (todos simples) son los ceros de f_n. Para cada $n \in \mathbb{N}$ se cumple

$$f(z) = f_1(z) f_2(z) \cdots f_n(z) R_n(z)$$

donde $R_n(z) = \prod_{k=n+1}^{\infty} f_n(z)$ La derivada logarítmica de un producto finito es la suma de las derivadas logarítmicas, luego

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{f_1'(z)}{f_1(z)} + \frac{f_2'(z)}{f_2(z)} + \cdots + \frac{f_n'(z)}{f_n(z)} + \frac{R_n'(z)}{R_n(z)}$$

suma válida para todo $z \in \Omega \setminus \mathcal{Z}(f)$ que se puede considerar como suma de funciones meromorfas en el espacio $\mathcal{M}(\Omega)$. Como la sucesión $R_n(z)$ converge hacia 1 uniformemente sobre compactos, dado un compacto $K \subset \Omega$ existe $m \in \mathbb{N}$ tal que para cada $n > m$ y cada $z \in K$ se cumple $|R_n(z) - 1| < 1/2$, y por lo tanto $|R_n(z)| > 1/2$. Esto nos asegura que para todo $n > m$ se cumple $P(f_n'/f_n) \cap K = \mathcal{Z}(f_n) \cap K = \emptyset$.

Por otra parte, según el teorema de Weierstrass (3.3.13) la sucesión de derivadas $R_n'(z)$ converge hacia 0 uniformemente sobre compactos luego $|R_n'(z)/R_n(z)| \leq 2|R_n'(z)|$, converge hacia 0 uniformemente sobre K.

Se obtiene así que la serie de funciones meromorfas $\sum_{n=1}^{\infty}(f_n'/f_n)$ converge, según la definición 7.1.1, hacia la función meromorfa f'/f. ■

Proposición 7.2.16

$$\frac{\operatorname{sen} \pi z}{\pi z} = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right)$$

y el producto converge uniformemente sobre compactos. En particular, para $z = 1/2$

$$\frac{2}{\pi} = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{4n^2}\right)$$

Dem: Véase [17] ejerc. 11.2 ■

Teorema 7.2.17 *Sea $\Omega \subsetneq \mathbb{C}_\infty$ un abierto conexo no vacío, $M \subset \Omega$ un subconjunto sin puntos de acumulación en Ω ($M' \cap \Omega = \emptyset$). Dada una aplicación $m : M \to \mathbb{N}$ que asigna a cada $a \in M$ un número natural $m(a) \in \mathbb{N}$ existe una función holomorfa $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ tal que $\mathcal{Z}(f) = M$ y la multiplicidad de cada $a \in \mathcal{Z}(f)$ es $m(a)$.*

Dem: Véase [17] ejerc. 11.4 ■

Corolario 7.2.18 *Si $\Omega \subsetneq \mathbb{C}_\infty$ es abierto conexo, cada $F \in \mathcal{M}(\Omega)$ admite una representación $F = f/g$ como cociente funciones holomorfas $f, g \in \mathcal{H}(\Omega)$.*

Dem: Denotemos por $m(a)$ la multiplicidad del polo $a \in P(F)$. Según el teorema 7.2.17 existe $g \in \mathcal{H}(\Omega)$ tal que cada $a \in P(F)$ es cero de g con multiplicidad $m(a)$. La función $f = gF$ presenta singularidades evitables en los puntos $a \in P(F)$ y eliminándolas se obtiene la función $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ con la que se consigue la representación $F = f/g$. ■

7.3. La función Γ de Euler

La función $\Gamma(z)$, introducida por Euler, es una función meromorfa en $\mathbb{C}$ que extiende a la función de $n \in \mathbb{N}$ definida por $f(n) = (n-1)!$. Esta función $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ queda caracterizada por la ecuación funcional $f(n+1) = nf(n)$ y el valor inicial $f(1) = 1$. Como motivación para la definición de la función Γ planteamos el problema de buscar una función de variable compleja $f(z)$ que satisfaga

$$f(1) = 1; \quad f(z+1) = zf(z) \text{ si } z \neq 0 \tag{7.6}$$

Es natural buscar soluciones con el mayor grado de regularidad posible, y la condición $f(1) = 1$ sugiere que impongamos la condición de que f sea holomorfas en un entorno de 1. Este requisito, junto con la condición $f(z+1) = zf(z)$ para $z \neq 0$ lleva consigo que $\lim_{z \to 0} zf(z) = f(1) = 1$ luego f debe tener en $z = 0$ un polo simple con residuo $\operatorname{Res}(f, 1) = 1$. Análogamente, la igualdad $f(z+2) = (z+1)f(z+1) = (z+1)zf(z)$ lleva consigo que f debe tener en $z = -1$ otro polo simple con residuo

$$\operatorname{Res}(f, -1) = \lim_{z \to -1} (z+1)f(z) = \lim_{z \to -1} \frac{f(z+2)}{z} = -f(1) = -1$$

En general, para cada $n \in \mathbb{N}$, la igualdad $f(z+n+1) = z(z+1)\cdots(z+n)f(z)$ nos dice que la solución que buscamos debe tener un polo simple en $z = -n$ con residuo

$$\operatorname{Res}(f, -n) = \lim_{z \to -n} (z+n)f(z) = \frac{(-1)^n}{n!}.$$

Estas consideraciones preliminares justifican que busquemos una solución del problema entre las funciones meromorfas $f \in \mathcal{M}(\mathbb{C})$ con polos simples en los enteros $m \leq 0$,

$$P(f) = \{m \in \mathbb{Z} : m \leq 0\}$$

Toda función meromorfa sin ceros y con estos polos simples es de la forma $f = 1/F$ donde $F \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ tiene ceros simples $\mathcal{Z}(F) = \{m \in \mathbb{Z} : m \leq 0\}$. Según el corolario 7.2.14 la forma general de una función $F \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ con estos ceros es

$$F(z) = e^{g(z)} z \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right) e^{-z/n} \tag{7.7}$$

donde $g \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ es una función entera arbitraria (según 7.2.12, se puede usar la sucesión constante $n_k = 1$, que está adaptada a la sucesión $\{-1, -2, \cdots, -m \cdots\}$).
Después de esta consideraciones preliminares el problema queda planteado en los siguientes términos: Encontrar una función entera g, lo más sencilla posible, que haga que la función entera F cumpla las condiciones:

$$F(1) = 1; \quad F(z) = zF(z+1) \text{ si } z \neq 0 \tag{7.8}$$

Considerando F como límite de los productos parciales

$$F_m(z) = e^{g(z)} z \prod_{n=1}^{m} \left(1 + \frac{z}{n}\right) e^{-z/n}$$

la condición $F(z) = zF(z+1)$ se escribe así:

$$1 = \lim_m z \frac{F_m(z+1)}{F_m(z)}$$

Con un cálculo sencillo la sucesión anterior se escribe en la forma:

$$z \frac{F_m(z+1)}{F_m(z)} = (z+m+1) e^{[g(z+1)-g(z)-S_m]}$$

donde $S_m = \sum_{n=1}^{m} (1/n)$. En los cursos de cálculo de una variable se demuestra que la sucesión $\gamma_m = S_m - \log\, m$ es convergente. Su límite $\gamma = \lim_m \gamma_m$ es la célebre constante de Euler (aún no se sabe si es irracional) cuyo valor aproximado es $0{,}5772\cdots$. Multiplicando y dividiendo por m el término general de la sucesión anterior se escribe en la forma

$$z \frac{F_m(z+1)}{F_m(z)} = \frac{z+m+1}{m} e^{[g(z+1)-g(z)-\gamma_m]}$$

luego la función $f = 1/F$ cumple la condición $f(z+1) = zf(z)$ si y sólo si

$$1 = \lim_m z \frac{F_m(z+1)}{F_m(z)} = e^{[g(z+1)-g(z)-\gamma]}$$

Con un cálculo similar al realizado anteriormente se obtiene

$$F_m(1) = e^{g(1)} \prod_{n=1}^{m} \frac{n+1}{n} e^{-1/n} = (m+1) e^{[g(1)-S_m]} = \frac{m+1}{m} e^{[g(1)-\gamma_m]}$$

luego $F(1) = e^{[g(1)-\gamma]}$, de modo que f cumple $f(1) = 1$ si y sólo si $1 = e^{[g(1)-\gamma]}$.
La función entera más sencilla que satisface las condiciones requeridas

$$1 = e^{[g(z+1)-g(z)-\gamma]}; \quad 1 = e^{[g(1)-\gamma]}$$

es $g(z) = \gamma z$.

Definición 7.3.1 *Sea $F \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ la función entera definida por el producto*

$$F(z) = ze^{\gamma z} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right) e^{-z/n}, \quad \text{donde} \quad \gamma = \lim_m \left(\sum_{n=1}^{m} \frac{1}{n}\right) - \log\ m$$

La función Γ de Euler es la función meromorfa $\Gamma \in \mathcal{M}(\mathbb{C})$ definida por

$$\Gamma(z) = \frac{1}{F(z)} = \frac{e^{-\gamma z}}{z} \prod_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{n+z}\right) e^{z/n}$$

Los razonamientos y cálculos preliminares que han motivado la definición de la función Γ sirven como demostración de la siguiente proposición que recoge sus propiedades básicas.

Proposición 7.3.2 *La función Γ satisface la ecuación funcional*

$$\Gamma(1) = 1; \quad \Gamma(z+1) = z\Gamma(z) \ \textit{si}\ z \neq 0 \tag{7.9}$$

No tiene ceros y tiene polos simples en $\{0, -1, -2, \cdots -n, \cdots\}$ con $Res(\Gamma, -n) = (-1)^n/n!$.

NOTA: La función Γ no es la única solución meromorfa de la ecuación funcional 7.6 pues si $g \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ es una función entera periódica de periodo 1 que cumple $g(1) = 1$ (p.e. $\cos(2\pi z)$) es fácil comprobar que $f(z) = g(z)\Gamma(z)$ también satisface esta ecuación funcional.

Considerando el límite de los productos parciales del producto infinito con el que se ha definido la función Γ se llega a la fórmula de Gauss en la que no interviene la constante de Euler γ:

Proposición 7.3.3 [Fórmula de Gauss] *Si $z \notin \{0, -1, -2, \cdots - n, \cdots\}$ se verifica*

$$\Gamma(z) = \lim_n \frac{n!\ n^z}{z(z+1)(z+2)\cdots(z+n)}$$

Dem: Basta tener en cuenta que $\Gamma(z) = \lim_n \Gamma_n(z)$ donde

$$\Gamma_n(z) = \frac{e^{-\gamma z}}{z} \prod_{k=1}^{n} \left(\frac{k}{k+z}\right) e^{z/k} = \frac{n! e^{z(S_n - \gamma)}}{z(z+1)(z+2)\cdots(z+n)}$$

donde $S_n = \sum_{k=1}^{n}(1/k)$. Multiplicando y dividiendo por $e^{z \log n}$ se llega a

$$\Gamma_n(z) = \frac{n!\ n^z}{z(z+1)(z+2)\cdots(z+n)} e^{z(S_n - \log n - \gamma)}$$

y teniendo en cuenta que $\lim_n(S_n - \log n - \gamma) = 0$ se obtiene el resultado

$$\lim_n \Gamma_n(z) = \lim_n \frac{n!\ n^z}{z(z+1)(z+2)\cdots(z+n)}$$

■

Proposición 7.3.4 [Fórmula de los complementos] *Si $z \notin \mathbb{Z}$ se cumple:*

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\operatorname{sen} \pi z}$$

Dem: Utilizando la ecuación funcional 7.9 se obtiene:

$$\Gamma(1-z)\Gamma(z) = -z\Gamma(-z)\Gamma(z) = \frac{-z}{F(z)F(-z)}$$

donde F es la función entera que interviene en la definición 7.3.1.

$$F(z) = \lim_m F_m(z) \quad \text{donde } F_m(z) = ze^{\gamma z} \prod_{n=1}^{m} \left(1 + \frac{z}{n}\right) e^{-z/n}$$

Teniendo en cuenta que

$$F_m(z)F_m(-z) = -z^2 \prod_{n=1}^{m} \left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right)$$

y la fórmula de la proposición 7.2.16 se obtiene

$$F(z)F(-z) = \lim_m F_m(z)F_m(-z) = -z^2 \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right) = -z\frac{\operatorname{sen} \pi z}{\pi}$$

luego

$$\Gamma(1-z)\Gamma(z) = \frac{-z}{F(z)F(-z)} = \frac{\pi}{\operatorname{sen} \pi z}$$

■

Con la fórmula 7.3.4 se obtiene $\Gamma(1/2)^2 = \pi$ y teniendo en cuenta que $\Gamma(x) > 0$ si $x > 0$ resulta $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$. Con la ecuación funcional 7.9 se obtienen los valores

$$\Gamma(n + 1/2) = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2^n}\sqrt{\pi} \quad \text{para} \quad n \in \mathbb{N}$$

Nuestro siguiente objetivo es demostrar que en el semiplano $\operatorname{Re} z > 0$ la función Γ es holomorfa y admite la representación integral clásica:

$$\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} e^{-t}t^{z-1}dt \quad \text{si} \quad \operatorname{Re} z > 0$$

Para obtenerla conviene recordar algunas cuestiones básicas sobre integrales impropias dependientes de un parámetro complejo.

Funciones definidas mediante integrales impropias. El resultado obtenido en el teorema 3.3.15 se extiende fácilmente al caso de integrales impropias que convergen uniformemente sobre compactos. Si $\Omega \subset \mathbb{C}$ es abierto y $F : [\alpha, +\infty) \times \Omega \to \mathbb{C}$ es continua, se dice que la integral impropia

$$f(z) = \int_\alpha^{+\infty} F(t, z)dt$$

converge uniformemente sobre compactos en Ω cuando para cada cada compacto $K \subset \Omega$ y cada sucesión $\beta_n > \alpha$ convergente hacia ∞ la sucesión de funciones $f_n(z) = \int_\alpha^{\beta_n} F(t,z)dt$ converge hacia $f(z)$ uniformemente sobre K. ■

Proposición 7.3.5 *Si $\Omega \subset \mathbb{C}$ es abierto y $F : [\alpha, +\infty) \times \Omega \to \mathbb{C}$ es continua la siguiente condición es suficiente para que la integral impropia*

$$f(z) = \int_\alpha^{+\infty} F(t,z)dt$$

sea uniformemente convergente sobre cada subconjunto compacto de Ω:
Para cada compacto $K \subset \Omega$ hay una función $\varphi_K : [a, +\infty) \to [0, +\infty)$, con $a \geq \alpha$, integrable Riemann en sentido impropio, $\int_a^{+\infty} \varphi_K(t)dt < +\infty$, tal que $|F(t,z)| \leq \varphi_K(t)$ para cada $z \in K$ y cada $t \geq a$.

DEM: Véase [17] ejerc. 5.49 ■

Proposición 7.3.6 *Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$ abierto y $F : [\alpha, +\infty) \times \Omega \to \mathbb{C}$ una función continua tal que todas las funciones parciales $z \to F(t,z)$, $(t \geq 0)$ son holomorfas en Ω. Si integral*

$$f(z) = \int_\alpha^{+\infty} F(t,z)dt$$

converge uniformemente sobre los subconjuntos compactos de Ω entonces $f \in \mathcal{H}(\Omega)$. Además, para cada $z \in \Omega$ la función $t \to F'(t,z)$ es continua en $[\alpha, +\infty)$ y

$$f'(z) = \int_\alpha^{+\infty} F'(t,z)dt$$

donde la integral sigue siendo uniformemente convergente sobre compactos de Ω.

DEM: Véase [17] ejerc. 5.50 ■

NOTA: Cuando el intervalo $[\alpha, +\infty)$ se reemplaza por un intervalo acotado $[\alpha, \beta)$ hay versiones análogas de las proposiciones 7.3.5 y 7.3.6 relativas a integrales impropias de segunda especie de la forma

$$f(z) = \int_\alpha^{\beta-} F(t,z)d$$

y también hay versiones similares para integrales impropias de la forma

$$\int_{-\infty}^{\beta} F(t,z)dz \quad \int_{\alpha+}^{\beta} F(t,z)dz$$

Estas versiones, aunque no han sido enunciadas explícitamente, se usan frecuentemente en lo que sigue.

Lema 7.3.7 *La integral impropia $f_0(z) = \int_0^1 e^{-t}t^{z-1}dt$ converge uniformemente sobre compactos en el semiplano $\{z : \operatorname{Re} z > 0\}$ donde define una función holomorfa y la integral impropia $f_1(z) = \int_1^{+\infty} e^{-t}t^{z-1}dt$ converge uniformemente sobre compactos en $\mathbb{C}$ donde define una función entera.*

DEM: Véase [17] ejerc. 5.52 ■

Teorema 7.3.8 [Representación integral]

$$\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} e^{-t}t^{z-1}dt \quad si \quad \operatorname{Re} z > 0$$

DEM: En virtud del lema 7.3.7 la integral impropia

$$f(z) = f_0(z) + f_1(z) = \int_0^{+\infty} e^{-t}t^{z-1}dt$$

define en el semiplano $\{z : \operatorname{Re} z > 0\}$, una función holomorfa. Según el principio de identidad basta demostrar que $\Gamma(x) = f(x)$ para todo $x \in [1+\infty)$. Esto se obtendrá como consecuencia directa de lo siguiente:

a) $\lim_n \int_0^n (1-t/n)^n t^{x-1}dt = \Gamma(x)$.

b) $\lim_n \left[\int_0^n e^{-t}t^{x-1}dt - \int_0^n (1-t/n)^n t^{x-1}dt\right] = 0$.

La integral que interviene en a) se puede calcular realizando primero el cambio de variable $s = t/n$ y luego sucesivas integrales por partes:

$$\int_0^n \left(1-\frac{t}{n}\right)^n t^{x-1}dt = \frac{n^x}{x}\int_0^1 n(1-s)^{n-1}s^x ds = \frac{n^x}{x(x+1)}\int_0^1 n(n-1)(1-s)^{n-2}s^{x+1}ds =$$

$$\cdots = \frac{n^x\ n!}{x(x+1)\cdots(x+n-1)}\int_0^1 s^{x+n-1}ds = \frac{n^x\ n!}{x(x+1)\cdots(x+n)}$$

Utilizando la fórmula de Gauss 7.3.3 se obtiene a).

Por otra parte, para obtener b) consideramos la desigualdad $1+x \leq e^x$ válida para todo $x \in \mathbb{R}$ de la que se sigue que para todo $t \in \mathbb{R}$ y todo $n \in \mathbb{N}$ valen las desigualdades

$$(1+t/n)^n \leq e^t; \quad (1-t/n)^n \leq e^{-t}$$

con las que se obtiene que para $t \in [0,n]$ vale la desigualdad

$$0 \leq e^{-t} - (1-t/n)^n = e^{-t}[1 - e^t(1-t/n)^n] \leq$$

$$\leq e^{-t}\left[1-(1+t/n)^n(1-t/n)^n\right] = e^{-t}\left[1-(1-(t/n)^2)^n\right]$$

Para los valores de $t \in [0,n]$ que intervienen en las integrales se cumple $(1-(t/n)^2) = a \leq 1$ luego

$$1-a^n = (1-a)(1+a+a^2+\cdots+a^{n-1}) \leq n(1-a) = n(t/n)^2 = t^2/n$$

y se llega a la desigualdad

$$0 \leq e^{-t} - (1 - t/n)^n \leq e^{-t} t^2/n$$

con la que se obtiene

$$\left| \int_0^n e^{-t} t^{x-1} dt - \int_0^n (1 - t/n)^n t^{x-1} dt \right| \leq \frac{1}{n} \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{x+1} dt = \frac{1}{n} f(x+2)$$

■

7.4. La función ζ de Riemann

Comenzamos definiendo la función ζ de Riemann en el semiplano $\Omega = \{z : \operatorname{Re} z > 1\}$ mediante la suma de la serie

$$\zeta(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^z} \text{ si } \operatorname{Re} z > 1$$

Con el criterio de Weierstrass se comprueba fácilmente que la serie converge uniformemente sobre cada compacto $K \subset \Omega$: Obsérvese que $\alpha = \text{mín}\{\operatorname{Re} z : z \in K\} > 1$ y que para todo $n \in \mathbb{N}$ y todo $z \in K$ se cumple

$$\left| \frac{1}{n^z} \right| \leq \frac{1}{n^x} \leq \frac{1}{n^\alpha}$$

Como hay convergencia uniforme sobre compactos, según el teorema de Weierstrass, la suma de la serie define una función holomorfa en el semiplano Ω.

Nuestro principal objetivo es demostrar que ζ se puede prolongar analíticamente a una función meromorfa en $\mathbb{C}$ con un único polo (simple) en $z = 0$ y que sus ceros fuera de la banda crítica $B = \{z : 0 \leq \operatorname{Re} z \leq 1\}$ (los llamados ceros triviales) son

$$\mathcal{Z}(\zeta) \setminus B = \{-2n : n \in \mathbb{Z}\}$$

En 1859 Riemann afirmó que la función ζ tiene infinitos ceros en la banda crítica y que el número de ceros $N(T)$ en $B \cap \{z : \operatorname{Im} z \in [0, T]\}$ verifica

$$N(T) = \frac{1}{2\pi} T \log T - \frac{1 + \log 2\pi}{2\pi} T + O(\log T)$$

La primera a afirmación fué demostrada por Hadamard en 1859 y la segunda por Mangolet en 1905. Riemann también formuló la conjetura de que todos los ceros de ζ en la banda crítica quedan en la recta $\operatorname{Re} z = 1/2$.

En 1914 Hardy logró demostrar que había infinitos ceros en esta recta y en 1938 Tichmarch demostró que en el rectángulo $\{x + iy : 0 \leq x \leq 1, 0 < y < 1648\}$ había exactamente 1041 ceros, todos ellos en la recta $\operatorname{Re} z = 1/2$. En 1975 Levison demostró que esta recta contenía asintóticamente más de 1/3 de los ceros que tiene ζ en la banda B.

Posteriormente, con ayuda de las computadoras se han extendido los cálculos que siguen avalando la conjetura de Riemann que afirma que los infinitos ceros de ζ en la banda crítica están en la recta $\operatorname{Re} z = 1/2$. Este es uno de los problemas abiertos más celebres de las matemáticas y su solución positiva tendría importantes repercusiones en la teoría de números.

La relación de la función ζ de Riemann con la teoría de números se pone de manifiesto con el siguiente teorema que sirve, entre otras cosas, para demostrar que ζ no tiene ceros en el semiplano $\operatorname{Re} z > 1$.

Teorema 7.4.1 [Euler] *Si* (p_n) *es la sucesión de los números primos* $(2, 3, 5, 7, \cdots)$ *y* $\operatorname{Re} z > 1$ *se verifica*

$$\zeta(z) = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1 - p_n^{-z}}$$

donde el producto converge uniformemente sobre cada compacto $K \subset \{z : \operatorname{Re} z > 1\}$.

DEM: Véase [17] ejerc. 11.10 ■

Corolario 7.4.2 $\zeta(z) \neq 0$ *si* $\operatorname{Re} z > 1$.

DEM: Es consecuencia inmediata de 7.4.1 ■

El siguiente lema, análogo al lema 7.3.7 proporciona una función F holomorfa en el semiplano $\{z : \operatorname{Re} z > 1\}$ que será utilizada para lograr la prolongación analítica de la función ζ

Lema 7.4.3 *La integral*

$$F(z) = \int_0^{+\infty} \frac{t^{z-1}}{e^t - 1}\, dt$$

define una función holomorfa en el semiplano $\Omega_1 = \{z : \operatorname{Re} z > 1\}$. *Más concretamente:*
i) La integral $F_0(z) = \int_0^1 t^{z-1}/(e^t - 1)\, dt$ *converge uniformemente sobre compactos en* Ω_1 *donde define una función holomorfa.*
ii) La integral $F_1(z) = \int_1^{+\infty} t^{z-1}/(e^t - 1)\, dt$ *converge uniformemente sobre compactos en* $\mathbb{C}$ *donde define una función entera.*

DEM: Véase [17] ejerc. 5.53 ■

Proposición 7.4.4 *Si* $\operatorname{Re} z > 1$ *se verifica* $\zeta(z)\Gamma(z) = F(z)$ *donde* F *es la función considerada en el lema 7.4.3.*

DEM: Véase [17] ejerc. 11.11 ■

Proposición 7.4.5 *La función*

$$F(z) = \int_0^{+\infty} \frac{t^{z-1}}{e^t - 1}\, dt$$

definida y holomorfa en $\Omega_1 = \{z : \operatorname{Re} z > 1\}$ *(lema 7.4.3) se puede prolongar a una (única) función* $\hat{F} \in \mathcal{M}(\mathbb{C})$ *con polos simples en* $\{1, 0, -1, -3, -5, \cdots -(2n+1), \cdots\}$.

DEM: Consideremos la descomposición $F(z) = F_0(z)+F_1(z)$ donde F_0 y F_1 son las funciones definidas por las integrales que intervienen en el lema 7.4.3. Como F_1 está definida en todo el plano para conseguir la prolongación meromorfa de F basta obtener una prolongación meromorfa de F_0. En el ejercicio 6.33 de [17] se muestra como obtenerla mediante una serie de funciones meromorfas, sin polos en Ω_1, que converge uniformemente sobre compactos en todo el plano. ■

Combinando las dos últimas proposiciones se obtiene

Teorema 7.4.6 *La función ζ se puede prolongar analíticamente a una función meromorfa en $\mathbb{C}$ con un único polo simple en $z = 1$ y ceros en los puntos* $\{-2n : n \in \mathbb{N}\}$

DEM: Si $\hat{F}$ es la prolongación meromorfa de F obtenida la proposición 7.4.5, en virtud de la proposición 7.4.4 la función meromorfa $\hat{F}/\Gamma$ es una prolongación de ζ a todo el plano complejo. Obsérvese que los polos simples que tiene $\hat{F}$ en $\{0, -1, -3, \cdots - (2n+1), \cdots\}$ se cancelan con los polos simples de Γ en los mismos puntos. Los polos de Γ que no se han cancelado $\{-2n : n \in \mathbb{N}\}$ dan lugar a ceros de la función ζ ■

Nuestro último objetivo es demostrar que en el semiplano $\{z : \operatorname{Re} z < 0\}$ la función ζ no tiene más ceros que los que se han obtenido con el teorema 7.4.6. Esto es consecuencia de la ecuación funcional de Riemann 7.4.8 cuya demostración requiere, entre otras cosas, el siguiente lema.

Lema 7.4.7 *Sea $\hat{F} \in \mathcal{M}(\mathbb{C})$ la prolongación meromorfa de*

$$F(z) = \int_0^{+\infty} \frac{t^{z-1}}{e^t - 1} dt, \quad \operatorname{Re} z > 1$$

obtenida en la proposición 7.4.5. Si $\operatorname{Re} z \in (-1, 0)$ *se verifica*

$$\hat{F}(z) = \int_0^{+\infty} \left(\frac{1}{e^t - 1} - \frac{1}{t} + \frac{1}{2} \right) t^{z-1} dt$$

donde la integral converge uniformemente sobre cada compacto $K \subset \{z : -1 < \operatorname{Re} z < 0\}$

DEM: Véase [17] ejerc. 6.34 ■

Teorema 7.4.8 [Ecuación funcional de Riemann]

$$\zeta(z) = 2(2\pi)^{z-1}\Gamma(1-z)\zeta(1-z) \operatorname{sen}\left(\frac{\pi z}{2}\right)$$

DEM: Véase [17] ejerc. 11.12 ■

Corolario 7.4.9 *Los únicos ceros de ζ en el semiplano* $\operatorname{Re} z < 0$ *son* $\{-2n : n \in \mathbb{N}\}$.

DEM: Si $\operatorname{Re} z < 0$ entonces $\operatorname{Re}(1-z) > 1$ y por lo tanto $\zeta(1-z) \neq 0$ (corolario 7.4.2). Entonces, en virtud de la ecuación funcional 7.4.8 en el semiplano $\operatorname{Re} z < 0$ la función ζ tiene los mismos ceros que $\operatorname{sen}(\pi z/2)$, es decir $\{-2n : n \in \mathbb{N}\}$. ■

7.5. Ejercicios

$\diamondsuit$ **7.1** *Compruebe que la serie*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(z-n)^2}$$

converge uniformemente sobre compactos y define una función $f \in \mathcal{M}(\mathbb{C})$ tal que $P(f) = \mathbb{N}$ y cada $n \in \mathbb{N}$ es un polo doble con parte principal $1/(z-n)^2$. ([17] ejerc. 6.28)

$\diamondsuit$ **7.2** *En cada caso determine las funciones $f \in \mathcal{M}(\mathbb{C})$ que verifican*

i) Presentan polos simples en a^n con Res$(f, a^n) = a^n$, donde $|a| > 1, n = 1, 2, 3....$;

ii) Presentan polos simples en cada $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ con Res$(f, n) = |n|$;

iii) Presentan polos simples en cada $n \in \mathbb{Z}$ con Res$(f, n) = (-1)^n$;

$\diamondsuit$ **7.3** *Defina, mediante una serie, una función $f \in \mathcal{M}(\mathbb{C})$ con polos $P(f) = \mathbb{N}$, tal que la parte principal en cada $n \in \mathbb{N}$ sea $n^2/(z-n)^2 + 1/(z-n)$ ([17] ejerc. 6.29).*

$\diamondsuit$ **7.4** *Sea $a_n \in \mathbb{C}$ una sucesión de puntos distintos tal que $\sum_{n=1}^{\infty} 1/|a_n| < +\infty$. Demuestre que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} 1/(z-a_n)$ converge en $\mathbb{C}$ uniformemente sobre compactos y que la suma es una función $f \in \mathcal{M}(\mathbb{C})$, con polos simples $P(f) = \{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ y residuo Res$(f, a_n) = 1$ ([17] ejerc. 6.30).*

$\diamondsuit$ **7.5** *Sea a_n una sucesión de números complejos distintos dos a dos tal que $|a_1| \le |a_2| \le \cdots |a_n| \le \cdots$; Se supone que existe $m \in \mathbb{N}$ verificando*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{|a_n|^m} = +\infty; \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{|a_n|^{m+1}} < +\infty$$

Compruebe que al aplicar el teorema 7.1.2, con $P_n(z) \equiv z$ para todo $n \in \mathbb{N}$, es posible elegir todos los polinomios Q_n de grado $m-1$ ([17] ejerc. 6.31).

$\diamondsuit$ **7.6** *Obtenga la factorización*

$$e^z - 1 = ze^{z/2} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z^2}{4\pi^2 n^2}\right)$$

([17] ejerc. 11.3)

$\diamondsuit$ **7.7** *Sea $a_1 < a_2 < ... < a_n < ...$ una sucesión estrictamente creciente de números reales no nulos que cumple $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{|a_n|^2} < +\infty$. Demuestre que el producto*

$$f(z) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{a_n}\right) e^{z/a_n}$$

converge uniformemente sobre compactos y define una función entera f cuya derivada tiene un único cero en cada intervalo (a_n, a_{n+1}).

♢ **7.8** *Se supone que* $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ *tiene una infinidad de ceros* $\{a_1, a_2, ..., a_n, ...\}$*, todos simples, que verifican*

$$0 < |a_1| < |a_2| < ... < |a_n| < ... \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{|a_n|^2} < +\infty$$

y que existe una sucesión ρ_n, $|a_n| < \rho_n < |a_{n+1}|$ *tal que* $\lim_{n\to\infty} M_n/\rho_n = 0$ *donde*

$$M_n = \sup\{|f'(z)/f(z)| : |z| = \rho_n\}$$

Demuestre que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z}{a_n(z - a_n)} = \frac{f'(z)}{f(z)} - \frac{f'(0)}{f(0)}; \qquad f(z) = f(0)e^{zf'(0)/f(0)} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{a_n}\right) e^{z/a_n}$$

♢ **7.9** *Demuestre que el producto* $f(z) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{n^2+1}\right)$ *define una función entera. Indique una corona circular, centrada en* 0*, donde* f *tenga raíz cúbica holomorfa y calcule*

$$\int_{C_R} f(1/z)dz, \quad donde \quad C_R(t) = Re^{it}, \quad t \in [0, 2\pi]$$

♢ **7.10** *Demuestre que el producto* $f(z) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n^2 z}\right)$ *define una función holomorfa en* $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ *con una singularidad esencial en* 0*.*
¿Posee f *un logaritmo holomorfo en* $\{z : |z| > 1\}$*?.*

♢ **7.11** *Sea* $a_k \in D^*(0,1)$ *una sucesión tal que* $\sum_{k=1}^{\infty}(1 - |a_k|) < +\infty$*. Demuestre que el producto*

$$f(z) = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{|a_k|}{a_k} \left(\frac{a_k - z}{1 - \overline{a_k}z}\right)$$

define en $D(0,1)$ *una función holomorfa* $f \in \mathcal{H}(D(0,1))$ *con ceros* $\{a_k : k \in \mathbb{N}\}$*, tal que* $|f(z)| < 1$ *para todo* $z \in D(0,1)$ *([17] ejerc. 11.5).*

♢ **7.12** *Considerando un producto de la forma* $\prod_{n=1}^{+\infty} \frac{z - a_n}{z - b_n}$ *demuestre que existe una función* f *no idénticamente nula y holomorfa en* $P = \{z : \operatorname{Im} z > 0\}$ *, tal que cada punto del eje real es un punto de acumulación de ceros de* f*.*

Si $a + bi \in P$ *establezca la igualdad* $\limsup_n \frac{1}{n!} \sqrt[n]{|f^{(n)}(a + bi)|} = \frac{1}{b}$.

♢ **7.13** *Demuestre que* $f(z) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \left(\frac{nz}{n-1}\right)^n\right)$ *define una función holomorfa en* $D(0,1)$ *que verifica*

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{\frac{|f^{(n)}(z)|}{n!}} = \frac{1}{1 - |z|} \quad si\ |z| < 1$$

♢ **7.14** *Demuestre que existe* $f \in \mathcal{H}(D(0,1))$ *que no admite prolongación analítica a cada abierto conexo* $\Omega \supset D(0,1)$, $\Omega \neq D(0,1)$. *¿Se verifica el mismo resultado cuando en vez del disco* $D(0,1)$ *se considera un abierto arbitrario?.*

♢ **7.15** *Sea* $M \subset \Omega$ *tal que* $M' \cap \Omega = \emptyset$. *Se supone que para cada* $a \in M$ *se ha fijado una sucesión finita de números complejos* $\{c_n(a) \in \mathbb{C} : 0 \leq n \leq m(a)\}$. *Demuestre que existe* $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ *tal que* $f^{(n)}(a) = n!c_n(a)$ *para cada* $a \in M$ *y cada* $0 \leq n \leq m(a)$.
Indicación: Dada una sucesión finita de números complejos $c_0, c_1, \cdots c_m$ *y un desarrollo en serie de potencias de la forma*

$$F(z) = a_{m+1}z^{m+1} + a_{m+2}z^{m+2} + a_{m+3}z^{m+3} + \cdots, \quad |z| < r$$

existe una función racional de la forma

$$P(1/z) = \frac{b_1}{z} + \frac{b_2}{z^2} + \cdots + \frac{b_{m+1}}{z^{m+1}}$$

tal que el desarrollo en serie de potencias de $P(1/z)F(z)$ *en* $z = 0$ *comienza así:*

$$P(1/z)f(z) = c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \cdots + c_m z^m + \cdots$$

([17] ejerc. 11.6)

♢ **7.16** *Demuestre que para todo* $x \in \mathbb{R}$ *se cumple* $x \operatorname{sh} \pi x |\Gamma(ix)|^2 = \pi$.

♢ **7.17** *Demuestre que para cada* $z \in \mathbb{C} \setminus \{n \in \mathbb{Z} : n \leq 0\}$ *se verifica*

$$\frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)} = -\gamma - \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z}{n(n+z)}$$

(γ *es la constante de Euler) y que la serie converge uniformemente sobre compactos. Deduzca de ello que* $\log \Gamma(x)$ *es una función convexa en* $(0, +\infty)$ *([17] ejerc. 11.7).*

♢ **7.18** *Demuestre el siguiente teorema de Bohr-Mollerup: Si* $f : (0, +\infty) \to (0, +\infty)$ *es una función que cumple cumple*

i) $\log f(x)$ *es convexa;*

ii) $f(1) = 1$, *y* $f(x+1) = xf(x)$ *si* $x > 0$*;*

entonces $f(x) = \Gamma(x)$ *para cada* $x > 0$ *([17] ejerc. 11.8).*

♢ **7.19** *Si* $0 < x < y$ *obtenga las desigualdades:*

$$\Gamma'(x)\Gamma(y) < \Gamma(x)\Gamma'(y); \qquad \Gamma\left(\frac{x+y}{2}\right) < \sqrt{\Gamma(x)\Gamma(y)}.$$

♢ **7.20** *Demuestre que la función* $f = \Gamma'/\Gamma$ *verifica:*

$$f(z+1) - f(z) = 1/z; \quad f(1-z) - f(z) = \pi \cot \pi z$$

♢ **7.21** *Demuestre que la función* $f = \Gamma'/\Gamma$ *verifica* $f'(z) + f'(z + \frac{1}{2}) = 4f'(2z)$ *y deduzca de ello la fórmula de duplicación de Legendre:*

$$\sqrt{\pi}\Gamma(2z) = 2^{2z-1}\Gamma(z)\Gamma(z + 1/2)$$

([17] ejerc. 11.9).

♢ **7.22** *Demuestre que el producto* $f(z) = z\prod_{n=1}^{\infty}\left(1 + \frac{z}{\sqrt{n}}\right) exp\left(-\frac{z}{\sqrt{n}} + \frac{z^2}{2n}\right)$ *converge uniformemente sobre compactos y define una función entera que verifica* $f(z)f(-z)\Gamma(-z^2) = e^{g(z)}$ *donde* g *es una función entera que hay que determinar.*

♢ **7.23** *Si* $\varphi : [0, +\infty) \to \mathbb{C}$ *es continua y* $|\varphi(t)| < Ae^{ct}$ *para todo* $t \geq R > 0$, *demuestre que* $\int_0^{+\infty} e^{-zt}\varphi(t)dt$ *define una función holomorfa en* $\{z : \operatorname{Re} z > c\}$. *([17] ejerc. 5.51).*

♢ **7.24** *Sea* $F : \mathbb{R} \times \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ *definida por* $F(t, z) = \dfrac{e^{-t} - e^{-tz}}{t}$ *si* $t \neq 0$, $F(t, z) = z - 1$ *si* $t = 0$. *Demuestre que* F *es continua y que*

$$\int_0^{+\infty} F(t, z)dt = \operatorname{Log} z \quad \textit{si } \operatorname{Re} z > 0$$

([17] ejerc. 5.54).

♢ **7.25** *Demuestre que para* $\operatorname{Re} z > 0$ *se cumple*

$$\int_0^1 t^{z-1}e^{-t}dt = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!(n + z)}$$

y que la serie define en $\mathbb{C}$ *una función meromorfa que prolonga a la función definida por la integral en* $\{z : \operatorname{Re} z > 0\}$. *Obtenga así el desarrollo de Mittag-Leffler de* Γ*:*

$$\Gamma(z) = \int_1^{+\infty} t^{z-1}e^{-t}dt + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!(n + z)}, \qquad z \notin \{n \in \mathbb{Z} : n \leq 0\}$$

([17] ejerc. 6.32).

Capítulo 8

Transformaciones conformes

En este capítulo se completa el estudio de las propiedades geométricas de las funciones holomorfas, o meromorfas, consideradas como transformaciones del plano complejo ampliado (o esfera de Riemann). Después de extender la noción de derivada al caso de la funciones con dominio y con valores en el plano complejo ampliado se interpreta sobre la esfera de Riemann la propiedad de conservación de ángulos orientados que tienen las funciones con derivada no nula. Así se extienden a este contexto más general las nociones de transformación conforme e isomorfismo conforme con las que se plantean los problemas centrales de la materia: Determinar cuando dos subconjuntos abiertos de $\mathbb{C}_\infty$ son conformemente equivalentes, y caracterizar los que son conformemente equivalentes a un abierto más sencillo, como el disco unidad.

Dado un abierto $\Omega \subset \mathbb{C}_\infty$ el problema de encontrar un isomorfismo conforme entre Ω y un abierto más sencillo G tiene gran trascendencia desde el punto de vista de las aplicaciones: El isomorfismo conforme permite efectuar un cambio de variable con el que cierto problema, planteado inicialmente en Ω, se puede convertir en un problema similar, planteado en G, de tratamiento más sencillo. En el capítulo 9 veremos algún ejemplo concreto de este modo de proceder.

En los capítulos 1 y 2 ya se han considerado algunas transformaciones conformes que se pueden establecer usando funciones elementales: En particular se han estudiado con detalle las transformaciones de Möbius que proporcionan todos automorfismos conformes de $\mathbb{C}_\infty$. Uno de los resultados centrales de este capítulo es el teorema del módulo máximo 8.2.4 con el que se demuestra el Lema de Schwarz 8.2.6 que tiene consecuencias tan interesantes como la caracterización, mediante subgrupos de transformaciones de Möbius, de todos los automorfismos conformes del disco $D(0,1)$ y del semiplano (8.2.7; 8.2.8). Los resultados sobre transformaciones conformes continúan en el siguiente capítulo donde culminan con el célebre teorema de Riemann según el cual todo abierto simplemente conexo $\Omega \subsetneq \mathbb{C}$ es conformemente equivalente al disco $D(0,1)$.

8.1. Transformaciones en la esfera de Riemann

En esta sección, se completan definiciones y resultados del capítulo 4. Allí, al considerar las singularidades evitables en ∞, se formuló la definición de derivada en el punto ∞, (sólo en el caso de funciones $f : \Omega \to \mathbb{C}$ con valores finitos): Se dice que f es derivable en $\infty \in \Omega \subset \mathbb{C}_\infty$ cuando la función auxiliar $F(z) := f(1/z)$, definida en un entorno de 0, es derivable en $z = 0$ (aquí se usa el convenio habitual $1/0 = \infty$). En este caso se define $f'(\infty) = F'(0)$. La definición se extiende de forma natural al caso de funciones que puedan tomar el valor ∞:

Definición 8.1.1 *Dada una función $f : \Omega \to \mathbb{C}_\infty$, donde $\Omega \subset \mathbb{C}_\infty$ es abierto y $a \in \Omega$*
i) Si $f(a) \in \mathbb{C}$, se dice que f es derivable en a cuando existe $r > 0$ tal que $f(D(a,r)) \subset \mathbb{C}$ y $f|_{D(a,r)}$ es derivable en a.
ii) Si $f(a) = \infty$, se dice que f es derivable en a cuando la función $1/f$ es derivable en a según la definición i). En este caso se define $f'(a) = (1/f)'(a)$

Conviene advertir que en la definición anterior está considerada la posibilidad $a = \infty$. En este caso, si $f(\infty) = \infty$, la derivabilidad de f en ∞ significa que la función auxiliar $F(z) = 1/f(1/z)$ es derivable en 0, siendo $f'(\infty) = F'(0)$.

Obsérvese que si f es derivable en $a \in \Omega \subset \mathbb{C}_\infty$ entonces f es continua en a: Es obvio cuando a y $f(a)$ son finitos, y en otro caso, cuando $a = \infty$ ó $f(a) = \infty$, basta tener en cuenta el caso anterior y que la transformación $z \to 1/z$ es una isometría de $\mathbb{C}_\infty$.

Ejemplos 8.1.2

a) Si $f = P/Q$ es una función racional donde P, Q son polinomios sin ceros comunes, entonces f es derivable en cada $a \in \mathbb{C}_\infty$ (se supone definido $f(a) = \infty$ si $Q(a) = 0$ y $f(\infty) = \lim_{z \to \infty} f(z)$).

   Basta ver que si $f(a) = \infty$ entonces f es derivable en a: Si $a \in \mathcal{Z}(Q)$ entonces $P(a) \neq 0$ y es inmediato que $1/f = Q/P$ es derivable en $z = a$; si $f(\infty) = \infty$ entonces grado(P) − grado$(Q) \geq 1$ y por lo tanto $1/f = Q/P$ es derivable en ∞ según se ha visto en 4.3.14.

b) Si F, G son holomorfas en un abierto conexo $\Omega \subset \mathbb{C}_\infty$ sin ceros comunes, entonces $f = F/G$ es derivable en todo $a \in \Omega$ (se supone definido $f(a) = \infty$ si $G(a) = 0$).

   Basta ver que f es derivable en a cuando $f(a) = \infty$: En el caso $a \neq \infty$ el resultado es inmediato; en el caso $a = \infty \in \Omega$ basta considerar $f(1/z) = F(1/z)/G(1/z)$ que es derivable en $a = 0$ por lo que se acaba de ver en el caso anterior.

Lema 8.1.3 *Sea $f : \Omega \to \mathbb{C}_\infty$, definida en un abierto $\Omega \subset \mathbb{C}_\infty$. Son equivalentes:*

a) f es derivable en cada $a \in \Omega$.

b) Para cada $a \in \Omega$ existe $D(a,r) \subset \Omega$ tal que una de las dos funciones f, $1/f$ toma valores finitos en $D(a,r)$ y es derivable en sentido usual.

DEM: a) ⇒ b): Si se cumple a) entonces f es continua en Ω. Dado $a \in \Omega$, si $f(a) \in \mathbb{C}$, usando la continuidad de f en a se obtiene $D(a,r) \subset \Omega$ tal que $f(D(a,r)) \subset \mathbb{C}$ luego f es derivable en cada $z \in D(a,r)$. Por otra parte, si $f(a) = \infty$, razonando de forma similar con $1/f$, se deduce que existe $D(a,r) \subset \Omega$ tal que $(1/f)(D(a,r)) \subset \mathbb{C}$. Se sigue de esto $1/f$ es derivable en cada $b \in D(a,r)$: la afirmación es obvia cuando $f(b) = \infty$, y es consecuencia de la derivabilidad de f en b cuando $f(b) \neq \infty$, ya que $f(b) \neq 0$.

b) ⇒ a): Sea $a \in \Omega$. Si $f(D(a,r)) \subset \mathbb{C}$, el resultado es trivial. Si $(1/f)(D(a,r) \subset \mathbb{C}$ y $1/f \in \mathcal{H}(\Omega)$ entonces $f(z) \neq 0$ para todo $z \in D(a,r)$ y para ver que f es derivable en cada $b \in D(a,r)$ basta considerar los casos $1/f(b) = 0$ y $1/f(b) \neq 0$. En el primer caso, al ser $f(b) = \infty$ se obtiene que f es derivable en b en virtud de la definición 8.1.1, y en el segundo caso aplicando las reglas para la derivabilidad (usual) de un cociente ■

Proposición 8.1.4 *Si $\Omega \subset \mathbb{C}_\infty$ es un abierto conexo y $f : \Omega \to \mathbb{C}_\infty$ no es la función constante ∞ son equivalentes*

a) f es meromorfa;

b) f es derivable en cada $z \in \Omega$

DEM: Véase [17] ejerc. 6.27 ■

El principio de identidad y el teorema de la aplicación abierta siguen valiendo para funciones meromorfas:

Teorema 8.1.5 *Si $\Omega \subset \mathbb{C}_\infty$ es un abierto conexo, $f \in \mathcal{M}(\Omega)$ y $\mathcal{Z}(f)' \cap \Omega \neq \emptyset$. entonces f es idénticamente nula.*

DEM: Sea $a \in \mathcal{Z}(f)' \cap \Omega$. Por continuidad es $f(a) = 0$ luego $a \in \Omega \setminus \mathcal{P}(f)$. Si $a \neq \infty$ entonces $G = \Omega \setminus (\mathcal{P}(f) \cup \{\infty\})$ es un subconjunto abierto conexo de $\mathbb{C}$ y $f|_G$ es holomorfa con un cero no aislado en $z = a$. Como $f|_G$ es idénticamente nula f también lo es. Si $a = \infty$ aplicando el razonamiento anterior a $f(1/z)$ se concluye que f es idénticamente nula. ■

Teorema 8.1.6 *Si $\Omega \subset \mathbb{C}_\infty$ es un abierto conexo y $f \in \mathcal{M}(\Omega)$ no es constante entonces $f : \Omega \to \mathbb{C}_\infty$ es una transformación abierta. En particular, toda función racional no constante $f : \mathbb{C}_\infty \to \mathbb{C}_\infty$ es abierta.*

DEM: En virtud de 8.1.4 f es derivable en cada $a \in \Omega$ (según la definición 8.1.1). Hay que demostrar que para cada $a \in \Omega$ existe un disco $D(a,r) \subset \Omega$ tal que $f(D(a,r))$ es abierto en $\mathbb{C}_\infty$. En el caso $a \in \mathbb{C}$ y $f(a) \in \mathbb{C}$ este hecho es consecuencia directa del teorema de la aplicación abierta 4.2.3. En otro caso, si $a = \infty$ ó si $f(a) = \infty$, basta aplicar el resultado anterior a la función auxiliar adecuada y tener en cuenta que la transformación $z \to 1/z$ es un homeomorfismo de $\mathbb{C}_\infty$. ■

NOTA: En las condiciones de 8.1.6 si $a \in \Omega$ y $f(a) = \infty$ el comportamiento local de f en el punto a es similar al descrito en 4.2.2, siendo ahora m la multiplicidad de a como polo de f. Para ver esto basta aplicar 4.2.2 a la función auxiliar adecuada que es $1/f(z)$ cuando $a \neq \infty$, y $1/f(1/z)$ cuando $a = \infty$).

Corolario 8.1.7 *Si $\Omega \subset \mathbb{C}_\infty$ es abierto y $f \in \mathcal{M}(\Omega)$ es inyectiva entonces $f'(a) \neq 0$ para cada $a \in \Omega$, $G = f(\Omega)$ es abierto la inversa $g = f^{-1} : G \to \Omega$ es meromorfa (holomorfa si $\infty \notin \Omega$) y se cumple que $g'(b) \neq 0$ para todo $b \in G$.*

DEM: Se deja como ejercicio. Basta razonar como en la demostración del corolario 4.2.4 con las modificaciones pertinentes. ■

Transformaciones conformes en la esfera. Después de haber extendido la noción de derivada al caso de funciones definidas en un abierto $\Omega \subset \mathbb{C}_\infty$ con valores en $\mathbb{C}_\infty$ consideramos aquí el significado geométrico de la condición $f'(a) \neq 0$. Cuando $a = \infty$ ó $f(a) = \infty$ la interpretación geométrica se logra a través de la transformación inducida, mediante la proyección estereográfica, en la esfera de Riemann. El hecho de que las transformaciones derivables en sentido generalizado con derivada no nula inducen en la esfera de Riemann transformaciones que conservan ángulos orientados es la principal motivación para la definición 8.1.1 de función derivable en ∞ (o en un punto a con $f(a) = \infty$).

La noción de ángulo orientado de un par de vectores no nulos se puede dar en todo espacio euclídeo orientado de dimensión 2, después de identificarlo con $\mathbb{C}$ mediante una base ortonormal positiva. Si E es un espacio euclídeo bidimensional orientado y $\beta = \{\mathbf{e_1}, \mathbf{e_2}\}$ una base ortonormal positiva de E, podemos identificar E con $\mathbb{C}$ mediante la aplicación $T_\beta(x\mathbf{e_1} + y\mathbf{e_2}) = x + iy$ y definir el ángulo orientado de un par ordenado de vectores no nulos $(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \in E \times E$ como el número $\operatorname{Arg}(T_\beta(\mathbf{v})/T_\beta(\mathbf{u}))$. Es fácil comprobar que esta definición no depende de la base ortonormal positiva elegida en E.

Si E_1, E_2 son espacios euclídeos orientados de dimensión 2, dada una aplicación $f : U \to E_2$ definida en un abierto $U \subset E_1$, se puede extender la noción de conservación de ángulos orientados en un punto $a \in U$ (véase 8.1.8). En este contexto se sigue cumpliendo que una aplicación lineal $L : E \to F$ conserva ángulos orientados si y sólo si es no singular y el ángulo orientado de cada par ordenado de vectores no nulos $(\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2)$ de E coincide con el de sus imágenes $(L(\mathbf{w}_1), L(\mathbf{w}_2))$.

Después de esto, la noción de aplicación que conserva ángulos orientados en un punto se puede extender al caso de una aplicación $F : U \to S$ cuyo dominio U es un abierto de la esfera de Riemann S. Dado un punto $p \in S$ sea E_p el espacio vectorial tangente a S en p dotado de la estructura euclídea inducida por la del espacio ambiente $\mathbb{R}^3$ en el que se considera inmerso, y orientado mediante el vector normal entrante, es decir, $\{\mathbf{u_1}, \mathbf{u_2}\}$ es base positiva de E_p cuando $\{\mathbf{u_1}, \mathbf{u_2}, \mathbf{n}\}$ es base positiva para la orientación canónica de $\mathbb{R}^3$, siendo $\mathbf{n}$ un vector normal entrante a S en p.

Una aplicación F definida en un abierto $U \subset S$, (resp. $U \subset \mathbb{C}$) con valores en S (ó en $\mathbb{C}$) se dice que conserva ángulos orientados en $p \in U$ cuando ocurre lo siguiente:
Si $\gamma_1, \gamma_2 : [0, 1] \to U$ son dos curvas derivables que surgen de p con vectores tangentes no nulos $\mathbf{v}_1 = \gamma_1'(0)$, $\mathbf{v}_2 = \gamma_2'(0)$ entonces sus imágenes son caminos derivables que surgen de $q = F(p)$, con vectores tangentes no nulos

$$\mathbf{w}_1 = (F \circ \gamma_1)'(0), \quad \mathbf{w}_2 = (F \circ \gamma_2)'(0)$$

y el ángulo orientado del par $(\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2)$ coincide con el ángulo orientado del par $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)$.

A la hora de interpretar, sobre la esfera de Riemann, el significado geométrico de las transformaciones conformes conviene tener presente que la proyección estereográfica conserva ángulos orientados según la anterior definición:

Proposición 8.1.8 *Para cada* $p \in S = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\}$ *sea* E_p *el espacio tangente a* S *en* p*, dotado de la estructura euclídea inducida por la de* $\mathbb{R}^3$*,* *orientado mediante el vector normal entrante en p. Si $\Phi : S \to \mathbb{C}$ es la la inversa de la proyección estereográfica*

$$\Phi(x_1, x_2, x_3) = \frac{x_1 + ix_2}{1 - x_3}$$

y $p \neq (0,0,1)$, entonces $d\Phi(p)|_{E_p}$ conserva ángulos orientados.

DEM: Véase [17] ejerc. 2.37 ■

Toda función meromorfa f en un abierto $\Omega \subset \mathbb{C}_\infty$ induce una transformación sobre la esfera de Riemann S: Si $U = \Psi(\Omega) \subset S$ es el abierto que corresponde a Ω mediante la proyección estereográfica, la transformación inducida en la esfera de Riemann S es

$$F = \Psi \circ f \circ \Psi^{-1} : U \to S$$

Así por ejemplo, la transformación que $h(z) = 1/z$ induce en la esfera viene dada por $H(x_1, x_2, x_3) = (x_1, -x_2, -x_3)$ (un giro de amplitud π, alrededor del eje Ox_1).

Si $a \in \Omega$, $p = \Psi(a)$ y $q = F(p)$, la condición $f'(a) \neq 0$ tiene un significado geométrico interesante: Si se orienta la esfera con el vector normal entrante y E_p es el espacio tangente en p con la orientación inducida entonces $dF(p) : E_p \to E_q$ conserva ángulos orientados.

Para justificar esta afirmación basta tener en cuenta el resultado correspondiente para las transformaciones holomorfas del plano con derivada no nula y el resultado que se expone en 8.1.8, teniendo en cuenta que la transformación inducida en la esfera por $1/z$ es un giro de amplitud π alrededor del eje Ox_1 (véase [17] ejerc. 3.42).

Mediante la siguiente definición, que completa la formulada en 2.5.7, las nociones de transformación conforme y de isomorfismo conforme se extienden forma natural al caso de aplicaciones $f : \Omega \to \mathbb{C}_\infty$ definidas en un abierto $\Omega \subset \mathbb{C}_\infty$.

Definición 8.1.9 *Una función $f : \Omega \to \mathbb{C}_\infty$ se dice que es conforme en el abierto $\Omega \subset \mathbb{C}_\infty$ si f es derivable en cada $z \in \Omega$ con $f'(z) \neq 0$. Un isomorfismo conforme del abierto $\Omega_1 \subset \mathbb{C}_\infty$ sobre el abierto $\Omega_2 \subset \mathbb{C}_\infty$ es una aplicación biyectiva $f : \Omega_1 \to \Omega_2$ tal que f y f^{-1} son conformes.*

OBSERVACIÓN: En virtud de 8.1.4, toda aplicación conforme $f : \Omega \to \mathbb{C}_\infty$ definida en un abierto $\Omega \subset \mathbb{C}_\infty$ es meromorfa. Además, cuando f es inyectiva, en virtud de 8.1.7, $f(\Omega) \subset \mathbb{C}_\infty$ es abierto y f establece un isomorfismo conforme entre Ω y su imagen $f(\Omega)$.

Ejemplo 8.1.10 *Dada una transformación de Möbius $T(z) = (az + b)/(cz + d)$, donde $ac - bd \neq 0$, es fácil comprobar que para cada $z \in \mathbb{C}_\infty$ se cumple $T'(z) \neq 0$, luego T es un isomorfismo conforme de $\mathbb{C}_\infty$.*

DEM: Efectivamente,cuando $c \neq 0$

$$T'(\infty) = (bc - ad)/c^2 \neq 0; \quad T'(-d/c) = c^2/(bc - ad) \neq 0$$

$$T'(z) = (ad - bc)/(cz + d)^2 \neq 0 \quad \text{si} \quad z \notin \{\infty, -d/c\}.$$

(el caso $c = 0$, que es más breve, se deja al cuidado del lector). ■

Recuérdese que una propiedad característica de las transformaciones de Möbius es la de transformar circunferencias en circunferencias (se consideran las rectas como circunferencias que pasan por ∞). Puesto que las transformaciones de Möbius son automorfismos conformes de $\mathbb{C}_\infty$ se sigue que deben transformar circunferencias ortogonales en circunferencias ortogonales. (Este resultado ya se obtuvo directamente considerando la transformación particular $T(z) = 1/z$ y usando la condición de ortogonalidad de circunferencias establecida en ejercicio 1.5.7).

Después de la definición 8.1.9 se extienden al contexto de $\mathbb{C}_\infty$ las definiciones y terminología introducidas después de 2.5.8: Si $\Omega_1, \Omega_2 \subset \mathbb{C}_\infty$ son abiertos, $\Gamma(\Omega_1, \Omega_2)$ designará el conjunto de todos los isomorfismos conformes de Ω_1 sobre Ω_2.

Cuando $\Gamma(\Omega_1, \Omega_2)$ no es vacío se dice que los abiertos Ω_1, Ω_2 son *conformemente equivalentes*. Por definición $\Gamma(\Omega_1) = \Gamma(\Omega_1, \Omega_1)$.

El problema central de la representación conforme es el de determinar, para una pareja de abiertos $\Omega_1, \Omega_2 \subset \mathbb{C}_\infty$, cuando se cumple que $\Gamma(\Omega_1, \Omega_2) \neq \emptyset$ es decir, cuando Ω_1 y Ω_2 son conformemente equivalentes. Un caso particularmente interesante es el que se presenta cuando $\Omega_2 = D(0, 1)$; uno de los objetivos centrales del capítulo 9 será el de caracterizar los abiertos $\Omega \subset \mathbb{C}$ que son conformemente equivalentes al disco unidad $D(0, 1)$.

Obsérvese que para conseguir una descripción explícita del conjunto de transformaciones $\Gamma(\Omega_1, \Omega_2)$ basta conocer uno de los dos grupos de transformaciones $\Gamma(\Omega_1)$ o $\Gamma(\Omega_2)$ y un elemento particular $f \in \Gamma(\Omega_1, \Omega_2)$, ya que entonces

$$\Gamma(\Omega_1, \Omega_2) = \{f \circ \varphi : \varphi \in \Gamma(\Omega_1)\} = \{\varphi \circ f : \varphi \in \Gamma(\Omega_2)\}.$$

Obsérvese que, en virtud del ejemplo 8.1.10, el grupo $\mathbb{M}$ de todas las transformaciones de Möbius está contenido en $\Gamma(\mathbb{C}_\infty)$. Por otra parte, según 4.4.4 se tiene $\Gamma(\mathbb{C}_\infty) \subset \mathbb{M}$, luego $\Gamma(\mathbb{C}_\infty) = \mathbb{M}$, y así queda caracterizado el grupo $\Gamma(\mathbb{C}_\infty)$. Nótese que, en virtud de 4.3.19 también podemos afirmar que $\Gamma(\mathbb{C}) = \{az + b : 0 \neq a \in \mathbb{C}, b \in \mathbb{C}\}$. En la siguiente sección se logrará, usando transformaciones de Möbius, una descripción explícita del grupo $\Gamma(\Omega)$ y de los conjuntos $\Gamma(\Omega_1, \Omega_2)$, cuando $\Omega, \Omega_1, \Omega_2$ son abiertos sencillos, como el disco $D(0, 1)$ o el semiplano $\{z : \operatorname{Im} z > 0\}$.

8.2. El teorema del módulo máximo y sus consecuencias

En esta sección se considera una propiedad básica de las funciones holomorfas que tiene interesantes aplicaciones a los problemas de representación conforme.

Definición 8.2.1 *Una función $f : \Omega \to \mathbb{C}$ continua en un abierto $\Omega \subset \mathbb{C}$ se dice que tiene la propiedad de la media cuando cumple:*

$$\text{(M)} \qquad f(a) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(a + re^{it})dt \ \text{ para cada } \overline{D(a, r)} \subset \Omega$$

Proposición 8.2.2 *Toda función holomorfa $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ tiene la propiedad de la media. También la tienen su parte real $u = \operatorname{Re} f$ y su parte imaginaria $v = \operatorname{Im} f$.*

DEM: Sea $\overline{D(a,r)} \subset \Omega$, y $C_r(t) = a + re^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$. Según la fórmula integral de Cauchy

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_r} \frac{f(z)}{z-a}dz = \frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi} \frac{f(a+re^{it})}{re^{it}} ire^{it}dt = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(a+re^{it})dt$$

Es inmediato que si f tiene la propiedad de la media también la tienen su parte real y su parte imaginaria. ■

Si f es holomorfa, entonces $|f|$ tienen la propiedad, más débil que la propiedad de la media, que interviene en el siguiente lema.

Lema 8.2.3 *Sea $u : \Omega \to \mathbb{R}$ una función continua en un abierto conexo $\Omega \subset \mathbb{C}$ que tiene la propiedad*

(M') $\quad u(a) \leq \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} u(a+re^{it})dt$ *para cada* $\overline{D(a,r)} \subset \Omega$

Si u alcanza en Ω un máximo absoluto entonces u es constante.

DEM: Supongamos que $u(a) \geq u(z)$ para todo $z \in \Omega$. Por continuidad el conjunto no vacío $A = \{z \in \Omega : u(z) = u(a)\}$ es cerrado en Ω para su topología relativa. Como Ω es conexo bastará demostrar que A también es abierto para deducir que $A = \Omega$ y con ello que u es constante. Efectívamente, si $b \in A$ y $D(b, \rho) \subset \Omega$, para cada $0 < r < \rho$ se puede aplicar la propiedad (M') con el disco $\overline{D(b,r)}$ y se obtiene

$$\int_0^{2\pi} [u(b) - u(b+re^{it})]dt \leq 0$$

Como $u(b) = u(a) \geq u(z)$ para todo $z \in \Omega$, tenemos una función continua no negativa $h_r(t) = u(b) - u(b+re^{it}) \geq 0$ que cumple $0 \leq \int_0^{2\pi} h_r(t)dt \leq 0$. Si una función continua no negativa h_r tiene integral nula en el intervalo $[0, 2\pi]$ debe ser idénticamente nula en este intervalo, luego $u(b) = u(b+re^{it})$ para todo $t \in [0, 2\pi]$. Como esto se cumple para cada $r \in (0, \rho)$ se tiene que $u(z) = u(b)$ para cada $z \in D(b, \rho)$, luego $D(b, \rho) \subset A$ y queda demostrado que A es un subconjunto abierto de Ω. ■

Teorema 8.2.4 [Módulo máximo] *Sea $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ una función holomorfa en un abierto conexo $\Omega \subset \mathbb{C}$. Si su módulo $|f|$ alcanza en Ω un máximo relativo entonces f es constante.*

DEM: Por hipótesis existe $D(a,r) \subset \Omega$ tal que $|f(z)| \leq |f(a)|$ para todo $z \in D(a,r)$. Como $u = |f|$ cumple la propiedad (M'), aplicando el lema 8.2.3 a la función $u|_{D(a,r)}$ se deduce que $|f|$ es constante en el disco $D(a,r)$. Utilizando las condiciones de Cauchy Riemann es fácil deducir que f también es constante en este disco (Véase el ejercicio 2.9, resuelto en [17] ejerc. 3.25). Finalmente, invocando el principio de identidad se obtiene que f es constante en el abierto conexo Ω. ■

NOTA: El teorema del módulo máximo también se puede obtener como corolario del teorema de la aplicación abierta: Basta observar que si $|f|$ alcanza en a un máximo relativo entonces $f(\Omega)$ no es entorno de $f(a)$ y por lo tanto f no es abierta. Sin embargo merece la pena conocer la demostración directa que hemos dado por dos razones: Por una parte, el teorema del módulo máximo puede ser utilizado para dar una demostración alternativa del teorema de la aplicación abierta ([14]) Por otra parte, la propiedad de la media y el lema 8.2.3 son la clave para obtener el principio del máximo de las funciones armónicas que se estudiarán más adelante.

Corolario 8.2.5 *Sea $K \subset \mathbb{C}$ compacto y $f : K \to \mathbb{C}$ una función continua cuya restricción a su interior $\Omega = \overset{\circ}{K}$ es holomorfa. Entonces existe $a \in \partial K$ tal que*

$$|f(a)| = \max\{|f(z)| : z \in K\}$$

DEM: La función continua $|f|$ alcanza un máximo en el compacto K, es decir existe $b \in K$ tal que $|f(b)| = \max\{|f(z)| : z \in K\}$. Como el resultado es trivial cuando $b \in \partial K$, suponemos en lo que sigue que $b \notin \partial K$, luego $b \in \Omega$.

Si Ω_b es la componente conexa de b en Ω, aplicando el teorema 8.2.4 a la restricción $f|_{\Omega_b}$ se obtiene que $f(z) = f(b)$ para cada $z \in \Omega_b$. Por continuidad también se verifica que $f(z) = f(b)$ para cada $z \in \overline{\Omega_b}$. Como el abierto Ω_b es acotado, su frontera no es vacía, y podemos elegir un punto $a \in \partial\Omega_b \subset \overline{\Omega_b}$ con $f(a) = f(b)$. Para terminar la demostración basta ver que $a \in \partial K$. Efectivamente, en caso contrario sería $a \in \Omega$ y si Ω_a es la componente conexa de a en Ω se tendría $a \in \Omega_a \cap \overline{\Omega_b}$, luego $\Omega_a = \Omega_b$ (por ser componentes conexas no separadas). Hemos llegado así a una contradicción porque $a \in \Omega_a$ pero $a \notin \Omega_b$. ■

El siguiente resultado es otra consecuencia notable del teorema del módulo máximo. Entre otras consecuencias permite caracterizar los automorfismos conformes del disco unidad $D = D(0,1)$ y del semiplano $P = \{z : \operatorname{Im} z > 0\}$.

Lema 8.2.6 [Schwarz] *Sea $f \in \mathcal{H}(D(0,1))$ tal que $f(0) = 0$ y $|f(z)| \leq 1$ para todo $z \in D(0,1)$. Entonces $|f(z)| \leq |z|$ para cada $z \in D(0,1)$ y $|f'(0)| \leq 1$.*
Si $|f(a)| = |a|$ para algún $a \neq 0$, ó si $|f'(0)| = 1$, existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que $f(z) = e^{i\alpha}z$.

DEM: La función $h(z) = f(z)/z$ presenta una singularidad evitable en $z = 0$ (porque es acotada). Después de eliminar la singularidad podemos suponer que h está definida y es holomorfa en $D(0,1)$. Más concretamente, si para $|z| < 1$ es

$$f(z) = a_1 z + a_2 z^2 + \cdots + a_n z^n + \cdots$$

entonces $h(z) = a_1 + a_2 z + \cdots + a_n z^{n-1} + \cdots$ siendo $h(0) = a_1 = f'(0)$.
Para $0 < r < 1$, cuando $|z| = r$ se cumple $|h(z)| \leq 1/r$ y aplicando la proposición 8.2.5 se obtiene que para $|z| \leq r$ se cumple $|h(z)| \leq 1/r$. Si para cada $z \in D(0,1)$ pasamos al límite cuando $r > |z|$ tienda hacia 1 obtenemos que $|h(z)| \leq 1$, es decir $|f(z)| \leq |z|$. En particular, para $z = 0$ se obtiene que $|f'(0)| = |h(0)| \leq 1$.

Por otra parte, si $|f(a)| = |a|$ para algún $a \neq 0$, o si $|f'(0)| = 1$, lo que ocurre es que $|h(a)| = 1$ para algún $a \in D(0,1)$, es decir, $|h|$ alcanza un máximo absoluto en $z = a$.

Entonces, según el teorema 8.2.4, existe $\mu \in \mathbb{C}$ tal que $h(z) = \mu$ para todo $z \in D(0,1)$. Como $|h(a)| = 1$, debe ser $|\mu| = 1$. Queda demostrado que cuando se cumple alguna de las condiciones mencionadas en el enunciado f es de la forma $f(z) = e^{i\alpha}z$ para algún $\alpha \in \mathbb{R}$. ■

Proposición 8.2.7 $f : D(0,1) \to D(0,1)$ *es un isomorfismo conforme si y sólo si existen* $a \in D(0,1)$, *y* $\alpha \in \mathbb{R}$ *tales que*

$$f(z) = e^{i\alpha}\frac{z-a}{1-\bar{a}z}$$

DEM: Según la proposición 1.4.8 basta demostrar que todo isomorfismo conforme $f : D(0,1) \to D(0,1)$ es de la forma indicada en el enunciado. Si $f(0) = 0$, aplicando el Lema de Schwarz a f y $g = f^{-1}$ se obtiene que $|f(z)| \leq |z|$ y $|g(w)| \leq |w|$ para todo $z \in D(0,1)$ y todo $w \in D(0,1)$. Si en la segunda desigualdad sustituimos $w = f(z)$ resulta $|z| \leq |f(z)|$, luego $|f(z)| = |z|$ para todo $z \in D(0,1)$, y con la segunda parte del lema de Schwarz se concluye que f es de la forma $f(z) = e^{i\alpha}z$ para algún $\alpha \in \mathbb{R}$. Esto termina la prueba en el caso $a = f^{-1}(0) = 0$. Cuando $a = f^{-1}(0) \neq 0$ podemos considerar el isomorfismo conforme $T : D(0,1) \to D(0,1)$ definido por $T(z) = (z-a)/(1-\bar{a}z)$. Como $f \circ T^{-1} : D(0,1) \to D(0,1)$ es un isomorfismo conforme que cumple $f \circ T^{-1}(0) = 0$, por lo demostrado en el caso previo $f \circ T^{-1}(w) = e^{i\alpha}w$ para algún $\alpha \in \mathbb{R}$. Sustituyendo $w = T(z)$ con $z \in D(0,1)$ se obtiene el resultado deseado. ■

Proposición 8.2.8 *Sea* $P = \{z : \operatorname{Im} z > 0\}$. *Entonces* $f : P \to P$ *es un isomorfismo conforme si y sólo si es de la forma*

$$f(z) = \frac{az+b}{cz+d} \quad \textit{con} \quad a,b,c,d \in \mathbb{R}, \quad ad - bc > 0$$

DEM: Después de la proposición 1.4.9 basta demostrar que todo isomorfismo conforme $f : P \to P$ viene dado por una transformación de Möbius. Mediante una transformación de Möbius S podemos conseguir un isomorfismo conforme del semiplano P en el disco $D(0,1)$. Entonces $S \circ f \circ S^{-1}$ es un automorfismo conforme del disco $D(0,1)$ y según la proposición 8.2.7 existe una transformación de Möbius T tal que $S \circ f \circ S^{-1}(w) = T(w)$ para todo $w \in D(0,1)$. Para cada $z \in P$ es $w = S(z) \in D(0,1)$, y sustituyendo arriba se obtiene que $S(f(z)) = T(S(z))$, luego $f(z) = (S^{-1} \circ T \circ S)(z)$ se puede expresar mediante una transformación de Möbius. ■

El siguiente resultado, que se utilizará en la demostración del teorema de Riemann, también es una consecuencia sencilla del lema de Schwarz

Lema 8.2.9 *Sea* $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ *tal que* $f(\Omega) \subset D(0,1)$ *y* $a \in \Omega$. *La condición*

$$0 < |f'(a)| = \max\{|g'(a)| : g \in \mathcal{H}(\Omega),\ g(\Omega) \subset D(0,1)\}$$

implica que $f(a) = 0$.

DEM: Véase [17] ejerc. 9.26 ■

Proposición 8.2.10 *Si $f : \Omega \to D(0,1)$ es un isomorfismo conforme y $a = f^{-1}(0)$ se verifica*

$$\begin{aligned} |f'(a)| &= \max\{|g'(a)| : g \in \mathcal{H}(\Omega),\ g(\Omega) \subset D(0,1),\ g(a) = 0\} \\ &= \max\{|g'(a)| : g \in \mathcal{H}(\Omega),\ g(\Omega) \subset D(0,1)\} \\ &= \max\{|g'(a)| : g \in \mathcal{H}(\Omega),\ g(\Omega) \subset D(0,1),\ g \textit{ inyectiva }\} \end{aligned}$$

DEM: Véase [17] ejerc. 9.23 ■

El teorema de Riemann, que se verá el capítulo 8, afirma que si $\Omega \subsetneq \mathbb{C}$ es un abierto conexo y $\mathbb{C}_\infty \setminus \Omega$ es conexo entonces existe un isomorfismo conforme $f : \Omega \to D(0,1)$. La idea de su demostración está basada en la proposición 8.2.10: Primero se establece la existencia de una función holomorfa inyectiva $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ tal que

$$|f'(a)| = \max\{|g'(a)| : g \in \mathcal{H}(\Omega),\ g(\Omega) \subset D(0,1),\ g \text{ inyectiva }\}$$

y luego se demuestra que $f(\Omega) = D(0,1)$.

8.3. Ejemplos notables

En los problemas concretos de representación conforme frecuentemente hay que averiguar cuando una función, holomorfa o meromorfa es inyectiva en un abierto U contenido en su dominio. Según el corolario 8.1.7 una condición necesaria para ello es que su derivada no se anule en U. Como la condición no es suficiente, el problema se debe afrontar directamente con cada función concreta. Una vez que se sabe que $f|_U$ es inyectiva se plantea el problema de determinar explícitamente el abierto imagen $V = f(U)$ y una fórmula explícita para la inversa $f^{-1} : V \to U$. Para la solución de este tipo de problemas suelen resultar útiles los métodos de representación gráfica de funciones complejas de variable compleja descritos en la sección 2.4.

Estos métodos se ilustran en esta sección con dos ejemplos de particular interés. Primero se realiza un estudio detallado de la transformación de Joukowski y luego se aprovechan los resultados obtenidos para describir la transformación $\cos z$.

8.3.1. La transformación de Joukowski

Es la transformación $J : \mathbb{C}_\infty \to \mathbb{C}_\infty$ definida por

$$J(z) = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right) \text{ si } z \notin \{0, \infty\}, \quad J(0) = J(\infty) = \infty$$

Se comprueba fácilmente que $J'(1) = J'(-1) = 0$ y que $J'(z) \neq 0$ si $z \in \mathbb{C}_\infty \setminus \{-1, 1\}$ (nótese que $J'(0) = J'(\infty) = 2$). Se sigue de esto que $J|_\Omega$ es conforme en cada abierto $\Omega \subset \mathbb{C}_\infty \setminus \{-1, 1\}$. Por otra parte, la condición $J(a) = J(b)$, con $a, b \in \mathbb{C}$ se escribe en la forma

$$(a - b)\left(1 - \frac{1}{ab}\right) = 0$$

luego $J(a) = J(b)$ con $a \neq b$ si y sólo si $ab \neq 1$. En todo entorno de 1 y en todo entorno de -1 existen puntos $a \neq b$ con $ab = 1$, luego la condición $\Omega \subset \mathbb{C}_\infty \setminus \{-1, 1\}$ es necesaria para que $J|_\Omega$ sea inyectiva (esta condición también se puede obtener acudiendo al corolario 8.1.7). En la siguiente proposición se obtiene una condición más fuerte que es necesaria y suficiente para la inyectividad de $J|_\Omega$.

Proposición 8.3.1 *Dado un abierto $\Omega \subset \mathbb{C}_\infty$, la condición $z \in \Omega \Rightarrow 1/z \notin \Omega$ es necesaria y suficiente para que $J|_\Omega$ sea inyectiva. En este caso J establece un isomorfismo conforme entre Ω y su imagen $J(\Omega)$.*

DEM: Véase [17] ejerc. 2.27 ■

Es claro que los abiertos $D = D(0, 1)$ y $P = \{z : \operatorname{Im} z > 0\}$ cumplen la condición de la proposición 8.3.1, de modo que J establece isomorfismos conformes entre cada uno de ellos y su imagen. En el ejercicio 2.26 de [17] se calculan las imágenes

$$J(D) = \mathbb{C}_\infty \setminus \{x \in \mathbb{R} : |x| \leq 1\}, \quad J(P) = \mathbb{C} \setminus \{x \in \mathbb{R} : |x| \geq 1\}$$

mediante una descripción detallada de la transformación J utilizando coordenadas polares en el plano de la variable independiente $z = re^{it}$. En el ejercicio 3.9 de [17] se obtienen fórmulas para las inversas de $J|_P$ y $J|_D$

También se pueden calcular $J(D)$ y $J(P)$ utilizando la descomposición $J = T^{-1} \circ p \circ T$ donde $T(z) = (z - 1)/(z + 1)$, $p(z) = z^2$, que también permite hallar de otra forma fórmulas explícitas para las inversas de $J|_P$ y $J|_D$ (véase el ejercicio 2.28 en [17]).

Más generalmente, usando la descomposición indicada anteriormente se puede probar que J es conforme e inyectiva sobre la región Ω exterior (resp. interior) a cualquier circunferencia que pase por los puntos $+1, -1$, siendo la imagen de esta región un recinto de la forma $\mathbb{C}_\infty \setminus S$ donde S es un arco de circunferencia (en sentido amplio) de extremos $+1$ y -1. Para las regiones D y P consideradas anteriormente el arco de circunferencia S es $\{x \in \mathbb{R} : |x| \leq 1\}$ y $\{x \in \mathbb{R} : |x| \geq 1\}$, respectivamente. Véanse los ejercicios 2.27 y 2.29 de [17], donde también se obtienen fórmulas para la inversa de $J|_\Omega$.

El perfil de Joukowsky es la imagen, mediante la transformación de Joukowsky de una circunferencia que pasa por uno de los dos puntos $+1, -1$ y rodea al otro. En el ejercicio 3.37 de [17] se indica un procedimiento para conseguir un isomorfismo conforme entre $\mathbb{C} \setminus [-1, 1]$ y el exterior del perfil de Joukowsky.

Resumimos los resultados mencionados hasta ahora, mediante una tabla que indica los tipos de abiertos Ω_1, Ω_2 entre los que J establece isomorfismos conformes. En ella A es un disco abierto del la forma $D(i\alpha, r)$ con $r^2 = 1 + \alpha^2$, $B = \mathbb{C}_\infty \setminus \overline{A}$ y S es un arco de circunferencia de extremos $+1, -1$. En lo que sigue

$$U = \mathbb{C} \setminus \{x \in \mathbb{R} : |x| \geq 1\}; \quad V = \mathbb{C} \setminus \{x \in \mathbb{R} : |x| \leq 1\}; \quad V_\infty = V \cup \{\infty\}$$

$\Omega_1 \xrightarrow{J} \Omega_2$	
A	$\mathbb{C}_\infty \setminus S$
B	$\mathbb{C}_\infty \setminus S$
$D(0, 1)$ (resp. $D^*(0, 1)$	V_∞ (resp. V)
$D(\infty, 1)$ (resp. $D^*(\infty, 1)$	V_∞ (resp. V)
$\{z : \lvert z\rvert < 1, \operatorname{Im} z > 0\}$	$\{z : \operatorname{Im} z > 0\}$
$\{z : \operatorname{Im} z > 0\}$	U

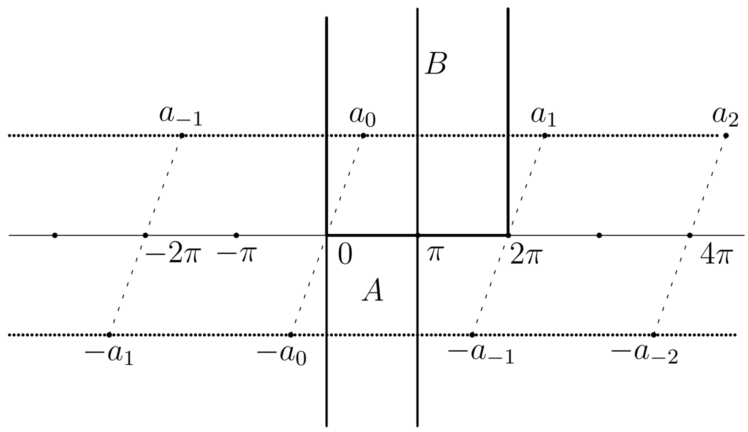
8.3.2. La transformación $\cos z$

Como la función $\cos z$ se puede descomponer en la forma $\cos z = J(e^{iz})$ donde $J(z) = (z+1/z)/2$ es la transformación de Joukowski, podemos utilizar el estudio ya realizado de esta transformación para completar el estudio de la función $\cos z$ iniciado en el capítulo 2. Así, para determinar la imagen de un abierto $\Omega \subset \mathbb{C}$ mediante la función $\cos z$ puede ser útil obtener primero la imagen Ω' mediante la función e^{iz} y luego determinar la imagen de Ω' mediante la función de Joukowski. Así se obtiene fácilmente que $\cos(\mathbb{C}) = \mathbb{C}$.

Empecemos considerando, para cada $w \in \mathbb{C}$, la estructura del conjunto $\arccos w$ formado por las soluciones de la ecuación $\cos z = w$. Recordemos que la ecuación $J(z) = w$ tiene dos soluciones z_1, z_2 que verifican $z_1 z_2 = 1$ (las soluciones de la ecuación de segundo grado $z^2 - 2wz + 1 = 0$). Se sigue de esto que la ecuación $\cos z = w$ tiene infinitas soluciones que se obtienen dividiendo por i los logaritmos de $z_1 = re^{i\alpha}$ y $z_2 = 1/z_1$:

$$\begin{aligned} \log z_1 &= \{\log r + i(\alpha + 2n\pi) : n \in \mathbb{Z}\} \\ \log z_2 &= \{-\log r - i(\alpha + 2n\pi) : n \in \mathbb{Z}\} = -\log z_1 \end{aligned}$$

luego $\arccos w = \{\pm a_n : n \in \mathbb{Z}\}$ donde $a_n = (\alpha + 2n\pi) - i \log r$. ([17] ejerc. 3.20) Vemos así que $\arccos w$ es un conjunto numerable contenido en dos rectas paralelas simétricas respecto al eje real; en cada recta los puntos de este conjunto se distribuyen igualmente espaciados, a distancia 2π, siendo los puntos de una recta opuestos a los de la otra (si $w \in \mathbb{R}$, las dos rectas se confunden con el eje real).



Según esto, dado $z = x + iy \in \mathbb{C}$ el conjunto $M(z) = \{z' : \cos z' = \cos z\}$ es de la forma

$$M(z) = \{\pm(x + 2n\pi + iy) : n \in \mathbb{Z}\}$$

luego una condición necesaria y suficiente para que la función $\cos z$ sea inyectiva sobre Ω es que se cumpla la condición $z \in \Omega \Rightarrow M(z) \cap \Omega = \{z\}$ (más fuerte que la condición necesaria de inyectividad según la cual Ω no puede contener ceros de la derivada $\operatorname{sen} z$).

Es inmediato que los abiertos

$$A = \{z : 0 < \operatorname{Re} z < \pi\}; \quad B = \{z : 0 < \operatorname{Re} z < 2\pi, \operatorname{Im} z > 0\};$$

cumplen la condición suficiente de inyectividad que acabamos de obtener, luego $\cos z$ establece isomorfismos conformes entre cada uno de ellos y su imagen. Las imágenes $\cos(A), \cos(B)$ se pueden calcular fácilmente usando los resultados conocidos para la transformación de Joukowski ya que $\cos z = J(e^{iz})$ (véase el ejercicio 3.21 de [17]):
La función e^{iz} transforma A en $P = \{z : \operatorname{Im} z > 0\}$, y B en $G = D(0,1) \setminus [0,1)$, luego

$$\begin{aligned}\cos(A) &= J(P) = \mathbb{C} \setminus \{x \in \mathbb{R} : |x| \geq 1\}\\ \cos(B) &= J(G) = \mathbb{C} \setminus \{x \in \mathbb{R} : x \geq -1\}\end{aligned}$$

Análogamente, as imágenes de $A^+ = \{z \in A : \operatorname{Im} z > 0\}$ y $A^- = \{z \in A : \operatorname{Im} z < 0\}$ mediante e^{iz} son $\{z \in P : |z| < 1\}$ y $\{z \in P : |z| > 1\}$, respectivamente, luego

$$\begin{aligned}\cos(A^+) &= J(\{z \in P : |z| < 1\}) = \{z : \operatorname{Im} z < 0\}\\ \cos(A^-) &= J(\{z \in P : |z| > 1\}) = \{z : \operatorname{Im} z > 0\}\end{aligned}$$

Utilizando la descomposición $\cos z = J(e^{iz})$ es fácil completar los resultados anunciados al final de 2.7.9 calculando fórmulas explícitas para las inversas de $\cos z|_A$ y $\cos|_B$ (véase el ejercicio 3.22 de [17]).

Las imágenes $\cos(A), \cos(B), \cos(A^+), \cos(A^-)$ también se pueden calcular con la técnica habitual, mediante una descripción detallada de la transformación $w = \cos z$, usando coordenadas cartesianas en el plano de la variable independiente $z = x + iy$. Para ilustrar la técnica, realizamos la descripción similar a la que fue realizada para la transformación de Joukowski. Si $w = u + iv$, la transformación $w = \cos z$ se escribe en la forma

$$u = \cos x \operatorname{ch} y, \quad v = -\operatorname{sen} x \operatorname{sh} y.$$

El esquema de la transformación es el siguiente: Para cada $a \in \mathbb{R}$ la imagen de la recta $z = a + it$, $t \in \mathbb{R}$ es la curva H_a de ecuaciones paramétricas

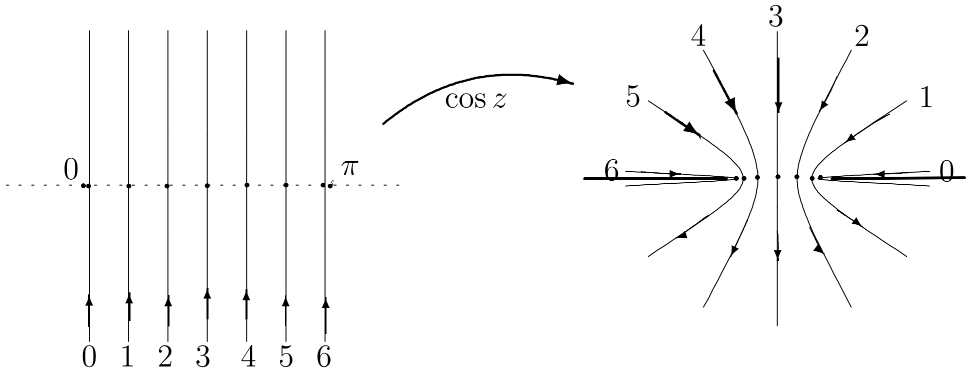
$$u(t) = \cos a \operatorname{ch} t, \qquad v(t) = -\operatorname{sen} a \operatorname{sh} t, \qquad t \in \mathbb{R}.$$

Eliminando el parámetro a se observa que H_a es una de las ramas de la hipérbola

$$\frac{u^2}{\cos^2 a} - \frac{v^2}{\operatorname{sen}^2 a} = 1$$

con focos en ± 1. Atendiendo al signo de $\cos a$ y $\operatorname{sen} a$ se aprecia que cuando $0 < a < \pi$ está fijo y t crece desde $-\infty$ hasta $+\infty$, el punto $(u(t), v(t))$ describe la rama de la hipérbola en el sentido en que decrece v, de tal modo que la parte que queda en el semiplano $\operatorname{Im} v > 0$ (resp. $\operatorname{Im} v < 0$) corresponde a los valores $t < 0$ (resp. $t > 0$). Obsérvese que la rama de hipérbola $H_{\pi/2}$ degenera en el eje imaginario, y que las ramas de hipérbola H_0 y H_π degeneran en las semirrectas $\{u \in \mathbb{R} : u \geq 1\}$ y $\{u \in \mathbb{R} : u \leq -1\}$ recorridas dos veces en el sentido $(+\infty \to 1 \to +\infty)$, y $(-\infty \to -1 \to -\infty)$, respectivamente.

Cuando a recorre $(0, \pi)$ las ramas de hipérbola H_a van cubriendo, de derecha a izquierda, el abierto $U = \mathbb{C} \setminus \{x \in \mathbb{R} : |x| \geq 1\}$ según el esquema de la figura



Precisamente, a través de H_π se realiza la transición entre el comportamiento para $a \in (0, \pi)$ y el comportamiento para $a \in (\pi, 2\pi)$ que es simétrico al anterior: Ahora, cuando a crece desde π hasta 2π las ramas de hipérbola H_a van cubriendo el mismo abierto que antes, de izquierda a derecha y con las ramas de las hipérbolas recorridas en el sentido en que crece v. Es decir, para $a \in (\pi, 2\pi)$ aparecen las mismas ramas de hipérbola que las que aparecían para $a \in (0, \pi)$, pero recorridas en sentido contrario. Para $a \in (2\pi, 3\pi)$ la situación es exactamente la misma que para $a \in (0, \pi)$, y así sucesivamente...

Con el esquema de las hipérbolas se vuelve a obtener que

$$\cos(A) = \mathbb{C} \setminus \{x \in \mathbb{R} : |x| \geq 1\}$$

La justificación completa de este hecho requiere comprobar que por cada punto $w = u + iv \in U$ pasa una de las ramas de hipérbola H_a, con $a \in (0, \pi)$, es decir, que el sistema de ecuaciones $u = \cos a \operatorname{ch} t$, $v = -\operatorname{sen} a \operatorname{sh} t$, tiene una solución (a, t) con $0 < a < \pi$. (Efectivamente, si $v = 0$ debe ser $u \in (-1, 1)$ luego existe $a \in (0, \pi)$ tal que $\cos a = 0$; si $v \neq 0$, en virtud del teorema de Bolzano existe $s > 0$ tal que $u^2/(1 + s) + v^2/s = 1$ y para este valor de s existe $t \in \mathbb{R}$ tal que $\operatorname{sh}(t) = -\text{signo}(v)\sqrt{s}$, luego $u^2/\operatorname{ch}^2 t + v^2/\operatorname{sh}^2 t = 1$. Como $v/\operatorname{sh} t > 0$ es claro que existe $a \in (0.\pi)$ tal que $\cos a = u/\operatorname{ch} t$, $\operatorname{sen} a = -v/\operatorname{sh} t$).

Si ahora consideramos, para $b \in \mathbb{R}$ fijo, la imagen de la recta $z = t + ib$, con $t \in \mathbb{R}$ se obtiene la curva E_b de ecuaciones paramétricas

$$u(t) = \operatorname{ch} b \cos t, \quad v(t) = -\operatorname{sh} b \operatorname{sen} t, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Esta curva recorre infinitas veces la elipse

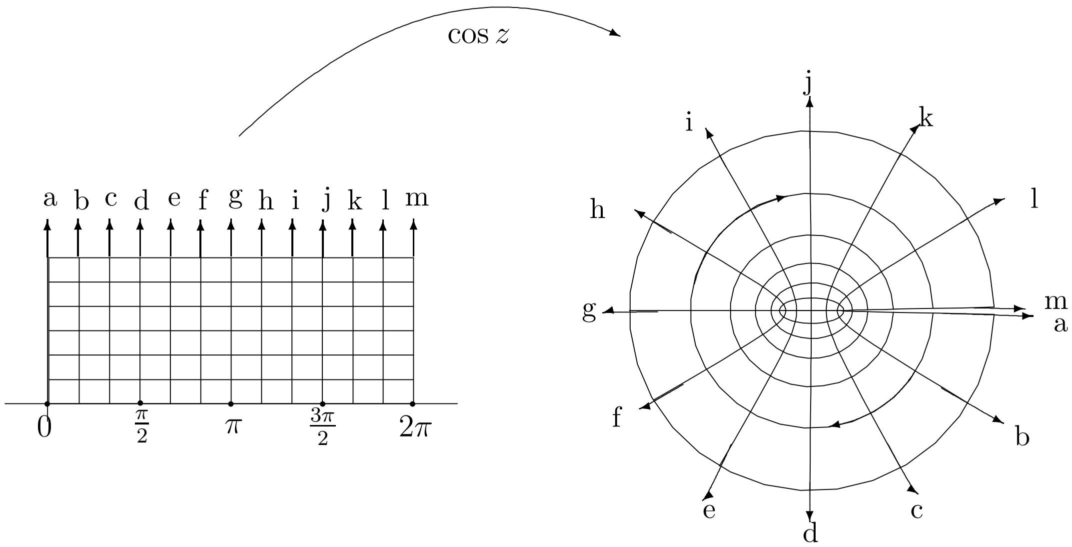
$$\frac{u^2}{\operatorname{ch}^2 b} + \frac{v^2}{\operatorname{sh}^2 b} = 1$$

de semiejes $\operatorname{ch}^2 b$, $\operatorname{sh}^2 b$ y focos ± 1. Debido a la periodicidad basta considerar los valores $t \in [0, 2\pi]$ para los que la elipse se recorre una sola vez, con el sentido del reloj para $b > 0$ y en el opuesto para $b < 0$. Cuando b crece hacia ∞ la longitud de los semiejes crece hacia $+\infty$, y para $b = 0$ la elipse degenera en el segmento $[-1, 1]$ recorrido dos veces en el sentido $1 \to -1 \to 1$. Obsérvese que a través de la elipse degenerada E_0 se realiza la transición entre las orientaciones opuestas con que son recorridas las elipses, para $b < 0$ y para $b > 0$.

Claramente, esta familia de elipses tiene que ser ortogonal a la familia de hipérbolas consideradas anteriormente. Si el intervalo de variación del parámetro t lo reducimos al intervalo $[0, \pi]$ las curvas que se obtienen son semi elipses S_b recorridas de izquierda a derecha, con origen en el semieje real positivo y extremo en el semieje real negativo. Para $b < 0$ (resp. $b > 0$) la semi elipse está situada en el semiplano $\operatorname{Im} z > 0$ (resp. $\operatorname{Im} z < 0$) y para $b = 0$ degenera en el segmento $[-1, 1]$ recorrido en sentido decreciente.

Con el esquema de las semi elipses volvemos a observar que $\cos z$ establece una biyección de $A = \{x + iy : 0 < x < \pi\}$ sobre $\mathbb{C} \setminus \{x \in \mathbb{R} : |x| \geq 1\}$ ya que por cada punto $w = u + iv \in U$ pasa una y sólo una de las semi elipses S_b, con $b \in \mathbb{R}$.

Análogamente se obtiene que la imagen de $B = \{z : 0 < \operatorname{Re} z < 2\pi, \operatorname{Im} z > 0\}$ mediante la transformación $\cos z$ es el abierto $W = \mathbb{C} \setminus \{x \in \mathbb{R} : x \geq -1\}$, luego $\cos z$ establece un isomorfismo conforme entre B y W. En la figura se muestra un esquema de la transformación entre estos dos abiertos.



Es interesante observar como se corresponden las fronteras en estos isomorfismos conformes: Cuando z recorre la frontera de $A^+ = \{x + iy : 0 < x < \pi, y > 0\}$, en el sentido $\infty \to 0 \to \pi \to \infty$, su imagen $w = \cos z$ recorre el eje real, que es la frontera de la imagen $\{v : \operatorname{Im} v < 0\}$ en el sentido $+\infty \to +1 \to -1 \to -\infty$ duplicando los ángulos cuando z pasa por los puntos 0, π donde se anula la derivada de $\cos z$. Análogamente, cuando z recorre la frontera de B en el sentido $\infty \to 0 \to \pi \to 2\pi \to \infty$ la imagen w recorre dos veces la frontera de W en el sentido $+\infty \to 1 \to -1 \to 1 \to +\infty$, con duplicación de ángulos cuando z pasa por los puntos $0, \pi, 2\pi$.

Como resumen de los resultados anteriores, conviene dejar anotado que con la función $\cos z$ se consiguen isomorfismos conformes entre los siguientes tipos de abiertos Ω_1, Ω_2:

$\Omega_1 \xrightarrow{\cos} \Omega_2$	
$\{z : 0 < \operatorname{Re} z < \pi\}$	$\mathbb{C} \setminus \{x \in \mathbb{R} : \lvert x\rvert \geq 1\}$
$\{z : \alpha < \operatorname{Re} z < \beta\}$ $(\beta - \alpha < \pi)$	Región comprendida entre dos ramas de dos hipérbolas con focos en $+1, -1$
$\{z : 0 < \operatorname{Re} z < \pi, \operatorname{Im} z > 0\}$	$\{z : \operatorname{Im} z < 0\}$
$\{z : 0 < \operatorname{Re} z < 2\pi, \operatorname{Im} z > 0\}$	$\mathbb{C} \setminus \{x \in \mathbb{R}; x \geq -1\}$

8.4. Ejercicios

♢ **8.1** *Obtenga un isomorfismo conforme del abierto* $\{x+iy : |x| < \pi/4\}$ *sobre el cuadrante* $\{x+iy : x > 0, y > 0\}$.

♢ **8.2** *Obtenga un isomorfismo conforme entre* $\{z : \operatorname{Im} z > 1, |z-3i| > 1\}$ *y una corona circular que se debe determinar.*

♢ **8.3** *Obtenga un isomorfismo conforme entre el abierto*

$$\Omega = \{x+iy : x > a, x^2 - y^2 > a^2\}$$

y el disco $\{w : |w| < 1\}$, *de modo que el foco de la hipérbola* $x^2 - y^2 = a^2$ *corresponda a* $w = 0$ *y el vértice a* $w = -1$ *([17] ejerc. 2.24).*

♢ **8.4** *Obtenga un isomorfismo conforme entre* $\Omega = \{x+iy : y^2 > 2px\}$, $(p > 0)$, *y el disco* $\{w : |w| < 1\}$ *de modo que los puntos* $z = 0$ *y* $z = -p/2$ *se transformen en* $w = 1$ *y* $w = 0$ *respectivamente ([17] ejerc. 2.25).*

♢ **8.5** *Obtenga isomorfismos conformes entre cada uno de los abiertos*

$$\Omega_1 = \{z : |z| < 1, \operatorname{Re} z > 0\}, \qquad \Omega_2 = \{z : |z| < 1, \operatorname{Re} z > 0, \operatorname{Im} z > 0\}$$

y el disco $D(0,1)$ *([17] ejerc. 3.31)*

♢ **8.6** *Obtenga isomorfismos conformes entre cada uno de los abiertos*

$$\Omega_1 = \{z : |z| < 1, |2z-1| > 1\}, \quad \Omega_2 = \{z : |z-1| > 1, |z-2| < 2, \operatorname{Im} z > 0\};$$

y el disco $D(0,1)$ *([17] ejerc. 3.32).*

♢ **8.7** *En cada caso obtenga un isomorfismo de* Ω *sobre* G:

a) $\Omega = \{z : |\operatorname{Im} z| < \pi/2\}$, $G = D(0,1)$.

b) $\Omega = \{z : |\operatorname{Im} z| < \pi/4\}$, $G = \{z : |z| < 1, \operatorname{Im} z > 0\}$.

([17] ejerc. 3.33)

♢ **8.8** *Demuestre que* $\Omega = \{z : \operatorname{Re} z > 0, |z-5| > 3\}$ *es conformemente equivalente a una corona circular. Obtenga un isomorfismo conforme entre* $\Omega \cap \{z : \operatorname{Im} z > 0\}$ *y un rectángulo abierto. ([17] ejerc. 3.34)*

♢ **8.9** *Obtenga un isomorfismo conforme* f *del disco* $D(0,1)$ *sobre el abierto*

$$\{z : |z-1| < \sqrt{2}, |z+1| < \sqrt{2}\}$$

tal que $f(x) \in \mathbb{R}$ *si* $x \in \mathbb{R}$. *Calcule su desarrollo en serie de potencias en* $D(0,1)$.
([17] ejerc. 3.35).

♢ **8.10** *Sea* $E = \{z : |z| = 1, \operatorname{Im} z \leq 0\}$. *Obtenga un isomorfismo conforme de* $\Omega = \mathbb{C} \setminus E$, *sobre* $\{z : |z| > 1\}$ *([17] ejerc. 3.36).*

♢ **8.11** *Obtenga un isomorfismo conforme entre el exterior de la elipse*

$$\{x + iy : (x/a)^2 + (x/b)^2 > 1\}$$

y el disco unidad peforado $\{w : 0 < |w| < 1\}$.

♢ **8.12** *Si una sucesión* (f_n) *en* $\mathcal{H}(\Omega)$ *converge uniformemente sobre cada circunferencia en* Ω *demuestre que converge uniformemente sobre compactos.*

♢ **8.13** *Sea* $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ *y* $\overline{D(a,r)} \subset \Omega$. *Se sabe que* $f(a) = 1$ *y* $|f(z)| > 2$ *cuando* $|z-a| = r$. *Demuestre que* f *se anula en algún punto de* $D(a,r)$ *([17] ejerc. 9.2).*

♢ **8.14** *Se supone que* $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ *no es constante en el abierto conexo* Ω *y que* $\overline{D(a,r)} \subset \Omega$. *Si* $|f|$ *es constante sobre* $\{z : |z-a| = r\}$ *demuestre que* f *se debe anular en algún punto de* $D(a,r)$ *([17] ejerc. 9.3).*

♢ **8.15** *Sea* $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ *no constante en un abierto conexo* Ω. *Si* $K = \{z \in \Omega : |f(z)| \leq 1\}$ *es compacto no vacío demuestre que* f *se anula en algún punto ([17] ejerc. 9.4).*

♢ **8.16** *Sea* p *un polinomio complejo no constante y* $\epsilon > 0$. *Demuestre que cada componente conexa de* $\{z : |p(z)| < \epsilon\}$ *contiene un cero de* p *([17] ejerc. 9.5).*

♢ **8.17** *Sea* Ω *un abierto conexo tal que* $D(0,r) \subset \Omega$ *y* $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ *una función que verifica*

$$|f(z)| = h(|z|) \quad \textit{para todo} \quad z \in D(0,r) \subset \Omega$$

donde la función $h : (0,r) \to \mathbb{R}$ *no es constante. Demuestre que* f *es de la forma* $f(z) = \mu z^m$, *con* $\mu \in \mathbb{C}$ *y* $m \in \mathbb{N}$ *([17] ejerc. 9.6).*

♢ **8.18** *Demuestre que para cada* $f \in \mathcal{H}(D(0,1))$ *existe una sucesión* $z_n \in D(0,1)$ *con* $\lim_{n\to\infty} |z_n| = 1$ *tal que la sucesión* $f(z_n)$ *es acotada ([17] ejerc. 9.7).*

♢ **8.19** *Sean* f, g *funciones holomorfas en un abierto conexo que contiene al disco* $\overline{D(0,1)}$. *Se supone que* f *y* g *no se anulan en* $D(0,1)$, *que* $|f(z)| = |g(z)|$ *cuando* $|z| = 1$, *y que* $f(0) > 0, g(0) > 0$. *Demuestre que* $f = g$.

♢ **8.20** *Si* f *es holomorfa en* $D(0,1)$ *y* $\lim\limits_{|z|\to 1} |f(z)| = 1$ *demuestre que o bien* f *es costante, o bien* f *es de la forma*

$$f(z) = \lambda \prod_{j=1}^{n} \frac{z - a_j}{1 - \overline{a_j} z}, \quad z \in D(0,1)$$

donde $|\lambda| = 1$, *y* $a_1, a_2, ...a_n \in D(0,1)$.

♢ **8.21** *Si* $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ *no es constante demuestre que* $M(r) = \text{máx}\{|f(z)| : |z| = r\}$, *definida para* $r \geq 0$, *es estrictamente creciente continua con* $\text{lím}_{r\to\infty} M(r) = +\infty$. *([17] ejerc. 9.8).*

♢ **8.22** *Sea* $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ *tal que* $f(0) = f'(0) = 0$, *y* $|\operatorname{Re} f(z)| \leq |z|$ *para todo* $z \in \mathbb{C}$. *Demuestre que* $|f(z)/z^2| \leq |f(z) - 2r|/r^2$ *si* $|z| \leq r$ *y deduzca de ello que* f *es idénticamente nula ([17] ejerc. 9.10).*

♢ **8.23** *Determine los abiertos conexos* $\Omega \supset \{z : |z| \leq 1\}$ *en los que hay definida una función holomorfa* $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ *verificando las tres condiciones siguientes:*

a) $|f(z)| = 1$ *si* $|z| = 1$.

b) Los únicos ceros de f *son* $a = 1/2$ *(simple) y* $b = (1+i)/4$ *(doble).*

c) $f(0) = ab^2$.

Demuestre que, en ese caso, la función f *es única ([17] ejerc. 9.11).*

♢ **8.24** *¿Existe una función holomorfa* $f : D(0,1) \to D(0,1)$ *que verifique* $f(1/2) = 3/4$ *y* $f'(1/2) = 2/3$*?.*

¿Existe una función holomorfa $f : D(0,1) \to D(0,1)$ *que verifique* $f(0) = 1/2$ *y* $f'(0) = 3/4$*?.*

♢ **8.25** *Si* a *es un punto fijo de* f, *donde* f *es un automorfismo conforme del semiplano* $\{z : \operatorname{Re}(z) > 0\}$, *demuestre que* $|f'(a)| = 1$.

♢ **8.26** *Sea* $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ *donde* $\Omega \supset \overline{D(0,1)}$ *es abierto conexo. Demuestre que si se cumplen las siguientes condiciones*

i) $|f(z)| \leq 1$ *si* $|z| = 1$;

ii) Existen $a, b \in D(0,1)$, $a \neq b$, *tales que* $f(a) = a$ *y* $f(b) = b$;

entonces f *es la identidad ([17] ejerc. 9.13).*

♢ **8.27** *Sea* $f \in \mathcal{H}(D(0,R))$ *tal que* $|f(z)| < M$ *para todo* $z \in D(0,R)$. *Si* $a \in D(0,R)$ *y* $b = f(a)$ *demuestre que*

$$\left|\frac{M(f(z)-b)}{M^2 - \overline{b}f(z)}\right| \leq \left|\frac{R(z-a)}{R^2 - \overline{a}z}\right| \quad \textit{para todo} \quad z \in D(0,R)$$

En el caso $M = R = 1$ *obtenga que para todo* $z \in D(0,1)$ *se cumple*

$$\frac{|f'(z)|}{1 - |f(z)|^2} \leq \frac{1}{1 - |z|^2}$$

([17] ejerc. 9.15).

♢ **8.28** *Sean* $f, g \in \mathcal{H}(D(0,1))$ *tales que* $f(0) = g(0)$. *Se supone que* g *es inyectiva y que* $f(D(0,1)) \subset g(D(0,1))$. *Demuestre que* $f(D(0,r)) \subseteq g(D(0,r))$ *para todo* $0 < r < 1$.
([17] ejerc. 9.18).

♢ **8.29** *Sea* $f \in \mathcal{H}(D(0,R)$ *tal que* $f(0) = f'(0) = \cdots = f^{(n)}(0) = 0$. *Si* $0 < r < R$, *se define* $M(r) = \max\{|f(z)| : |z| = r\}$. *Demuestre que para* $|z| \leq r < R$ *se cumple*

$$|f(z)| \leq M(r) \left|\frac{z}{r}\right|^{n+1}$$

♢ **8.30** *Sea* $f : D(0,1) \to \Omega$ *un isomorfismo conforme. Demuestre que si* Ω *es convexo entonces también lo es* $\Omega_r = f(D(0,r))$ *para cada* $r \in (0,1)$ *(Teorema de Study)*
([17] ejerc. 9.21).

♢ **8.31** *Para los abiertos* $\Omega = \{z : |\operatorname{Im} z| < \pi/2\}$, $P = \{z : \operatorname{Re} z > 0\}$ *demuestre que los siguientes supremos son accesibles y calcule sus valores:*

i) $\alpha = \sup\{|f'(0)| : f \in \mathcal{H}(\Omega), f(\Omega) \subset P, f(0) = 1\}$

ii) $\beta = \sup\{|f'(0)| : f \in \mathcal{H}(\Omega), f(\Omega) \subset \overline{D(0,1)}\}$

([17] ejerc. 9.22).

♢ **8.32** *Sea* U *un abierto conformemente equivalente a* $D(0,1)$ *y* $b \in U$. *Si* $f : \Omega \to U$ *es un isomorfismo conforme y* $a = f^{-1}(b)$, *demuestre que*

$$|f'(a)| = \max\{|g'(a)| : g \in \mathcal{H}(\Omega),\ g(\Omega) \subset U,\ g(a) = b\}$$

([17] ejerc. 9.24).

♢ **8.33** *Sea* $f \in \mathcal{H}(D(0,1))$ *tal que* $f(D(0,1) \subset D(0,1)$ *y* $a \in D(0,1)$. *Demuestre que la condición*

$$|f'(a)| = \max\{|g'(a)| : g \in \mathcal{H}(D(0,1)),\ g(D(0,1)) \subset D(0,1)\}$$

implica que f *es un automorfismo conforme del disco* $D(0,1)$ *([17] ejerc. 9.27).*

♢ **8.34** *Calcule*

$$\sup\{|f'(a)| : f \in \mathcal{H}(\Omega), f(\Omega) \subset D(0,1)\}$$

donde $\Omega = \{x + iy : x > 0, |y| < x\}$ *y* $a \in \Omega$ *es real positivo.*

Capítulo 9

Teorema de Riemann

El objetivo de este capítulo es demostrar el célebre teorema de Riemann según el cual todo abierto conexo $\Omega \subsetneq \mathbb{C}$ con complemento $\mathbb{C}_\infty \setminus \Omega$ conexo es conformemente equivalente (y en particular homeomorfo) al disco $D(0,1)$. Entre las diversas aplicaciones de este teorema la más directa, relacionada con la topología, es la caracterización de los abiertos simplemente conexos (teorema 9.3.4) del plano complejo, que completa la de los abiertos holomorficamente conexos obtenida en el teorema 5.2.4.

La demostración que se ofrece en este capítulo se apoya varios resultados relacionados con la convergencia uniforme sobre compactos de sucesiones de funciones holomorfas. Especialmente se apoya en un teorema de Montel que caracteriza los subconjuntos relativamente compactos de $(\mathcal{H}(\Omega), \tau_K)$ (las familias normales de funciones holomorfas en la terminología clásica).

9.1. Familias normales de funciones holomorfas

Dado un abierto $\Omega \subset \mathbb{C}$ en lo que sigue $\mathcal{H}(\Omega) \subset C(\Omega, \mathbb{C})$ se considera siempre dotado con la topología de la convergencia uniforme sobre compactos, es decir, la inducida por la topología τ_K de $C(\Omega, \mathbb{C})$ que seguimos denotando igual. (Véase el apéndice 9.4).

Esta topología es metrizable mediante la restricción a $\mathcal{H}(\Omega)$ de la distancia ρ asociada a una sucesión fundamental de compactos (K_n) en el abierto Ω:

$$\rho(f,g) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} \rho_n(f,g), \quad \text{con} \quad \rho_n(f,g) = 1 \wedge \max\{|f(z) - g(z| : z \in K_n\}$$

El siguiente resultado es una reformulación del teorema de Weierstrass (3.3.13)

Proposición 9.1.1 $\mathcal{H}(\Omega)$ *es un subconjunto* τ_K*-cerrado de* $C(\Omega, \mathbb{C})$ *y el operador de derivación* $D : (\mathcal{H}(\Omega), \tau_K) \to (\mathcal{H}(\Omega), \tau_K)$*,* $D(f) = f'$ *es continuo.*

Dem: Si $f \in \overline{\mathcal{H}(\Omega)}$, existe una sucesión $f_n \in \mathcal{H}(\Omega)$ tal que $\lim_n \rho(f_n, f) = 0$. Como f_n converge hacia f uniformemente sobre compactos el teorema de Weierstrass asegura que $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ y por lo tanto $\mathcal{H}(\Omega)$ es cerrado en $(C(\Omega, \mathbb{C}), \tau_K)$.

Este teorema también afirma que si $f_n \in \mathcal{H}(\Omega)$ converge hacia $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ uniformemente sobre compactos entonces f_n' converge hacia f' uniformemente sobre compactos. Esto significa $\rho(f_n, f) \to 0 \Rightarrow \rho(D(f_n), D(f)) \to 0$, y usando la caracterización de la continuidad por sucesiones (válida en espacios métricos) se obtiene que el operador de derivación es continuo para la topología τ_K. ■

Como el espacio métrico $(C(\Omega, \mathbb{C}), \rho)$ es completo (proposición 9.4.3) y $\mathcal{H}(\Omega)$ es un subconjunto ρ-cerrado de este espacio, se sigue que $(\mathcal{H}(\Omega), \rho)$ también es un espacio métrico completo.

Definición 9.1.2 *Una familia $\mathcal{F} \subset \mathcal{H}(\Omega)$ se dice que es normal cuando de cada sucesión $f_n \in \mathcal{F}$ se puede extraer una subsucesión que converge uniformemente sobre compactos. (es decir, $\mathcal{F}$ es un subconjunto relativamente compacto de $(\mathcal{H}(\Omega), \tau_K)$*

Con el fin de caracterizar las familias normales, en lo que sigue, para $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ y $K \subset \Omega$ compacto, se introduce la notación $\|f\|_K = \text{máx}\{|f(z)| : z \in K\}$.

Definición 9.1.3 *Una familia $\mathcal{F} \subset \mathcal{H}(\Omega)$ se dice que es acotada cuando para cada compacto $K \subset \Omega$ se cumple* $\sup\{\|f\|_K : f \in \mathcal{F}\} < +\infty$.

Según la definición anterior la familia $\mathcal{F}$ es acotada cuando para cada compacto $K \subset \Omega$ existe una constante $C_K > 0$ tal que para cada $f \in \mathcal{F}$ y cada $z \in K$ se cumple $|f(z)| \le C_K$.

Proposición 9.1.4 *Para una familia $\mathcal{F} \subset \mathcal{H}(\Omega)$ son equivalentes:*

a) $\mathcal{F}$ es acotada.

b) Para cada τ_K-entorno de 0, $V \subset \mathcal{H}(\Omega)$ existe $t > 0$ tal que $\mathcal{F} \subset tV$.

c) Para cada $a \in \Omega$ existe $D(a, r) \subset \Omega$ con $\sup\{|f(z)| : f \in \mathcal{F}, z \in D(a, r)\} < +\infty$.

DEM: a $\Rightarrow$ b): Cada τ_K-entorno de 0, $V \subset \mathcal{H}(\Omega)$, contiene un τ_K-entorno de 0 de la forma $V(0, K, \epsilon) = \{f \in \mathcal{H}(\Omega) : \|f\|_K < \epsilon\}$, donde $K \subset \Omega$ es compacto. Si se cumple a) es finito el supremo $m = \sup\{\|f\|_K : f \in \mathcal{F}\}$ y tomando $t > m/\epsilon$ es claro que se cumple $\mathcal{F} \subset tV(0, K, \epsilon) \subset tV$.
b) $\Rightarrow$ c): Dado $a \in \Omega$ sea $r > 0$ tal que $K = \overline{D(a, r)} \subset \Omega$. Según b) existe $t > 0$ tal que $\mathcal{F} \subset tV(0, K, 1)$ luego $\sup\{|f(z) : f \in \mathcal{F}, z \in D(a, r)\} \le t < +\infty$.
c) $\Rightarrow$ a): Cada compacto $K \subset \Omega$ se recubre con una cantidad finita de discos $D(a_j, r_j)$, $1 \le j \le m$, que cumplen c). Sea $C_j = \sup\{|f(z)| : f \in \mathcal{F}, z \in D(a_j, r_j)\}$. Tomando $C = \text{máx}\{C_j : 1 \le j \le m\}$ es claro que se cumple $\|f\|_K \le C$ para cada $f \in \mathcal{F}$. ■

Teorema 9.1.5 [Montel] *Una familia $\mathcal{F} \subset \mathcal{H}(\Omega)$ es normal si y sólo si es acotada. Por lo tanto $\mathcal{F} \subset \mathcal{H}(\Omega)$ es τ_K-compacta si y sólo si es τ_K-cerrada y acotada*

DEM: Supongamos que $\mathcal{F} \subset \mathcal{H}(\Omega)$ es acotada. Con el teorema de Ascoli 9.4.9 demostraremos que $\mathcal{F}$ es un subconjunto relativamente compacto de $(C(\Omega, \mathbb{C}), \tau_K)$, es decir, $\overline{\mathcal{F}}^{\tau_K}$ es un conjunto compacto en $(C(\Omega, \mathbb{C}), \tau_K)$. Como $\mathcal{H}(\Omega)$ es un subconjunto τ_K-cerrado de $(C(\Omega, \mathbb{C}), \tau_K)$ se tendrá $\overline{\mathcal{F}}^{\tau_K} \subset \mathcal{H}(\Omega)$ y por lo tanto $\overline{\mathcal{F}}^{\tau_K}$ será compacto en $(\mathcal{H}(\Omega), \tau_K)$, lo que significa que la familia $\mathcal{F}$ es normal. Para aplicar el teorema de Ascoli hay que comprobar

i) $\mathcal{F} \subset C(\Omega, \mathbb{C})$ es equicontinua.

ii) Para cada $z \in \Omega$ el conjunto $\mathcal{F}(z) = \{f(z) : f \in \mathcal{F}\}$ es acotado en $\mathbb{C}$.

i) Dado $a \in \Omega$ elegimos $r > 0$ de modo que $K = \overline{D(a, r)} \subset \Omega$. Como $\mathcal{F}$ se supone acotada, es finito el supremo $\sup\{\|f\|_K : f \in \mathcal{F}\} = M < +\infty$. Si $|z - a| < r/2$, usando la fórmula integral de Cauchy, con la circunferencia $C(t) = a + re^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$ se obtiene

$$f(z) - f(a) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \left(\frac{f(w)}{w - z} - \frac{f(w)}{w - a} \right) dw = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(w)(z - a)}{(w - z)(w - a)} dw$$

Si $w \in \text{Imagen}(C)$ y $f \in \mathcal{F}$ se cumple $|w - z| \geq r/2$ y $|f(w)| \leq M$ luego

$$\left| \frac{f(w)(z - a)}{(w - z)(w - a)} \right| \leq \frac{M|z - a|}{(r/2)r} = \frac{2M}{r^2}|z - a|$$

Se obtiene así la desigualdad

$$|f(z) - f(a)| \leq \frac{1}{2\pi} 2\pi r \frac{2M}{r^2} |z - a| = \frac{2M}{r} |z - a|$$

Esta desigualdad es válida para cada $z \in D(a, r/2)$ y cada $f \in \mathcal{F}$ y esto implica que la familia $\mathcal{F}$ es equicontinua en a.
ii) Basta aplicar la condición de que $\mathcal{F}$ es acotada usando el compacto $K = \{z\}$.

Recíprocamente, supongamos que $\mathcal{F}$ es normal. Es fácil comprobar la desigualdad $|\,\|f\|_K - \|g\|_K\,| \leq \|f - g\|_K$ con la que se obtiene que la aplicación $f \to \|f\|_K$ es τ_K-continua en $\mathcal{H}(\Omega)$. Como $\overline{\mathcal{F}}^{\tau_K}$ es τ_K- compacto su imagen es un conjunto acotado de $\mathbb{C}$. Se obtiene así que el conjunto $\{\|f\|_K : f \in \mathcal{F}\}$ es acotado para cada compacto $K \subset \Omega$. ■

La siguiente observación puede ser útil a la hora de ver que una familia concreta $\mathcal{F} \subset \mathcal{H}(\Omega)$ es normal: Sea $\Omega = \cup_{j \in J} \Omega_j$ donde cada $\Omega_j \subset \mathbb{C}$ es abierto. En virtud del teorema de Montel y de la proposición 9.1.4, si $\mathcal{F} \subset \mathcal{H}(\Omega)$ es una familia tal que cada $\mathcal{F}|_{\Omega_j}$ es acotada ($\Leftrightarrow$ normal) en $\mathcal{H}(\Omega_j)$, entonces $\mathcal{F}$ es normal en $\mathcal{H}(\Omega)$.

NOTA; Después del teorema de Montel se puede afirmar que la topología τ_K de $\mathcal{H}(\Omega)$ no es normable, es decir, no se puede definir una norma en este espacio cuya topología asociada sea τ_K: Si hubiese una norma $\|\ \|$ con esta propiedad, en virtud de la proposición 9.1.4 los conjuntos acotados para la norma serían acotados según la definición 9.1.3, luego la bola $\{f \in \mathcal{H}(\Omega) : \|f\| \leq 1\}$ sería compacta, lo que es imposible porque $\mathcal{H}(\Omega)$ no es de dimensión finita.

Combinando el teorema de Montel con el principio de identidad se obtiene el siguiente resultado que suele resultar muy útil para demostrar que una sucesión de funciones holomorfas converge uniformemente sobre compactos. Su demostración utiliza un conocido resultado de la topología de los espacios metrizables que afirma que una sucesión contenida en un compacto es convergente si y sólo si tiene un único punto de aglomeración (lo que significa que todas las subsucesiones convergentes tienen el mismo límite)

Teorema 9.1.6 [Vitali] *Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$ un abierto conexo y $f_n \in \mathcal{H}(\Omega)$ una sucesión acotada que converge puntualmente en un conjunto $M \subset \Omega$ con $M' \cap \Omega \neq \emptyset$. Entonces f_n converge uniformemente sobre compactos. Su límite $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ queda determinado por la condición* $\lim_n f_n(z) = f(z)$ *para todo $z \in M$.*

DEM: En virtud del teorema de Montel $\mathcal{F} = \overline{\{f_n : n \in \mathbb{N}\}}$ es un subconjunto compacto del espacio metrizable $(\mathcal{H}(\Omega), \tau_K)$. Por lo tanto basta demostrar que todas las subsucesiones τ_K- convergentes de f_n tienen el mismo límite. Sean $(f_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ y $(f_{m_j})_{j\in\mathbb{N}}$ dos subsucesiones que convergen uniformemente sobre compactos hacia g_1 y g_2 respectivamente. Según la hipótesis, para cada $z \in M$ la sucesión $f_n(z)$ es convergente y por lo tanto

$$\lim_k f_{n_k}(z) = \lim_n f_n(z) = \lim_j f_{m_j}(z)$$

luego $g_1(z) = g_2(z)$ para cada $z \in M$. Como Ω es conexo y $g_1, g_2 \in \mathcal{H}(\Omega)$, en virtud del principio de identidad $g_1 = g_2$. Queda demostrado así que la sucesión f_n converge uniformemente sobre compactos hacia una función $g \in \mathcal{H}(\Omega)$. Además, el principio de identidad permite identificar el límite: Si $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ cumple que $f(z) = \lim_n f_n(z)$ para todo $z \in \Omega$ entonces $f = g$. ■

OBSERVACIÓN: Si en el teorema anterior se supone que la sucesión f_n converge puntualmente en todo Ω se puede eliminar la hipótesis de conexión ya que las hipótesis del teorema se cumplen en cada componente conexa de Ω).

Ejemplo 9.1.7 *La sucesión $f_n(z) = (1 + z/n)^n$ converge uniformemente sobre compactos hacia e^z*

DEM: Cuando $z = x \in \mathbb{R}$ es bien conocido que $\lim_n f_n(x) = e^x$. La sucesión es acotada pues dado un compacto $K \subset \mathbb{C}$, si $R = \max\{|z| : z \in K\}$, para todo $n \in \mathbb{N}$ y todo $z \in K$ se cumple

$$|f_n(z)| \leq \left(1 + \frac{|z|}{n}\right)^n \leq \left(1 + \frac{R}{n}\right)^n \leq e^R$$

Aplicando el teorema de Vitali con $M = \mathbb{R}$ se obtiene el resultado. ■

Una pregunta natural relacionada con la convergencia uniforme sobre compactos es la siguiente: Si $f_n \in \mathcal{H}(\Omega)$ converge uniformemente sobre compactos hacia $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ ¿Qué propiedades de las funciones f_n se transmiten al límite?. Los corolarios 9.1.9 y 9.1.10 del siguiente teorema proporcionan respuestas cuando la propiedad considerada en las funciones f_n es la inyectividad o la ausencia de ceros.

Teorema 9.1.8 [Hurwitz] *Sea $f_n \in \mathcal{H}(\Omega)$ una sucesión que converge uniformemente sobre compactos hacia $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ y sea $\overline{D(a,r)}$ un disco cerrado tal que $f(z) \neq 0$ cuando $|z - a| = r$. Entonces existe $m \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geq m$ las funciones f y f_n tienen el mismo número de ceros en $D(a,r)$ (contados repetidos según sus multiplicidades)*

DEM: En algún punto b del compacto $C_r = \{z : |z - a| = r\}$ se alcanza el mínimo $\mu = \min\{|f(z)| : z \in C_r\}$ luego, según la hipótesis, $\mu = |f(b)| > 0$.

Por la convergencia uniforme sobre C_r existe $m \in \mathbb{N}$ tal que para $n \geq m$ y todo $z \in C_r$ se cumple $|f_n(z) - f(z)| \leq \mu/2$, luego $|f_n(z) - f(z)| < |f(z)|$. Entonces, según el teorema de Rouché (5.4.4) para $n \geq m$ las funciones f y f_n tienen el mismo número de ceros en el disco $D(a,r)$. ■

Corolario 9.1.9 *Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$ un abierto conexo y $f_n \in \mathcal{H}(\Omega)$ una sucesión de funciones sin ceros que converge uniformemente sobre compactos hacia $f \in \mathcal{H}(\Omega)$. Entonces, o bien f es idénticamente nula, o bien f no tiene ceros.*

Dem: Basta demostrar que si f no es idénticamente nula entonces no tiene ceros. Esto lo haremos por reducción al absurdo suponiendo que $f(a) = 0$ para algún $a \in \Omega$. Observemos en primer lugar que al ser Ω conexo los ceros de f (si los hay) son aislados. Por lo tanto debe existir $\overline{D(a,r)} \subset \Omega$ tal que $f(z) \neq 0$ si $0 < |z-a| \leq r$. Con el teorema de Hurwitz se llega a que, desde un valor de n en adelante, todas las funciones f_n tienen algún cero en $D(a,r)$. Con esta contradicción queda demostrado que f no tiene ceros. ■

Corolario 9.1.10 *Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$ un abierto conexo y $f_n \in \mathcal{H}(\Omega)$ una sucesión de funciones inyectivas que converge uniformemente sobre compactos hacia $f \in \mathcal{H}(\Omega)$. Entonces, o bien f es inyectiva, o bien f es constante.*

Dem: Veamos que si f no es inyectiva entonces es constante. Supongamos que existen $a, b \in \Omega$ $a \neq b$ con $f(a) = f(b)$. El abierto $\Omega_a = \Omega \setminus \{a\}$ sigue siendo conexo y la función $f - f(a)$, tiene un cero en $b \in \Omega_a$. La sucesión $f_n - f_n(a)$ converge uniformemente sobre compactos hacia $f - f(a)$ y está formada por funciones que no se anulan en Ω_a. Según el corolario 9.1.9 la función $f - f(a)$ es idénticamente nula, y por lo tanto f es constante. ■

El siguiente resultado es útil para obtener que una familia concreta es normal.

Proposición 9.1.11 *Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$ un abierto conexo. Si $\mathcal{F} \subset \mathcal{H}(\Omega)$ verifica*

i) *Existe $a \in \Omega$ tal que $\{f(a) : f \in \mathcal{F}\}$ es acotado.*

ii) $\overline{\cup\{f(\Omega) : f \in \mathcal{F}\}} \neq \mathbb{C}$

entonces $\mathcal{F}$ es una familia normal.

Dem: Véase [17] ejerc. 12.4 ■

Un profundo teorema de Montel-Caratheodory (véase [6], 4.1) afirma que el resultado de la proposición anterior se sigue verificando cuando la condición ii) se sustituye por la condición más débil:

ii') Existen $a, b \in \mathbb{C}$, $a \neq b$ tales que cada $f \in \mathcal{F}$ omite los valores a y b.

9.2. El teorema de Riemann

Recordemos que un abierto $\Omega \subset \mathbb{C}$ llama holomorficamente conexo cuando es conexo y toda $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ tiene primitiva. En este caso, según el teorema 5.2.4, cada $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ con $0 \notin f(\Omega)$ posee un logaritmo holomorfo en Ω, es decir existe $F \in \mathcal{H}(\Omega)$ con $e^F = f$.

Es claro que los abiertos holomorficamente conexos tienen la siguiente propiedad:

$$\text{[RC]:} \quad \text{Para cada } f \in \mathcal{H}(\Omega) \text{ con } 0 \notin f(\Omega) \text{ existe } g \in \mathcal{H}(\Omega) \text{ con } g^2 = f.$$

En los resultados que siguen la hipótesis $\Omega \subsetneq \mathbb{C}$ es esencial ya que, en virtud del teorema de Liouville, los resultados son falsos para $\Omega = \mathbb{C}$.

Lema 9.2.1 *Sea $\Omega \subsetneq \mathbb{C}$ un abierto conexo con la propiedad [RC]. Entonces existe una función inyectiva $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ con $f(\Omega) \subset D(0,1)$.*

DEM: La hipótesis $\Omega \subsetneq \mathbb{C}$ permite elegir un punto $b \in \mathbb{C} \setminus \Omega$ con el que obtenemos la función $z - b$ que no se anula en Ω. Según la propiedad [RC] existe $\varphi \in \mathcal{H}(\Omega)$ tal que $\varphi(z)^2 = z - b$ para todo $z \in \Omega$. La función φ es inyectiva (porque su cuadrado lo es) y por lo tanto no es constante. Como Ω es conexo, el teorema de la aplicación abierta (4.2.3) permite afirmar que la imagen $\varphi(\Omega)$ es abierta, y por lo tanto contiene algún disco $\varphi(\Omega) \supset D(a,r)$. Obsérvese que la condición $0 \notin \varphi(\Omega)$ implica que $0 < r \leq |a|$.

A continuación verificamos que $D(-a,r) \cap \varphi(\Omega) = \emptyset$:
Razonamos por reducción al absurdo suponiendo que $\varphi(w) \in D(-a,r)$ para algún $w \in \Omega$. En este caso $-\varphi(w) \in D(a,r) \subset \varphi(\Omega)$ luego $-\varphi(w) = \varphi(w')$ para algún $w' \in \Omega$. Elevando al cuadrado se obtiene que $w = w'$, y se llega al absurdo $\varphi(w) = \varphi(w') = 0$.

La propiedad $D(-a,r) \cap \varphi(\Omega) = \emptyset$ nos asegura que $|a + \varphi(z)| \geq r$ para todo $z \in \Omega$. Entonces con $0 < \rho < r$ podemos definir la función $f(z) = \rho/(a + \varphi(z)$ que cumple los requisitos del enunciado. ■

El lema 9.2.1 sirve para garantizar que la familia $\mathcal{F}$ que interviene en el siguiente lema no es vacía:

Lema 9.2.2 *Sea $\Omega \subsetneq \mathbb{C}$ un abierto conexo con la propiedad [RC] y*

$$\mathcal{F} = \{f \in \mathcal{H}(\Omega) : f \text{ es inyectiva y } f(\Omega) \subset D(0,1)\}$$

Entonces, dado $a \in \Omega$, existe $h \in \mathcal{F}$ que verifica $|h'(a)| = \max\{|f'(a)| : f \in \mathcal{F}\}$.

DEM: La familia no vacía $\mathcal{F}$ es acotada luego, según el teorema de Montel, es normal. Esto significa que su τ_K-clausura $\overline{\mathcal{F}}$ es compacta en $(\mathcal{H}(\Omega), \tau_K)$. La aplicación

$$\Phi_a : (\mathcal{H}(\Omega), \tau_K) \to [0, +\infty), \quad \Phi_a(f) = |f'(a)|$$

es continua (pues la derivada $D : (\mathcal{H}(\Omega), \tau_K) \to (\mathcal{H}(\Omega), \tau_K)$, $D(f) = f'$, es continua y también lo es la evaluación, $\delta_a : (\mathcal{H}(\Omega), \tau_K) \to \mathbb{C}$, $\delta_a(g) = g(a)$). La aplicación continua Φ_a alcanza un máximo absoluto sobre el compacto $\overline{\mathcal{F}}$, es decir, existe $h \in \overline{\mathcal{F}}$ tal que

$$|h'(a)| = \max\{|f'(a)| : f \in \overline{\mathcal{F}}\}$$

Para terminar la demostración basta ver que $h \in \mathcal{F}$: Como la topología τ_K es metrizable y $h \in \overline{\mathcal{F}}$, existe una sucesión $h_n \in \mathcal{F}$ que converge uniformemente sobre compactos hacia h. Cada h_n es inyectiva y según el corolario 9.1.10 podemos afirmar que o bien h es inyectiva o bien h es constante. La segunda alternativa no se puede presentar porque en ese caso para todo $f \in \mathcal{F}$ sería $f'(a) = 0$, y esto es imposible porque cada $f \in \mathcal{F}$ es inyectiva (recuérdese que la derivada de una función holomorfa e inyectiva no se anula nunca).

Por otra parte, como $|h_n(z)| < 1$ para cada $z \in \Omega$ y cada $n \in \mathbb{N}$, la función límite h debe cumplir que $|h(z)| \leq 1$ para todo $z \in \Omega$. Como h no es constante (porque es inyectiva) el teorema de la aplicación abierta 4.2.3 permite concluir que $|h(z)| < 1$ para todo $z \in \Omega$ y con ello que $h \in \mathcal{F}$. ■

Lema 9.2.3 *Sea $f \in \mathcal{H}(D(0,1))$ tal que $f(D(0,1)) \subset D(0,1)$. Entonces para cada $a \in D(0,1)$ se cumple*

$$|f'(a)| \leq \frac{1 - |f(a)|^2}{1 - |a|^2}$$

y si en algún $a \in D(0,1)$ se cumple la igualdad entonces f es un automorfismo conforme de $D(0,1)$. En particular, si f no es inyectiva se cumple $|f'(0)| < 1$.

Dem: Véase [17] ejerc. 9.14 ■

Teorema 9.2.4 [Versión preliminar del teorema de Riemann] *Todo abierto conexo $\Omega \subsetneq \mathbb{C}$ con la propiedad [RC] es conformemente equivalente al disco $D(0,1)$.*

Dem: En virtud de los lemas 9.2.1 y 9.2.2 fijado un punto $a \in \Omega$, la familia

$$\mathcal{F} = \{f \in \mathcal{H}(\Omega) : f \text{ es inyectiva y } f(\Omega) \subset D(0,1)\}$$

no es vacía y existe $h \in \mathcal{F}$ que cumple $|h'(a)| = \max\{|f'(a)| : f \in \mathcal{F}\}$. El teorema quedará establecido demostrando que $h(\Omega) = D(0,1)$. Esto lo haremos por reducción al absurdo suponiendo que existe $b \in D(0,1) \setminus h(\Omega)$.

En ese caso podemos considerar el isomorfismo conforme $T_b : D(0,1) \to D(0,1)$ definido mediante la transformación de Möbius $T_b(z) = (z - b)/(1 - \overline{b}z)$, cuya transformación inversa es T_{-b}. La composición $T_b \circ h$ es un elemento de $\mathcal{F}$ que no se anula en Ω, y según la hipótesis [RC] existe $g \in \mathcal{H}(\Omega)$ tal que $g^2 = T_b \circ h$. Obsérvese que g es inyectiva (porque g^2 lo es) y por lo tanto g también es un elemento de $\mathcal{F}$. Con $c = g(a)$ definimos el isomorfismo conforme $T_c : D(0,1) \to D(0,1)$, $T_c(z) = (z - c)/(1 - \overline{c}z)$ cuyo inverso es T_{-c}. Utilizando la función $p(z) = z^2$ podemos descomponer h en la forma

$$h = (T_{-b} \circ p \circ T_{-c}) \circ (T_c \circ g) = F \circ h_1 \quad \text{donde } F = T_{-b} \circ p \circ T_{-c}, \text{ y } \quad h_1 = T_c \circ g$$

Como $F : D(0,1) \to D(0,1)$ no es inyectiva (porque $p(z) = z^2$ no lo es), con el lema 9.2.3 se obtiene que $|F'(0)| < 1$. Entonces, usando la regla de la cadena para el cálculo de la derivada de la función compuesta $h = F \circ h_1$, se llega a la desigualdad

$$|h'(a)| = |F'(0)h_1'(a)| < |h_1'(a)|$$

que entra en contradicción con la propiedad que ha servido para obtener h porque $h_1 \in \mathcal{F}$. Con esta contradicción acaba la demostración. ■

Teorema 9.2.5 [Riemann] *Sea $\Omega \subsetneq \mathbb{C}$ un abierto conexo tal que $\mathbb{C}_\infty \setminus \Omega$ es conexo. Entonces para cada $a \in \Omega$ existe un único isomorfismo conforme $f : \Omega \to D(0,1)$ que cumple $f(a) = 0$ y $f'(a) > 0$.*

DEM: Según el teorema 5.2.4 cada $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ con $0 \notin f(\Omega)$ tiene un logaritmo holomorfo y por lo tanto una raíz cuadrada holomorfa, de modo que se cumple la propiedad [RC]. El isomorfismo conforme $h : \Omega \to D(0,1)$ obtenido en la demostración de 9.2.4 cumple

$$|h'(a)| = \text{máx}\{|f'(a)| : f \in \mathcal{H}(\Omega),\ f \text{ inyectiva},\ f(\Omega) \subset D(0,1)\}$$

Según la demostración del lema 8.2.9 esta condición implica que $h(a) = 0$. Sea $h'(a) = re^{i\alpha}$. Es claro que $f(z) = e^{-i\alpha}h(z)$ cumple los requisitos del enunciado.

Si $g : \Omega \to D(0,1)$ es otro isomorfismo conforme que verifica $g(a) = 0$ y $g'(a) > 0$, podemos considerar el isomorfismo conforme $\varphi = f \circ g^{-1} : D(0,1) \to D(0,1)$ que cumple $\varphi(0) = 0$. Según la proposición 8.2.7 φ es de la forma $\varphi(z) = \mu z$ con $|\mu| = 1$, y teniendo en cuenta que $\mu = \varphi'(0) = f'(a)(g^{-1})'(0) = f'(a)/g'(a) > 0$ se obtiene que $\mu = 1$ y con ello que $f = g$. ■

9.3. Aplicaciones a la topología del plano

Definición 9.3.1 *Dos caminos cerrados $\gamma_0, \gamma_1 : [0,1] \to \Omega$ en un abierto $\Omega \subset \mathbb{C}$ se dice que son Ω-homotópicos si existe una función continua $H : [0,1] \times [0,1] \to \Omega$ que verifica:*

i) $H(0,t) = \gamma_0(t)$, $H(1,t) = \gamma_1(t)$, para todo $t \in [0,1]$.

ii) $H(s,0) = H(s,1)$ para todo $s \in [0,1]$.

Dos caminos γ_0, $\gamma_1 : [0,1] \to \Omega$, con los mismos extremos: $\gamma_0(0) = \gamma_1(0) = z_0$, $\gamma_0(1) = \gamma_1(1) = z_1$, se dice que son Ω-homotópicos (como caminos con extremos fijos) si existe una función continua $H : [0,1] \times [0,1] \to \Omega$ que cumple:

i) $H(0,t) = \gamma_0(t)$, $H(1,t) = \gamma_1(t)$, para todo $t \in [0,1]$.

ii) $H(s,0) = z_0$, $H(s,1) = z_1$ para todo $s \in [0,1]$.

En ambos casos se dice que H es una homotopía entre γ_0 y γ_1.

NOTA: Para definir una homotopía entre dos caminos sólo hay que requerir que ambos estén definidos en el mismo intervalo $[a,b]$, pero por comodidad de notación hemos considerado que el intervalo es $[0,1]$.

Para interpretar el significado de la Ω-homotopía de caminos cerrados consideremos el conjunto $\Lambda(\Omega)$ formado por los caminos cerrados $\gamma : [0,1] \to \Omega$, dotado de la distancia de la convergencia uniforme $d_\infty(\gamma, \eta) = \text{máx}\{|\gamma(t) - \eta(t)| : 0 \le t \le 1\}$.

Si $H : [0,1] \times [0,1] \to \Omega$ es una homotopía entre los caminos cerrados γ_0, γ_1, para cada $s \in [0,1]$ la función parcial $H_s : [0,1] \to \Omega$, $H_s(t) = H(s,t)$ es un camino cerrado en Ω, y se cumple que $H_0 = \gamma_0$ y $H_1 = \gamma_1$. Además, la aplicación $s \to H_s$ de $[0,1]$ en el espacio métrico $(\Lambda(\Omega), d_\infty)$ es continua. Esto es consecuencia de la continuidad uniforme de H

en el compacto $[0,1]\times[0,1]$: Dado $\epsilon > 0$ sea $\delta > 0$ tal que si $s, s' \in [0,1]$ y $t, t' \in [0,1]$ verifican $|s-s'| < \delta$, $|t-t'| < \delta$ entonces $|H(s,t) - H(s',t')| < \epsilon$. Entonces, cuando $|s-s'| < \delta$, para cada $t \in [0,1]$ se cumple $|H(s,t) - H(s',t)| < \epsilon$, luego $d_\infty(H_s, H_{s'}) \leq \epsilon$.

Vemos así que el hecho de que dos caminos cerrados γ_0 y γ_1 sean Ω-homotópicos significa que existe una familia uniparamétrica H_s de caminos cerrados en Ω, que depende continuamente de $s \in [0,1]$, mediante la cual el camino $\gamma_0 = H_0$ se va deformando continuamente, dentro de Ω, hasta transformarse en $\gamma_1 = H_1$. Es decir, una homotopía entre los caminos $\gamma_0, \gamma_1 \in \Lambda(\Omega)$ se puede interpretar como un camino en el espacio métrico $\Lambda(\Omega)$, de origen γ_0 y extremo γ_1

La interpretación de la Ω-homotopía de caminos con extremos fijos es similar considerando el conjunto $\Lambda_{z_0}^{z_1}(\Omega)$ formado por los caminos $\gamma : [0,1] \to \Omega$, con $\gamma(0) = z_0$, $\gamma(1) = z_1$, dotado de la métrica de la convergencia uniforme. Ahora todos los caminos intermedios H_s tienen los mismos extremos que γ_0 y γ_1.

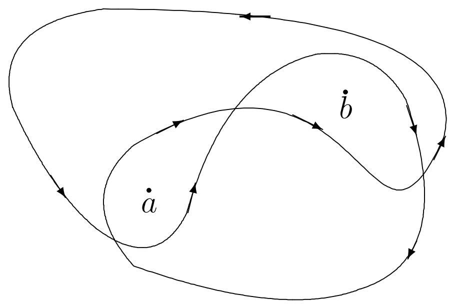
Definición 9.3.2 *Un abierto $\Omega \subset \mathbb{C}$ se dice que es simplemente conexo si es conexo y además cada camino cerrado en Ω es Ω-homotópico a un camino constante.*

Recordemos que un abierto $\Omega \subset \mathbb{C}$ se dice que es estrellado (respecto al punto $a \in \Omega$) cuando existe $a \in \Omega$ tal que para cada $z \in \Omega$ el segmento $[a,z] = \{a + t(z-a) : 0 \leq t \leq 1\}$ está contenido en Ω. Los abiertos estrellados son simplemente conexos: Observemos en primer lugar que los abiertos estrellados son conexos porque son conexos por poligonales (de sólo dos lados). Por otra parte, si $\gamma : [0,1] \to \Omega$ es un camino cerrado y Ω es estrellado respecto al punto $a \in \Omega$, entonces la función $H(s,t)) = sa + (1-s)\gamma(t) \in \Omega$, definida para $(s,t) \in [0,1]\times[0,1]$ establece una homotopía en Ω mediante la que $\gamma = H_0$ se transforma en el camino constante $H_1 = a$. Es inmediato comprobar que todo abierto $\Omega \subset \mathbb{C}$ homeomorfo a un abierto simplemente conexo es simplemente conexo. Como los discos son simplemente conexos (por ser estrellados) se sigue que todo abierto $\Omega \subset \mathbb{C}$ homeomorfo al disco $D(0,1)$ es simplemente conexo. Nuestro objetivo es demostrar que el recíproco también es cierto y para ello, además del teorema de Riemann necesitamos el siguiente lema

Lema 9.3.3 *Si dos caminos cerrados $\gamma_0, \gamma_1 : [0,1] \to \Omega$, son Ω-homotópicos entonces son Ω-homólogos. Por lo tanto, en un abierto simplemente conexo $\Omega \subset \mathbb{C}$ cualquier camino cerrado es Ω-homólogo a 0.*

Dem: Véase [17] ejerc. 7.55 ∎

El recíproco del resultado expuesto en el lema anterior no es cierto: Puede ocurrir que dos caminos cerrados $\gamma_0, \gamma_1 : [0,1] \to \Omega$, no sean Ω-homotópicos pero sean Ω-homólogos. Es fácil convencerse que en el abierto $\Omega = \mathbb{C} \setminus \{a,b\}$ con $a \neq b$ el camino de la figura



es Ω-homólogo a 0 pero no es Ω-homotópico a un camino constante.

El teorema de Riemann 9.2.5 se puede aplicar para obtener la siguiente caracterización de los abiertos simplemente conexos que completa los resultados del teorema 5.2.4.

Teorema 9.3.4 *Las siguientes propiedades de un abierto conexo $\Omega \subset \mathbb{C}$ son equivalentes*

a) Ω *es homeomorfo al disco* $D(0,1)$.

b) Ω *es simplemente conexo.*

c) $\mathbb{C}_\infty \setminus \Omega$ *es conexo.*

DEM: Según lo comentado después de la definición 9.3.2 es claro que a) $\Rightarrow$ b).
b) $\Rightarrow$ c) Si Ω es simplemente conexo, según el lema 9.3.3, todo camino cerrado γ en Ω es Ω-homólogo a 0 y acudiendo al teorema 5.2.4 se obtiene que $\mathbb{C}_\infty \setminus \Omega$ es conexo.
c) $\Rightarrow$ a) Cuando $\Omega \neq \mathbb{C}$, según el teorema de Riemann Ω es conformemente equivalente al disco $D(0,1)$ y por lo tanto cumple a). Por otra parte, si $\Omega = \mathbb{C}$ es fácil comprobar que se cumple a): Usando un homeomorfismo creciente $\varphi : [0,+\infty) \to [0,1)$, se puede establecer un homeomorfismo $f : \mathbb{C} \to D(0,1)$, definiendo $f(re^{i\theta}) = \varphi(r)e^{i\theta}$. ■

9.4. Complementos: El teorema de Ascoli

La topología de $C(\Omega, E)$

En lo que sigue Ω es un abierto del plano complejo y (E,d) un espacio métrico. Denotaremos por E^Ω el conjunto de las funciones $f : \Omega \to E$ y por $C(\Omega, E)$ el subconjunto formado por las funciones continuas. En E^Ω se puede introducir una topología natural para la que las sucesiones convergentes son las que convergen uniformemente sobre cada compacto $K \subset \Omega$. Esta topología, llamada de la convergencia uniforme sobre compactos y denotada τ_K en lo que sigue, se define dando una base de entornos de cada $f \in E^\Omega$:

$$\mathcal{B}_f = \{V(f,K,\epsilon) : K \subset \Omega \text{ compacto, } \epsilon > 0\}$$

$$V(f,K,\epsilon) = \{g \in E^\Omega : d_K(f,g) < \epsilon\}; \quad d_K(f,g) = \sup\{d(f(z),g(z)) : z \in K\}$$

Un conjunto de funciones $A \subset E^\Omega$ es abierto para la topología τ_K cuando para cada $f \in A$ existe $V \in \mathcal{B}_f$ tal que $V \subset A$. Es fácil comprobar que de esta forma queda definida en E^Ω una topología separada para la cual $\mathcal{B}_f$ es una base de entornos de f. Es claro que una sucesión de funciones $f_n \in E^\Omega$ es convergente en topología si y sólo si converge uniformemente sobre compactos.

El principal objetivo de esta sección es la caracterización de los subconjuntos compactos del subespacio $(C(\Omega, E), \tau_K) \subset (E^\Omega, \tau_K)$ formado por las funciones continuas.

Nuestra primera tarea consiste en demostrar que la topología de la convergencia uniforme sobre compactos es metrizable. El interés de este resultado reside, entre otras cosas, en la posibilidad de caracterizar los compactos usando sucesiones.

Según 1.5.1 para cada abierto $\Omega \subset \mathbb{C}$ existe una sucesión fundamental de compactos, es decir, una sucesión de compactos $K_n \subset \Omega$, que verifica

$$\Omega = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} K_n, \quad \text{y} \quad K_n \subset \overset{\circ}{K}_{n+1} \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N}.$$

(En este caso, es claro que cada compacto $K \subset \Omega$ está contenido en algún K_m).

Teorema 9.4.1 *Sea (K_n) una sucesión fundamental de compactos en el abierto Ω. Para $f, g \in E^\Omega$ se define*

$$\rho(f,g) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n}\rho_n(f,g), \quad \textit{con} \quad \rho_n(f,g) = \min\{1, d_{K_n}(f., g)\}$$

Entonces ρ es una distancia en E^Ω cuya topología asociada es τ_K. Es decir, la topología de convergencia uniforme sobre compactos es metrizable.

DEM: Comencemos viendo que ρ es una distancia:
Es evidente que $\rho(f,g) \geq 0$. Si $\rho(f,g) = 0$, para todo $n \in \mathbb{N}$ se cumple $\rho_n(f,g) = 0$ luego $f|_{K_n} = g|_{K_n}$. Como Ω es la unión de los compactos K_n se obtiene que $f = g$.
La condición de simetría $\rho(f,g) = \rho(g,f)$ es evidente. Si $f, g, h \in E^\Omega$ es inmediato que para todo $n \in \mathbb{N}$ se cumple la desigualdad $d_{K_n}(f,g) \leq d_{K_n}(f,h) + d_{K_n}(h,g)$, luego $\rho_n(f,g) \leq \rho_n(f,h) + \rho_n(h,g)$ (considere dos casos: la suma de la derecha es < 1 ó ≥ 1). Con esta desigualdad se obtiene que

$$\rho(f,g) \leq \rho(f,h) + \rho(h,g)$$

Esto termina la prueba de que ρ es una distancia en E^Ω. En lo que sigue $B_\rho(f,r)$ denota la bola de centro f y radio r en el espacio métrico (E^Ω, ρ):

$$B_\rho(f,r) = \{g \in E^\Omega : \rho(g,f) < r\}$$

Para demostrar que τ_K es la topología asociada a la distancia ρ basta demostrar

a) Para cada $V(f, K, \epsilon) \in \mathcal{B}_f$ existe $r > 0$ tal que $B_\rho(f,r) \subset V(f, K, \epsilon)$.

b) Para cada bola $B_\rho(f,r)$ existe $V(f, K, \epsilon) \in \mathcal{B}_f$ tal que $V(f, K, \epsilon) \subset B_\rho(f,r)$

La afirmación a) es consecuencia de la desigualdad $2^{-n}\rho_n(f,g) \le \rho(f,g)$ válida para todo $n \in \mathbb{N}$: Dado $V(f,K,\epsilon)$ existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $K \subset K_m$ (esto ocurre porque K_n es una sucesión fundamental de compactos) y tomamos $r = \epsilon 2^{-m}$. Si $g \in B_\rho(f,r)$ se verifica $\rho_m(g,f) \le 2^m \rho(g,f) < 2^m r = \epsilon$. Para lo que queremos demostrar no hay inconveniente en suponer que $0 < \epsilon < 1$, luego $d_{K_m}(g,f) = \rho_m(g,f)$ y se obtiene así

$$d_K(g,f) \le d_{K_m}(g,f) = \rho_m(g,f) < \epsilon, \quad \text{es decir} \quad g \in V(f,K,\epsilon)$$

La afirmación b) es consecuencia de la desigualdad $\rho(f,g) \le 2^{-n} + \rho_n(f,g)$ válida para todo $n \in \mathbb{N}$. Para obtenerla basta observar que para $1 \le j \le n$ es $d_{K_j}(f,g) \le d_{K_n}(f,g)$, luego $\rho_j(f,g) \le \rho_n(f,g)$ y por lo tanto

$$\rho(f,g) \le \sum_{j=1}^{n} 2^{-j}\rho_j(f,g) + 2^{-n} \le \rho_n(f,g)\sum_{j=1}^{n} 2^{-j} + 2^{-n} \le \rho_n(f,g) + 2^{-n}$$

Dado $r > 0$, sea $m \in \mathbb{N}$ tal que $2^{-m} \le r/2$. Tomando $\epsilon = r/2$ y $K = K_m$ se consigue la inclusión $V(f,K,\epsilon) \subset B_\rho(f,r)$. Efectivamente,

$$g \in V(f,K_m,r/2) \Rightarrow \rho(g,f) \le \rho_m(g,f) + 2^{-m} \le d_{K_m}(g,f) + r/2 < r$$

■

Proposición 9.4.2 *En las condiciones del teorema 9.4.1 si el espacio métrico* (E,d) *es completo, el espacio métrico* (E^Ω, ρ) *también lo es.*

DEM: Sea f_n una ρ-sucesión de Cauchy en E^Ω. Dado un compacto $K \subset \Omega$ y $0 < \epsilon < 1$, existe un compacto K_n (de la sucesión fundamental de compactos usada para definir ρ) tal que $K \subset K_n$. Según la definición de ρ-sucesión de Cauchy, existe $n(\epsilon) \in \mathbb{N}$ tal que

$$p,q \ge n(\epsilon) \Rightarrow \rho(f_p,f_q) < \epsilon 2^{-n}$$

Como $\rho_n(f_p,f_q) \le 2^n \rho(f_p,f_q) < \epsilon < 1$ se sigue que $d_{K_n}(f_p,f_q) = \rho_n(f_p,f_q)$. Entonces para $p,q \ge n(\epsilon)$ se cumple

$$d_K(f_p,f_q) \le d_{K_n}(f_p,f_q) = \rho_n(f_p,f_q) < \epsilon$$

Como la sucesión $f_n|_K$ cumple la condición de Cauchy para la convergencia uniforme sobre K y el espacio métrico (E,d) es completo, se obtiene que la sucesión f_n converge uniformemente sobre K. Al ser K un subconjunto compacto arbitrario de Ω podemos afirmar que la sucesión $f_n \in E^\Omega$ converge uniformemente sobre compactos, es decir, converge en el espacio métrico (E^Ω, ρ). ■

Proposición 9.4.3 *En las condiciones del teorema 9.4.1,* $C(\Omega,E)$ *es un subconjunto cerrado de* (E^Ω, τ_K)*. Si* (E,d) *es completo el espacio métrico* $(C(\Omega,E),\rho)$ *también es completo.*

DEM: Sea $f \in \overline{C(\Omega, E)}$ (adherencia en (E^Ω, τ_K)). Como la topología τ_K es metrizable, existe una sucesión $f_n \in C(\Omega, E)$ que converge hacia f uniformemente sobre compactos. La convergencia uniforme sobre compactos es suficiente para garantizar la continuidad del límite de una sucesión de funciones continuas, y por lo tanto $f \in C(\Omega, E)$. Con esto queda demostrado que $C(\Omega, E)$ es un subconjunto cerrado de (E^Ω, τ_K).

La segunda afirmación del enunciado se obtiene aplicando el resultado general que afirma que todo subconjunto cerrado de un espacio métrico completo, con la métrica inducida, es un espacio métrico completo. ■ .

Equicontinuidad

En la caracterización de los subconjuntos compactos del espacio topológico $(C(\Omega, E), \tau_K)$ interviene la noción de familia equicontinua de funciones que se define a continuación.

Definición 9.4.4 *Una familia $\mathcal{F} \subset C(\Omega, E)$ se dice que es equicontinua en $a \in \Omega$ cuando para cada $\epsilon > 0$ existe $D(a, r) \subset \Omega$ tal que*

$$[z \in D(a, r), f \in \mathcal{F}] \Rightarrow d(f(z), f(a)) < \epsilon$$

Se dice que $\mathcal{F}$ es equicontinua cuando es equicontinua en cada punto $a \in \Omega$.

En lo que sigue denotaremos por t_p la topología de la convergencia puntual en E^Ω (la topología producto, donde una base de entornos de $f \in E^\Omega$ es la formada por los conjuntos $V(f, H, \epsilon)$ con $H \subset \Omega$ finito y $\epsilon > 0$). Es claro que la topología de la convergencia uniforme sobre compactos τ_K es más fina que la topología de la convergencia puntual t_p, que en general no es metrizable.

En lo que sigue, dada una familia $\mathcal{F} \subset E^\Omega$, denotaremos por $\overline{\mathcal{F}}^{t_p}$ (resp. $\overline{\mathcal{F}}^{\tau_K}$) su clausura en E^Ω para la topología t_p (resp. τ_K). Es claro que $\overline{\mathcal{F}}^{\tau_K} \subset \overline{\mathcal{F}}^{t_p}$. Si $\mathcal{F} \subset C(\Omega, E)$, según la proposición 9.4.3 se cumple que $\overline{\mathcal{F}}^{\tau_K} \subset C(\Omega, E)$, pero en general no se puede asegurar que $\overline{\mathcal{F}}^{t_p}$ esté formado por funciones continuas.

Lema 9.4.5 *Si la familia $\mathcal{F} \subset C(\Omega, E)$ es equicontinua, su clausura $\overline{\mathcal{F}}^{t_p}$ también lo es y por lo tanto $\overline{\mathcal{F}}^{t_p} \subset C(\Omega, E)$.*

DEM: Dado $\epsilon > 0$ y $a \in \Omega$, existe $D(a, r) \subset \Omega$ tal que

$$[z \in D(a, r),\ f \in \mathcal{F}] \Rightarrow d(f(z), f(a)) < \epsilon$$

Si $g \in \overline{\mathcal{F}}^{t_p}$, para cada $z \in D(a, r)$, según la definición de punto t_p-adherente, existe $f_z \in \mathcal{F} \cap V(g, \{a, z\}, \epsilon)$ luego

$$d(g(z), g(a)) \leq d(g(z), f_z(z)) + d(f_z(z), f_z(a)) + d(f_z(a), g(a)) < \epsilon + \epsilon + \epsilon = 3\epsilon$$

Así queda demostrado que la familia $\overline{\mathcal{F}}^{t_p}$ es equicontinua en cada $a \in \Omega$. ■

Proposición 9.4.6 *Si la familia $\mathcal{F} \subset C(\Omega, E)$ es equicontinua entonces $\overline{\mathcal{F}}^{t_p} = \overline{\mathcal{F}}^{\tau_K}$.*

DEM: Tenemos que demostrar la inclusión $\overline{\mathcal{F}}^{t_p} \subset \overline{\mathcal{F}}^{\tau_K}$. Es decir, si $g \in \overline{\mathcal{F}}^{t_p}$ entonces todo τ_K-entorno $V(g, K, \epsilon) \in \mathcal{B}_g$ tiene intersección no vacía con $\mathcal{F}$. Según el lema 9.4.5 la familia $\overline{\mathcal{F}}^{t_p}$ es equicontinua, luego para cada $a \in \Omega$ existe $D(a, r_a) \subset \Omega$ verificando

$$[z \in D(a, r_a), f \in \overline{\mathcal{F}}^{t_p}] \Rightarrow d(f(z), f(a)) < \epsilon/4$$

Por compacidad, existe un conjunto finito $H \subset \Omega$ tal que $K \subset \bigcup_{a \in H} D(a, r_a)$. Como $V(g, H, \epsilon/4)$ es t_p-entorno de $g \in \overline{\mathcal{F}}^{t_p}$, existe $f \in \mathcal{F} \cap V(g, H, \epsilon/4)$, es decir, hay una función $f \in \mathcal{F}$ que cumple $d(f(a), g(a)) < \epsilon/4$ para cada $a \in H$.

Cada $z \in K$ pertenece a algún $D(a, r_a)$ con $a \in H$, luego

$$d(g(z), f(z)) \leq d(g(z), g(a)) + d(g(a), f(a)) + d(f(a), f(z)) < 3\epsilon/4$$

Se obtiene así que $d_K(g, f) < \epsilon$, luego $f \in \mathcal{F} \cap V(g, K, \epsilon)$ y queda demostrado que $V(g, K, \epsilon)$ tiene intersección no vacía con $\mathcal{F}$. ■

Corolario 9.4.7 *En una familia equicontinua $\mathcal{F} \subset C(\Omega, E)$ la topología de la convergencia puntual coincide con la topología de la convergencia uniforme sobre compactos. Es decir, t_p y τ_K inducen en $\mathcal{F}$ la misma topología.*

DEM: Basta demostrar que si $C \subset \mathcal{F}$ es cerrado para la topología que τ_K induce en $\mathcal{F}$ entonces también lo es para la topología que t_p induce en $\mathcal{F}$. En efecto, como C es equicontinuo se cumple $\overline{C}^{\tau_K} = \overline{C}^{t_p}$, luego $\overline{C}^{t_p} \cap \mathcal{F} = \overline{C}^{\tau_K} \cap \mathcal{F} = C$ y por lo tanto C es un cerrado para la topología que t_p induce en $\mathcal{F}$. ■

Lema 9.4.8 *Sea (E, d) un espacio métrico completo y $S \subset \Omega$ un subconjunto denso. Toda sucesión equicontinua $\{f_n : n \in \mathbb{N}\} \subset C(\Omega, E)$ que sea puntualmente convergente sobre S converge uniformemente sobre compactos.*

DEM: En virtud de 9.4.6 y 9.4.7 el resultado es cierto cuando $S = \Omega$ (si la sucesión equicontinua f_n converge puntualmente sobre Ω hacia f entonces $\{f_n : n \in \mathbb{N}\} \cup \{f\}$ sigue siendo una familia equicontinua sobre la que la topología de la convergencia puntual coincide con la topología de la convergencia uniforme sobre compactos).

Después de esta observación, para demostrar el lema basta ver que si una sucesión equicontinua f_n converge puntualmente en un conjunto denso $S \subset \Omega$ entonces converge puntualmente en todo Ω:

Dado $a \in \Omega$ y $\epsilon > 0$, en virtud de la equicontinuidad existe $D(a, r) \subset \Omega$ tal que

$$[z \in D(a, r), n \in \mathbb{N}] \Rightarrow d(f_n(z), f_n(a)) < \epsilon$$

y como S es denso en Ω, existe $s \in S \cap D(a, r)$. Por hipótesis la sucesión $f_n(s)$ converge, luego existe $n(\epsilon) \in \mathbb{N}$ tal que $p, q \geq n(\epsilon) \Rightarrow d(f_p(s), f_q(s)) < \epsilon$. Entonces para $p, q \geq n(\epsilon)$ también se verifica

$$d(f_p(a), f_q(a)) \leq d(f_p(a), f_p(s)) + d(f_p(s), f_q(s)) + d(f_q(s), f_q(a)) \leq 3\epsilon$$

Queda establecido así que para cada $a \in \Omega$ la sucesión $f_n(a)$ es de Cauchy y por lo tanto convergente (ya que (E, d) se supone completo). ■

OBSERVACIÓN. Si en el lema anterior en vez de suponer que el espacio métrico (E, d) es completo se supone que para cada $a \in \Omega$ hay un compacto K_a que contiene a la sucesión $\{f_n(a) : n \in \mathbb{N}\}$ se obtiene la misma conclusión ya que ahora, para cada $a \in \Omega$, tenemos una sucesión de Cauchy $f_n(a)$ contenida en un compacto y por lo tanto es convergente.

Para lo que sigue recordemos que un subconjunto A de un espacio métrico (E, d) se dice que es *relativamente compacto* cuando está contenido en algún compacto. Esto es equivalente a que su adherencia $\overline{A}$ sea compacta. También equivale a que toda sucesión contenida en A posea alguna subsucesión convergente (hacia algún punto de E).

Teorema 9.4.9 [Ascoli] *Una familia $\mathcal{F} \subset C(\Omega, E)$ es relativamente compacta para la topología τ_K de la convergencia uniforme sobre compactos si y sólo cumple las dos condiciones siguientes*

i) $\mathcal{F}$ es una familia equicontinua.

ii) Para cada $z \in \Omega$ el conjunto $\mathcal{F}(z) = \{f(z) : f \in \mathcal{F}\}$ es relativamente compacto en el espacio métrico (E, d).

DEM: Demostraremos en primer lugar que cuando se cumple i) y ii) entonces la familia $\mathcal{F}$ es relativamente compacta para τ_K, es decir, toda sucesión $f_n \in \mathcal{F}$ posee una subsucesión que converge uniformemente sobre compactos. Para ello, según la observación que sigue al lema 9.4.8, basta demostrar que de la sucesión f_n se puede extraer una subsucesión que converge puntualmente sobre el conjunto

$$S = \{x + iy \in \Omega : x, y \in \mathbb{Q}\}$$

que es numerable y denso en Ω. Sea $S = \{a_1, a_2, a_3, \cdots a_n, \cdots\}$ una enumeración de S. La sucesión $(f_n(a_1))_{n\in\mathbb{N}}$ está contenida en el conjunto relativamente compacto $\mathcal{F}(a_1)$ luego posee una subsucesión convergente que escribiremos en la forma $(f_n(a_1))_{n\in M_1}$, con $M_1 \subset \mathbb{N}$ infinito. La sucesión $(f_n(a_2))_{n\in M_1}$ está contenida en el conjunto relativamente compacto $\mathcal{F}(a_2)$ luego posee una subsucesión convergente que escribiremos en la forma $(f_n(a_2))_{n\in M_2}$, con $M_2 \subset M_1$ infinito. Obsérvese que la sucesión $(f_n(a_1))_{n\in M_2}$ también converge por ser subsucesión de $(f_n(a_1))_{n\in M_1}$, que era convergente. Procediendo de modo recurrente se obtiene una sucesión decreciente de conjuntos infinitos

$$M_1 \supset M_2 \supset \cdots M_k \supset M_{k+1} \supset \cdots$$

tal que para cada $k \in \mathbb{N}$ la sucesión $(f_n)_{n\in M_k}$ converge en los puntos $\{a_1, a_2, \cdots a_k\}$. Existe un conjunto infinito $M = \{n_1 < n_2 < \cdots < n_k < \cdots\}$ tal que $n_k \in M_k$ para cada $k \in \mathbb{N}$. Entonces $(f_n)_{n\in M}$ es una subsucesión de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ que converge en cada $a \in S$ (en efecto, desde el término k-ésimo en adelante $(f_n)_{n\in M}$ es subsucesión de $(f_n)_{n\in M_k}$, y por lo tanto converge en a_k).

Recíprocamente, supongamos ahora que $\overline{\mathcal{F}}^{\tau_K}$ es τ_K-compacto. Para demostrar i) fijamos $a \in \Omega$ y $\epsilon > 0$. Dado un disco compacto $K = \overline{D(a, r)} \subset \Omega$, la familia de τ_K-abiertos

$\{V(f, K, \epsilon) : f \in \overline{\mathcal{F}}^{\tau_K}\}$ recubre el τ_K-compacto $\overline{\mathcal{F}}^{\tau_K}$ y podemos extraer un recubrimiento finito

$$\overline{\mathcal{F}}^{\tau_K} \subset \bigcup_{1 \leq j \leq m} V(f_j, K, \epsilon) \quad \text{donde } f_1, f_2, \cdots f_m \in \mathcal{F}$$

Como la familia finita $\{f_1, f_2, \cdots f_m\} \subset C(\Omega, E)$ es equicontinua, existe $0 < \delta < r$ tal que

$$[z \in D(a, \delta), 1 \leq j \leq m] \Rightarrow d(f_j(z), f_j(a)) < \epsilon$$

Para cada $f \in \mathcal{F}$ existe $j \in \{1, 2, \cdots m\}$ tal que $f \in V(f_j, K, \epsilon)$ y para cada $z \in D(a, \delta)$ es $\{z, a\} \subset K$, luego

$$d(f(z), f(a)) \leq d(f(z), f_j(z)) + d(f_j(z), f_j(a)) + d(f_j(a), f(a)) \leq 3\epsilon$$

Con esto queda demostrado que la familia $\mathcal{F}$ es equicontinua.

Finalmente, para obtener ii) basta tener en cuenta que para cada $z \in \Omega$ la evaluación $\delta_z : C(\Omega, E) \to E$, $\delta_z(f) = f(z)$ es τ_K-continua, luego transforma el τ_K-compacto $\overline{\mathcal{F}}^{\tau_K}$ en el compacto $\{f(z) : f \in \overline{\mathcal{F}}^{\tau_K}\}$, que contiene a $\mathcal{F}(z)$. ■

Ejercicio 9.4.10 *Sea $\mathcal{F} \subset C(\Omega, E)$ una familia equicontinua y $S \subset \Omega$ un subconjunto denso. Entonces para cada $\epsilon > 0$ y cada compacto $K \subset \Omega$ existe un conjunto finito $H \subset S$ tal que $[f, g \in \mathcal{F}, d_H(f, h) < \epsilon] \Rightarrow d_K(f, g) < 3\epsilon$.*

SOLUCIÓN Por la equicontinuidad, para cada $a \in \Omega$ existe $D(a, r_a) \subset \Omega$ tal que

$$[z \in D(a, r_a), f \in \mathcal{F}] \Rightarrow d(f(z), f(a)) < \epsilon/2$$

y por compacidad existen $a_1, a_2, \cdots a_m \in \Omega$ tales que $K \subset \bigcup_{1 \leq j \leq m} D(a_j, r_{a_j})$. Como S es denso en Ω, para cada $j \in \{1, 2, \cdots m\}$ existe $b_j \in S \cap D(a_j., r_{a_j})$ El conjunto finito $H = \{b_1, b_2, \cdots b_m\} \subset S$ cumple la condición requerida: Sean $f, g \in \mathcal{F}$ con $d_H(f, g) < \epsilon$. Para cada $z \in K$ existe $j \in \{1, 2, \cdots m\}$ tal que $z \in D(a_j, r_{a_j})$ y por lo tanto

$$d(f(z), f(b_j)) \leq d(f(z), f(a_j)) + d(f(a_j), f(b_j)) \leq \epsilon/2 + \epsilon/2 = \epsilon$$

Análogamente, $d(g(z), g(b_j)) \leq \epsilon$, luego

$$d(f(z), g(z)) \leq d(f(z), g(b_j)) + d(f(b_j), g(b_j)) + d(g(b_j), g(z)) \leq 3\epsilon$$

El resultado establecido en este ejercicio vuelve a decir que en una familia equicontinua $\mathcal{F}$ la topología de la convergencia puntual sobre un conjunto denso $S \subset \Omega$ coincide con la topología de la convergencia uniforme sobre compactos. ■

9.5. Ejercicios

$\diamondsuit$ **9.1** *Si* $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ *y* $\overline{D(a,R)} \subseteq \Omega$, *demuestre que* $\pi R^2 |f(a)|^2 \leq I(f, D(a,R))$ *donde*

$$I(f, D(a,R)) = \int_{D(a,R)} |f(x+iy)|^2 dxdy$$

Deduzca que la siguiente condición implica que $\mathcal{F} \subset \mathcal{H}(\Omega)$ *es normal: Para cada* $a \in \Omega$ *existe* $\overline{D(a,R)} \subset \Omega$ *con* $\sup\{I(f, D(a,R)) : f \in \mathcal{F}\} < \infty$ *([17] ejerc. 5.37).*

$\diamondsuit$ **9.2** *Demuestre que* $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{H}(D(0,1))$ *es normal si y sólo si existe una sucesión* $M_n > 0$ *que cumple las dos condiciones siguientes:*

i) $\overline{\lim}_{n\to\infty} \sqrt[n]{M_n} \leq 1$;

ii) $|f^{(n)}(0)| \leq n! M_n$, *para cada* $f \in \mathcal{F}$, *y* $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$

([17] ejerc. 5.44).

$\diamondsuit$ **9.3** *Sea* $\Omega \subset \mathbb{C}$ *un abierto conexo y* $f_n \in \mathcal{H}(\Omega)$ *una sucesión que converge uniformemente sobre compactos hacia una función no constante* f. *Demuestre que para cada* $a \in \Omega$ *existe una sucesión* $a_n \in \Omega$ *que converge hacia* a *y verifica* $f_n(a_n) = f(a)$ *cuando* n *es suficientemente grande ([17] ejerc. 7.54).*

$\diamondsuit$ **9.4** *Sea* $\Omega \neq \mathbb{C}$ *un abierto simplemente conexo simétrico respecto al eje real y* $a \in \Omega \cap \mathbb{R}$. *Si* $f : \Omega \to D(0,1)$ *es un isomorfismo conforme que verifica* $f(a) = 0$ *y* $f'(a) > 0$ *demuestre que* $\overline{f(z)} = f(\overline{z})$ *para todo* $z \in \Omega$, *y que la imagen de* $\Omega \cap \{z : \operatorname{Im}(z) > 0\}$ *es un semidisco ([17] ejerc. 9.19).*

$\diamondsuit$ **9.5** *Sea* $f : D(0,1) \to Q$ *es un isomorfismo conforme entre el disco* $D(0,1)$ *y el cuadrado* $Q := \{x + iy : |x| < 1, |y| < 1\}$ *con* $f(0) = 0$. *Demuestre que* $f^{(n)}(0) = 0$ *si* $n - 1$ *no es múltiplo de* 4 *([17] ejerc. 9.20).*

$\diamondsuit$ **9.6** *Sea* $\Omega := \{z : |z - 2| > 1, |z| < 3\}$ *y* $\mathcal{F} \subset \mathcal{H}(\Omega)$ *la familia de las funciones* f *cuya parte real no toma los valores* $+1, -1$ *y verifican* $f(0) = 0$.

i) Demuestre que existe $g \in \mathcal{F}$ *tal que* $|g'(0)| = \max\{|f'(0)| : f \in \mathcal{F}\}$ *y calcule el valor del máximo.*

ii) Obtenga $f(\Omega)$ *cuando* $f \in \mathcal{F}$ *y* $|f'(0)| = 2/3$.

iii) Demuestre que existe $\epsilon > 0$ *tal que si* $f \in \mathcal{F}$ *y* $|f'(0)| \geq 1/3$ *entonces* $D(0,\epsilon) \subset f(\Omega)$ *([17] ejerc. 9.25).*

$\diamondsuit$ **9.7** *Demuestre que* $\mathcal{F} := \{f \in \mathcal{H}(D(0,1)) : f(0) = 1, \operatorname{Re} f(z) > 0, \forall z \in \Omega\}$ *es un subconjunto compacto de* $\mathcal{H}(D(0,1))$, *que* $|f'(0)| \leq 2$ *para cada* $f \in \mathcal{F}$ *y que existe* $g \in \mathcal{F}$ *con* $|g'(0)| = 2$, *que necesariamente es de la forma*

$$g(z) = \frac{1 + az}{1 - az} \quad \text{con} \quad |a| = 1$$

([17] ejerc. 9.28).

$\diamondsuit$ **9.8** *Sean* $G, \Omega \subset \mathbb{C}$ *abiertos y* $g \in \mathcal{H}(\Omega)$ *una función que transforma conjuntos acotados en conjuntos acotados. Sea* $\mathcal{F} \subset \mathcal{H}(G)$ *una familia tal que* $f(G) \subset \Omega$ *para cada* $f \in \mathcal{F}$. *Si* $\mathcal{F}$ *es normal demuestre que* $\mathcal{M} = \{g \circ f : f \in \mathcal{F}\}$ *también lo es. Muestre que el resultado es falso cuando* g *no transforma acotados en acotados ([17] ejerc. 12.2).*

$\diamondsuit$ **9.9** *Sea* $U \subset \mathbb{C}$ *abierto y* $\mathcal{F} \subset \mathcal{H}(\Omega)$ *una familia tal que* $f(\Omega) \subset U$ *para cada* $f \in \mathcal{F}$. *Si* $h \in \mathcal{H}(U)$ *es inyectiva y* $\mathcal{G} := \{h \circ f : f \in \mathcal{F}\}$ *demuestre que* $\mathcal{F}$ *es compacta si y sólo si* $\mathcal{G}$ *es compacta ([17] ejerc. 12.3).*

$\diamondsuit$ **9.10** *Sea* $\mathcal{F} \subset \mathcal{H}(D(0,1))$ *la familia de las funciones holomorfas en* $D(0,1)$ *cuyo desarrollo en serie de potencias es de la forma* $z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n$ *donde* $|a_n| \leq n$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$. *Demuestre que* $\mathcal{F}$ *es una familia compacta en* $\mathcal{H}(D(0,1))$.

$\diamondsuit$ **9.11** *Sea* $\Omega \subset \mathbb{C}$ *un abierto conexo y* $\mathcal{F} \subset \mathcal{H}(\Omega)$ *una familia que verifica*

i) Existe $a \in \Omega$ *tal que* $\{f(a) : f \in \mathcal{F}\}$ *es acotado.*

ii) $f(\Omega)$ *no corta al semieje real negativo para cada* $f \in \mathcal{F}$.

Demuestre que $\mathcal{F}$ *es normal ([17] ejerc. 12.5).*

$\diamondsuit$ **9.12** *Si* $\Omega = \{z : 1/2 < |z| < 1\}$ *y* $\mathcal{F} \subset \mathcal{H}(D(0,1))$ *sea* $\mathcal{F}|_\Omega = \{f|_\Omega : f \in \mathcal{F}\}$. *Demuestre que* $\mathcal{F}$ *es compacta si y sólo si* $\mathcal{F}|_\Omega$ *es compacta en* $\mathcal{H}(\Omega)$.
Si $f_n \in \mathcal{H}(D(0,1))$ *es una sucesión que cumple*

a) $|f_n(z)| > 1$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$, *y todo* $z \in \Omega$;

b) Existe $\lim_{n\to\infty} f_n(x)$ *para todo* $x \in (1/2, 1)$;

demuestre que converge uniformemente sobre cada compacto $K \subset D(0,1)$
([17] ejerc. 12.7).

$\diamondsuit$ **9.13** *Sea* $\Omega \subset \mathbb{C}$ *un abierto acotado,* $a \in \Omega$ *y* $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ *tal que* $f(\Omega) \subset \Omega$ *y* $f(a) = a$. *Demuestre que* $|f'(a)| \leq 1$. *(Considere la sucesión* $f_1 = f$, $f_{n+1} = f \circ f_n$*)*
([17] ejerc. 12.8).

$\diamondsuit$ **9.14** *Se considera la familia de funciones*

$$\mathcal{F} = \{f \in \mathcal{H}(\Omega) : |f'(a)| \geq \beta, |f(z)| \leq \alpha, \forall z \in \Omega\}$$

donde $\Omega \subset \mathbb{C}$ *es abierto conexo,* $a \in \Omega$, $\alpha > 0$ *y* $\beta > 0$. *Si* $K \subset \Omega$ *es compacto sea* $N(f, K)$ *el número de ceros de* $f \in \mathcal{F}$ *en* K, *repetidos según multiplicidades. Demuestre que* $\sup\{N(f, K) : f \in \mathcal{F}\} < +\infty$ *([17] ejerc. 12.9).*

$\diamondsuit$ **9.15** *Se supone que* $\Omega, U \subset \mathbb{C}$ *son abiertos, donde* U *es conformemente equivalente al disco* $D(0,1)$. *Dados* $a \in \Omega$ *y* $b \in U$, *se considera la familia*

$$\mathcal{F} := \{f \in \mathcal{H}(\Omega) : f(\Omega) \subset U, f(a) = b\}$$

Demuestre que existe $g \in \mathcal{F}$ *tal que* $|g'(a)| = \max\{|f'(a)| : f \in \mathcal{F}\}$.

$\diamondsuit$ **9.16** *Sea f una función holomorfa y acotada en $\Omega := \{z : |\operatorname{Im} z| < 1\}$ tal que*

$$\lim_{|x|\to\infty} f(x) = 0$$

Demuestre que la sucesión $f_n(z) = f(n+z)$ converge hacia 0 uniformemente sobre subconjuntos compactos de Ω([17] ejerc. 12.11).

$\diamondsuit$ **9.17** *Sea f_n una sucesión acotada en $\mathcal{H}(\Omega)$ donde $\Omega \subset \mathbb{C}$ es un abierto conexo. Se supone que existe $a \in \Omega$ tal que para cada $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, la sucesión $(f_n^{(m)}(a))_n \in \mathbb{N}$ es convergente. Demuestre que f_n converge uniformemente sobre compactos.*
([17] ejerc. 12.12).

$\diamondsuit$ **9.18** *Sea f_n una sucesión de funciones holomorfas en un abierto conexo Ω que verifica:*

a) Existe $a \in \Omega$ tal que $\lim_{n\to\infty} f_n(a) = 1$

b) $|f_n(z)| > 1$ para todo $z \in \Omega$ y todo $n \in \mathbb{N}$.

Demuestre que f_n convege hacia 1, uniformemente sobre compactos ([17] ejerc. 12.14).

$\diamondsuit$ **9.19** *Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$ abierto conexo y $a \in \Omega$. Si $\{f_n : n \in \mathbb{N}\} \subset \mathcal{H}(\Omega)$ es una sucesión normal, demuestre que cada una de las siguientes condiciones implica su convergencia uniforme sobre compactos. Obtenga el límite en cada caso.*

a) $\overline{D(a,r)} \subset \Omega$, $\lim_{n\to\infty} |f_n(z)| = 1$ cuando $|z-a| = r$, y $\lim_n f_n(a) = 1$.

b) $0 \notin f_n(\Omega)$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y $\lim_n f_n(a) = 0$.

c) Cada f_n es inyectiva, $\lim_n f_n(a) = 1$ y $\lim_n f_n'(a) = 0$.

([17] ejerc. 12.15).

$\diamondsuit$ **9.20** *Sea f_n una sucesión de funciones holomorfas en un abierto conexo Ω que converge en un punto $a \in \Omega$ y verifica*

$$0 < |f_n(z)| < |f_{n+1}(z)| < \dots \text{ para todo } z \in \Omega \text{ y todo } n \in \mathbb{N}$$

Demuestre que f_n converge uniformemente sobre compactos ([17] ejerc. 12.18).

$\diamondsuit$ **9.21** *Sea f_n una sucesión de funciones holomorfas en un abierto conexo Ω cuyas partes reales $\operatorname{Re} f_n$ forman una sucesión que converge uniformemente sobre compactos. Si la sucesión $f_n(a)$ converge para algún $a \in \Omega$ demuestre que f_n converge uniformemente sobre compactos ([17] ejerc. 12.19).*

Capítulo 10

Funciones armónicas

10.1. Propiedades de las funciones armónicas

Una función $u : \Omega \to \mathbb{R}$ de clase C^2, definida en un abierto $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, se dice que es armónica cuando $\triangle u(x, y) = 0$ para todo $(x, y) \in \Omega$, donde $\triangle$ es el operador diferencial de Laplace definido por

$$\triangle u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = D_{11}u + D_{22}u$$

Las funciones armónicas de dos variables reales aparecen frecuentemente en la Física como funciones potenciales de campos planos de vectores. Así por ejemplo, si una placa metálica plana ocupa el recinto Ω y su distribución de temperatura permanece estacionaria, entonces la función $t = u(x, y)$ que da la temperatura t del punto $(x, y) \in \Omega$ es una función armónica. Esta función armónica es una función potencial del campo vectorial $\mathbf{Q} : \Omega \to \mathbb{R}^2$ que describe el flujo de calor. Análogamente, si un recinto plano Ω está ocupado por un fluido que se mueve en régimen estacionario entonces el campo de velocidades $\mathbf{V} : \Omega \to \mathbb{R}^2$ tiene una función potencial que es armónica en Ω. Lo mismo ocurre con las funciones potenciales de campos electrostáticos planos.

En lo que sigue $A(\Omega)$ denotará el espacio vectorial real formado por las funciones $u : \Omega \to \mathbb{R}$ que son armónicas en el abierto $\Omega \subset \mathbb{C}$.

Proposición 10.1.1 *Si la función $f = u + iv$ es holomorfa en Ω entonces $u = \operatorname{Re} f$ y $v = \operatorname{Im} f$ son funciones armónicas en Ω.*

DEM: Según el corolario 3.3.7 las funciones u y v son de clase $C^\infty(\Omega)$. Usando las ecuaciones de Cauchy-Riemann: $u_x = v_y$ y $u_y = -v_x$ se obtiene el resultado

$$\triangle u = u_{xx} + u_{yy} = v_{yx} - v_{xy} \equiv 0; \quad \triangle v = v_{xx} + v_{yy} = -u_{yx} + u_{xy} \equiv 0;$$

■

Dada una función armónica $u \in A(\Omega)$, si existe otra función armónica $v \in A(\Omega)$ tal que $f = u + iv$ es holomorfa en Ω se dice que v es una función *armónica conjugada* de u en Ω. En este caso $-u$ es armónica conjugada de v en Ω.

Uno de los primeros problemas que surgen al estudiar funciones armónicas es el de de la existencia de función armónica conjugada, ya que en este caso se pueden utilizar los recursos de la teoría de las funciones holomorfas.

Proposición 10.1.2 *Si $\Omega \subset \mathbb{C}$ es un abierto conexo y $v_1, v_2 \in A(\Omega)$ son funciones armónicas conjugadas de $u \in A(\Omega)$ entonces $v_1 - v_2$ es constante.*

DEM: Las funciones $f_1 = u + iv_1$, y $f_2 = u + iv_2$ son holomorfas en Ω, luego $g = f_1 - f_2 = 0 + i(v_1 - v_2)$ también lo es. Con las ecuaciones de Cauchy-Riemann para la función g, se obtiene que $v = v_1 - v_2$ verifica $v_x \equiv 0$, $v_y \equiv 0$. Como Ω es conexo se concluye que la función v es constante. ■

Ejemplo 10.1.3 *La función* $\log |z|$ *es armónica en el abierto* $\Omega = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ *pero no posee función armónica conjugada en este abierto.*

DEM: Es inmediato que la función $u(x, y) = \log |x + iy| = \log \sqrt{x^2 + y^2}$ está definida y satisface la ecuación de Laplace en Ω:

$$u_{xx} + u_{yy} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} + \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} = 0$$

Si suponemos que existe $v \in A(\Omega)$ tal que $f = u + iv$ es holomorfa en Ω, al ser v y Arg funciones armónicas conjugadas de u en $\Omega_1 = \mathbb{C} \setminus \{x \in \mathbb{R} : x \leq 0\}$, según la proposición 10.1.2, la diferencia $v(z) - \operatorname{Arg}(z)$ sería constante en Ω_1. Pero esto es imposible porque v es continua en cada $x < 0$ mientras que $\operatorname{Arg}(z)$ no tiene límite cuando $z \to x$. ■

En el problema de la existencia de función armónica conjugada de una función armónica $u \in A(\Omega)$ desempeña un papel importante la forma diferencial

$$d^* u = -u_y dx + u_x dy$$

llamada diferencial conjugada de u.

Proposición 10.1.4 *Para una función armónica $u \in A(\Omega)$ se cumple:*

i) $\partial u = \frac{1}{2}(u_x - iu_y)$ es holomorfa en Ω.

ii) La forma diferencial $d^* u = -u_y dx + u_x dy$ es cerrada en Ω.

DEM: i) Las componentes u_x,$-u_y$, de la función compleja $2\partial u = u_x - iu_y$ son funciones de clase $C^1(\Omega)$ que satisfacen las ecuaciones de Cauchy-Riemann:

$$u_{xx} = (-u_y)_y; \quad u_{xy} = -(-u_y)_x;$$

luego $2\partial u$ es holomorfa en Ω. (También se puede comprobar que $\triangle u = 4\overline{\partial}\partial u$, luego la condición $\triangle u = 0$ implica que $\overline{\partial}(\partial u) = 0$, lo que significa que ∂u es holomorfa).
ii) El teorema de Cauchy-Goursat aplicado a la función holomorfa $2\partial u = u_x - iu_y$ nos dice que la forma diferencial

$$2\partial u dz = (u_x - iu_y)(dx + idy) = u_x dx + u_y dy + i(-u_y dx + u_x dy) = du + id^* u$$

es cerrada. Como du es cerrada (porque es exacta) se sigue que $d^* u$ también es cerrada. ■

Proposición 10.1.5 *Para una función armónica $u \in A(\Omega)$ son equivalentes:*

i) La forma diferencial $d^*u = -u_y dx + u_x dy$ es exacta en Ω.

ii) Existe $v \in A(\Omega)$ tal que $f = u+iv$ es holomorfa en Ω. (existe una función armónica conjugada de u).

Cuando se cumplen estas condiciones, cada primitiva v de la forma diferencial d^*u es una función armónica conjugada de u en Ω.

DEM: i) $\Rightarrow$ ii) Si existe una función diferenciable $v : \Omega \to \mathbb{R}$ tal que $dv = d^*u$ entonces $f = u + iv$ es diferenciable en Ω y su diferencial vale

$$df(z) = du(z) + idv(z) = du(z) + id^*u(z) = 2\partial u(z)dz$$

es decir, las coordenadas complejas de la aplicación lineal $df(z)$ respecto a la base $\{dz, d\overline{z}\}$ son $(2\partial u(z), 0)$, y esto significa que f es holomorfa en Ω. Por lo tanto v es una función armónica conjugada de u.
ii) $\Rightarrow$ i) Si v es una función armónica conjugada de u, con las ecuaciones de Cauchy-Riemann para la función holomorfa $f = u + iv$ se obtiene que $d^*u = -u_y dx + u_x dy = v_x dx + v_y dy = dv$, luego $d^*u = dv$ es exacta. ■

OBSERVACIÓN: En las condiciones de la proposición anterior si Ω es conexo y la forma diferencial d^*u es exacta, para conseguir una función armónica conjugada de u en Ω basta obtener una primitiva v de la forma diferencial d^*u. Según los resultados generales sobre integración curvilínea esto se logra mediante la integral de línea $v(z) = \int_{\gamma_z} d^*u$ donde γ_z es un camino regular a trozos en Ω con origen fijo $z_0 \in \Omega$ y extremo variable $z \in \Omega$.

Corolario 10.1.6 *Toda función armónica en un disco $u \in A(D(z_0, r))$, posee función armónica conjugada, dada explícitamente mediante la fórmula*

$$v(x, y) = \int_{y_0}^{y} u_x(x, t)dt - \int_{x_0}^{x} u_y(s, y_0)ds \text{ con } x_0 = \operatorname{Re} z_0, \ y_0 = \operatorname{Im} z_0$$

DEM: Según la proposición 10.1.4 la forma diferencial d^*u es cerrada. Según la proposición 3.2.9 en los discos las formas diferenciales cerradas son exactas, y la proposición 10.1.5 permite concluir que existe $v \in A(\Omega)$ tal que $f = u + iv$ es holomorfa en Ω. Según la observación anterior, la función armónica conjugada v se obtiene mediante la integral curvilínea de la forma diferencial d^*u a lo largo del camino de origen $z_0 = x_0+iy_0$ y extremo $z = x+iy$, formado por el segmento horizontal de origen (x_0, y_0) y extremo (x, y_0) seguido del segmento vertical de origen (x, y_0) y extremo (x, y). Escribiendo explícitamente esta integral curvilínea se llega a la fórmula del enunciado. ■

Corolario 10.1.7 *Las funciones armónicas son de clase C^∞*

DEM: Si $u \in A(\Omega)$ es armónica en el abierto Ω, según 10.1.5, para cada $D(a, r) \subset \Omega$, la restricción $u|_{D(a,r)}$ es la parte real de una función holomorfa, la cual es de clase C^∞ en virtud del corolario 3.3.7. De esto se sigue que u es de clase C^∞ en todo su dominio Ω. ■

Proposición 10.1.8 *La composición de una función holomorfa con una función armónica es una función armónica: Si $\Omega_1, \Omega_2 \subset \mathbb{C}$ son abiertos, $f \in \mathcal{H}(\Omega_1)$ con $f(\Omega_1) \subset \Omega_2$ y $g \in A(\Omega_2)$ entonces $g \circ f \in A(\Omega_1)$.*

Dem: Véase [17] ejerc. 10.4 ■

Teorema 10.1.9 *Para un abierto conexo $\Omega \subset \mathbb{C}$, son equivalentes:*

a) $\mathbb{C}_\infty \setminus \Omega$ *es conexo;*

b) Para cada $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ existe $F \in \mathcal{H}(\Omega)$ con $F' = f$;

c) Toda función armónica $u \in A(\Omega)$ posee función armónica conjugada (es decir, existe $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ tal que $u = \operatorname{Re} f$).

d) Para cada $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ con $0 \notin f(\Omega)$ existe $g \in \mathcal{H}(\Omega)$ tal que $e^g = f$;

Dem: b) $\Rightarrow$ c): Dada $u \in A(\Omega)$, la función $f = u_x - iu_y$ es holomorfa en Ω (prop. 10.1.4) y por lo tanto existe $F \in \mathcal{H}(\Omega)$ tal que $F' = f$. Para la función holomorfa F su diferencial es la aplicación $\mathbb{C}$-lineal $dF(z) = F'(z)dz$, y según se ha visto en la demostración de 10.1.4, se verifica

$$dF(z) = f(z)dz = du + id^*u$$

luego la forma diferencial d^*u es exacta en Ω, lo que significa, según 10.1.5, que u posee función armónica conjugada.
c) $\Rightarrow$ d): Dada $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ con $0 \notin f(\Omega)$, combinando el ejemplo 10.1.3 con la proposición 10.1.8 se obtiene que la función $u(z) = \log |f(z)|$ es armónica en Ω. Por hipótesis existe $g_0 \in \mathcal{H}(\Omega)$ tal que $\operatorname{Re} g_0 = u$. Es claro que para cada $z \in \Omega$ se cumple

$$|f(z)e^{-g_0(z)}| = |f(z)|e^{-\log |f(z)|} = 1$$

Toda función holomorfa con módulo constante en un abierto conexo es constante, luego la función $f(z)e^{-g_0(z)}$ es constante en Ω. Su valor constante es de la forma $e^{i\alpha}$ luego $g(z) = g_0(z) + \alpha$ es una función holomorfa en Ω que cumple $e^g = f$.
Las implicaciones a) $\Rightarrow$ b), d) $\Rightarrow$ a), fueron establecida en el teorema 5.2.4. ■

Proposición 10.1.10 *Sean $u, v \in A(\Omega)$ funciones armónicas en un abierto conexo $\Omega \subset \mathbb{C}$. Si $u|_G = v|_G$ para algún abierto no vacío $G \subset \Omega$ entonces $u = v$.*

Dem: Véase [17] ejerc. 10.7 ■

Para las funciones armónicas no es válido un principio de identidad similar al que cumplen las funciones holomorfas, es decir, la conclusión de la proposición anterior es falsa cuando sólo se supone que $u|_M = v|_M$ donde $M \subset \Omega$ es un conjunto que verifica $M' \cap \Omega \neq \emptyset$: Según el ejemplo 10.1.3 la función $u(z) = \log |z|$ es armónica en $\Omega = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ se anula sobre $M = \{z : |z| = 1\}$ pero no es idénticamente nula.

10.2. El problema de Dirichlet

En lo que sigue, si $\Omega \subset \mathbb{C}$ es abierto $\overline{\Omega}^{\infty}$ y $\partial_\infty \Omega$ denotarán, respectivamente, su adherencia y su frontera en $\mathbb{C}_\infty$. Si Ω es acotado, $\overline{\Omega}^{\infty} = \overline{\Omega}$, $\partial_\infty \Omega = \partial \Omega$, y si no es acotado se tiene $\overline{\Omega}^{\infty} = \overline{\Omega} \cup \{\infty\}$, $\partial_\infty \Omega = \partial \Omega \cup \{\infty\}$.

Dado un abierto conexo $\Omega \subset \mathbb{C}$ y una función continua $\varphi : \partial_\infty \Omega \to \mathbb{R}$, el *problema de Dirichlet* para la región Ω con la condición de frontera φ consiste en encontrar, si existe, una función continua $u : \overline{\Omega}^{\infty} \to \mathbb{R}$ tal que $u|_\Omega$ es armónica y $u|_{\partial_\infty \Omega} = \varphi$.

Si el problema tiene solución para cada función continua $\varphi : \partial_\infty \Omega \to \mathbb{R}$, se dice que Ω es una *región de Dirichlet*. El primer objetivo es demostrar la la unicidad de la solución del problema de Dirichlet, lo que se logrará con el corolario 10.2.5, El segundo objetivo es obtener la fórmula integral de Poisson que proporciona la solución del problema de Dirichlet en un disco abierto.

Proposición 10.2.1 *Las funciones armónicas tienen la propiedad de la media 8.2.1*

DEM: Sea $u \in A(\Omega)$. Para cada disco $\overline{D(a,r)} \subset \Omega$ existe $\rho > r$ tal que $D(a,\rho) \subset \Omega$. Según el corolario 10.1.6 existe $f \in \mathcal{H}(D(a,\rho)$ tal que $\operatorname{Re} f(z) = u(z)$ para cada $z \in D(a,\rho)$. En virtud de la proposición 8.2.2, u tiene la propiedad de la media en $D(a,\rho)$, y por lo tanto

$$u(a) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(a + re^{it})dt$$

Así queda demostrado que u tiene la propiedad de la media en Ω. ■

Proposición 10.2.2 *Sea $u \in A(\Omega)$ una función armónica en un abierto conexo $\Omega \subset \mathbb{C}$. Si u alcanza en Ω un máximo relativo entonces u es constante.*

DEM: Según la proposición 10.2.1 u tiene la propiedad de la media. Como u alcanza un máximo absoluto en algún disco $D(a,r) \subset \Omega$, con el lema 8.2.3 se obtiene que $u|_{D(a,r)}$ es constante. Con la proposición 10.1.10 se concluye que u es constante. ■

Dada una función $u : \Omega \to \mathbb{R}$, si $a \in \partial_\infty \Omega$ se define

$$\limsup_{z \to a} u(z) = \lim_{r \to 0} [\sup\{u(z) : z \in D(a,r) \cap \Omega\}]$$

(Recuérdese que para $a = \infty$, $D(\infty, r) = \{z : |z| > 1/r\}$).

El siguiente teorema se aplica cuando u es alguna de las funciones $|f|$, $\operatorname{Re} f$, $\operatorname{Im} f$, con la propiedad (M') considerada del lema 8.2.3.

Teorema 10.2.3 [Principio del máximo] *Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$ un abierto conexo y $u : \Omega \to \mathbb{R}$ una función continua con la propiedad (M') del lema 8.2.3. Si se cumple*

$$\limsup_{z \to a} u(z) \leq c \quad \textit{para todo} \quad a \in \partial_\infty \Omega$$

Entonces, o bien $u(z) < c$ para todo $z \in \Omega$, o bien $u(z) = c$ para todo $z \in \Omega$.

DEM: Basta demostrar que $u(z) \leq c$ para todo $z \in \Omega$ (obsérvese que si $u(a) = c$ en algún $a \in \Omega$, entonces, según el lema 8.2.3, u debe ser la función constante $= c$).

Razonaremos por reducción al absurdo, suponiendo que $u(w) > c$ para algún $w \in \Omega$. En este caso, existe $\delta > 0$ tal que $u(w) > c + \delta$.

i) El abierto no vacío $V_\delta = \{z \in \Omega : u(z) > c + \delta\}$ es acotado: Es evidente cuando Ω es acotado y si no es acotado, con la condición $\limsup_{z \to \infty} u(z) \leq c$ se obtiene $r > 0$ tal que para $z \in \Omega \cap D(\infty, r)$ se cumple $u(z) < c + \delta$, es decir $z \in \Omega \cap D(\infty, r) \Rightarrow z \notin V_\delta$, luego $V_\delta \subset \{z : |z| \leq 1/r\}$.

ii) $\overline{V_\delta} \subset \Omega$. Efectívamente, como $\overline{V_\delta} \subset \overline{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega$ basta ver que $\overline{V_\delta} \cap \partial\Omega = \emptyset$: Si $a \in \partial\Omega$, usando la hipótesis $\limsup_{z \to a} u(z) \leq c$ se obtiene $r > 0$ tal que $z \in D(a, r) \cap \Omega \Rightarrow u(z) < c + \delta$, luego $D(a, r) \cap V_\delta = \emptyset$ y por lo tanto $a \notin \overline{V_\delta}$

Según i) y ii) $\overline{V_\delta}$ es un subconjunto compacto no vacío de Ω y por lo tanto existe $b \in \overline{V_\delta} \subset \Omega$ tal que

$$u(b) = \text{máx}\{u(z) : z \in \overline{V_\delta}\} > c + \delta$$

Por otra parte, como $u(z) \leq c + \delta$ para todo $z \in \Omega \setminus \overline{V_\delta}$ se sigue que

$$u(b) = \text{máx}\{u(z) : z \in \Omega\}$$

Según el lema 8.2.3, u es constante en Ω, con valor constante $u(b) \geq c+\delta$ lo que contradice la hipótesis. ■

Para referencias posteriores dejamos anotada la siguiente proposición que recoge una versión particular del teorema 10.2.3:

Proposición 10.2.4 *Sea $u \in A(\Omega)$ armónica en un abierto conexo $\Omega \subset \mathbb{C}$.*

Si $\limsup_{z \to a} u(z) \leq 0$ para todo $a \in \partial_\infty\Omega$ entonces $u(z) \leq 0$ para todo $z \in \Omega$. Además, o bien $u(z) < 0$ para todo $z \in \Omega$, o bien $u \equiv 0$.

Corolario 10.2.5 *Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$ un abierto conexo y $u : \overline{\Omega}^\infty \to \mathbb{R}$ una función continua que es armónica en Ω. Si $u(z) = 0$ para cada $z \in \partial_\infty\Omega$ entonces $u \equiv 0$*

DEM: Basta aplicar 10.2.4 ii) a las funciones u y $-u$, teniendo en cuenta que, en virtud de la continuidad, para cada $a \in \partial_\infty\Omega$ se cumple $\lim_{z \to a} u(z) = u(a) = 0$. ■

Con el corolario anterior se obtiene la unicidad de la solución del problema de Dirichlet: Si u_1, u_2 son dos soluciones, basta aplicar el corolario a la diferencia $u = u_1 - u_2$ para obtener que $u_1 = u_2$.

El siguiente resultado es la clave para resolver el problema de Dirichlet en el disco $D(0, 1)$. Proporciona una fórmula integral (la fórmula de Poisson) con la que se puede recuperar la función $u(z)$ a partir de sus valores $u(e^{it})$ sobre la circunferencia $|z| = 1$.

Teorema 10.2.6 *Si $u : \overline{D(0, 1)} \to \mathbb{R}$ es una función continua tal que $u|_{D(0,1)}$ es armónica, para cada $z \in D(0, 1)$ se verifica:*

$$u(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(e^{it}) K(e^{it}, z) dt, \quad donde \quad K(w, z) = \frac{|w|^2 - |z|^2}{|w - z|^2}. \tag{10.1}$$

DEM: a) Supongamos en primer lugar que la función u está definida y es armónica en un disco $D(0, R)$ con $R > 1$. En este caso la validez de la fórmula (10.1) para $z = 0$ es una consecuencia trivial de la propiedad de la media, ya que $K(w, 0) = 1$.

La idea para obtener una fórmula integral que proporcione, para $|z| < 1$, el valor $u(z)$ en términos de los valores $u(e^{it})$, $t \in [0, 2\pi]$ consiste en reducirla al caso trivial $z = 0$ usando la transformación de Möbius $T : \overline{D(0,1)} \to \overline{D(0,1)}$, $T(w) = (w - z)/(1 - \overline{z}w)$ que transforma z en 0 y deja invariante la frontera $C = \{w : |w| = 1\}$. El camino $\gamma(t) = T(e^{it})$, $t \in [0, 2\pi]$ es una parametrización de la circunferencia unidad $|w| = 1$, distinta de la usual, pero recorrida en sentido positivo, ya que, en virtud del principio del argumento

$$\operatorname{Ind}(\gamma, 0) = \text{ [Número de ceros de T en } D(0,1)] = 1$$

Según el corolario 10.1.6, u es la parte real de una función $f \in \mathcal{H}(D(0, R))$, y podemos considerar la función $g(w) = f(T^{-1}(w))$ que está definida y es holomorfa en el abierto $\Omega = \mathbb{C} \cap T(D(0, R)) \supset \overline{D(0,1)}$.

En virtud de la fórmula integral de Cauchy para la función g con el camino γ:

$$f(z) = g(0) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{g(\xi)}{\xi} d\xi$$

Como $\gamma = T \circ C$ con $C(t) = e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$, la última integral se puede escribir en la forma

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{g(T(w))}{T(w)} T'(w) dw$$

Sobre la circunferencia C se cumple que $1 = w\overline{w}$, luego

$$\frac{T'(w)}{T(w)} = \frac{1}{w - z} + \frac{\overline{z}}{1 - w\overline{z}} = \frac{1}{w} \left(\frac{w}{w - z} + \frac{\overline{z}}{\overline{w} - \overline{z}} \right) = \frac{1}{w} \frac{|w|^2 - |z|^2}{|w - z|^2}$$

y sustituyendo esta expresión en la última integral se obtiene

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(w)}{w} K(w, z) dw = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(e^{it}) K(e^{it}, z) dt$$

Como los valores de $K(w, z)$ son reales, $\operatorname{Re}[f(e^{it})K(e^{it}, z)] = u(e^{it})K(e^{it}, z)$ y se llega a

$$u(z) = \operatorname{Re} f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(e^{it}) K(e^{it}, z) dt$$

b) Consideremos ahora el caso general de una función continua $u : \overline{D(0,1)} \to \mathbb{R}$ tal que $u|_{D(0,1)}$ es armónica. En este caso, para cada $0 < \rho < 1$ la función $u_\rho(z) := u(\rho z)$ es armónica en $D(0, R)$ con $R = 1/\rho > 1$, y aplicando a la función u_ρ lo que se acaba de establecer en el caso preliminar a) podemos asegurar que para todo $z \in D(0, 1)$ se cumple:

$$u(\rho z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(\rho e^{it}) K(e^{it}, z) dt$$

Si $|z| < 1$ se cumple $u(z) = \lim_{\rho \to 1} u(\rho z)$ luego, para obtener (10.1), basta demostrar

$$\lim_{\rho \to 1} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(\rho e^{it}) K(e^{it}, z) dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(e^{it}) K(e^{it}, z) dt \tag{10.2}$$

Por la continuidad uniforme de u en el compacto $\overline{D(0,1)}$, dado $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que

$$z, z' \in \overline{D(0,1)}, \quad |z - z'| < \delta \Rightarrow |u(z) - u(z')| < \epsilon$$

Entonces, para cada $\rho \in (1 - \delta, 1)$ y cada $t \in [0, 2\pi]$ se cumple $|u(e^{it}) - u(\rho e^{it})| < \epsilon$, luego

$$\left| \int_0^{2\pi} [u(e^{it}) - u(\rho e^{it})] K(e^{it}, z) dt \right| \leq \int_0^{2\pi} |u(e^{it}) - u(\rho e^{it})| K(e^{it}, z) dt \leq$$

$$\leq \epsilon \int_0^{2\pi} \frac{1 - |z|^2}{|e^{it} - z|^2} dt \leq \epsilon 2\pi \frac{1 - |z|^2}{(1 - |z|)^2} = \epsilon 2\pi \frac{1 + |z|}{1 - |z|}$$

Con esto queda demostrado que se cumple (10.2). ■

El núcleo de Poisson. Utilizando coordenadas polares, $z = re^{i\alpha}$, se obtiene

$$K(e^{it}, re^{i\alpha}) = \frac{1 - r^2}{|e^{it} - re^{i\alpha}|^2} = \frac{1 - r^2}{|1 - re^{i(\alpha - t)}|^2}$$

y la fórmula integral de Poisson (10.1) se escribe en la forma

$$u(re^{i\alpha}) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(re^{it}) P_r(\alpha - t) dt, \text{ con } 0 \leq r < 1 \tag{10.3}$$

donde

$$P_r(\theta) = \frac{1 - r^2}{|1 - re^{i\theta}|^2} = \frac{1 - r^2}{1 - 2r\cos\theta + r^2} \tag{10.4}$$

es el llamado núcleo de Poisson, que también viene dado por las fórmulas:

$$P_r(\theta) = \operatorname{Re}\left(\frac{1 + re^{i\theta}}{1 - re^{i\theta}} \right) = \operatorname{Re}\left(1 + 2\sum_{n=1}^{\infty} r^n e^{in\theta} \right) \tag{10.5}$$

$$= 1 + 2\sum_{n=1}^{\infty} r^n \cos n\theta = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} r^{|n|} e^{in\theta}. \tag{10.6}$$

Proposición 10.2.7 *El núcleo de Poisson $P_r(\theta)$ tiene las siguientes propiedades:*

i) $0 \leq P_r(\theta) = P_r(-\theta) = P_r(\theta + 2\pi)$ *para todo* $\theta \in \mathbb{R}$.

ii) $\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P_r(\theta) d\theta = 1$

iii) $0 \leq P_r(\theta) \leq P_r(\delta)$ *si* $0 < \delta \leq |\theta| \leq \pi$.

Dem: i) Acudiendo a la fórmula (10.4) es claro que $P_r(\theta)$ es una función no negativa par y periódica de periodo 2π. Integrando término a término la serie (10.6) que converge uniformemente sobre $[0, 2\pi]$ se obtiene ii). También se puede obtener ii) usando la fórmula integral de Poisson con la función $u \equiv 1$, que conduce a

$$1 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P_r(-t)dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P_r(t)dt$$

iii) Derivando en fórmula (10.4) se observa que $P_r'(\theta) < 0$ para $0 < \theta < \pi$, luego $P_r(\theta) = P_r(|\theta|) < P_r(\delta)$ si $0 < \delta \leq |\theta| \leq \pi$. ■

Obsérvese que la propiedad 10.2.7 iii) implica que $\lim_{r \to 1} P_r(\theta) = 0$, uniformemente sobre el conjunto $B_\delta = \{\theta : \delta \leq |\theta| \leq \pi\}$.

Proposición 10.2.8 *Si $\varphi : \mathbf{T} \to \mathbb{R}$ es continua sobre la circunferencia $\mathbf{T} = \{z : |z| = 1\}$ y para cada $z \in D(0,1)$ se define*

$$f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varphi(e^{it}) \frac{e^{it} + z}{e^{it} - z} dt$$

se obtiene una función holomorfa $f \in \mathcal{H}(D(0,1))$. Su parte real $u = \operatorname{Re} f$ que es armónica en $D(0,1)$, viene dada por la integral:

$$u(re^{i\alpha}) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varphi(e^{it}) P_r(\alpha - t)dt, \ \textit{donde } z = re^{i\alpha}$$

Dem: Si $|z| < 1$, considerando la serie geométrica de razón $z = ze^{-it}$ se obtiene el desarrollo en serie de la función que figura bajo la primera integral

$$\begin{aligned} \varphi(e^{it})(1 + ze^{-it}) \frac{1}{1 - ze^{-it}} &= \varphi(e^{it})(1 + ze^{-it})(1 + ze^{-it} + (ze^{-it})^2 + (ze^{-it})^3 + \cdots) \\ &= \varphi(e^{it})(1 + 2ze^{-it} + 2(ze^{-it})^2 + 2(ze^{-it})^3 + \cdots) \end{aligned}$$

Sea $C = \max\{|\varphi(e^{it})| : t \in [0, 2\pi]\}$. El término general de la última serie cumple, para todo $t \in [0, 2\pi]$, la mayoración $|2\varphi(e^{it})(ze^{-it})^n| \leq 2C|z|^n$ luego, en virtud del criterio de Weierstrass, para cada $z \in D(0,1)$, la serie converge uniformemente respecto de t en el intervalo de integración $[0, 2\pi]$. Esto justifica la integración término a término de la serie, con la que se obtiene

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \tag{10.7}$$

siendo

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varphi(e^{it})dt; \quad a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \varphi(e^{it}) e^{-int} dt \ \text{ si } \ n > 1$$

Como el desarrollo (10.7) es válido para cada $z \in D(0,1)$ queda demostrado que f es holomorfa en $D(0,1)$. Tomando la parte real de la integral utilizada para definir f, y teniendo en cuenta que

$$\operatorname{Re}\left(\frac{e^{it} + z}{e^{it} - z}\right) = K(e^{it}, z)$$

se concluye que, para $z = re^{i\alpha} \in D(0,1)$

$$u(z) = \operatorname{Re} f(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \varphi(e^{it})K(e^{it}, z)dt = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \varphi(e^{it})P_r(\alpha - t)dt$$

■

Con los resultados previos que acabamos de obtener ya se puede demostrar el siguiente teorema que proporciona la solución del problema de Dirichlet en el disco $D(0,1)$.

Teorema 10.2.9 *Si $\varphi : \mathbf{T} \to \mathbb{R}$ es continua sobre la circunferencia $\mathbf{T} = \{z : |z| = 1\}$, existe una única función continua $u : \overline{D(0,1)} \to \mathbb{R}$ que cumple*

$$u|_{\mathbf{T}} = \varphi; \quad u|_{D(0,1)} \text{ es armónica}$$

que viene dada mediante la fórmula integral de Poisson:

$$u(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \varphi(e^{it})P_r(\alpha - t)dt, \text{ para todo } z = re^{i\alpha} \in D(0,1)$$

DEM: Ya hemos visto que la unicidad de la solución del problema de Dirichlet es consecuencia directa del corolario 10.2.5. Después del teorema 10.2.8 basta demostrar que la función $u : \overline{D(0,1)} \to \mathbb{R}$, definida por

$$\begin{aligned} u(z) &= \varphi(z) & &\text{si } |z| = 1 \\ u(z) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \varphi(e^{it})P_r(\alpha - t)dt & &\text{si } z = re^{i\alpha} \in D(0,1) \end{aligned}$$

es continua en cada $z \in \mathbf{T}$. Para ello comenzamos demostrando que

$$\lim_{r\nearrow 1} u(re^{i\alpha}) = \varphi(e^{i\alpha}) \text{ uniformemente en } \alpha \in [0, 2\pi] \tag{10.8}$$

La función $t \to \varphi(e^{it})$ es uniformemente continua en $\mathbb{R}$ (es la composición de dos funciones uniformemente continuas) luego, dado $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que

$$|s| \leq \delta, \quad \alpha \in [0, 2\pi] \Rightarrow |\varphi(e^{i(s+\alpha)}) - \varphi(e^{i\alpha})| \leq \epsilon. \tag{10.9}$$

Por otra parte, como $\lim_{r\nearrow 1} P_r(\delta) = 0$, existe $\rho \in (0,1)$ tal que

$$\rho < r < 1 \Rightarrow P_r(\delta) < \epsilon/(2\,\|\varphi\|_\infty) \tag{10.10}$$

(Podemos suponer que $\|\varphi\|_\infty = \max\{|\varphi(z) : |z| = 1\} > 0$ ya que el caso $\varphi \equiv 0$ es trivial). Con el cambio de variable $s = t - \alpha$ se obtiene

$$u(re^{i\alpha}) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\alpha}^{2\pi-\alpha} \varphi(e^{i(\alpha+s)})P_r(-s)ds = \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(e^{i(\alpha+s)})P_r(s)ds$$

(la segunda igualdad se obtiene usando la periodicidad del integrando). Utilizando las propiedades del núcleo de Poisson se obtiene:

$$\begin{aligned} |u(re^{i\alpha}) - \varphi(e^{i\alpha})| &= \left|\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} [\varphi(e^{i(\alpha+s)}) - \varphi(e^{i\alpha})]P_r(s)ds\right| \\ &\leq \frac{1}{2\pi}\left(\int_{A_\delta} + \int_{B_\delta}\right) |\varphi(e^{i(\alpha+s)}) - \varphi(e^{i\alpha})|P_r(s)ds \end{aligned}$$

donde $A_\delta = \{s : |s| < \delta\}$ y $B_\delta = \{s : \delta \leq |s| \leq \pi\}$. Utilizando 10.9 y 10.10 se obtiene:

$$\frac{1}{2\pi}\int_{A_\delta} |\varphi(e^{i(\alpha+s)}) - \varphi(e^{i\alpha})|P_r(s)ds \leq \frac{\epsilon}{2\pi}\int_{A_\delta} P_r(s)ds \leq \epsilon$$
$$\frac{1}{2\pi}\int_{B_\delta} |\varphi(e^{i(\alpha+s)}) - \varphi(e^{i\alpha})|P_r(s)ds \leq \frac{2\,\|\varphi\|_\infty}{2\pi}\int_{B_\delta} P_r(\delta) \leq \epsilon$$

Se sigue que para todo $r \in (\rho, 1)$ y todo $\alpha \in [0, 2\pi]$ se cumple $|u(re^{i\alpha}) - \varphi(e^{i\alpha})| \leq 2\epsilon$ y así queda establecido que se cumple la condición 10.8. De esta condición se deduce fácilmente que u es continua en cada $z = e^{i\alpha}$: Dado $\epsilon > 0$, sean $\delta > 0$ y $\rho \in (0, 1)$ elegidos como entes, de modo que se cumplan las condiciones 10.9 y 10.10. Entonces

$$V_z = \{re^{is} \in \overline{D(0, 1)} : \rho < r \leq 1, |s - \alpha| < \delta\}$$

es un entorno de $z = e^{i\alpha}$ para el que se cumple

$$w \in V_z \Rightarrow |u(w) - u(z)| < 3\epsilon \tag{10.11}$$

Efectivamente, 10.11 es inmediato cuando $|w| = 1$, y en otro caso, cuando $w = re^{is} \in V_z$ con $|w| = r < 1$, combinando la desigualdad triangular con 10.8 y 10.9 se obtiene

$$|u(w) - u(z)| \leq |u(re^{is}) - \varphi(e^{is})| + |\varphi(e^{is}) - \varphi(e^{i\alpha})| \leq 2\epsilon + \epsilon = 3\epsilon$$

■

Corolario 10.2.10 *Si* $u : \overline{D(0, 1)} \to \mathbb{R}$ *es continua y* $u|_{D(0,1)}$ *es armónica entonces* $u|_{D(0,1)}$ *es la parte real de la función holomorfa*

$$f(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(e^{it})\frac{e^{it} + z}{e^{it} - z}dt \quad z \in D(0, 1)$$

Dem: Como u es la solución del problema de Dirichlet en el disco $\overline{D(0, 1)}$ para la condición de frontera $\varphi = u|_{\mathbb{T}}$ el resultado es consecuencia inmediata de la proposición 10.2.8 y del teorema 10.2.9. ■

Corolario 10.2.11 [Fórmula de Schwarz] *Para una función holomorfa* $g = u + iv$ *en un abierto* $\Omega \supset \overline{D(0, 1)}$ *se verifica:*

$$g(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(e^{it})\frac{e^{it} + z}{e^{it} - z}dt + iv(0); \quad z \in D(0, 1)$$

Dem: A la función $u|_{\overline{D(0,1)}}$ le asociamos la función $f \in \mathcal{H}(D(0, 1))$ que interviene en el corolario 10.2.10. La dos funciones f y $g|_{D(0,1)}$ tienen la misma parte real, es decir, $g(z) - f(z) \in \{iy : y \in \mathbb{R}\}$ para todo $z \in D(0, 1)$. Con el teorema de la aplicación abierta se obtiene que $g - f$ es constante en el disco $D(0, 1)$, con valor constante $iv(0)$. ■

Con el teorema 10.2.9 ha quedado resuelto el problema de Dirichlet en el disco $D(0,1)$. Con el cambio de variable $w = (z-a)/R$ se obtiene la solución en el disco $D(a,R)$, donde la solución viene dada por la fórmula integral de Poisson que ahora adopta la forma:

$$u(a+re^{i\alpha}) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(a+Re^{it})\frac{R^2-r^2}{R^2-2Rr\cos(\alpha-t)+r^2}dt; \quad 0 \le r < R \tag{10.12}$$

(obsérvese que $z = a + re^{i\alpha}$ es el punto que corresponde a $w = (r/R)e^{i\alpha}$).

Teorema 10.2.12 *Toda función continua $u : \Omega \to \mathbb{R}$ con la propiedad de la media es armónica.*

Dem: Fijado un disco $\overline{D(a,R)} \subset \Omega$, por lo que se acaba de indicar antes del enunciado del teorema, existe una función continua $\hat{u} : \overline{D(a,R)} \to \mathbb{R}$ que coincide con u sobre $\partial D(a,R) = \{z : |z-a| = R\}$ y es armónica en $D(a,R)$ (La solución del problema de Dirichlet para $D(a,R)$ para la condición de frontera $\varphi = u|_{\partial D(a,R)}$). La función $\hat{u} - u$ tiene la propiedad de la media en $D(a,R)$ y para cada $b \in \partial D(a,R)$ cumple

$$\lim_{z \to b}(\hat{u}(z) - u(z)) = \hat{u}(b) - u(b) = 0$$

Como la función $\hat{u}(z) - u(z)$ tiene la propiedad de la media, según el principio del máximo 10.2.3 podemos asegurar que $\hat{u}(z) - u(z) \le 0$ para todo $z \in D(a,R)$. Análogamente $u(z) - \hat{u}(z) \le 0$ para todo $z \in D(a,R)$ y se concluye que $u|_{D(a,R)} = \hat{u}|_{D(a,R)}$ es armónica en $D(a,R)$. Como esto es cierto para cada disco $\overline{D(a,R)} \subset \Omega$, se concluye que $u \in A(\Omega)$ ■

Aplicación a las series de Fourier. Toda función periódica $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ de periodo 2π se puede escribir en la forma $f(t) = \varphi(e^{it})$ donde $\varphi : \mathrm{T} \to \mathbb{C}$ está definida sobre la circunferencia $\mathrm{T} = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$. En ese caso la continuidad de f equivale a la continuidad de φ. Los ejemplos más sencillos de funciones continuas 2π-periódicas son los polinomios trigonométricos

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{m}(a_k \cos kt \;+\; b_k \operatorname{sen} kt), \quad \text{con } a_k, b_k \in \mathbb{C} \tag{10.13}$$

Si en esta expresión se sustituye $\cos kt = (e^{ikt} + e^{-ikt})/2$, y $\operatorname{sen} kt = (e^{ikt} - e^{-ikt})/(2i)$, el polinomio trigonométrico (10.13) queda escrito en la forma más cómoda

$$f(t) = \sum_{|k|\le m} c_k e^{ikt}, \quad \text{con } c_k = \frac{a_k - ib_k}{2} \tag{10.14}$$

En este caso $f(t) = \varphi(e^{it})$, donde φ es la función compleja $\varphi(z) = \sum_{|k|\le m} c_k z^k$. Recíprocamente, dada una función compleja de la forma $\varphi(z) = \sum_{|k|\le m} c_k z^k$, con la sustitución $z = e^{it}$ se obtiene un polinomio trigonométrico $f(t) = \varphi(e^{it})$ en la forma (10.13), con coeficientes

$$a_k = c_k + c_{-k}; \quad b_k = i(c_k - c_{-k}) \;\text{ si } k \ge 1; \quad a_0 = 2c_0$$

Para el polinomio trigonométrico (10.14) es fácil ver que las integrales

$$\hat{f}(k) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)e^{-ikt}dt, \quad (k \in \mathbb{Z}) \tag{10.15}$$

proporcionan los coeficientes $c_k = \hat{f}(k)$.

Una primera generalización de los polinomios trigonométricos lo proporcionan las funciones continuas 2π-periódicas de la forma

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{ikt} \text{ donde } \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |c_k| < +\infty$$

Obsérvese que, en virtud del criterio de Weierstrass, la serie anterior es uniformemente convergente, lo que garantiza la continuidad de la función suma f así como la validez de la integración término a término con la que se obtiene otra vez que los coeficientes $c_k = \hat{f}(k)$ son los coeficientes de Fourier de f definidos por la fórmula 10.15. Esta fórmula permite definir los coeficientes de Fourier de cualquier función continua 2π-periódica $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, y su serie de Fourier

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \hat{f}(k)e^{ikt}$$

cuya convergencia se considera en términos de la sucesión de sumas parciales simétricas

$$S_m(f,t) = \sum_{k=-m}^{m} \hat{f}(k)e^{ikt} = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{m}(a_k \cos kt + b_k \operatorname{sen} kt)$$

donde

$$a_0 = 2\hat{f}(0) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)dt;$$

$$a_k = \hat{f}(k) + \hat{f}(-k) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\cos kt dt$$

$$b_k = i(\hat{f}(k) - \hat{f}(-k)) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\operatorname{sen} kt dt$$

Obsérvese que, por la periodicidad y continuidad, f es acotada, luego también son acotadas las sucesiones de coeficientes: $|a_k| \leq 2\|f\|_\infty$; $|b_k| \leq 2\|f\|_\infty$ (Más aún, el lema de Riemann-Lebesgue afirma que $\lim_k a_k = \lim_k b_k = 0$).

En general la serie de Fourier de una función continua 2π-periódica no converge puntualmente. Sin embargo hay diversos procedimientos para recuperar la función f a partir de su serie de Fourier. Uno de ellos consiste en considerar la convergencia de la sucesión de sumas parciales $S_m(f)$ en términos de la norma $\| \ \|_2$, para la que se demuestra que

$$\lim_m \|f - S_m(f)\|_2 = 0$$

Otro procedimiento para recuperar f a partir de su serie de Fourier consiste en sumar la serie mediante un proceso de sumación generalizado: Una serie de números complejos $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ se dice que es sumable Abel cuando la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n$ converge para todo $r \in [0,1)$ y existe el límite, cuando $r \to 1$, de las sumas $A_r = \sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n$. En este caso se escribe

$$(A)\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \lim_{r \to 1} A_r$$

y se dice que $a = \lim_{r \to 1} A_r$ es la suma generalizada, en sentido Abel, de la serie.
El nombre asignado a este método generalizado de sumación procede del conocido teorema de Abel sobre series de potencias según el cual toda serie convergente de números complejos es sumable en sentido Abel hacia su suma ordinaria. Es fácil dar ejemplos de series no convergentes que son sumables Abel: La serie $\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k$ no es convergente, pero es sumable Abel hacia

$$\lim_{r \to 1} \sum_{k=0}^{\infty}(-r)^k = \lim_{r \to 1} \frac{1}{1+r} = \frac{1}{2}$$

Para estudiar la sumabilidad en sentido Abel, en el punto $t \in \mathbb{R}$, de la serie de Fourier de la función continua 2π-periódica f debemos formar las sumas

$$A_r(f,t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cos kt + b_k \operatorname{sen} kt) r^k = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} r^{|k|} \hat{f}(k) e^{ikt}$$

Su convergencia para todo $r \in [0,1)$ se obtiene fácilmente usando el criterio de comparación y teniendo en cuenta que para cada $k \in \mathbb{N}$ se cumple

$$|a_k \cos kt + b_k \operatorname{sen} kt| \le |a_k| + |b_k| \le 4\,\|f\|_\infty$$

Utilizando las fórmulas para los coeficientes $\hat{f}(k)$ se obtiene

$$A_r(f,t) = \sum_k r^{|k|}\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(s) e^{i(t-s)k} ds\right) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(\sum_k r^{|k|} e^{i(t-s)k}\right) f(s) ds$$

donde la última igualdad se consigue integrando término a término la serie uniformemente convergente que figura bajo la integral.

Por otra parte, expresando f en la forma $f(t) = \varphi(e^{it})$ podemos considerar la función $u : \overline{D(0,1)} \to \mathbb{R}$ que resuelve el problema de Dirichlet con la condición de frontera φ. Según el teorema 10.2.9, y utilizando la fórmula 10.6 para el núcleo de Poisson, se obtiene

$$A_r(f,t) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \varphi(e^{is}) P_r(t-s) ds = u(re^{it})$$

Según se estableció durante la demostración de 10.2.9, podemos afirmar que

$$f(t) = \lim_{r \to 1} A_r(f,t) \text{ uniformemente en } t \in [0, 2\pi]$$

Es decir, interpretando el teorema 7.21 en términos de series de Fourier se obtiene que la serie de Fourier de una función continua 2π-periódica $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es sumable Abel hacia f en todo punto, y además las sumas $A_r(f)$ convergen uniformemente hacia f

$$\lim_{r \to 1} \|A_r(f) - f\|_\infty = 0$$

Aplicando este resultado se obtiene fácilmente

Proposición 10.2.13 *Para cada función continua 2π-periódica $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ existe una sucesión de polinomios trigonométricos $p_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que converge uniformemente hacia f.*

DEM: Para cada $n \in \mathbb{N}$ existe $r_n \in (0,1)$ con $\|A_{r_n}(f) - f\|_\infty < 1/n$. Truncando la serie que define $A_{r_n}(f)$ podemos encontrar $m(n) \in \mathbb{N}$ tal que para todo $t \in \mathbb{R}$ se cumple:

$$|A_{r_n}(f,t) - \sum_{|k| \le m(n)} r_n^{|k|} \hat{f}(k) e^{ikt}| \le \frac{1}{n}$$

Entonces la sucesión de polinomios trigonométricos

$$p_n(t) = \sum_{|k| \le m(n)} r_n^{|k|} \hat{f}(k) e^{ikt}$$

converge uniformemente hacia f ya que

$$\|f - p_n\|_\infty \le \|f - A_{r_n}(f)\|_\infty + \|A_{r_n}(f) - p_n\|_\infty \le 2/n$$

■

Regiones de Dirichlet. Si Ω es un abierto conexo tal que el problema de Dirichlet tiene solución para cada función continua $\varphi : \partial_\infty \Omega \to \mathbb{R}$, se dice que Ω es una *región de Dirichlet*. Los abiertos simplemente conexos son abiertos de Dirichlet (véase Conway (4.18)). Aunque aquí no demostraremos este resultado general, para ciertos abiertos simplemente conexos $\Omega \subsetneq \mathbb{C}$ es posible demostrar fácilmente que son regiones de Dirichlet y obtener explícitamente la solución del problema de Dirichlet a partir de la solución del problema en el disco expuesta en el teorema 10.2.9.

Según el teorema de Riemann todo abierto simplemente conexo $\Omega \subsetneq \mathbb{C}$ es conformemente equivalente al disco $D(0,1)$. Cuando un abierto simplemente conexo $\Omega \subsetneq \mathbb{C}$ tiene la propiedad de que existe un isomorfismo conforme $h : \Omega \to D(0,1)$ que se puede extender a un homeomorfismo $\hat{h} : \overline{\Omega}^\infty \to \overline{D(0,1)}$ diremos que Ω tiene la propiedad de la extensión. En en este caso la restricción de $\hat{h}$ a la frontera $\partial_\infty \Omega$ es un homeomorfismo entre las fronteras $\partial_\infty \Omega$ y $\partial D(0,1)$, luego una condición necesaria para que Ω tenga la propiedad de la extensión es que su frontera sea una curva cerrada simple sobre la esfera de Riemann, (en el caso de un abierto acotado Ω, será una curva de Jordan en al plano, es decir, una curva cerrada homeomorfa a una circunferencia). En definitiva, una condición necesaria para que un abierto acotado simplemente conexo $\Omega \subsetneq \mathbb{C}$ tenga la propiedad de la extensión es que su frontera sea una curva de Jordan. Esta condición necesaria también es suficiente: Aunque esto no será demostrado aquí, comentamos brevemente un camino para establecer el resultado. En primer lugar se demuestra que si $\partial\Omega$ es una curva de Jordan entonces cada punto $a \in \partial\Omega$ es un punto frontera simple, lo que significa que para cada sucesión $a_n \in \Omega$ con $\lim_n a_n = a$ existe una función continua $\gamma : [0,1) \to \Omega$ con $\lim_{t \to 1} \gamma(t) = a$, y una sucesión estrictamente creciente $0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_n < t_{n+1} \cdots$ tal que $\gamma(t_n) = a_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$. En segundo lugar se demuestra que si cada $a \in \partial\Omega$ es un punto frontera simple entonces Ω tiene la propiedad de la extensión (véase el capítulo 14 del libro de Rudin).

Después de lo que acabamos de mencionar es fácil dar un ejemplo de un abierto simplemente conexo sin la propiedad de la extensión: $D(0,1) \setminus \{x : 0 \leq x < 1\}$ no tiene la propiedad de la extensión porque cada $x \in [0,1)$ es un punto frontera que no es simple.

Proposición 10.2.14 *Todo abierto simplemente conexo $\Omega \subsetneq \mathbb{C}$ con la propiedad de la extensión es una región de Dirichlet.*

DEM: Sea $h : \Omega \to D(0,1)$ un isomorfismo conforme que se extiende a un homeomorfismo $\hat{h} : \overline{\Omega}^\infty \to \overline{D(0,1)}$. La restricción h_0 de $\hat{h}$ a la frontera $\partial_\infty\Omega$ es un homeomorfismo entre las fronteras $h_0 : \partial_\infty\Omega \to \partial D(0,1)$, luego toda función continua $\hat{\varphi} : \partial_\infty\Omega \to \mathbb{R}$ es de la forma $\hat{\varphi} = \varphi \circ h_0$, donde $\varphi : \partial D(0,1) \to \mathbb{R}$ es continua. Sea $u : \overline{D(0,1)} \to \mathbb{R}$ la solución del problema de Dirichlet en $D(0,1)$ dada por el teorema 10.2.9. La función continua $\hat{u} = u \circ h : \overline{\Omega}^\infty \to \mathbb{R}$ coincide con $\hat{\varphi}$ sobre la frontera $\partial_\infty\Omega$ y es armónica en Ω en virtud de la proposición 10.1.8 luego es la solución del problema de Dirichlet en Ω con la condición de frontera $\hat{\varphi}$. ■

10.3. Sucesiones de funciones armónicas

Teorema 10.3.1 *Si una sucesión de funciones armónicas $u_n \in A(\Omega)$ converge uniformemente sobre compactos, la función límite $u : \Omega \to \mathbb{R}$ también es armónica.*

DEM: La convergencia uniforme sobre compactos garantiza que la función límite u es continua. Según el teorema 10.2.12 basta demostrar que u tiene la propiedad de la media.

En virtud de la proposición 10.2.1 cada u_n tiene la propiedad de la media luego, dado un disco $\overline{D(a,r)} \subset \Omega$, para todo $n \in \mathbb{N}$ se cumple

$$u_n(a) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u_n(a + re^{it})dt$$

Como u_n converge hacia u uniformemente sobre el compacto $C_r = \{z : |z - a| = r\}$, se puede pasar al límite bajo la integral y se obtiene

$$u(a) = \lim_n \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u_n(a + re^{it})dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(a + re^{it})dt$$

■

Lema 10.3.2 [Desigualdades de Harnack] *Si $u : \overline{D(a,R)} \to [0 + \infty)$ es una función continua y armónica en $D(a,R)$, para cada $r \in (0,R)$ y cada $\alpha \in [0,2\pi]$ se verifica*

$$\frac{R-r}{R+r}u(a) \leq u(a + re^{i\alpha}) \leq \frac{R+r}{R-r}u(a) \tag{10.16}$$

DEM: Según la fórmula integral de Poisson para el disco $\overline{D(a,R)}$:

$$u(a+re^{i\alpha}) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{R^2-r^2}{R^2-2rR\cos(\alpha-t)+r^2} u(a+Re^{it})dt$$

y en particular, para $r=0$:

$$u(a) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(a+Re^{it})dt$$

Teniendo en cuenta que

$$\frac{R^2-r^2}{R^2-2rR\cos(\alpha-t)+r^2} = \frac{R^2-r^2}{|Re^{it}-re^{i\alpha}|^2}$$

y usando la desigualdad $R-r \leq |Re^{it}-re^{i\alpha}| \leq R+r$, se obtiene

$$\frac{R-r}{R+r} = \frac{R^2-r^2}{(R+r)^2} \leq \frac{R^2-r^2}{R^2-2rR\cos(\alpha-t)+r^2} \leq \frac{R^2-r^2}{(R-r)^2} = \frac{R+r}{R-r}$$

Multiplicando miembro a miembro por $u(a+Re^{it}) \geq 0$ se conservan las desigualdades:

$$\frac{R-r}{R+r}u(a+Re^{it}) \leq \frac{R^2-r^2}{R^2-2rR\cos(\alpha-t)+r^2}u(a+Re^{it}) \leq \frac{R+r}{R-r}u(a+Re^{it})$$

Usando la monotonía del operador integral $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}[\ \cdot\ ]dt$, con las dos fórmulas mencionadas al principio se obtiene el resultado. ■

Teorema 10.3.3 *Para una sucesión creciente de funciones armónicas $u_n \in A(\Omega)$ en un abierto conexo $\Omega \subset \mathbb{C}$ se cumple una de las dos alternativas siguientes:*

i) $\lim_n u_n(z) = u(z) < +\infty$ *para todo* $z \in \Omega$.

ii) $\lim_n u_n(z) = +\infty$ *para todo* $z \in \Omega$.

En ambos casos la convergencia es uniforme sobre compactos. Cuando se cumple i), la función límite $u(z) = \lim_n u_n(z)$ es armónica.

DEM: Basta hacer la demostración suponiendo $u_n \geq 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$ (la demostración del caso general se reduce a esta situación considerando la sucesión $u_n - u_1 \geq 0$).
Para cada $z \in \Omega$ la sucesión de números reales $u_n(z)$ es creciente y por lo tanto existe el límite $u(z) = \lim_n u_n(z) \leq +\infty$. Consideremos los dos conjuntos disjuntos

$$A = \{z \in \Omega : u(z) = +\infty\}; \quad B = \{z \in \Omega : u(z) < \infty\};$$

Dado $a \in \Omega$ sea $R > 0$ tal que $\overline{D(a,R)} \subset \Omega$. Como estamos suponiendo $u_n \geq 0$ podemos usar las desigualdades de Harnack, según las cuales cada $z = a + re^{i\alpha} \in D(a,R)$ cumple

$$\frac{R-r}{R+r}u_n(a) \leq u_n(z) \leq \frac{R+r}{R-r}u_n(a)$$

Pasando al límite en la desigualdad de la izquierda se obtiene que $a \in A \Rightarrow D(a, R) \subset A$, luego A es abierto. Análogamente, pasando al límite en la desigualdad de la derecha se obtiene que $a \in B \Rightarrow D(a, R) \subset B$, luego B también es abierto. Como $\Omega = A \cup B$ es conexo y $A \cap B = \emptyset$ se concluye que, o bien $A = \emptyset$ y $B = \Omega$, (en este caso se cumple i)) o bien $A = \Omega$ y $B = \emptyset$ (y en este caso se cumple ii)).

Para demostrar que el límite es uniforme sobre compactos basta ver que para cada $a \in \Omega$ la sucesión u_n converge uniformemente en un disco $D(a, \rho) \subset \Omega$. Sea $0 < \rho < R$ donde R se ha elegido con la condición $\overline{D(a, R)} \subset \Omega$.

Si se cumple i) y $n \geq m$, usando la desigualdad de Harnack de la derecha para la función $u_n - u_m \geq 0$, se obtiene que todo punto $z = a + re^{i\alpha} \in D(a, \rho)$ verifica

$$0 \leq u_n(z) - u_m(z) \leq \frac{R+r}{R-r}(u_n(a) - u_m(a)) \leq \frac{R+\rho}{R-\rho}(u_n(a) - u_m(a))$$

Usando la desigualdad que acabamos de establecer, válida para todo $z \in D(a, \rho)$,

$$0 \leq u_n(z) - u_m(z) \leq \frac{R+\rho}{R-\rho}(u_n(a) - u_m(a))$$

y teniendo en cuenta que la sucesión $u_n(a)$ es de Cauchy se obtiene que u_n cumple la condición de Cauchy para la convergencia uniforme sobre $D(a, \rho)$. Obsérvese que si ocurre la alternativa i), la función u es armónica en virtud del teorema 10.3.1.

Cuando se cumple ii) es $\lim_n u_n(a) = +\infty$ y usando la desigualdad de Harnack de la izquierda para la función u_n se obtiene que cada punto $z = a + re^{i\alpha)} \in D(a, \rho)$ cumple

$$u_n(a)\frac{R-\rho}{R+\rho} \leq u_n(z)$$

luego $\lim_n u_n(z) = +\infty$ uniformemente sobre $D(a, \rho)$. ■

10.4. Ejercicios

♢ **10.1** *Dada una función armónica $u \in A(\Omega)$ sea $U(r,\theta) = u(r\cos\theta, r\operatorname{sen}\theta)$. Demuestre que la función $f(re^{i\theta}) = r\dfrac{\partial U}{\partial r}(r,\theta) - i\dfrac{\partial U}{\partial \theta}(r,\theta)$ es holomorfa en Ω ([17] ejerc. 10.1).*

♢ **10.2** *Si $u \in A(\Omega)$ es armónica no constante en un abierto conexo Ω, demuestre que el conjunto $M = \{z \in \Omega : \nabla u(z) = 0\}$ verifica $M' \cap \Omega = \emptyset$ ([17] ejerc. 10.3).*

♢ **10.3** *Si u y u^2 son armónicas en un abierto conexo, demuestre que u es constante.*

♢ **10.4** *Si u es armónica en un abierto simplemente conexo Ω, demuestre que existe $f \in \mathcal{H}(\Omega)$, sin ceros en Ω, tal que $u = \log|f|$.*

♢ **10.5** *Demuestre que $u(z) = \log|(z-a)/(z-b)|$ es armónica en $\mathbb{C}\setminus\{a,b\}$ y obtenga una caracterización de los abiertos conexos $\Omega \subset \mathbb{C}$ donde u posee función armónica conjugada ([17] ejerc. 10.6).*

♢ **10.6** *Si u es armónica en $\Omega = \{z : r < |z| < R\}$ demuestre que existen $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ y $\alpha \in \mathbb{R}$ tales que $u(z) = \alpha\log|z| + \operatorname{Re} f(z)$ ([17] ejerc. 10.10).*

♢ **10.7** *Si u es armónica en la corona $\{z : r < |z| < R\}$, para $r < \rho < R$ se define*

$$m(\rho) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(\rho e^{i\theta})d\theta$$

Demuestre que existen $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tales que $m(\rho) = \alpha\log\rho + \beta$ ([17] ejerc. 10.11).

♢ **10.8** *Si u es armónica en $D^*(0,r)$ demuestre que se cumple una, y sólo una, de las condiciones:*

i) $\lim_{z\to 0} u(z) = +\infty$, *$(-\infty)$;*

ii) $u(D^*(0,\epsilon)) = \mathbb{C}$, *para cada $\epsilon \in (0,r)$;*

iii) *u se puede extender a una función armónica en $D(0,r)$.*

([17] ejerc. 10.12)

♢ **10.9** *Sea $f \in \mathcal{H}(D(0,R))$ inyectiva tal que $f(0) = 0$. Si para algún $0 < r < R$ la curva $\gamma_r(t) = f(re^{it})$ posee un argumento continuo creciente, demuestre que la misma propiedad la tienen las curvas $\gamma_\rho(t) = f(\rho e^{it})$ para $0 < \rho < r$ ([17] ejerc. 10.14).*

♢ **10.10** *Si u es armónica en $\Omega = \{z : r_1 < |z| < r_2\}$ demuestre que $A(r) = \max\{u(re^{it}) : t \in [0,2\pi]\}$, definida para $r_1 < r < r_2$, es una función convexa de $\log r$: Si $r_1 < \rho_1 < \rho_2 < r_2$ y $\log\rho = \alpha\log\rho_1 + \beta\log\rho_2$, con $\alpha + \beta = 1$, $\alpha, \beta \geq 0$, se cumple $A(\rho) \leq \alpha A(\rho_1) + \beta A(\rho_2)$. Deduzca de lo anterior el teorema de los tres círculos de Hadamard: Si $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ no se anula en Ω y $M(\rho) = \max\{|f(\rho e^{it})| : t \in [0,2\pi]\}$, se verifica*

$$M(\rho) \leq M(\rho_1)^\alpha M(\rho_2)^\beta$$

donde $r_1 < \rho_1 < \rho < \rho_2 < r_2$; $\alpha = \dfrac{\log\rho_2 - \log\rho}{\log\rho_2 - \log\rho_1}$; $\beta = \dfrac{\log\rho - \log\rho_1}{\log\rho_2 - \log\rho_1}$.

([17] ejerc. 10.15).

♢ **10.11** *Demuestre que* $u : \Omega \to \mathbb{R}$ *es armónica en el abierto* $\Omega \subset \mathbb{C}$ *si y sólo si es continua y satisface la propiedad de la media espacial:*

$$u(z) = \frac{1}{\pi r^2} \int\int_{D(z,r)} u(x,y)dxdy \quad \textit{para todo} \quad \overline{D(z,r)} \subset \Omega.$$

([17] ejerc. 10.17)

♢ **10.12** *Sea* u *una función real continua en el semidisco* $A = \{z : \operatorname{Im} z \geq 0, |z| \leq 1\}$ *y armónica en su interior, que verifica* $u(x) = 0$ *cuando* $x \in \mathbb{R}$, $-1 \leq x \leq 1$.

Demuestre que existe una única función continua $P : \overline{D} \to \mathbb{R}$*, armónica en* $D = D(0,1)$ *que verifica*

i) $P(e^{it}) = u(e^{it})$ *si* $t \in [0, \pi]$, $P(e^{it}) = -u(e^{-it})$ *si* $t \in [\pi, 2\pi]$*;*

ii) $P|_A = u$.

([17] ejerc. 10.18)

♢ **10.13** *Sea* u *una función real continua en* $\{\infty\} \cup \{z : \operatorname{Re} z \geq 0\}$*, y armónica en el semiplano* $\{z : \operatorname{Re} z > 0\}$*, tal que* $\lim_\infty u(z) = 0$*. Demuestre que para cada* $x + iy$ *con* $x > 0$ *vale la fórmula de Poisson:*

$$u(x+iy) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{xu(it)}{x^2 + (y-t)^2} dt$$

♢ **10.14** *Sea* $\Omega = \{z : |z| > 1\}$ *y* $\varphi : \partial\Omega \to \mathbb{R}$ *una función continua. Demuestre que existe una única función continua* $v : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ *tal que* $v|_\Omega$ *es armónica,* $v|_{\partial\Omega} = \varphi$*, y* $\lim_{z\to\infty} v(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \varphi(e^{it})dt$*, que viene dada por*

$$v(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varphi(e^{it}) \frac{|z|^2 - 1}{|z - e^{it}|^2} dt, \quad \textit{si } |z| > 1.$$

¿Se puede asegurar la unicidad de la función v *cuando se prescinde de la condición sobre* $\lim_{z\to\infty} v(z)$*?. (Indicación: Si* u *es armónica en* $D(0,1)$ *entonces* $v(z) = u(1/\overline{z})$ *es armónica en* Ω*.)*

♢ **10.15** *Si* $f \in \mathcal{H}(D(0,1))$ *verifica* $\operatorname{Re} f(z) \geq 0$ *para cada* $z \in D(0,1)$ *y* $f(0) = 1/2$ *demuestre:*

i) $|f^{(n)}(0)| \leq n!$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$ *y*

ii) $|f(z)| \leq \frac{1}{2}\frac{1+\rho}{1-\rho}$ *si* $|z| \leq \rho < 1$

Indicación: Utilice la fórmula de Schwarz, o el ejercicio 5.33 de [17], para expresar f *en términos de su parte real ([17] ejerc. 5.34).*

♢ **10.16** *Justifique que el problema de Dirichlet no tiene solución en el disco perforado* $D^*(0,1)$.

♢ **10.17** *Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$ un abierto conexo y $f_n \in \mathcal{H}(\Omega)$ una sucesión tal que la sucesión de sus partes reales converge uniformemente sobre compactos.*

i) Si $\overline{D(a,r)} \subset \Omega$ y $f_n(a)$ converge demuestre que f_n converge uniformemente sobre $D(a,r)$.

ii) Utilice i) para demostrar que si f_n converge en algún punto entonces converge uniformemente sobre compactos.

([17] ejerc. 12.19)

♢ **10.18** *Sea u_n una sucesión de funciones armónicas en un abierto $\Omega \subset \mathbb{C}$, que converge uniformemente sobre compactos hacia la función u.*

Demuestre que para cada $a \in \Omega$ hay un disco $D(a,r) \subset \Omega$ y una sucesión $f_n \in \mathcal{H}(D(a,r))$ que converge uniformemente sobre $D(a,r)$ hacia una función $f \in \mathcal{H}(D(a,r))$, de modo que

$$\operatorname{Re} f = u|_{D(a,r)} \ \text{ y } \ \operatorname{Re} f_n = u_n|_{D(a,r)} \ \text{ para cada } n \in \mathbb{N}.$$

Deduzca de esto que si $m, j, k \in \mathbb{N}$, y $m = j + k$ entonces la sucesión $\dfrac{\partial^m u_n}{\partial x^j \partial y^k}$ converge uniformemente sobre compactos hacia $\dfrac{\partial^m u}{\partial x^j \partial y^k}$ ([17] ejerc. 12.20).

♢ **10.19** *Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$ un abierto conexo acotado, y u_n una sucesión de funciones, continuas en $\overline{\Omega}$ y con la propiedad de la media en Ω, que converge uniformemente sobre $\partial\Omega$. Demuestre que la sucesión también converge uniformemente sobre $\overline{\Omega}$ hacia una función u, que es continua en $\overline{\Omega}$ y armónica en Ω.*

♢ **10.20** *Demuestre que toda sucesión uniformemente acotada de funciones armónicas en un abierto simplemente conexo posee una subsucesión que converge uniformemente sobre compactos. ¿Se obtiene la misma conclusión cuando el abierto no es simplemente conexo?.*

♢ **10.21** *Sea u_n una sucesión de funciones armónicas positivas en el abierto en*

$$\Omega = \{z : |z| < 2, |z+1| > 1\}$$

tal que $u_n(1) = 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Demuestre que hay una subsucesión que converge uniformemente sobre compactos hacia una función $u \in A(\Omega)$. ¿Se anula u en Ω?.

♢ **10.22** *Sea u_n una sucesión de funciones armónicas positivas en el abierto*

$$\Omega = \{z : |z| > 1, \operatorname{Re} z > 0\}$$

que converge puntualmente hacia una función no identicamente nula u.

a) Demuestre que hay una sucesión $f_n \in \mathcal{H}(\Omega)$ que converge uniformemente sobre compactos y verifica $\operatorname{Re} f_n(z) = u_n(z)$ para cada $z \in \Omega$ y cada $n \in \mathbb{N}$.

b) Demuestre u es una función armónica que no se anula en ningún punto de Ω?.

♢ **10.23** *Demuestre que para cada compacto $K \subset D(0,1)$ existe una constante $\mu_K > 0$ tal que $u(z_1) \leq \mu_K u(z_2)$, cualquiera que sea la función armónica positiva $u : D(0,1) \to (0, +\infty)$ y el par de puntos $z_1, z_2 \in K$.*

♢ **10.24** *Si $u > 0$ es armónica en $D(0,1)$ y $u(0) = 1$, demuestre que $1/3 \leq u(1/2) \leq 3$.*

Referencias

[1] L. V. Ahlfors, *Complex Analysis.* 3^a Edi. McGraw-Hill 1979.

[2] T. A. Apostol, *Análisis Matemático.* Reverté 1976.

[3] Bombal - R.Marín - Vera, *Problemas de Análisis Matemático. Vol 3, (Cálculo Integral).* AC 1990.

[4] H. Cartan, *Théorie élémentaire des fonctions analytiques d'une ou plusieurs variables complexes.* Hermann 1978

[5] G. Choquet, *Topología.* Toray-Masson 1971.

[6] J. B. Conway, *Functions of One Complex Variable.* 2^a Edi. Springer-Verlag 1978.

[7] R. Descombes *Cours d'Analyse pour the certificat de Mathematiques I.* Vuibert 1962

[8] D. Feyel- A.Pradelle, *Ejercicios sobre la teoría de funciones analíticas.*

[9] H. Heins, *Complex Function Theory* Academic Press 1968.

[10] Hille, E *Analytic Function Theory* Vol 1, 1959

[11] Hille, E *Analyic Function Theory* Vol 2, 1962

[12] A. I. Markushevich, *Theory of functions of a complex variable. (2 Vol.)* Prentice-Hall 1965.

[13] R. Remmet, *Theory of Complex Functions* Verlag 1991.

[14] W. Rudin, *Análisis Real y Complejo.* 3^a Edi. McGraw-Hill 1988.

[15] L. Schwartz, *Analyse I. Théorie des ensembles et topologie.* Collection Enseignement des Sciences. Hermann. 1993

[16] L. Volkovyski-G.Lunts-I.Amaranovich, *Problemas sobre la teoría de funciones de variable compleja.* Ed. Mir.

[17] G. Vera, *Variable Compleja. Problemas y complementos.* Electolibris. 2013