Fundamentos de Topología

(Asignatura de Doctorado)

Lecciones impartidas por G. Vera

Curso 2005/2006

Índice general

Capítulo 1

Espacios paracompactos

El concepto de espacio paracompato lo introdujo Dieudonné en 1944 [17], cuando demostró que los espacios metrizables localmente compactos o separables son paracompactos. La paracompacidad de los espacios metrizables arbitrarios fue establecida por A. Stone [45]. Los espacios paracompactos generalizan simultáneamente a los espacios compactos y a los metrizables.

En lo que sigue X será siempre, salvo mención expresa de lo contrario, un espacio toplógico Hausdorff. Una familia $\mathcal{U}$ de subconjuntos de X es un *cubrimiento* de X si todo punto de X pertenece a algún elemento de $\mathcal{U}$. Un cubrimiento $\mathcal{V}$ de X se dice que es un *refinamiento* del $\mathcal{U}$ si cada $V \in \mathcal{V}$ está contenido en algún $U \in \mathcal{U}$.

Una familia $\mathcal{A}$ de partes de X se dice que es *localmente-finita* si cada punto del espacio tiene un entorno que interseca como mucho a un número finito de elementos de $\mathcal{A}$. Una familia $\mathcal{A}$ de partes de X se dice que es *σ-localmente finita* si es unión numerable de familias localmente finitas.

Lema 1.1 *Para cada familia localmente finita $\mathcal{A}$ se cumple*

$$\overline{\bigcup\{A : A \in \mathcal{A}\}} = \bigcup\{\overline{A} : A \in \mathcal{A}\}$$

DEM: La inclusión $\overline{\cup\{A : A \in \mathcal{A}\}} \supset \cup\{\overline{A} : A \in \mathcal{A}\}$ se verifica siempre, aunque la familia no sea localmente finita: Basta recordar que $\overline{A}$ es el menor cerrado que contiene al conjunto A, y por lo tanto está contenido en $\overline{\cup\{A : A \in \mathcal{A}\}}$.

Por otra parte, si x es adherente a la unión, $\cup\{A : A \in \mathcal{A}\}$, por ser $\mathcal{A}$ localmente finita, existe V_x, entorno de x, tal que es finita la familia

$$\{A \in \mathcal{A} : A \cap V_x\} = \{A_1, A_2, \cdots A_m\}$$

Entonces, debe existir $j \in \{1, 2, \cdots, m\}$ tal que $x \in \overline{A_j} \subset \cup\{\overline{A} : A \in \mathcal{A}\}$ (En caso contrario, para cada $j \in \{1, 2, \cdots, m\}$, se cumpliría que $x \notin \overline{A_j}$, y podríamos encontrar un entorno U_x de x tal que $U_x \cap A_j = \emptyset$ para $1 \leq j \leq m$, luego $U_x \cap V_x$ sería un entorno de x que no cota a $\cup\{A : A \in \mathcal{A}\}$). ■

Definición 1.2 *Un espacio topológico X se dice que es paracompacto si es Hausdorff y cada cubrimiento abierto de X tiene un refinamiento abierto localmente finito.*

Una consecuencia inmediata de la definición es que todo espacio compacto es paracompacto. El teorema de Stone 1.9, establecerá que los espacios métricos también son paracompactos.

En la definición de espacio paracompacto algunos autores no exigen que el espacio sea Hausdorff y en su lugar exigen que sea regular. En el ámbito de los espacios Hausdorff no es necesario hacer este requerimiento, en virtud del siguiente resultado

Teorema 1.3 *Todo espacio paracompacto es normal*

DEM: [Véase [19] 5.1.5; pág. 373]
Sea X un espacio paracompacto y $A, B \subset X$ cerrados disjuntos. Fijado $a \in A$, para cada $x \in B$ existen abiertos disjuntos U_x, V_x tales que $a \in U_x$, $x \in V_x$.
La familia $\{V_x : x \in B\} \cup \{B^c\}$ es un cubrimiento abierto de X, y por lo tanto tiene un refinamiento abierto localmente finito $\{W_s : s \in S\}$.
Sea $S_0 = \{s \in S : W_s \cap B \neq \emptyset\}$. Para cada $s \in S_0$ se verifica $a \notin \overline{W_s}$ y es claro que $B \subset \widetilde{V}_a := \bigcup_{s\in S_0} W_s$. Como $\{W_s : s \in S\}$ es localmente finita, según el lema 1.1, se cumple

$$\bigcup_{s\in S_0} \overline{W_s} = \overline{\bigcup_{s\in S_0} W_s}$$

por lo que $\widetilde{U}_a := X \setminus \bigcup_{s\in S_0} \overline{W_s}$ es abierto. Es claro que $\widetilde{U}_a$ y $\widetilde{V}_a$ son abiertos disjuntos que verifican $a \in \widetilde{U}_a$, $B \subset \widetilde{V}_a$.
Se repite el razonamiento con el cubrimiento abierto de X, $\{\widetilde{U}_a : a \in A\} \cup \{A^c\}$ que tiene un refinamiento localmente finito $\{G_t : t \in T\}$. Ahora se considera $T_0 = \{t \in T : G_t \cap A \neq \emptyset\}$ y es claro que $O_A := \bigcup_{t\in T_0} G_t$ es un abierto que contiene a A. Para cada $t \in T_0$ es $B \cap \overline{G}_t = \emptyset$ luego $O_B := X \setminus \bigcup_{t\in T_0} \overline{G}_t$ es un abierto, que contiene a B y verifica $O_A \cap O_B = \emptyset$. ■

Hay otras formulaciones equivalentes de la paracompacidad que se obtienen combinando los siguientes lemas:

Lema 1.4 *Si todo cubrimiento abierto de X tiene un refinamiento abierto σ-localmente finito, entonces todo cubrimiento abierto de X tiene un refinamiento localmente finito (formado por conjuntos arbitrarios).*

DEM: [Véase [19] Lema 5.1.10, pág 376, ó [30] Lema 5.34, pág.184]
Sea $\mathcal{U}$ un cubrimiento abierto de X y $\mathcal{V}$ un refinamiento abierto de $\mathcal{U}$ que es σ-localmente finito, es decir, que admite una descomposición $\mathcal{V} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{V}_n$ donde cada familia $\mathcal{V}_n$ es localmente finita. Para cada n y cada $V \in \mathcal{V}_n$ sea

$$V^* = V \setminus \bigcup\{U : U \in \mathcal{V}_k, 1 \leq k < n\}$$

La familia $\mathcal{W} = \{V^* : V \in \mathcal{V}_n, n \in \mathbb{N}\}$ es un cubrimiento de X que refina a $\mathcal{V}$ y por lo tanto a $\mathcal{U}$. Este cubrimiento es localmente finito:
Dado $x \in X$ sea m el primer entero tal que x pertenece a algún conjunto V de $\mathcal{V}_m$. Entonces V es un entorno de x que sólo corta a los miembros de $\mathcal{W}$ obtenidos a partir de las familias $\mathcal{V}_k$, con $k \leq m$ (si $k > m$ y $W^* \in \mathcal{W}$ con $W \in \mathcal{V}_k$ entonces para todo $U \in \mathcal{V}_m$ es $W^* \cap U = \emptyset$). Como como la familia $\mathcal{V}_1 \cup \cdots \cup \mathcal{V}_m$, es localmente finita, x posee un entorno $V' \subset V$ que sólo corta a una cantidad finita de conjuntos de esta familia y por lo tanto sólo corta a una cantidad finita de miembros de $\mathcal{W}$ ■

Lema 1.5 *Si cada cubrimiento abierto de un espacio regular X tiene un refinamiento localmente finito (formado por conjuntos arbitrarios), entonces para cada cubrimiento abierto $\{U_\alpha : \alpha \in A\}$ de X hay un cubrimiento $\{F_\alpha : \alpha \in A\}$ de X, cerrado y localmente finito, tal que $F_\alpha \subset U_\alpha$ para cada $\alpha \in A$*

DEM: [Véase [19] Lema 5.1.6, pág 374]
Por la regularidad existe un cubrimiento abierto $\mathcal{W}$ de X tal que $\{\overline{W} : W \in \mathcal{W}\}$ es un refinamiento de $\{U_\alpha : \alpha \in A\}$. Sea $\{E_t : t \in T\}$ un refinamiento locamente finito de $\mathcal{W}$. Para cada $t \in T$ existe $\alpha(t) \in A$ tal que $\overline{E}_t \subset U_{\alpha(t)}$. Sea

$$F_\alpha := \bigcup \{\overline{E}_t : \alpha(t) = \alpha\} = \overline{\bigcup \{E_t : \alpha(t) = \alpha\}}$$

(la segunda igualdad se cumple porque la familia $\{E_t : t \in T\}$ es localmente finita). Es inmediato que $\{F_\alpha : \alpha \in A\}$ es un cubrimiento localmente finito de cerrados que cumple la condición requerida en el enunciado. ■

Lema 1.6 *Si cada cubrimiento abierto de un espacio topológico X tiene un refinamiento cerrado localmente finito, entonces también tiene un refinamiento abierto localmente finito*

DEM: [Véase [19] Lema 4.4.12, pág 354]
Sea $\mathcal{U}$ un cubrimiento abierto de X y $\mathcal{A} = \{A_s : s \in S\}$ un refinamiento localmente finito. Para cada $s \in S$ elegimos $U(s) \in \mathcal{U}$ tal que $A_s \subset U(s)$. Para cada $x \in X$ sea V_x un entorno de x tal que $\{s \in S : V_x \cap A_s \neq \emptyset\}$ es finito.

Sea $\mathcal{F}$ un refinamiento cerrado localmente finito de $\{V_x : x \in X\}$. Entonces para cada $F \in \mathcal{F}$ el conjunto $\{s \in S : F \cap A_s \neq \emptyset\}$ también es finito. En virtud del lema 1.1 la unión de una familia localmente finita de cerrados es cerrada luego, para cada $s \in S$, el conjunto

$$W_s = X \setminus \bigcup \{F \in \mathcal{F} : F \cap A_s = \emptyset\}$$

es un abierto que contiene a A_s. La familia $\mathcal{V} = \{V_s : s \in S\}$ con $V_s = W_s \cap U(s)$ es un refinamiento abierto de $\mathcal{U}$ tal que $A_s \subset V_s$ para todo $s \in S$. Para terminar basta ver que la familia $\mathcal{V}$ es localmente finita. Cada $x \in X$ posee un entorno O_x tal que $\{F \in \mathcal{F} : F \cap O_x \neq \emptyset\} = \{F_1, F_2, \cdots F_m\}$ es finito y vamos a ver que este entorno también cumple que $\{s \in S : V_s \cap O_x \neq \emptyset\}$ es finito:

Si $V_s \cap O_x \neq \emptyset$ entonces $W_s \cap O_x \neq \emptyset$ y según la definición de W_s, existe algún $F \in \mathcal{F}$, con $F \cap A_s \neq \emptyset$, tal que $F \cap O_x \neq \emptyset$. Se sigue que $s \in S_0$, donde $S_0 = \bigcup_{j=1}^m \{s \in S : A_s \cap F_j \neq \emptyset\}$ es finito (unión finita de conjuntos finitos). ■

Teorema 1.7 *Para un espacio topológico Hausdorff X son equivalentes:*

a) X es paracompacto (es Hausdorff y cada cubrimiento abierto de X tiene un refinamiento abierto localmente finito).

b) X es regular y todo cubrimiento abierto de X tiene un refinamiento abierto σ-localmente finito.

c) X es regular y todo cubrimiento abierto de X tiene un refinamiento localmente finito (formado por conjuntos arbitrarios)

d) X es regular y todo cubrimiento abierto de X tiene un refinamiento localmente finito formado por conjuntos cerrados.

Dem:
a) $\Rightarrow$ b) es consecuencia del teorema 1.3
b) $\Rightarrow$ c) es consecuencia del lema 1.4
c) $\Rightarrow$ d) es consecuencia del lema 1.5
d) $\Rightarrow$ a) es consecuencia del lema 1.6. ■

Cada familia numerable es σ-localmente finita y utilizando 1.7 b) se obtiene el siguiente resultado del que merece la pena dar una demostración directa

Teorema 1.8 *Todo espacio regular y Lindelöf es paracompacto.*

Dem: [Véase [19] Teorema 3.8.11, pág. 248]
Sea $\mathcal{U}$ un cubrimiento abierto de un espacio regular y Lindelöf X. Por la regularidad, cada $x \in X$ posee entornos abiertos U_x, V_x tales que $x \in \overline{U_x} \subset V_x$, y V_x está contenido en algún abierto de $\mathcal{U}$. Por la propiedad de Lindelöf existe un cubrimiento numerable $\{U_{x_j} : j \in \mathbb{N}\}$ extraído de $\{U_x : x \in X\}$. La sucesión se abiertos

$$W_j = V_{x_j} \setminus \left(\overline{U}_{x_1} \cup \overline{U}_{x_2} \cup \cdots \cup \overline{U}_{x_{j-1}}\right), \quad j \in \mathbb{N}$$

recubre X (pues dado $x \in X$ entonces $x \in W_k$ donde k es el mínimo entero que cumple $x \in V_k$). Es claro que $\{W_j : j \in \mathbb{N}\}$ es un refinamiento de $\mathcal{U}$, que es localmente finito: Dado $a \in X$ existe $i \in \mathbb{N}$ tal que $a \in U_{x_i}$ y así U_{x_i} es un entorno de a que cumple $U_{x_i} \cap W_j = \emptyset$ para todo $j > i$. ■

Teorema 1.9 [Stone] *Todo cubrimiento abierto de un espacio métrico (X, d) tiene un refinamiento abierto σ-discreto y localmente finito. Por lo tanto X es paracompacto.*

Dem: [Véase [30] Teorema 4.21, pág 151] Sea $\mathcal{U}$ un cubrimiento abierto del espacio métrico (X, d). Dado $U \in \mathcal{U}$ se define $U_n = \{x \in U : d(x, U^c) \geq \frac{1}{2^n}\}$.

$$x \in U_n,\ y \in U^c_{n+1} \Rightarrow d(x,y) \geq d(x,U^c) - d(y,U^c) \geq \frac{1}{2^n} - \frac{1}{2^{n+1}} = \frac{1}{2^{n+1}}$$

luego

$$d(U_n, U^c_{n+1}) = \inf\{d(x,y) : x \in U_n, y \in U^c_{n+1}\} \geq \frac{1}{2^{n+1}}$$

Por el principio de buena ordenación podemos suponer que la familia $\mathcal{U}$ está bien ordenada mediante una relación de orden $<$. Definimos entonces

$$U^*_n = U_n \setminus \bigcup\{V_{n+1} : V \in \mathcal{U}, V < U\}$$

Evidentemente $U^*_n \subset U_n \subset U$.
Para cada par $U, V \in \mathcal{U}$ y cada $n \in \mathbb{N}$ se cumple

(a) $U^*_n \subset V^c_{n+1}$ si $V < U$

(b) $V^*_n \subset U^c_{n+1}$ si $U < V$

Cuando $V < U$ en virtud de (a) y (b) se cumple

$$d(U^*_n, V^*_n) \geq d(V^c_{n+1}, V^*_n) \geq d(V^c_{n+1}, V_n) \geq \frac{1}{2^{n+1}}$$

Análogamente, cuando $U < V$ se cumple

$$d(U^*_n, V^*_n) \geq d(U^*_n, U^c_{n+1}) \geq d(U_n, U^c_{n+1}) \geq \frac{1}{2^{n+1}}$$

En ambos casos si $U \neq V$ se cumple $d(U^*_n, V^*_n) \geq \dfrac{1}{2^{n+1}}$. (*)
Los conjuntos

$$\widetilde{U}_n = \{x \in X : d(x, U^*_n) < \frac{1}{2^{n+3}}\}$$

son abiertos y $\widetilde{U}_n \subset U$ ($x \in \widetilde{U}_n \Rightarrow d(x, U_n) < \frac{1}{2^{n+3}} \Rightarrow x \in U$).

i) Para cada $n \in \mathbb{N}$ la familia $\{\widetilde{U}_n : U \in \mathcal{U}\}$ es discreta pues

$$x \in \tilde{U}_n, y \in \tilde{V}_n \Rightarrow d(x,y) \geq 1/2^{n+2}$$

Efectivamente, sean $x' \in U^*_n, y' \in V^*_n$ tales que $d(x,x') < 2^{-(n+3)}$, $d(y,y') < 2^{-(n+3)}$. Entonces, en virtud de (*) se cumple

$$1/2^{n+1} \leq d(x',y') \leq d(x',x) + d(x,y) + d(y,y') \leq d(x,y) + 1/2^{n+2}$$

luego $d(x,y) \geq 1/2^{n+1} - 1/2^{n+2} = 1/2^{n+2}$.

ii) $\mathcal{V} = \{\widetilde{U}_n : n \in \mathbb{N}, U \in \mathcal{U}\}$ es un cubrimiento abierto de X que refina a $\mathcal{U}$: Si $x \in X$ sea $U \in \mathcal{U}$ el primer abierto de $\mathcal{U}$ con $x \in U$. Entonces existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $x \in U_n$ luego $x \in U^*_n \subset \widetilde{U}_n \subset U$.

Queda demostrado así que $\mathcal{U}$ tiene un refinamiento abierto σ-discreto $\mathcal{V}$ que en particular es σ-localmente finito. Por el teorema 1.7 X es paracompacto, luego todo cubrimiento abierto $\mathcal{U}$ de X posee un refinamiento abierto localmente finito $\mathcal{U}'$, del cual podremos extraer un refinamiento abierto σ-discreto $\mathcal{V}'$ que seguirá siendo localmente finito. ■

Corolario 1.10 *La topología de un espacio metrizable posee una base σ-discreta.*

DEM: Si d es una distancia que define la topología de X, para cada $n \in \mathbb{N}$, en virtud del teorema de 1.9, el cubrimiento abierto

$$\mathcal{B}_n = \{B(x, 1/n) : x \in X\}$$

tiene un refinamiento abierto σ-discreto $\mathcal{U}_n$. Entonces $\bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{U}_n$ es una base σ-discreta de la topología de X. Efectivamente, dado un abierto U, fijado un punto $x \in U$ sea

$$m = \min\{n \in \mathbb{N} : B(x, 1/n) \subset U\}$$

Por ser $\mathcal{U}_{2m}$ un cubrimiento de X existe $V \in \mathcal{U}_{2m}$ tal que $x \in V$. Además, como $\mathcal{U}_{2m}$ es un refinamiento de $\mathcal{B}_{2m}$, se cumplirá $V \subset B(b, \frac{1}{2m})$ para cierto $b \in X$. Como $x \in B(b, \frac{1}{2m})$ se obtiene

$$V \subset B(b, 1/(2m)) \subset B(x, 1/m) \subset U$$

Así hemos encontrado $V \in \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{U}_n$ tal que $x \in V \subset U$, y esto prueba que $\bigcup_n \mathcal{U}_n$ es una base para la topología de X que obviamente es σ-discreta. ■

Si $\mathcal{A}$ es un cubrimiento abierto de X, dado $M \subset X$ se define

$$\operatorname{st}(M, \mathcal{A}) = \bigcup\{A \in \mathcal{A} : A \cap M \neq \emptyset\}$$

y en particular, para $M = \{x\}$ se define $\operatorname{st}(x, \mathcal{A}) = \operatorname{st}(\{x\}, \mathcal{A})$.
Un cubrimiento $\mathcal{B}$ de X se dice que es un $*$-*refinamiento* de $\mathcal{A}$ si para cada $B \in \mathcal{B}$ existe $A \in \mathcal{A}$ tal que $\operatorname{st}(B, \mathcal{B}) \subset A$, y se dice que es un *refinamiento baricéntrico* de $\mathcal{A}$ si para cada $x \in X$ existe $A \in \mathcal{A}$ tal que $\operatorname{st}(x, \mathcal{B}) \subset A$.

Teorema 1.11 *Para un espacio Hausdorff X son equivalentes*
a) X es paracompacto.
b) Cada cubrimiento abierto de X tiene un refinamiento baricéntrico abierto.
c) Cada cubrimiento abierto de X tiene un $*$-refinamiento abierto.
d) X es regular y cada cubrimiento abierto de X tiene un refinamiento abierto σ-discreto.

DEM: [Véase [19] 5.1.12, pág 377] Esquema de la demostración:
a) ⇒ b) Se obtiene combinando el teorema 1.7 y el lema 5.1.13 de [19] según el cual si un cubrimiento abierto de X tiene un refinamiento cerrado localmente finito entonces también tiene un refinamiento baricéntrico abierto.
b) ⇒ c) Según el lema 5.1.14 de [19] todo refinamiento baricéntrico de un

refinamiento baricéntrico de $\mathcal{U}$ es un $*$-refinamieto de $\mathcal{U}$.
c $\Rightarrow$ d) Se demuestra primero que X es regular ([19], pág 379) y el resto de la demostración es lema 5.1.16 de [19].
d $\Rightarrow$ a) Es consecuencia del teorema 1.7 pues toda familia σ-discreta es σ-localmente finita. ■

El resultado anterior, que no será utilizado en lo que sigue, sirve para demostrar que todo espacio paracompacto es *colectivamente normal* lo que significa que para cada familia discreta de cerrados $\{F_\alpha : \alpha \in A\}$ existe una familia discreta de abiertos $\{U_\alpha : \alpha \in A\}$ tal que $F_\alpha \subset U_\alpha$ para cada $\alpha \in A$ ([19] 5.1.18, pág 379). Como no hemos demostrado este teorema proporcionamos una demostración del siguiente resultado más particular:

Teorema 1.12 *Todo espacio metrizable es colectivamente normal.*

Dem: Comenzamos demostrando que cada cubrimiento abierto $\mathcal{U}$ de X tiene un $*$-refinamiento abierto.
Dado $V \subset X$ definimos $O_n(V) = \{x \in X : d(x, V) < 1/n\}$. Sea $\mathcal{V}_n$ la familia de los abiertos $V \subset X$ tales que $O_n(V)$ está contenido en algún $U \in \mathcal{U}$ y $\operatorname{diam}(V) < 1/n$. Es claro que $\mathcal{V} = \bigcup \mathcal{V}_n$ es un refinamiento abierto de $\mathcal{U}$.
Dado $x \in X$ sea m el menor entero tal que x pertenece a algún $V \in \mathcal{V}_m$ y sea $U_x \in \mathcal{U}$ tal que $O_m(V) \subset U_x$.
Según la definición de m, es $\operatorname{diam}(V) < 1/m$, y cada $W \in \mathcal{V}$ con $x \in W$ pertenece a algún $\mathcal{V}_n$ con $n \geq m$, luego $\operatorname{diam}(W) < 1/n \leq 1/m$. Se sigue de esto que $x \in \operatorname{st}(x, \mathcal{V}) \subset O_m(V)$. Hemos demostrado así:
(a) Para cada $x \in X$ existe $U_x \in \mathcal{U}$ tal que $\operatorname{st}(x, \mathcal{V}) \subset U_x$
Repitiendo el razonamiento se consigue un refinamiento abierto $\mathcal{W}$ de $\mathcal{V}$ que verifica:
(b) Para cada $x \in X$ existe $V_x \in \mathcal{V}$ tal que $\operatorname{st}(x, \mathcal{W}) \subset V_x$
Entonces, para cada $W_0 \in \mathcal{W}$ se cumple

$$\operatorname{st}(W_0, \mathcal{W}) = \bigcup_{x \in W_0} \operatorname{st}(x, \mathcal{W}) \subset \bigcup_{x \in W_0} V_x$$

Fijado $x_0 \in W_0$, para cada $x \in W_0$ se cumple $x_0 \in \operatorname{st}(x, \mathcal{W}) \subset V_x$, luego $V_x \subset \operatorname{st}(x_0, \mathcal{V})$ y se sigue que

$$\bigcup_{x \in W_0} V_x \subset \operatorname{st}(x_0, \mathcal{V})$$

y combinando las últimas inclusiones resulta

$$\operatorname{st}(W_0, \mathcal{W}) \subset \operatorname{st}(x_0, \mathcal{V})$$

Según (a) existe $U_0 \in \mathcal{U}$ tal que $\operatorname{st}(x_0, \mathcal{V}) \subset U_0$ y se obtiene que

$$\operatorname{st}(W_0, \mathcal{W}) \subset U_0$$

Queda demostrado $\mathcal{W}$ es un $*$-refinamiento abierto del cubrimiento abierto $\mathcal{U}$ dado inicialmente.

Sea $\{F_\alpha : \alpha \in A\}$ una familia discreta de cerrados en el espacio metrizable X y para cada $x \in X$ sea U_x un entorno de x que corte, a lo sumo, a un cerrado de la familia. Por lo que se acaba de demostrar hay un refinamiento $\mathcal{W}$ de $\mathcal{U} = \{U_x : x \in X\}$ tal que para cada $W \in \mathcal{W}$ el conjunto $\mathrm{st}(W, \mathcal{W})$ está contenido en algún U_x. Sea $\mathcal{V} = \{V_\alpha : \alpha \in A\}$ donde

$$V_\alpha = \mathrm{st}(F_\alpha, \mathcal{W}) = \bigcup\{W \in \mathcal{W} : W \cap F_\alpha \neq \emptyset\}$$

Es claro que $F_\alpha \subset V_\alpha$ y para terminar la demostración basta comprobar que $\mathcal{V}$ es una familia discreta de abiertos: Efectivamente, cada $W \in \mathcal{W}$ corta a lo más a un V_α pues si $W \cap V_\alpha \neq \emptyset$ entonces existe $W' \in \mathcal{W}$ tal que $W' \cap F_\alpha \neq \emptyset$ y $W' \cap W \neq \emptyset$, luego $W' \subset \mathrm{st}(W, \mathcal{W})$ donde $\mathrm{st}(W, \mathcal{W})$ está contenido en algún $\subset U_x$, y por lo tanto $U_x \cap F_\alpha \neq \emptyset$. Como $\alpha \in A$ es el único elemento de A que cumple esto, se sigue que $W \in \mathcal{W}$ no corta a los conjuntos V_β con $\beta \neq \alpha$. ■

A título informativo recopilamos algunos resultados relativos a la paracompacidad que conviene conocer, para los que nos remitimos a [19]:

a) *Todo espacio paracompacto y numerablemente compacto es compacto.* [5.1.20].

b) *Todo espacio paracompacto que contiene un subespacio denso Lindelöf es Lindelöf. En particular, todo espacio paracompacto separable es Lindelöf.* [5.1.25]

c) *La paracompacidad es hereditaria respecto a los subconjuntos $\mathcal{F}_\sigma$. En particular, cada subespacio cerrado de un espacio paracompacto es paracompacto.* [5.1.18]

d) *La paracompacidad no es estable frente a aplicaciones continuas, pero es estable frente a aplicaciones cerradas.* [5.1.33]

e) *La paracompacidad no es estable frente a productos finitos.* [5.1.13]

f) *El producto $X \times Y$ de un espacio paracompacto X y un espacio compacto Y es paracompacto.* [5.1.36]

g) *Un espacio X es paracompacto si y sólo si para cada compacto Y el producto $X \times Y$ es normal.* [5.1.39]

h) *Existen espacios normales que no son colectivamente normales y espacios colectivamente normales que no son paracompactos.* [5.1.12 y 5.1.23]

Capítulo 2

Particiones de la unidad. Aplicaciones

Una familia $\{f_\alpha : \alpha \in A\}$ de funciones continuas $f_\alpha : X \to [0,1]$, con dominio en un espacio topológico X, se dice que es una *partición de la unidad* en X si para todo $x \in X$ se cumple $\sum_{\alpha\in A} f_\alpha(x) = 1$, donde la igualdad anterior significa que para cada $x \in X$ el conjunto $\{\alpha \in A : f_\alpha(x) > 0\} = \{\alpha_j : j \in \mathbb{N}\}$ es numerable y la correspondiente serie $\sum_{i=1}^{\infty} f_{\alpha_i}(x)$, converge a 1.

Dada una partición de la unidad $\{f_\alpha : \alpha \in A\}$ en X, la familia de abiertos $V_\alpha = \{x \in X : f_\alpha(x) > 0\}$, $\alpha \in A$, recubre X. Cuando este cubrimiento es localmente finito se dice que la partición de la unidad es localmente finita. Cuando este cubrimiento es un refinamiento de un cubrimiento abierto $\mathcal{U}$ de X, se dice que la partición de la unidad está subordinada a $\mathcal{U}$.

El siguiente objetivo es caracterizar los espacios paracompactos como aquellos en los que siempre existe una partición de la unidad asociada cualquier recubrimiento abierto del espacio.

Teorema 2.1 *Para un espacio Hausdorff X son equivalentes*

a) X es paracompacto.

b) Para cada cubrimiento abierto $\mathcal{U}$ de X existe una partición de la unidad localmente finita subordinada a $\mathcal{U}$.

c) Para cada cubrimiento abierto $\mathcal{U}$ de X existe una partición de la unidad subordinada a $\mathcal{U}$.

DEM: [Véase [19] 5.1.9, pág 375]
a) $\Rightarrow$ b) Sea $\mathcal{U}$ un cubrimiento abierto de X y $\mathcal{V} = \{V_\alpha : \alpha \in A\}$ un refinamiento abierto localmente finito. En virtud del lema 1.5 existe un cubrimiento cerrado de X, $\{F_\alpha : \alpha \in A\}$, tal que $F_\alpha \subset V_\alpha$ para cada $\alpha \in A$. Según el teorema 1.3 X es normal, luego en virtud del lema de Urysohn existen funciones continuas $g_\alpha : X \to [0,1]$ tales que $g_\alpha(x) = 1$ si $x \in F_\alpha$, y $g_\alpha(x) = 0$ si $x \notin V_\alpha$. Usando que $\mathcal{V}$ es localmente finita es fácil ver que la suma

$$g(x) = \sum_{\alpha\in A} g_\alpha(x)$$

define en X una función continua, que no se anula nunca, y se sigue que $f_\alpha = g_\alpha/g$ es una partición de la unidad localmente finita subordinada a $\mathcal{U}$
b) $\Rightarrow$ c) Evidente.
c) $\Rightarrow$ a) Dea $\mathcal{U}$ un cubrimiento abierto de X y $\{f_\alpha : \alpha \in A\}$ una partición de la unidad subordinada a $\mathcal{U}$. Comencemos demostrando el siguiente aserto:

[A] La función $f(x) = \sup_{\alpha\in A} f_\alpha(x)$ es continua

Lo demostraremos viendo que cada $x \in X$ posee un entorno U_x tal que la restricción $f|_{U_x}$ es continua: Sea $\alpha_x \in A$ tal que $f_{\alpha_x}(x) > 0$. Según la definición de familia sumable existe un conjunto finito $A_x \subset A$ tal que

$$1 - \sum_{\alpha\in A_x} f_\alpha(x) < f_{\alpha_x}(x)$$

luego

$$U_x = \{y \in X : 1 - \sum_{\alpha\in A_x} f_\alpha(y) < f_{\alpha_x}(y)\}$$

es entorno abierto de x. Para cada $y \in U_x$ y cada $\beta \notin A_x$ se cumple

$$0 \leq f_\beta(y) \leq \sum_{\alpha\notin A_x} f_\alpha(y) = 1 - \sum_{\alpha\in A_x} f_\alpha(y) < f_{\alpha_x}(y)$$

Se sigue de esto que $\alpha_x \in A_x$ y que para cada $y \in U_x$ se cumple

$$f(y) = \sup_{\alpha\in A} f_\alpha(y) = \sup_{\alpha\in A_x} f_\alpha(y)$$

luego la restricción $f|_{U_x}$ es continua.
Sea $V_\alpha = \{x \in X : f_\alpha(x) > f(x)/2\}$. Es claro que $\mathcal{V} = \{V_\alpha : \alpha \in A\}$ es un refinamiento abierto de $\mathcal{U}$ y la demostración concluye viendo que este refinamiento es localmente finito: Como $f(x) > 0$ para todo $x \in X$, razonando como antes, pero usando la función $f/2$ en lugar de f_{α_x}, se obtiene, para cada $x \in X$, un conjunto finito $C_x \subset A$ tal que $1 - \sum_{\alpha\in C_x} f_\alpha(x) < f(x)/2$, y un entorno abierto de x, $G_x = \{y \in X : 1 - \sum_{\alpha\in C_x} f_\alpha(y) < f(y)/2\}$, tal que para cada $y \in G_x$ y cada $\beta \notin C_x$ se cumple $0 \leq f_\beta(y) < f(y)/2$, luego $\beta \notin C_x \Rightarrow V_\beta \cap G_x = \emptyset$. ■

Como una primera aplicación de las particiones de la unidad vamos a obtener el clásico teorema de selección de Michael.

Sea $\phi : X \to \mathcal{P}(E)$ una multifunción (una aplicación cuyos valores son subconjuntos de E). Una selección de ϕ es una aplicación $\varphi : X \to E$ tal que $\varphi(x) \in \phi(x)$ para cada $x \in E$. Si X, E son espacios topológicos se dice que ϕ es *semicontinua inferiormente* si el el conjunto $\{x \in X : \phi(x) \cap G \neq \emptyset\}$ es abierto en X para cada abierto $G \subset E$.

Teorema 2.2 [Michael] *Sea X paracompacto, E un espacio de Banach y $\phi : X \to \mathcal{P}(E)$ una multifunción semicontinua inferiormente tal que cada $\phi(x)$ es un subconjunto cerrado y convexo de E. Entonces ϕ admite una selección continua, es decir, existe una función continua $\varphi : X \to E$ tal que $\varphi(x) \in \phi(x)$ para cada $x \in X$*

Dem: Veamos la demostración que aparece en [2], que requiere un lema previo de selección aproximada:

Lema 2.3 *En las condiciones de 2.2 (excepto que los conjuntos $\phi(x)$ no se suponen cerrados) para cada $\epsilon > 0$ existe una función continua $\varphi : X \to E$ tal que $d(\varphi(x), \phi(x)) < \epsilon$ para todo $x \in X$.*

Dem: Para cada $y \in E$ el conjunto $G_y = \{x \in X : \phi(x) \cap B(y, \epsilon) < \epsilon\}$ es abierto. Como $\{G_y : y \in E\}$ es un cubrimiento abierto de X existe una partición de la unidad localmente finita $\{f_\alpha : \alpha \in A\}$ subordinada a este cubrimiento. Para $\alpha \in A$ elegimos $y_\alpha \in E$ tal que $\{x \in X : f_\alpha(x) > 0\} \subset G_{y_\alpha}$ y definimos

$$\varphi(x) = \sum_{\alpha \in A} f_\alpha(x) y_\alpha$$

Como la suma es localmente finita φ está bien definida y es continua. Además $f_\alpha(x) \neq 0 \Rightarrow d(y_\alpha, \phi(x)) < \epsilon$, luego $\varphi(x)$ es una combinación convexa de puntos del conjunto $C(x, \epsilon) = \{y \in E : d(y, \phi(x)) < \epsilon\}$ que es convexo por serlo $\phi(x)$. Por lo tanto $\varphi(x) \in C(x, \epsilon)$ ■

Demostración del teorema 2.2: La selección φ se obtiene como límite de una sucesión φ_n, definida mediante un procso iterativo: Sea $\phi_0 = \phi$ y φ_0 la selección aproximada que proporciona el lema 2.3 con $\epsilon = 1$.
Los valores de la multifunción $\phi_1(x) = \phi_0(x) \cap B(\varphi_0(x), 1)$ son convexos y, por la elección de φ_0, no vacíos. Veamos que φ_1 es semicontinua inferiormente:
Sea $G \subset E$ abierto y $W = \{x \in X : \phi_1(x) \cap G \neq \emptyset\}$. Para demostrar que W es abierto suponemos que $W \neq \emptyset$ y fijamos un punto $z \in W$. Entonces el conjunto $\phi_0(z) \cap B(\varphi_0(z), 1) \cap G$ no es vacío y existe $r < 1$ tal que $\phi_0(z) \cap B(\varphi_0(z), r) \cap G$ tampoco es vacío. Por lo tanto

$$\{x \in X : \phi_0(x) \cap [B(\varphi_0(z), r) \cap G] \neq \emptyset\}$$

es un entorno abierto de z y usando la continuidad de φ_0 en z podemos encontrar $\delta > 0$ tal que

$$d(x, z) < \delta \Rightarrow B(\varphi_0(x), 1) \supset B(\varphi_0(z), r)$$

luego el conjunto

$$W = \{x \in X : \phi_0(x) \cap [B(\varphi_0(x), 1) \cap G] \neq \emptyset\} = \{x \in X : \phi_1(x) \cap G \neq \emptyset\}$$

contiene un entorno de z. Queda demostrado así que ϕ_1 cumple las hipótesis del lema 2.3. Sea φ_1 la selección aproximada de ϕ_1 proporcionada por este lema para $\epsilon = 1/2$. Obsérvese que eligiendo $z \in \phi_1(x) \subset \phi_0(x)$ se obtiene la primera de las desigualdades

i) $\|\varphi_1(x) - \varphi_0(x)\| \leq \|\varphi_1(x) - z\| + \|\varphi_0(x) - z\| \leq 2^{-1} + 1$

ii) $d(\varphi_j(x), \phi(x)) < 2^{-j}$ para $j = 1, 2$.

De modo recurrente se obtiene una sucesión de funciones continuas $\varphi_n : X \to E$ tales que para todo $x \in X$ y todo $n \in \mathbb{N}$ se cumple

i) $\|\varphi_n(x) - \varphi_{n-1}(x)\| \leq 2^{-n} + 2^{-n+1}$

ii) $d(\varphi_n(x), \phi(x)) < 2^{-n}$.

En virtud de i) la serie $\sum_k (\varphi_k(x) - \varphi_{k-1}(x))$ converge uniformemente, lo que garantiza que para cada $x \in X$ existe el límite

$$\varphi(x) = \lim_n \varphi_n(x) = \varphi_0(x) + \lim_n \sum_{k \leq n} (\varphi_k(x) - \varphi_{k-1}(x))$$

y define una función continua $\varphi : X \to E$. Según las hipótesis, cada $\phi(x)$ es cerrado y por lo tanto, en virtud de ii), $\varphi(x) \in \phi(x)$. ■

Corolario 2.4 *Todo subconjunto cerrado convexo C de un espacio de Banach es un retracto absoluto para espacios métricos, es decir existe una retracción continua $\varphi : X \to C$ desde cualquier espacio métrico X que contenga a C como subconjunto cerrado.*

Dem: Sea C un subconjunto cerrado convexo del espacio de Banach E y X un espacio métrico que contiene a C como subconjunto cerrado. Consideremos la multifunción $\phi : X \to \mathcal{P}(E)$ definida por

$$\phi(x) = x \ \text{ si } \ x \in C, \quad \phi(x) = C \ \text{ si } \ x \notin C$$

Utilizando que C es un subconjunto cerrado de E vamos a comprobar que ϕ es semicontinua inferiormente: Sea $G \subset E$ un abierto tal que $\phi(a) \cap G \neq \emptyset$. Tenemos que encontrar un entorno abierto W de a tal que para todo $x \in W$ sea $\phi(x) \cap G \neq \emptyset$. Distinguimos dos casos:
i) Si $a \in C$ entonces $a \in G$. Como $G \cap C \neq \emptyset$ es abierto relativo en C, debe existir un abierto $W \subset X$ tal que $W \cap C = G \cap C$ y se comprueba fácilmente que para todo $x \in W$ se cumple que $\phi(x) \cap G \neq \emptyset$ (considere $x \in C$ y $x \notin C$).
ii) Si $a \notin C$ entonces $C \cap G = \phi(a) \cap V \neq \emptyset$ luego $W = X \setminus C$ es un entorno abierto de a que cumple la condición requerida: $x \in W \Rightarrow \phi(x) \cap G = C \cap G \neq \emptyset$.
Como la multifunción ϕ toma valores cerrados y convexos, según el teorema de Michael, hay una función continua $\varphi : X \to E$ que verifica $\varphi(x) \in \phi(x)$ para todo $x \in X$. En particular $\varphi(x) = x$ para todo $x \in C$. ■

Otro resultado que se suele demostrar usando particiones de la unidad es el siguiente teorema de extensión de funciones continuas con valores vectoriales

Teorema 2.5 [Borsuk-Dugundji] *Sea Y un subconjunto cerrado no vacío de un espacio métrico X y E un espacio normado. Entonces existe un operador lineal de extensión $T : C(Y,E) \to C(X,E)$, tal que para cada $g \in C(Y,E)$ los valores de $T(g)$ pertenecen a la envoltura convexa $co(g(Y))$*

Dem: ([43] 21.1.14 p. 365).
Para cada $a \in A = X \setminus Y$ sea $V_a = \{x \in X : d(x,a) < d(a,Y)/3\}$. La familia $\{V_a : a \in A\}$ es un cubrimiento abierto de A que admite un refinamiento abierto localmente finito $\{W_t : t \in T\}$ y una partición de la unidad $\{f_t : t \in T\}$ subordinada al mismo.

Para cada $t \in T$ elegimos $w_t \in W_t$ y un punto $y_t \in Y$ tal que $d(w_t, y_t) < 2d(w_t, Y)$. Entonces, para cada $g \in C(Y,E)$ definimos $T(g) = f$ donde

$$f(x) = g(x) \text{ si } x \in Y; \quad f(x) = \sum_{t \in T} f_t(x) g(y_t) \text{ si } x \in X \setminus Y.$$

Es claro que f es continua en los puntos del abierto $A = X \setminus Y$, y en los puntos interiores a Y. Por lo tanto debemos demostrar que también es continua en cada $a \in \partial Y \subset Y$.

Sea $G \subset E$ un entorno convexo de $f(a)$. Como $f|_Y = g|_Y$ es continua existe $\delta > 0$ tal que

$$y \in Y, \ d(y,a) < \delta \Rightarrow f(y) = g(y) \in G$$

Seguidamente, vamos a demostrar que

$$z \in X \setminus Y, \ d(z,a) < \delta/6 \Rightarrow f(z) \in G$$

Efectivamente $T_0 = \{t \in T : z \in W_t\}$ es finito y $f_t(z) = 0$ si $t \in T \setminus T_0$ luego

$$f(z) = \sum_{t \in T_0} f_t(z) g(y_t)$$

Si $t \in T_0$ hay un $x \in X \setminus Y$ tal que $W_t \subset V_x$ luego $z \in V_x$ y así, teniendo en cuenta que $a \in \partial Y \subset Y$ resulta

$$d(x,Y) \leq d(x,a) \leq d(x,z) + d(z,a) \leq d(x,Y)/3 + \delta/6$$

(se ha utilizado que $z \in V_x$ y la elección de z). De esta desigualdad se sigue que $d(x,Y) < \delta/4$, luego $d(x,a) < \delta/4$. Usando estas dos desigualdades, y teniendo en cuenta $w_t \in W_t \subset V_x$, se obtiene

$$d(w_t,a) \leq d(w_t,x) + d(x,a) < d(x,Y)/3 + \delta/4 < \delta/3$$

Con esta desigualdad y con la condición usada para elegir y_t, w_t resulta

$$d(y_t,a) \leq d(y_t,w_t) + d(w_t,a) \leq 2d(w_t,Y) + \delta/3 \leq 2d(w_t,a) + \delta/3 < \delta$$

Entonces, por la condición usada para elegir $\delta > 0$, podemos afirmar que $g(y_t) \in G$. Como esto es cierto para cada $t \in T_0$, y $f(z)$ es una combinación

convexa de elementos del convexo G se obtiene que $f(z) \in G$.
Es inmediato que $T(g)$ depende linealmente de g pues la partición de la unidad no depende de la función g. ■

En lo que sigue, dada $f : X \times Y \to E$, si $(x, y) \in X \times Y$, denotaremos por $f_x : Y \to E$ la función parcial $f_x(y) = f(x, y)$ y por $f^y : X \to E$ la otra función parcial, $f^y(x) = f(x, y)$.

Utilizando particiones de la unidad Rudin [41] demostró el siguiente teorema que es una mejora sustancial de un antiguo resultado de Lebesgue [33].

Teorema 2.6 (Rudin) *Sea (X, d) un espacio métrico, Y un espacio topológico, E un espacio vectorial topológico localmente convexo y $f : X \times Y \to E$ una aplicación que satisface*

a) $f^y : X \to E$ es continua para cada $y \in Y$.

b) $f_x : Y \to E$ es continua para cada $x \in D$ donde $D \subset X$ es denso de X.

Entonces existe una sucesión de funciones continuas $f_n : X \times Y \to E$ que converge puntualmente hacia f:

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x, y) = f(x, y) \text{ para cada } (x, y) \in X \times Y$$

DEM: [Véase [41]] Para cada $n \in \mathbb{N}$ sea $\{h_\alpha^n : \alpha \in A(n)\}$ una partición de la unidad localmente finita subordinada a un cubrimiento abierto de X formado por abiertos de diámetro inferior a $1/n$.
Escogemos $x_\alpha^n \in D$ tal que $h_\alpha^n(x_\alpha^n) > 0$ y definimos $f_n : X \times Y \to E$ así:

$$f_n(x, y) = \sum_{\alpha\in A(n)} h_\alpha^n(x) f(x_\alpha^n, y) \tag{2.1}$$

La continuidad de f_n se obtiene usando que la partición de la unidad es localmente finita, de donde se sigue cada punto $(x, y) \in X \times Y$ posee un entorno $U_x \times V_y \subset X \times Y$ tal que la restricción $f_n|_{U_x\times V_y}$ viene dada por una suma finita de funciones continuas.

Fijamos $(x, y) \in X \times Y$, sea W un entorno convexo de O en E. Por (a), existe un número natural n_0 tal que $f(\xi, y) - f(x, y) \in W$ para todo $\xi \in X$ con $d(x, \xi) < 1/n_0$. Si $n > n_0$ y α es un índice para el cual $h_\alpha^n(x) > 0$, por la hipótesis sobre $\{h_\alpha^n\}$, se tiene que $d(x, x_\alpha^n) < 1/n_0$, luego $f(x_\alpha^n, y) \in f(x, y) + W$. Por (2.1) y la convexidad de W, para todo $n > n_0$ se cumple $f_n(x, y) \in f(x, y) + W$, luego $f_n(x, y)$ converge a $f(x, y)$. ■

Capítulo 3

Metrización de espacios compactos

Es natural que los teoremas de metrización referentes a espacios compactos sean más sencillos que los referentes a espacios topológicos generales, y por esta razón comenzaremos con ellos.

Lema 3.1 *Si (K, τ) es compacto Hausdorff y $d : (K, \tau) \times (K, \tau) \to \mathbb{R}$ es una distancia τ-continua entonces d metriza a la topología τ.*

DEM: La τ-continuidad de la distancia d implica que cada bola abierta $B(a, r) = \{x \in K : d(x, a) < r\}$ es τ-abierta, de donde se sigue que la identidad $i : (K, \tau) \to (K, d)$ es continua, y por lo tanto transforma compactos en compactos. Como los subconjuntos τ-cerrados de K son τ-compactos se sigue que i transforma τ-cerrados en d-cerrados y por lo tanto es un homeomorfismo. ■

Lema 3.2 *Sea (K, τ) un espacio compacto donde hay una sucesión de pares de cerrados disjuntos $\{(A_n, B_n) : n \in \mathbb{N}\}$, con la siguiente propiedad: Para cada par de puntos distintos $x, y \in K$, $x \neq y$, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $x \in A_n$ e $y \in B_n$. Entonces en (K, τ) es metrizable.*

DEM: Como K es normal y los cerrados A_n y B_n son disjuntos, según el lema de Urysohn hay una función continua $f_n : K \to [0, 1]$ tal que $f_n(x) = 0$ si $x \in A_n$ y $f_n(x) = 1$ si $x \in B_n$. Es fácil ver que

$$d(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} |f_n(x) - f_n(y)|$$

define en $(K, \tau) \times (K, \tau)$ semidistancia, que es continua en virtud de la convergencia uniforme de la serie. Para poder aplicar el lema 3.1 sólo queda verificar que d es una distancia: Si $x \neq y$ son puntos distintos de K, por hipótesis existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $x \in A_n$, $y \in B_n$, luego $|f_n(x) - f_n(y)| = |0 - 1| = 1$ de donde se sigue que $d(x, y) > 0$. ■

Si (K, τ) es compacto, sea $C(K)$ es el espacio de Banach formado por las funciones continuas $f : K \to \mathbb{R}$ dotado de la norma de la convergencia uniforme $\| f \|_\infty = \max\{|f(x)| : x \in K\}$. El primer teorema de metrización que vamos a establecer es muy popular y se utiliza con bastante frecuencia en Análisis Funcional.

Teorema 3.3 *Para un compacto Hausdorff (K, τ) son equivalentes*

a) (K, τ) es metrizable.

b) La topología de (K, τ) tiene una base numerable.

c) El espacio normado $(C(K), \| \ \|_\infty)$ es separable.

DEM: a) $\Rightarrow$ b): Si (K, τ) es metrizable mediante la distancia d, para cada $x \in K$ y cada $n \in \mathbb{N}$, la bola abierta $B(x, 1/n)$ es τ-abierta, y obtenemos así un cubrimiento abierto $\{B(x, 1/n) : x \in K\}$ del compacto (K, τ), del que se puede extraer un subrecubrimiento finito $\{B(x, 1/n) : x \in K_n\}$ donde $K_n \subset K$ es finito. Se comprueba fácilmente que el conjunto numerable $D = \bigcup\{K_n : n \in \mathbb{N}\}$ es denso en el espacio métrico (K, d). (Basta ver que, para cada $x \in K$, cada bola $B(x, \epsilon)$ contiene algún $y \in D$: Si $1/n < \epsilon$, entonces $x \in B(y, 1/n)$ para algún $y \in K_n \subset D$, luego $y \in B(x, 1/n) \subset B(x, \epsilon)$).

Para terminar basta tener en cuenta que τ es la topología de un espacio métrico separable (K, d) y por ello tiene una base numerable.

b) $\Rightarrow$ a) Si la topología del compacto (K, τ) tiene una base numerable $\mathcal{B}$, consideremos la familia numerable de parejas de cerrados disjuntos

$$\mathcal{H} = \{(\overline{U}, \overline{V}) : U \in \mathcal{B}, V \in \mathcal{B}, \overline{U} \cap \overline{V} = \emptyset\}$$

Para cada par de puntos distintos $x, y \in K$, $x \neq y$, hay sendos entornos abiertos disjuntos W_x, W_y, de x e y respectivamente. Como los espacios compactos son regulares podemos suponer también que $\overline{W_x} \cap \overline{W_y} = \emptyset$. Por otra parte, como $\mathcal{B}$ es base de la topología existen $U, V \in \mathcal{B}$ tales que $x \in U \subset W_x$, $y \in V \subset W_y$. Como $\overline{U} \subset \overline{W_x}$, y $\overline{V} \subset \overline{W_y}$, podemos asegurar que los cerrados $\overline{U}, \overline{V}$ son disjuntos, y así hemos obtenido un par $(\overline{U}, \overline{V}) \in \mathcal{H}$, que verifica $x \in \overline{U}$, $y \in \overline{V}$. Como la familia $\mathcal{H}$ es numerable, aplicando el lema 3.2 se obtiene que en (K, τ) es metrizable.

a $\Rightarrow$ c) Comencemos observando que el resultado es cierto cuando K es un compacto finito $K = \{x_1, x_2, \cdots x_m\}$ (con la topología discreta): Dada $f \in C(K)$, y $\epsilon > 0$, para $1 \leq j \leq m$ existen $r_j \in \mathbb{Q}$ tales que $|f(x_j) - r_j| < \epsilon$ para todo $j \in \{1, 2 \cdots m\}$. Definiendo $g(x_j) = r_j$ se obtiene una función $g \in C(K)$ con $g(K) \subset \mathbb{Q}$ tal que $\|f - g\|_\infty < \epsilon$. Queda demostrado así que el conjunto numerable $D = \{g \in C(K) : g(K) \subset \mathbb{Q}\}$ es denso en $(C(K), \| \ \|_\infty))$.

Consideremos ahora el caso de un compacto metrizable arbitrario: Si d es una distancia que metriza al compacto (K, τ), para cada $m, n \in \mathbb{N}$ definimos

$$C_{mn} = \{f \in C(K) : d(x, y) < 1/m \Rightarrow |f(x) - f(y)| < 1/n\}$$

$\{B(x, 1/m) : x \in K\}$, es un cubrimiento τ-abierto del compacto (K, τ), luego hay un conjunto finito $K_m \subset K$ tal que $K = \cup_{a \in K_m} B(a, 1/m)$. La topología que K induce en el compacto finito K_m es la discreta luego $C(K_m)$ es separable para la norma $\|g\| = \max\{|g(a)| : a \in K_m\}$. También será separable para esta norma, el subconjunto de restricciones $C_{mn}|_{K_m} = \{f|_{K_m} : f \in C_{mn}\}$. Esto significa que existe un conjunto numerable $D_{mn} \subset C_{mn}$ tal que

(1) Para cada $f \in C_{mn}$ y cada $\epsilon > 0$ hay una función $g \in D_{mn}$ tal que en cada $a \in K_m$ se cumple $|f(a) - g(a)| < \epsilon/3$

Terminaremos viendo que el conjunto numerable $D = \cup\{D_{mn} : (m, n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}\}$ es denso en $(C(K), \| \|_\infty)$.
Efectivamente, dada $f \in C(K)$ y $\epsilon > 0$ elegimos $n \in \mathbb{N}$ tal que $3/n < \epsilon$, y usando la continuidad uniforme de f obtenemos $m \in \mathbb{N}$ verificando

$$d(x, y) < 1/m \Rightarrow |f(x) - f(y)| < 1/n$$

Esto nos asegura que $f \in C_{mn}$, y según (1) existe $g \in D_{mn}$ tal que para todo $a \in K_m$ se cumple $|f(a) - g(a)| < \epsilon/3$. La demostración finaliza viendo que esta función $g \in D$ verifica $\|f - g\|_\infty < \epsilon$:

Para cada $x \in K$ hay un $a \in K_m$ tal que $d(x, a) < 1/m$, luego

$$|f(x) - g(x)| \leq |f(x) - f(a)| + |f(a) - g(a)| + |g(a) - g(x)| \leq 1/n + \epsilon/3 + 1/n \leq \epsilon$$

(el segundo sumando es menor que $\epsilon/3$, por la elección de g, y los otros dos sumandos son menores que $1/n$ porque $f, g \in C_{mn}$).
c) $\Rightarrow$ a) Si $\{f_n : n \in \mathbb{N}\} \subset C(K)$ es $\| \|_\infty$-denso, le asociamos la familia numerable de semidistancia continuas $d_n(x, y) = \min\{1, |f_n(x) - f_n(y)|\}$ y con ellas definimos la semidistancia

$$d(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} d_n(x, y)$$

En virtud de la convergencia uniforme de la serie esta semidistancia es continua sobre $(K, \tau) \times (K, \tau)$, y para poder aplicar el lema 3.1 sólo queda comprobar que $d(x, y) = 0 \ \Rightarrow x = y$.

Efectivamente, si $d(x, y) = 0$ entonces $f_n(x) = f_n(y) = 0$, para todo $n \in \mathbb{N}$, y teniendo en cuenta que las evaluaciones $\delta_x, \delta_y : (C(K), \| \|_\infty) \to \mathbb{R}$ son funciones continuas que coinciden en el conjunto denso $\{f_n : n \in \mathbb{N}\}$, se obtiene que son iguales, y por lo tanto $x = y$. ■

Se puede dar una demostración alternativa de la impicación a) $\Rightarrow$ c) en el teorema 3.3, utilizando particiones de la unidad. Merece la pena ver primero una demostración directa de la existencia de particiones de la unidad en un compacto.

Lema 3.4 *Dado un cubrimiento abierto $\{V_j : 1 \leq j \leq m\}$ de un compacto Hausdorff (K, τ), existen funciones continuas $\varphi_j : K \to [0, 1]$, $1 \leq j \leq m$,*

tales que $\varphi_j(x) = 0$ si $x \notin V_j$ y $\sum_{j=1}^m \varphi_j(x) = 1$ para todo $x \in K$.
(Se dice que $\{\varphi_j : 1 \leq j \leq m\}$ es una partición de la unidad subordinada al cubrimiento $\{V_j : 1 \leq j \leq m\}$).

Dem: Cada punto $x \in K$ pertenece a algún V_j, y utilizando que los espacios compactos son regulares podemos obtener un entorno abierto W_x de x tal que $\overline{W_x} \subset V_j$. Con una familia finita de estos entornos $\{W_{x_i} : 1 \leq i \leq p\}$ se puede recubrir K, y para $1 \leq j \leq m$, definimos los cerrados

$$F_j = \cup\{\overline{W_{x_i}} : \overline{W_{x_i}} \subset V_j\} \subset V_j$$

que recubren K. Utilizando que los espacios compactos son normales, y el lema de Uryshon, obtenemos funciones continuas $g_j : K \to [0,1]$, $1 \leq j \leq m$, tales que $g_j(x) = 1$ si $x \in F_j$, y $g_j(x) = 0$ si $x \notin V_j$. Las funciones

$$\varphi_1 = g_1, \quad \varphi_2 = (1-g_1)g_2, \quad \varphi_m = (1-g_1)(1-g_2)\cdots(1-g_{m-1})g_m$$

son continuas, toman valores en $[0,1]$ y verifican $\varphi_j(x) = 0$ si $x \notin V_j$.
Se comprueba fácilmente (por inducción) que

$$\varphi_1 + \varphi_2 + \cdots + \varphi_m = 1 - (1-g_1)(1-g_2)\cdots(1-g_m)$$

Cada $x \in K$ pertenece a algún F_j, luego $g_j(x) = 1$ y se sigue que

$$\varphi_1(x) + \varphi_2(x) + \cdots + \varphi_m(x) = 1$$

■

Demostración alternativa de a) ⇒ c) en el teorema 3.3
Supongamos que (K, τ) es metrizable con la distancia d. Para cada n existe $A_n \subset K$ finito tal que $K = \bigcup_{a \in A_n} B(a, 1/n)$, donde $B(a, 1/n)$ son bolas para la distancia d. Sea $\{\varphi_a^n : a \in A_n\}$ una partición de la unidad asociada al recubrimiento $\{B(a,1/n) : a \in A_n\}$.

La familia $\mathcal{D} \subset C(K)$, formada por las funciones que son de la forma $\sum_{a \in A_n} \alpha_a^n \varphi_a^n$ con $\alpha_a^n \in \mathbb{Q}$, y $n \in \mathbb{N}$, es numerable. A continuación demostramos que esta familia es densa en $(C(K), \| \|_\infty)$.

Si $f \in C(K)$, en virtud su continuidad uniforme sobre el espacio métrico compacto (K,d), dado $\epsilon > 0$ existe $n \in \mathbb{N}$ tal que

$$d(x,y) < 1/n \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \epsilon/2$$

La función continua $f_\epsilon(x) = \sum_{a \in A_n} f(a)\varphi_a^n(x)$ cumple $\|f - f_\epsilon\|_\infty < \epsilon/2$.
Para ver esto, a cada $x \in K$ le asociamos $B_n(x) = \{a \in A_n : x \in B(a, 1/n)\}$. Cuando $a \in B_n(x)$ se cumple $|f(x) - f(a)| < \epsilon/2$, y cuando $a \notin B_n(x)$ se cumple $x \notin B(a,1/n)$, luego $\varphi_a^n(x) = 0$, y se sigue que

$$|f(x) - f_\epsilon(x)| = |\sum_{a \in A_n} [f(x) - f(a)]\varphi_a^n(x)| = |\sum_{a \in B_n(x)} [f(x) - f(a)]\varphi_a^n(x)| \leq$$

$$\leq \sum_{a\in B_n(x)} (\epsilon/2)\varphi_a^n(x) \leq (\epsilon/2) \sum_{a\in A_n} \varphi_a^n(x) = \epsilon/2. \qquad (*)$$

Para cada $a \in A_n$ existen $\alpha_a^n \in \mathbb{Q}$ tales que $|f(a) - \alpha_a^n| < \epsilon/2$ y la función $g = \sum_{a\in A_n} \alpha_a^n \varphi_a^n \in \mathcal{D}$ cumple

$$|f_\epsilon(x) - g(x)| \leq \sum_{a\in A_n} |f(a) - \alpha_a^n|\varphi_a^n(x) \leq (\epsilon/2) \sum_{a\in A_n} \varphi_a^n(x) = \epsilon/2. \qquad (**)$$

De $(*)$ y $(**)$ se sigue que $\|f - g\|_\infty < \epsilon$. ■

El siguiente teorema de metrización de espacios compactos viene dado en términos de la diagonal del espacio: $\triangle(X) = \{(x,x) : x \in X\} \subset X \times X$. Conviene recordar que un subconjunto de un espacio topológico (X,τ) se dice que es un $\mathcal{G}_\delta$ si se puede expresar como intersección de una familia numerable de abiertos. Todo cerrado F en un espacio metrizable X es un $\mathcal{G}_\delta$ pues se expresa como intersección de la sucesión de abiertos $G_n = \{x \in X : d(x,F) < 1/n\}$ donde d es una distancia que metriza la topología de X.

Teorema 3.5 *(Sneider, [1945]) Un espacio compacto (K,τ) es metrizable si y solo si la diagonal $\triangle(K)$ es un G_δ en $(K,\tau)\times(K,\tau)$.*

Dem: (Véase [21] ó [35]). Si K es metrizable también lo es $(K,\tau)\times(K,\tau)$, luego $\triangle(K)$, al ser cerrado en este espacio metrizable, es un conjunto G_δ.

Recíprocamente, supongamos que $\triangle(K) = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} U_n$, donde $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de abiertos en $(K,\tau)\times(K,\tau)$. Para cada $n \in \mathbb{N}$ y cada $x \in K$ se cumple que $(x,x) \in U_n$, luego existe un entorno abierto $W_n(x)$ de x, tal que $W_n(x) \times W_n(x) \subset U_n$. Entonces $\mathcal{W}_n = \{W_n(x) : x \in K\}$ es un cubrimiento abierto de K con la siguiente propiedad

(1) $\bigcap_{n=1}^\infty st(x,\mathcal{W}_n) = \{x\}$, para cada $x \in K$.

En efecto, si suponemos que $y \in \bigcap_{n=1}^\infty st(x,\mathcal{W}_n)$ entonces, para cada $n \in \mathbb{N}$ hay un punto $a_n \in K$ tal que $x,y \in W_n(a_n)$, luego

$$(x,y) \in W_n(a_n) \times W_n(a_n) \subset U_n$$

y de aquí se sigue que $(x,y) \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} U_n = \triangle(K)$, lo que implica que $y = x$.

Utilizando que (K,τ) es regular (por ser compacto) para cada $n \in \mathbb{N}$ podemos obtener un recubrimiento finito $\mathcal{V}_n$ de K que tal que $\{\overline{V} : V \in \mathcal{V}_n\}$ es un refinamiento de $\mathcal{W}_n$, y en virtud de (1) se cumple

(2) $\bigcap_{n=1}^\infty \overline{st(x,\mathcal{V}_n)} = \{x\}$, para cada $x \in K$.

Efectívamente, como $st(x,\mathcal{V}_n) = \cup\{V : x \in V \in \mathcal{V}_n\}$ es una unión finita se cumple $\overline{st(x,\mathcal{V}_n)} = \cup\{\overline{V} : x \in V \in \mathcal{V}_n\}$. Cada $\overline{V}$, de los que intervienen en esta unión, está contenido en algún $W \in \mathcal{W}_n$, luego $\overline{V} \subset st(x,\mathcal{W}_n)$ y así

$$\overline{st(x,\mathcal{V}_n)} \subset st(x,\mathcal{W}_n) = \{x\}$$

Obsérvese que se los cubrimientos finitos $\mathcal{V}_n$ se pueden elegir en forma recurrente de modo que cada $\mathcal{V}_{n+1}$ sea un refinamiento de $\mathcal{V}_n$. De esta forma $\overline{st(x, \mathcal{V}_n)}$ es una sucesión decreciente de cerrados cuya intersección es $\{x\}$. Utilizando que (K, τ) es compacto, con un razonamiento estandar de paso al complementario se obtiene que si $U \subset K$ es abierto y $x \in U$, entonces algún $\overline{st(x, \mathcal{V}_n)}$ está contenido en U, y por lo tanto existe $V \in \mathcal{V}_n$ verificando $x \in V \subset st(x, \mathcal{V}_n) \subset U$. Esto demuestra que $\mathcal{V} = \cup\{\mathcal{V}_n : n \in \mathbb{N}\}$ es una base numerable de la topología de K y por lo tanto, según el teorema 3.3, (K, τ) es metrizable. ■

Definición 3.6 *Se llama simétrica a una función $\eta : X \times X \to [0, +\infty)$ que para cada $x, y \in X$ verifica: a): $\eta(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$. b): $\eta(x, y) = \eta(y, x)$.*

Un espacio topológico (X, τ) se dice que es semimetrizable si existe una simétrica η en X tal que las η-bolas, $B_\eta(x, \epsilon) := \{y \in X : \eta(x, y) < \epsilon\}$ forman una base (no necesariamente abierta) de entornos de cada punto $x \in X$.

Obsérvese que simétrica η no satisface la desigualdad triangular y por lo tanto no se puede asegurar que las η-bolas $B_\eta(x, \epsilon)$ sean abiertas. En [1] se demuestra el siguiente resultado:

Teorema 3.7 *Todo espacio compacto Hausdorff semimetrizable es metrizable.*

Dem: Como K es completamente regular su topología tiene una formada por conjuntos de la forma $U = \{x \in K : \varphi(x) > 0\}$, donde $\varphi : X \to [0, 1]$ es continua. Estos conjuntos, llamados coceros, son conjuntos $\mathcal{F}_\sigma$, es decir, son unión numerable de cerrados: $U = \cup_n \{x \in X : \varphi(x) \geq 1/n\}\}$.

Sea (K, τ) un compacto semimetrizable con la simétrica $\eta : K \times K \to [0, +\infty)$. Como $B_\eta(x, r) = \{y \in K : \eta(x, y) < r\}$, es un entorno de x, hay un abierto U tal que $x \in U \subset B_\eta(x, r)$. Por lo indicado al principio podemos suponer que U es $\mathcal{F}_\sigma$.

Para cada $n \in \mathbb{N}$ se considera el cubrimiento $\mathcal{U}_n$ de K formado por los coceros que están contenidos en algún $B_\eta(x, 1/n)$. Como K es compacto de $\mathcal{U}_n$ se puede extrer un subcubrimiento $\{U_j^n : j \in M_n\}$ donde M_n es finito. Para cada $j \in M_n$ existe $x_j \in U_j^n \subset B_\eta(x_j, 1/n)$. No hay inconveniente en suponer, en lo que sigue, que los conjuntos M_n son disjuntos. Sea $D_j^n = U_j^n \setminus \bigcup_{i<j} U_j^n$. Entonces $\mathcal{D}_n = \{D_j^n : j \in M_n\}$ es una familia disjunta de conjuntos $\mathcal{F}_\sigma$ que cubre K.

Si $x \neq y$, existen $n \in \mathbb{N}$ y $j_1 \neq j_2$, tales que $x \in D_{j_1}^n$, $y \in D_{j_2}^n$. Supongamos lo contrario: Para todo $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{D}_n$ es un cubrimiento de K, y existe $D_{j(n)}^n \in \mathcal{D}_n$ tal que $x \in D_{j(n)}^n$. El suponer que el resultado es falso implica que $y \in D_{j(n)}^n$. Además, como $D_{j(n)}^n \subset U_{j(n)}^n \subset B_\eta(x_{j(n)}, 1/n)$, se cumplirá $x, y \in B_\eta(x_{j(n)}, 1/n)$ para todo $n \in \mathbb{N}$, luego $\eta(x, x_{j(n)}) \to 0$, y $\eta(y, x_{j(n)}) \to 0$, lo que equivale a decir que $x_{j(n)} \to x$, $x_{j(n)} \to y$. Como (K, τ) es Hausdorff, los límites de las sucesiones son únicos y llegamos a una contradicción.

Cada D_j^n es $\mathcal{F}_\sigma$, luego $D_j^n = \cup_{k=1}^\infty F_j^n(k)$, donde cada $F_j^n(k)$ es cerrado y $F_j^n(k) \subset F_j^n(k+1)$. Obsérvese que $F_j^n(k) \cap F_{j'}^{n'}(k') = \emptyset$ si $j \neq j'$.

Sean $x, y \in K$, $x \neq y$. Por un razonamiento anterior existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $x \in D^n_{j_1}$, $y \in D^n_{j_2}$ con $j_1 \neq j_2$. Con k suficientemente grande se consigue que $x \in F^n_{j_1}(k)$, $y \in F^n_{j_2}(k)$. Esto demuestra que la familia numerable de pares de cerrados disjuntos $\{(F^n_{j_1}(k), F^n_{j_2}(k)) : j_1, j_2, n, k \in \mathbb{N}, j_1 \neq j_2\}$ satisface las hipótesis del lema 3.2 y por lo tanto (K, τ) es metrizable. ■

Capítulo 4

Teoremas generales de metrización

Al "problemas de metrización", que se pregunta por condiciones necesarias y suficientes para que un espacio topológico sea metrizable. Comenzamos la sección con el clásico teorema de Uryshon que da una solución satisfactoria al problema de metrización en el ámbito de los espacios separables. Luego se expone la solución al problema general de la metrización que obtuvieron, de forma independiente, Bing[1951], Nagata[1950] y Smirnov[1951]. Para ambos teoremas seguimos la exposición del libro de Kelley [30]

El siguiente lema, que indica un camino estandar para conseguir la distancia en los problemas de metrización.

Lema 4.1 *Sea X un espacio Hausdorff. Si existe una sucesión de seudométricas continuas $\rho_n : X \times X \longrightarrow [0,1]$ que distingue puntos de cerrados, entonces*

$$\rho(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \rho_n(x,y)$$

es una distancia en X con la que se metriza la topología de X.

DEM: Es inmediato que ρ es una seudométrica continua (la continuidad es consecuencia de la convergencia uniforme de la serie). Veamos que ρ es una métrica: Si $x \neq y$, como las seudométricas distinguen puntos, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $\rho_n(x,y) > 0$, luego $\rho(x,y) > 0$.

Veamos que la topología de X es la asociada a la distancia ρ: Como ρ es continua, los conjuntos ρ-abiertos son abiertos para la topología de X. Recíprocamente, si $G \subset X$ es abierto y $a \in G$, como las seudométricas distinguen puntos de cerrados, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $\rho_n(a, G^c) > 0$. Tomando $\delta = \rho_n(a, G^c)$ es fácil comprobar que $B_\rho(a, \frac{\delta}{2^n}) \subset G$. Efectivamente, si $x \in B_\rho(a, \frac{\delta}{2^n})$ se tiene

$$\frac{1}{2^n} \rho_n(x,a) \leq \rho(x,a) < \frac{\delta}{2^n}$$

luego $\rho_n(x,a) < \delta$, con lo que $x \notin G^c$, es decir, $x \in G$. ■

NOTA: Si X no se supone que X es Hausdorff el lema anterior se sigue verificando añadiendo la hipótesis de que la familia de seudométricas distinga puntos.

Teorema 4.2 *Para un espacio Hausdorff X, son equivalentes:*

a) X es regular y su topología tiene una base numerable.

b) X es metrizable y separable.

c) X es homeomorfo a un subespacio del cubo $[0,1]^{\mathbb{N}}$.

DEM: c) $\Rightarrow$ b): El cubo $[0,1]^{\mathbb{N}}$ con la topología producto, es metrizable y separable. Cualquier subespacio Y del cubo, con la topología inducida, tiene estas propiedades, y lo mismo le ocurre a cualquier espacio homeomorfo a Y.
b) $\Rightarrow$ a): Es un resultado de carácter elemental bien conocido.
a) $\Rightarrow$ c): Si la topología de X tiene una base numerable es fácil ver que X es Lindelöf, y con el teorema 1.8 se obtiene que X es paracompacto y por lo tanto normal (para una demostración más directa, que no utiliza paracompacudad, se puede utilizar un clásico lema de Tijonov ([30], pág 134) según el cual todo espacio Lindelöf y regular es normal).

Sea $\mathcal{B}$ una base numerable de la topología de X y sea $\mathcal{A}$ el conjunto de los pares $P = (U, V)$ tales que U y V están en $\mathcal{B}$ y $\overline{U} \subset V$. Evidentemente $\mathcal{A}$ es numerable y podemos escribir

$$\mathcal{A} = \{(U_i, V_i) : i \in \mathbb{N}\}$$

Para cada par (U_i, V_i) de $\mathcal{A}$ el lema de Urysohn asegura que existe una función continua $f_i : X \to [0,1]$ tal que $f_i(U_i) = \{1\}$ y $f_i(X \setminus V_i) = \{0\}$.

Para cada cerrado $F \subset X$ y cada punto $x \notin F$ hay un par $(U_i, V_i) \in \mathcal{A}$ tal que $x \in U \subset \overline{U} \subset V$ y $V \cap F = \emptyset$. Esto nos asegura que $f_i(x) = 1$ y $f_i(y) = 0$ para todo $y \in F$. Con este razonamiento queda demostrado que $d_i(x, y) = |f_i(x) - f_i(y)|$, $i \in \mathbb{N}$, es una familia de seudométricas continuas, sobre X, que distingue puntos de cerrados. Según el lema 4.1, la distancia

$$\rho(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} |f_n(x) - f_n(y)|$$

metriza la topología de X. Por otra parte, es bien conocido que la topología producto del cubo $[0,1]^{\mathbb{N}}$, es la asociada a la distancia

$$d(\alpha, \beta) = \sum_n \frac{1}{2^n} |\alpha_n - \beta_n|$$

luego $\varphi : X \to [0,1]^{\mathbb{N}}$, $\varphi(x) = (f_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$, establece una isometría entre (X, ρ) y su imagen en $([0,1]^{\mathbb{N}}, d)$. Así queda demostrado que a) $\Rightarrow$ c). ■

En la demostración del lema de Uryshon se ha ha utilizado que todo espacio regular cuya topología tiene base numerable es normal. La demostración del teorema de Bing-Nagata-Smirnov 4.4 requiere un resultado análogo, pero más potente 4.3, que proporciona la misma conclusión reemplazando la condición de base numerable por la de base σ-localmente finita.

Ya hemos visto que que todo espacio metrizable posee una base σ-discreta y por lo tanto σ-localmente finita. La siguiente proposición afirma que los espacios con base σ-localmente finita son paracompactos.

Proposición 4.3 *Si la topología de un espacio Hausdorff X tiene una base σ-localmente finita entonces X es paracompacto, y por lo tanto normal.*

DEM: Sea $\mathcal{B} = \cup\{\mathcal{B}_n : n \in \mathbb{N}\}$ una base de la topología de X, donde cada familia $\mathcal{B}_n$ es localmente finita. Dado un cubrimiento abierto $\mathcal{U}$ de X, sea $\mathcal{V} = \cup\{\mathcal{V}_n : n \in \mathbb{N}\}$ donde $\mathcal{V}_n$ es la familia formada por los conjuntos de $\mathcal{B}_n$ que están contenidos en algún conjunto de $\mathcal{U}$. Como $\mathcal{B}$ es base de la topología, $\mathcal{V}$ es un cubrimiento abierto de X, luego $\mathcal{V}$ es un refinamiento de $\mathcal{U}$. Además, cada $\mathcal{V}_n$ es una familia localmente finita por serlo $\mathcal{B}_n$. Hemos demostrado así que todo cubrimiento abierto $\mathcal{U}$ de X tiene un refinamiento σ-localmente finito $\mathcal{V}$. Según los teoremas 1.7, 1.3, X es paracompacto, y por lo tanto normal. ■

NOTA: En [30] pág 119, lema 19, y en [19] 4.4.5, se puede encontrar una demostración directa, sin utilizar paracompacidad, de que todo espacio regular con base σ-localmente finita es normal.

Teorema 4.4 [Bing-Nagata-Smirnov] *Para un espacio topológico Hausdorf X las siguientes condiciones son equivalentes*

a) El espacio es metrizable.

b) El espacio es regular y la topología tiene una base σ-localmente finita.

c) El espacio es regular y la topología tiene una base σ-discreta.

DEM: c) $\Rightarrow$ b): Obvio, pues toda familia σ-discreta es σ-localmente finita.
b) $\Rightarrow$ a): Sea $\mathcal{B} = \bigcup\{\mathcal{B}_n : n \in \mathbb{N}\}$ una base de la topología de X, donde cada familia $\mathcal{B}_n$ es localmente finita. Fijado un par $t = (n, m) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, para cada $U \in \mathcal{B}_m$ sea U_n la unión de los conjuntos de la familia $\mathcal{B}_n$ cuya clausura está contenida en U. Como $\mathcal{B}_n$ es localmente finita se cumple $\overline{U}_n \subset U$ (véase el lema 1.1). Según la proposición 4.3, X es normal y el lema de Urysohn asegura que hay una función $f_U^n : X \to [0, 1]$ que vale 1 en $\overline{U}_n$ y 0 en $X \setminus U$. Entonces, para $x, y \in X$, definimos

$$d_t(x, y) = \sum\{| f_U^n(x) - f_U^n(y) | : U \in \mathcal{B}_m\}$$

La continuidad de $d_t : X \times X \to \mathbb{R}$ es consecuencia inmediata de la finitud local de $\mathcal{B}_m$ (Cada punto $(a, b) \in X \times X$ posee un entorno $V_a \times V_b = W$ tal que la suma que interviene en la definición de $d_t|_W$ solo tiene una cantidad finita de sumandos no nulos). Para obtener que X es metrizable basta comprobar que la familia de seudométricas continuas $\{d_t : t \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}\}$ cumple la hipótesis del lema 4.1, es decir, distingue puntos de cerrados:

Sea $x \in X$, y $A \subset X$ un cerrado tal que $x \in X \setminus A$. Como $\mathcal{B}$ es base de la topología, para algún $m \in \mathbb{N}$ existirá $V \in \mathcal{B}_m$ tal que $x \in V \subset X \setminus A$. Entonces, para algún $n \in \mathbb{N}$ habrá un $W \in \mathcal{B}_n$ tal que $x \in W \subset \overline{W} \subset V$, luego $W \subset \overline{V_n}$ (recuérdese que V_n es la unión de los conjuntos de $\mathcal{B}_n$ con clausura contenida en V). Entonces $f_V^n(x) = 1$, y $f_V^n(y) = 0$ para todo $y \in A$.

Hemos obtenido así un par $t = (n, m)$ que cumple $d_t(x, y) \geq 1$ para todo $y \in A$, luego $d_t(x, A) = \inf\{d_t(x, y) : y \in A\} \geq 1$.
a) $\Rightarrow$ c)): Fue demostrado en el corolario 1.10 ■

Terminaremos la sección indicando, a título informativo, otros resultados importantes referentes al problema de la metrización, que se pueden encontrar en [19], [1] y [21]. Mientras que el teorema de Bing-Nagata-Smirnov explota la idea de familia localmente finita, los resultados que siguen utilizan sucesiones de cubrimientos abiertos con propiedades especiales de refinamiento

Definición 4.5 *Un desarrollo del espacio topológico X es una sucesión $\mathcal{U}_n$ de cubrimientos abiertos de X que verifica: Para cada $x \in X$, $\{st(x, \mathcal{U}_n) : n \in \mathbb{N}\}$ es una base de entornos de x. Un desarrollo fuerte es una sucesión $\mathcal{U}_n$ de cubrimientos abiertos de X que cumple: Para cada $x \in X$ y cada entorno U de x hay un entorno V de x, y un $n \in \mathbb{N}$, tales que $st(V, \mathcal{U}_n) \subset U$.*
Se llama espacio de Moore a un espacio regular que admite un desarrollo.

Todo espacio metrizable X admite el desarrollo $\mathcal{U}_n$ formado por los abiertos $V \subset X$ que cumplen $\operatorname{diam}(V) < 1/n$, (el diámetro se calcula con una distancia que metriza la topología de X).

Teorema 4.6 [Bing, 1951] *Un espacio topológico X es metrizable si y sólo si es colectivamente normal y admite un desarrollo.*

Dem: Véase [19], 5.4.1. pág 408. ■

Una problema abierto en la teoría de metrización es el de dar respuesta a la conjetura de que todo espacio de Moore normal es metrizable.

Teorema 4.7 [Moore, 1953] *Un espacio topológico X es metrizable si y sólo si es Hausdorff y admite un desarrollo fuerte.*

Dem: Véase [19] 5.4.2. pág 409. La demostración se basa en el teorema de Bing. ■

Definición 4.8 *Una base $\mathcal{B}$ de la topología de X es puntualmente regular si para cada $x \in X$ y cada entorno U de x, es finita la familia*

$$\{V \in \mathcal{B} : x \in V,\ V \cap (X \setminus U) \neq \emptyset\}$$

Una base $\mathcal{B}$ de la topología de X es regular si para cada $x \in X$ y cada entorno U de x hay un entorno de x, $W \subset U$, tal que la siguiente familia es finita

$$\{V \in \mathcal{B} : V \cap W \neq \emptyset,\ V \cap (X \setminus U) \neq \emptyset\}$$

Teorema 4.9 [Alexandrov 1960] *Un espacio topológico X es metrizable si y sólo si es colectivamente normal y tiene una base puntualmente regular,*

Teorema 4.10 [Arkhangel'skii, 1960] *Un espacio X es metrizable si y sólo es Hausdorff y tiene una base regular.*

DEM: Véase [19] 5.4.6. pág 412. y también [1]. ■

Aplicando el teorema de Moore, se puede demostrar el siguiente resultado que ya habían demostrado Alexandrov y Uryshon en 1923 (cronológicamente, este fue el primer teorema que dio una solución al problema general de la metrización).

Teorema 4.11 [Alexandrov-Urysohn, 1923] *Un espacio topológico X es metrizable si y sólo es Hausdorff y hay sucesión de cubrimientos abiertos $\mathcal{U}_n$, que cumple: Para cada $V \in \mathcal{U}_{n+1}$ existe $U \in \mathcal{U}_n$ tal que $st(V, \mathcal{U}_{n+1}) \subset U$.*

DEM: Véase [19], 5.4.9. y 5.4.10. pág 413-414. En [1] se puede ver una demostración directa, construyendo explícitamente una métrica. ■

Capítulo 5

Topología de la convergencia puntual en $C(K)$

[Capítulo redactado siguiendo un manuscrito de B. Cascales]

Si K es un compacto Hausdorff denotaremos por $C_p(K)$ el espacio vectorial de las funciones continuas $f : K \to \mathbb{R}$ dotado de la topología de la convergencia puntual $t_p(K)$ (la inducida por la topología producto en $\mathbb{R}^K$). Esta topología casi nunca es metrizable como muestra la siguiente proposición

Proposición 5.1 *Si K es un compacto no numerable entonces la topología de la convergencia puntual en $C(K)$ no es metrizable*

DEM: Lo demostramos por reducción al absurdo suponiendo que la topología $t_p(K)$ es metrizable. En ese caso existiría una base numerable de entornos de la función 0, de la forma $V_n = \{f \in C(K) : |f(x)| < r_n \text{ para todo } x \in L_n\}$, donde cada $L_n \subset K$ es finito y $r_n > 0$. Como K no es numerable, podríamos elegir un punto $a \in K \setminus \cup_n L_n$. Entonces $A = \{f \in C(K) : |f(a)| < 1\}$ sería un entorno de la función 0 que contendría a algún $V_m \subset A$. Como $a \notin L_m$ existiría $f \in C(K)$ con $f(L_m) = \{0\}$ y $f(a) = 1$, lo que contradice la inclusión $V_m \subset A$. ■

El principal resultado de esta sección afirma que aunque $C_p(K)$ no es metrizable, sin embargo sigue valiendo la habitual caracterización de los compactos en los espacios métricos:

Proposición 5.2 *Si (T, d) es un espacio métrico y $K \subset T$ son equivalentes*

a) K es compacto.

b) Cada sucesión en K posee una subsucesión convergente hacia un punto de K.

c) Cada conjunto infinito $M \subset K$ tiene algún punto de acumulación en K

En el caso de un espacio no metrizable, dada una sucesión $s = (x_n)$ hay que distinguir cuidadosamente entre el conjunto de sus puntos de aglomeración $A(s) := \cap_{n=1}^{\infty} \overline{\{x_k : k \geq n\}}$, y el conjunto $L(s)$ formado por los límites de las subsucesiones convergentes. Siempre es cierta la inclusión $L(s) \subset A(s)$, y se cumple la igualdad cuando cada punto de T tiene una base numerable de entornos, como ocurre en los espacios metrizables.

Según la siguiente proposición la condición de que cada sucesión en K tenga un punto de aglomeración en K es equivalente a la condición c) en 5.2.

Proposición 5.3 *Si es (T, τ) un espacio topológico Hausdorff, y $K \subset T$ son equivalentes:*

a) De cada cubrimiento abierto numerable de K se puede extraer un subrecubrimiento finito.

b) Cada familia numerable de subconjuntos cerrados de K con la propiedad de la intersección finita, tiene intersección no vacía.

c) Cada sucesión decreciente de subconjuntos cerrados no vacíos de K tiene intersección no vacía.

d) Toda sucesión en K tiene algún punto de aglomeración en K.

e) Todo conjunto infinito $M \subset K$ tiene algún punto de aglomeración en K.

Dem: Esquema de la demostración:
a) $\Leftrightarrow$ b) Se razona por paso al complementario como al caracterizar los compactos con la propiedad de la intersección finita.
b) $\Leftrightarrow$ c) A cada sucesión de cerrados con la propiedad de la intersección finita $F_n \subset K$ se le asocia la sucesión decreciente de cerrados no vacíos $C_n = \cap_{k=1}^{n} F_k$.
c) $\Rightarrow$ d) Es consecuencia directa de la definición del conjunto $A(s)$.
d) $\Rightarrow$ c) Por reducción al absurdo: Si existe una sucesión decreciente de cerrados no vacíos $C_n \subset K$, con intersección vacía, se elige $x_n \in C_n$ y con d) se llega a una contradicción.
d) $\Rightarrow$ e) Si $M \subset K$ es infinito hay una sucesión sin términos repetidos $x_n \in M$, y cada punto de aglomeración de esta sucesión es punto de acumulación de M.
e) $\Rightarrow$ d) Basta considerar sucesiones en K cuyo recorrido no es finito; para estas sucesiones todo punto de acumulación de su recorrido es un punto de aglomeración. ■

Definición 5.4 *Un subconjunto K de un espacio topológico Hausdorff (T, τ) se dice que es*

NC numerablemente compacto, cuando cumple las condiciones equivalentes de la proposición 5.3

SC *secuencialmente compacto cuando de cada sucesión en K se puede extraer una subsucesión convergente hacia un punto de K.*

RNC *relativamente numerablemente compacto cuando cada sucesión en K tiene un punto de aglomeración en T.*

RSC *relativamente secuencialmente compacto cuando cada sucesión en K tiene una subsucesión que converge hacia un punto de T.*

Los siguientes resultados se dejan como ejercicio al cuidado del lector:
- La imagen continua de un conjunto numerablemente compacto (resp. secuencialmente compacto) es numerablemente compacta (resp. secuencialmente compacta)
- Cada subconjunto cerrado de un conjunto numerablemente compacto (resp. secuencialmente compacto) es numerablemente compacto (resp. secuencialmente compacto)
- Toda función continua $f : K \to \mathbb{R}$ sobre un conjunto numerablemente compacto K alcanza un máximo y un mínimo absoluto.
- Si K es un espacio numerablemente compacto y H un espacio secuencialmente compacto entonces $K \times H$ es numerablemente compacto
NOTA: No es verdad que el producto de dos espacios numerablemente compactos sea compacto.
- El producto de una familia numerable de espacios secuencialmente compactos es secuencialmente compacto.

La compactificado de Stone-Cěch de $\mathbb{N}$, $\beta\mathbb{N}$, es un espacio compacto que no es secuencialmente compacto.
Un ejemplo de conjunto numerablemente compacto no compacto lo proporciona el siguiente

Ejercicio 5.5 *Sea $A \subset [0,1]^{\mathbb{R}}$ el conjunto formado por las funciones $a : \mathbb{R} \to [0,1]$ tales que $Sop(a) := \{t \in \mathbb{R} : |a(t)| > 0\}$ es numerable.*

Demuestre que A es numerablemente compacto pero no es compacto (para la topología producto en $[0,1]^{\mathbb{R}}$).

Si (C) es una abreviatura de "compacto" y (RC) de 'relativamente compacto' es claro que se cumple

$$(C) \Rightarrow (NC); \quad (RC) \Rightarrow (RNC); \quad (SC) \Rightarrow (NC); \quad (RSC) \Rightarrow (RNC);$$

y que en un espacio metrizable cada implicación $\Rightarrow$ es una equivalencia $\Leftrightarrow$.

Siguiendo la terminología de Fremlin, introducimos la siguiente clase de espacios topológicos en los que vamos a demostrar que las implicaciones anteriores son equivalencias.

Definición 5.6 *Un espacio topoloógico Hausdorff (T,τ) se dice que es angélico si cada conjunto $H \subset T$ relativamente numerablemente compacto es relativamente compacto y cada punto adherente a un conjunto relativamente compacto $H \subset T$ es límite de una sucesión en H.*

Lema 5.7 *Si (T,τ) es un espacio angélico, para un conjunto $H \subset T$ son equivalentes*

a) H es compacto (resp. relativamente compacto).

b) H es numerablemente compacto (resp. relativamente numerablemente compacto)

c) H es secuencialmente compacto (resp. relativamente secuencialmente compacto)

DEM: Las implicaciones a) $\Rightarrow$ b) y c $\Rightarrow$ b) son ciertas en general.
b) $\Rightarrow$ c): Dada una sucesión $x_n \in H$, si su rango $x(\mathbb{N})$ es finito es inmediato que hay una subsucesión convergente hacia un punto de H. Si $x(\mathbb{N})$ es infinito podemos extraer una subsucesión inyectiva, x'_k. Sea $a' \in H$ (resp. $a' \in T$) un punto de aglomeración de la sucesión x'_k. Eliminando, si es preciso, un término de la sucesión x'_k, podemos suponer que $a' \notin S := x'(\mathbb{N})$. Como $S \subset H$ es relativamente numerablemente compacto y $a' \in \overline{S}$, según la definición de espacio angélico, podemos asegurar que a' es el límite de una sucesión $a'_n \in S$. Aunque a'_n no es subsucesión de x'_n, es fácil elegir de modo recurrente, una subsucesión a''_n de a'_n que también sea subsucesión de x'_n (obsérvese que $a'_n = x'_{\sigma}(n)$, donde la sucesión $\sigma(n) \in \mathbb{N}$ no es acotada). Queda demostrado así que si $x(\mathbb{N})$ es infinito entonces la sucesión x_n posee una subsucesión a''_n convergente hacia un punto $a' \in H$ (resp. $a' \in T$).
b) $\Rightarrow$ a) Si H es numerablemente compacto (resp. relativamente numerablemente compacto), según la definición de espacio angélico, H es relativamente compacto, y por lo tanto basta demostrar que H es cerrado. Si $x \in \overline{H}$, según la definición de espacio angélico, x es límite de una sucesión $x_n \in H$. Esta sucesión tiene un punto de aglomeración $y \in H$. Como las sucesiones convergentes tienen un único punto de aglomeración (su límite) se sigue que $x = y \in H$ y por lo tanto H es cerrado. ■

Definición 5.8 *Un conjunto de funciones $H \subset \mathbb{R}^K$ tiene la propiedad de intercambio de límites (IL) si para cada sucesión $x_n \in K$ y cada sucesión $h_n \in H$, tales que existen los límites iterados*

$$\lim_n \lim_k h_n(x_k) = \alpha, \quad \lim_k \lim_n h_n(x_k) = \beta$$

se cumple que estos son iguales $\alpha = \beta$.

Lema 5.9 *Si K es un espacio compacto y $H \subset C_p(K)$ es relativamente numerablemente compacto entonces H tiene la propiedad de intercambio de límites.*

DEM: Sea x_n una sucesión en K y h_n una sucesión en H tales que existen los límites iterados $\lim_n \lim_k h_n(x_k) = \alpha$, $\lim_k \lim_n h_n(x_k) = \beta$.

Sea $x \in K$ un punto de aglomeración de la sucesión x_n y $h \in C(K)$ un $t_p(K)$-punto de aglomeración de h_n. Como estamos suponiendo que para cada $n \in \mathbb{N}$ existe el límite, $\lim_k h_n(x_k)$ su valor debe ser $h_n(x)$. Como también suponemos que existe el límite $\lim_n h_n(x)$ su valor debe ser

$$h(x) = \lim_n h_n(x) = \lim_n \lim_k h_n(x_k) = \alpha$$

Con un razonamiento análogo se obtiene que

$$h(x) = \lim_k h(x_k) = \lim_k \lim_n h_n(x_k) = \beta$$

■

NOTA: Obsérvese que el lema anterior sigue siendo válido cuando K sólo se supone que es numerablemente compacto.

Lema 5.10 *Si $H \subset [-1,1]^K$ tiene la propiedad (IL) y $f \in [-1,1]^K$ es adherente a H en la topología producto, entonces existe una sucesión $h_n \in H$ que converge puntualmente hacia f..*

DEM: La idea de la demostración consiste en obtener una sucesión $f_n \in H$ y un conjunto numerable $D \subset K$ tales que

i) $\lim_n f_n(y) = f(y)$ para cada $y \in D$

ii) Para cada $x \in K$ existe una sucesión $y_n \in D$ tal que $f(x) = \lim_n f(y_n)$ y $f_k(x) = \lim_n f_k(y_n)$ para todo $k \in \mathbb{N}$

De estas dos condiciones se sigue que para cada $x \in K$ la sucesión acotada $f_n(x) \in [-1,1]$ tiene un único punto de aglomeración que es $f(x)$, y lo tanto

$$f(x) = \lim_n f_n(x) \text{ para todo } x \in K$$

Efectivamente, sea $\alpha = \lim_j f_{n_j}(x)$ un punto de aglomeración esta sucesión y sea $y_n \in D$ la sucesión proporcionada por ii). Entonces, según i) existen los límites iterados

$$\alpha = \lim_j f_{n_j}(x) = \lim_j \lim_n f_{n_j}(y_n)$$
$$f(x) = \lim_n f(y_n) = \lim_n \lim_j f_{n_j}(y_n)$$

y por la hipótesis (IL) deben ser iguales, luego $\alpha = f(x)$ es el único punto de aglomeración de la sucesión $f_n(x)$

Para terminar veamos como obtener la sucesión f_n y el conjunto $D \subset K$ de modo que se cumpla i) y ii):

a) Demostramos en primer lugar que para cada conjunto finito de funciones $\{g_1, g_2, \cdots g_n\} \subset [-1,1]^K$, y cada $\epsilon > 0$ hay un conjunto finito $L \subset K$ tal que en todo $x \in K$ se cumple

$$\min_{y \in L} \max_{k \leq n} |g_k(x) - g_k(y)| \leq \epsilon$$

Efectivamente, $A = \{(g_1(x), g_2(x), \cdots, g_n(x)) : x \in K\}$ es un subconjunto acotado del compacto $[-1,1]^n \subset \mathbb{R}^n$ (donde consideramos la distancia d_∞). Las d_∞-bolas centradas en los puntos de A y radio $\epsilon > 0$ forman un recubrimiento abierto del compacto $\overline{A}$ y por lo tanto existe un conjunto finito $L \subset K$ tal que

$$A \subset \bigcup_{y \in L} B_\infty[(g_1(y), g_2(y), \cdots g_n(y)), \epsilon]$$

Para cada $x \in K$ el punto $(g_1(x), g_2(x), \cdots g_n(x))$ está en alguna de las bolas de este recubrimiento finito, luego para algún $y \in L$ se cumple

$$\max_{k \leq n} \{|g_k(x) - g_k(y)|\} < \epsilon$$

y queda establecida la afirmación a).
b) Utilizando a) definimos a continuación una sucesión $f_n \in [-1,1]^K$ y una sucesión de conjuntos finitos $L_n \subset K$ tales que con $D = \cup_n L_n$ se cumplen las condiciones i) y ii):

A la función $f_0 = f$ le aplicamos lo establecido en a), con $\epsilon = 1$, y obtenemos un conjunto finito $L_1 \subset K$ tal que

(a1) $\min_{y \in L_1} |f_0(x) - f_0(y)| < 1$ para todo $x \in K$.

Como $f_0 = f$ es $t_p(K)$-adherente a H, existe $f_1 \in H$ tal que

(b1) $|f_1(y) - f_0(y)| < 1$ para todo $y \in L_1$.

Aplicando a), con $\epsilon = 1/2$, a las dos funciones f_0, f_1 se obtiene un conjunto finito $L_2 \subset K$ tal que

(a2) $\min_{y \in L_2} \max\{|f_0(x) - f_0(y)|, |f_1(x) - f_1(x)|\} < 1/2$ para todo $x \in K$.

Utilizando que $f_0 = f$ es $t_p(K)$-adherente a H, encontramos $f_2 \in H$ tal que

(b2) $|f_2(y) - f_0(y)| < 1/2$ para todo $y \in L_0 \cup L_1$.

Volviendo a aplicar a), con $\epsilon = 1/3$, a las tres funciones f_0, f_1, f_2 se obtiene un conjunto finito $L_3 \subset K$ tal que

(a3) $\min_{y \in L_3} \max\{|f_k(x) - f_k(y)| : 0 \leq k < 3\} < 1/3$ para todo $x \in K$.

luego se obtiene $f_3 \in H$ tal que

(b3) $|f_3(y) - f_0(y)| < 1/3$ para todo $y \in L_0 \cup L_1 \cup L_2$.

. . . .
continuando de modo recurrente se obtiene una sucesión de funciones f_n y una sucesión de conjuntos finitos $L_n \subset K$ tales que

(an) $\min_{y \in L_n} \max\{|f_k(x) - f_k(y)| : 0 \leq k < n\} < 1/n$ para todo $x \in K$.

(bn) $|f_n(y) - f_0(y)| < 1/n$ para todo $y \in L_0 \cup L_1 \cdots L_{n-1}$.

Según (bn), para cada $y \in D := \cup_{n\geq 0} L_n$ se cumple $\lim_n f_n(y) = f_0(y) = f(y)$. Según (an), para cada $x \in K$, y cada $n \in \mathbb{N}$ existe $y_n \in D$ tal que

$$\max\{|f_k(x) - f_k(y_n)| : 0 \leq k < n\} \leq 1/n$$

y de aquí se sigue que para todo $k \geq 0$ se cumple $\lim_n f_k(y_n) = f_k(x)$. ■

En lo que sigue denotaremos

$$C_p(K, [-1, 1]) = \{f \in C_p(K) : |f(x)| \leq 1 \ \text{ para todo } \ x \in K\}$$

dotado de la topología de la convergencia puntual (la inducida por $C_p(K)$).

Teorema 5.11 *Si K es compacto entonces $C_p(K, [-1, 1])$ es angélico.*

DEM: Sea $H \subset C_p(K, [-1, 1])$ un conjunto relativamente numerablemente compacto para la topología $t_p(K)$, $\overline{H}$ su adherencia en el espacio $C_p(K, [-1, 1])$ y $\widetilde{H}$ su adherencia en en el compacto $[-1, 1]^K$, que es compacta para la topología producto. Si demostramos que esta adherencia $\widetilde{H}$ está formada por funciones continuas con valores en $[-1, 1]$ se seguirá que que $\overline{H} = \widetilde{H}$ es un subconjunto compacto de $C_p(K, [-1, 1])$.

Según el lema 5.9 el conjunto H tiene la propiedad (IL) y el lema 5.10 nos dice que cada punto $h \in \widetilde{H}$, es límite puntual de una sucesión $h_n \in H$. Por otra parte, como la sucesión tiene un punto de aglomeración (para la topología de la convergencia puntual) $g \in C(K, [-1, 1])$ debe ser $h = g$ luego $h \in C(K, [-1, 1])$. Queda demostrado así que $\overline{H} = \widetilde{H} \subset C(K, [-1, 1])$ es $t_p(K)$-compacto, y que cada $h \in \overline{H}$ es límite, en la topología $t_p(K)$, de una sucesión en H. ■

Lema 5.12 *Sea $\Psi : X \to Y$ continua e inyectiva definida en un espacio regular Hausdorf X, con valores en un espacio Hausdorf Y, y $A \subset X$ un conjunto relativamente numerablemente compacto. Se supone que para cada $B \subset \Psi(A)$, sus puntos adherentes $b \in \overline{B}$ son límites de sucesiones $b_n \in B$.*
Entonces $\Psi(\overline{A}) = \overline{\Psi(A)}$ y $\Psi|_{\overline{A}} : \overline{A} \to \overline{\Psi(A)}$ es un homeomorfismo.

DEM: a) Comencemos demostrando que para cada $D \subset A$ se cumple

$$\Psi(\overline{D}) = \overline{\Psi(D)}$$

La inclusión $\Psi(\overline{D}) \subset \overline{\Psi(D)}$ es consecuencia de la continuidad de Ψ, y basta demostrar que $\Psi(\overline{D}) \supset \overline{\Psi(D)}$: Si $y \in \overline{\Psi(D)}$, aplicando la hipótesis al conjunto $B = \Psi(D)$ obtenemos una sucesión $d_n \in D$ tal que $\Psi(d_n)$ converge hacia y. Como $D \subset A$ también es numerablemente compacto, cada subsucesión de d_{n_j} tiene al menos un punto de aglomeración $a \in X$, y utilizando la continuidad de Ψ se obtiene que $\Psi(a)$ es punto de aglomeración de la sucesión $\Psi(d_{n_j})$, que converge hacia y, luego $\Psi(a) = y$. Así queda establecido que $y \in \Psi(X)$ y que $\Psi^{-1}(y)$ es punto de aglomeración de cualquier subsucesión extraída de la sucesión d_n. De este hecho se sigue que la sucesión d_n converge hacia $\Psi^{-1}(y)$, luego $\Psi^{-1}(y) \in \overline{D}$, es decir, $y \in \Psi(\overline{D})$.

b) Aplicando lo que se ha demostrado en a) al conjunto $D = A$ obtiene que $\Psi(\overline{A}) = \overline{\Psi(A)}$ es cerrado.

c) Para demostrar que $\Psi|_{\overline{A}} : \overline{A} \to \overline{\Psi(A)}$ es un homeomorfismo basta ver que Ψ transforma cada subconjunto cerrado C de $\overline{A}$ en un subconjunto cerrado de $\overline{\Psi(A)}$: El razonamiento que sigue lo hacemos en $T = \overline{A}$ con su topología relativa $\mathcal{G}_T$, que sigue siendo un espacio topológico regular. Esta propiedad nos permite escribir

$$C = \cap\{\overline{U} : C \subset U \in \mathcal{G}_T\}$$

Como A es denso en T, para cada abierto $U \in \mathcal{G}_T$ se cumple que $\overline{U} = \overline{U \cap A}$. En virtud de la inyectividad de Ψ y de lo ya demostrado en a) resulta

$$\Psi(C) = \cap\{\Psi(\overline{U}) : C \subset U \in \mathcal{G}_T\} =$$

$$= \cap\{\Psi(\overline{U \cap A}) : C \subset U \in \mathcal{G}_T\} = \cap\{\overline{\Psi(U \cap A)} : C \subset U \in \mathcal{G}_T\}$$

y queda demostrado que $\Psi(C)$ es un subconjunto cerrado de $\overline{\Psi(A)}$. ■

NOTA: La demostración del teorema anterior, con cambios obvios de notación también sirve para demostrar que si (Z, d) es un espacio métrico compacto entonces $C_p(K, Z)$ es angélico.

Corolario 5.13 *Sea $\Psi : X \to Y$ continua e inyectiva definida en un espacio regular Hausdorff X, con valores en un espacio Hausdorff Y. Si Y es angélico entonces X también lo es.*

DEM: Si $A \subset X$ es relativamente numerablemente compacto $\Psi(A) \subset Y$ también lo es. Como Y es angélico $\overline{\Psi(A)}$ es un subconjunto compacto de Y, y aplicando el lema 5.12 se obtiene que $\Psi|_{\overline{A}} : \overline{A} \to \Psi(\overline{A}) = \overline{\Psi(A)}$ es un homeomorfismo, de donde se sigue que $\overline{A}$ es compacto.

Por otra parte, si $M \subset A$ y $x \in \overline{M}$ por continuidad, $\Psi(x) \in \overline{\Psi(M)}$, luego $\Psi(x)$ es límite de una sucesión $y_n = \Psi(x_n)$ con $x_n \in M \subset A$, y considerando el homeomorfismo $\Psi|_{\overline{A}}$ se concluye que $x_n \in M$ converge hacia x. ■

Corolario 5.14 *Si el espacio topológico (X, τ) es angélico y $\tau' \supset \tau$ es una topología regular más fina, entonces (X, τ') sigue siendo angélico.*

Lema 5.15 *Si K es compacto, entonces $C_p(K)$ es un espacio completamente regular, y por lo tanto regular.*

DEM: Si V es un entorno de $f \in C_p(K)$, existe $\epsilon > 0$ y un conjunto finito $\{x_1, x_2, \cdots x_m\} \subset K$ tal que $\{g \in C(K) : |g(x_j) - f(x_j)| < \epsilon, 1 \leq j \leq m\} \subset V$. La función $\Phi : C_p(K) \to [0,1]$ definida por

$$\Phi(g) = \epsilon^{-1} \text{mín}\{\epsilon, |g(x_1) - f(x_1)| + |g(x_2) - f(x_2)| + \cdots + |g(x_m) - f(x_m)|\}$$

es continua, $\Phi(f) = 0$ y $\Phi(g) = 1$ si $g \notin V$. ■

Teorema 5.16 *Si K es un espacio compacto Hausdorff entonces $C_p(K)$ es un espacio angélico.*

DEM: Mediante un homeomorfismo $\varphi : \mathbb{R} \to (-1,1)$ se puede definir una aplicación continua e inyectiva

$$\Psi : C(K)_p \to C_p(K, [-1,1]), \quad \Psi(f) = \varphi \circ f$$

Como $C_p(K)$ es un espacio topológico completamente regular, con el lema 5.12 y el teorema 5.11 se obtiene el resultado. ■

Teorema 5.17 [Eberlein-Grothendieck] *Si K es compacto y $H \subset C(K)$ es uniformemente acotado, son equivalentes*

i) H es relativamente compacto.

ii) H es relativamente secuencialmente compacto.

iii) H es relativamente numerablemente compacto.

iv) H tiene la propiedad de intercambio de límites.

v) La clausura $\widetilde{H}$ de H en $\mathbb{R}^K$ está formada por funciones continuas.

DEM: Según el teorema 5.16 y el lema 5.9, i) $\Leftrightarrow$ ii) $\Leftrightarrow$ iii) $\Rightarrow$ iv). Es inmediato que v) $\Rightarrow$ i), y iv) $\Rightarrow$ v) lo demostraremos por reducción al absurdo, suponiendo que existe una función $f \in \widetilde{H}$ que no es continua en algún $a \in K$. Si esto es así existe $\epsilon > 0$ tal que cada entorno V de a contiene un punto x_V con $|f(x_V) - f(a)| > \epsilon$. Como H es uniformemente acotado podemos suponer, para simplificar la notación, que $|f(x)| \leq 1$ para todo $f \in H$ y todo $x \in K$. Entonces, según el lema 5.10, hay una sucesión $f_i \in H$ tal que

$$\lim_n f_i(x) = f(x) \text{ para todo } x \in K$$

$V_1 = \{x \in K : |f_1(x) - f_1(a)| < 1\}$ es entorno de a en K y por lo tanto existe $x_1 \in V_1$ con $|f(x_1) - f(a)| > \epsilon$.
Como $V_2 = \cap_{i=1}^2 \{x \in K : |f_i(x) - f_i(a)| < 1/2\}$ es entorno de a en K, existe $x_2 \in V_2$ con $|f(x_2) - f(a)| > \epsilon$.
De modo recurrente se obtiene una sucesión $x_n \in K$ tal que

$|f_i(x_n) - f_i(a)| < 1/n$ para $1 \leq i \leq n$
$|f(x_n) - f(a)| > \epsilon$ para todo $n \in \mathbb{N}$ [*]
Entonces, para cada i fijo se cumple $\lim_n f_i(x_n) = f_i(a)$.
De la sucesión $f(x_n) \in [-1, 1]$ se puede extraer una subsucesión convergente $f(x_{n_k})$. Así tenemos asegurada la existencia de los límites iterados

$$f(a) = \lim_i f_i(a) = \lim_i \lim_k f_i(x_{n_k}), \quad \lim_k f(x_{n_k}) = \lim_k \lim_i f_i(x_{n_k})$$

y según la hipótesis, estos límites deben ser iguales, es decir $\lim_k f(x_{n_k}) = f(a)$, lo que contradice la condición [*]. ■

Aplicaciones a los espacios de Banach. Sea $(E, \| \ \|)$ un espacio de Banach (real) y E^* su dual (formado con las formas lineales continuas $x^* : E \to \mathbb{R}$) donde se define la norma $\|x^*\| = \sup\{|x^*(x)| : \|x\| \leq 1\}$ con la que $(E^*, \| \ \|)$ es un espacio de Banach. Para simplificar la notación se suele usar el mismo símbolo para las normas de E y E^*, convenio que no dará lugar a confusión.

Asociando a cada $x \in E$ la forma lineal $\widehat{x} : E^* \to \mathbb{R}$, $\widehat{x}(x^*) = x^*(x)$, podemos identificar E con $\widehat{E} = \{\widehat{x} : x \in E\} \subset \mathbb{R}^{E^*}$. La topología que induce en $\widehat{E}$ la topología producto de $\mathbb{R}^{E^*}$, transferida a E, recibe el nombre de topología débil; se suele denotar w y también $\sigma(E^*, E)$. La topología w tiene la propiedad de que cada $x^* \in E^*$ es w-continua y se llama topología débil porque es la topología más débil en E con esta propiedad. Una base de entornos de $0 \in E$ para esta topología es la formada por los conjuntos de la forma $V(F, \epsilon) = \{x \in E : \max_{x^* \in F} |x^*(x)| < \epsilon\}$, donde $F \subset E^*$ es finito y $\epsilon > 0$.

La topología w^* que induce en $E^* \subset \mathbb{R}^E$ la topología producto recibe el nombre de topología débil*, que también se suele designar $\sigma(E^*, E)$. Su interés reside en que para cada $x \in E$ la forma lineal $\widehat{x} : E^* \to \mathbb{R}$ es w^*-continua (además w^* es la topología más débil sobre E^* con esta propiedad). Otra propiedad notable de esta topología la proporciona el teorema de Alaoglu-Bourbaki, según el cual la bola unidad $B(E^*) = \{x^* : \|x^*\| \leq 1\}$ es w^*-compacta. Considerando el compacto $K = (B(E^*), w^*)$, es claro que E se identifica con un subespacio $\widetilde{E} \subset C(K)$, asociando a cada $x \in E$ la función continua $\widetilde{x} = \widehat{x}|_K$. El subespacio $\widetilde{E} \subset C_p(K)$, con la topología inducida es homeomorfo a (E, w).

Este hecho permitirá aplicar al contexto de un espacio de Banach con su topología débil los resultados obtenidos anteriormente sobre la topología de los espacios $C_p(K)$.

Conviene tener asumido, en lo que sigue, que cada $H \subset E$, se puede considerar, bien como un subconjunto del espacio producto, $\widehat{H} \subset \mathbb{R}^{E^*}$, bien como un conjunto de funciones continuas $\widetilde{H} \subset C_p(K)$, donde $K = (B(E^*), w^*)$, y que estas identificaciones son topológicas cuando en H, $\widehat{H}$, $\widetilde{H}$, se consideran respectivamente las topologías inducidas por la débil, la topología producto de $\mathbb{R}^{E^*}$, y la topología de la convergencia puntual en $C(K)$.

El primer resultado se refiere al espacio de Banach $(C(K), \| \ \|_\infty)$ donde K es un compacto Hausdorff. Conviene recordar que toda forma lineal continua $\Lambda : C(K) \to \mathbb{R}$ se representa como una integral $\Lambda(f) = \int_K f d\mu$ respecto a una medida regular (con signo) $\mu : \mathcal{B}(K) \to \mathbb{R}$, donde $\mathcal{B}(K)$ es la σ-álgebra de Borel de K. En general, la topología débil de $C(K)$ es más fina que la topología de la convergencia puntual, sin embargo se tiene:

Teorema 5.18 [Grothendieck] *Si K es compacto, para un conjunto $H \subset C(K)$, son equivalentes*

i) H es débilmente compacto.

ii) H es $\| \ \|_\infty$-acotado y t_p-compacto.

Dem: i) $\Rightarrow$ ii): La topología débil es más fina que la topología t_p, y en los espacios de Banach los conjuntos débilmente compactos siempre son acotados. ii) $\Rightarrow$ i) Basta demostrar que (H, w) y (H, t_p) son homeomorfos y para ello que la identidad $i : (H, t_p) \to (H, w)$ es continua:

Supongamos que $A \subset H$ es cerrado en el espacio topológico (H, w) (donde w es la topología que induce en H la topología débil) y sea $f \in H \cap \overline{A}^{t_p}$, adherente para la topología que induce en H la topología de la convergencia puntual. Como $C_p(K)$ es angélico, existe una sucesión $f_n \in A$ que converge puntualmente hacia f. Teniendo en cuenta que cada forma lineal continua $\Lambda \in C(K)^*$ se representa mediante la integral respecto a una medida de Borel regular μ, el teorema de la convergencia dominada de Lebesgue permite concluir que la sucesión $\Lambda(f_n) = \int f_n d\mu$ converge hacia $\Lambda(f) = \int f d\mu$ (aquí se utiliza que la sucesión f_n está uniformemente acotada) Queda establecido así que la sucesión f_n converge débilmente hacia f, y con ello que $f \in A$. Queda demostrado que todo cerrado de (H, w) es cerrado en (H, t_p) y con ello la continuidad de la identidad $i : (H, t_p) \to (H, w)$ ■

Teorema 5.19 [Eberlein-Smulian] *Si E es un espacio normado entonces el espacio topológico $(E, \sigma(E, E^*))$ es angélico.*

Dem: La bola unidad $K = \{x^* \in E^* : \|x^*\| \leq 1\}$ es compacta para la topología w^* y al identificar E con un subespacio de $C(K)$, su topología débil w coincide con la inducida por la topología de la convergencia puntual, luego la aplicación natural $i : (E, w) \to (C(K), t_p)$ es continua. Combinando el corolario 5.13 con el teorema 5.16 se obtiene el resultado. ■

Diremos que $H \subset E$ intercambia límites con $K = B(E^*)$ cuando $\widetilde{H}$ tiene la propiedad de intercambio de límites en $\mathbb{R}^K$ es decir: Para cada sucesión $x_k^* \in B(E^*)$ y cada sucesión $x_n \in H$, tales que existen los límites iterados

$$\lim_n \lim_k x_k^*(x_n) = \alpha, \quad \lim_k \lim_n x_k^*(x_n) = \beta$$

se cumple que estos son iguales $\alpha = \beta$.

Teorema 5.20 [Eberlein-Grothendieck] *Sea $(E, \| \ \|)$ un espacio de Banach y $B(E^*) = \{x^* \in E^* : \|x^*\| \leq 1\}$. Para un conjunto $H \subset E$ son equivalentes* *i) H es relativamente compacto para la topología débil.*

ii) H es relativamente numerablemente compacto para la topología débil.

iii) H es acotado e intercambia límites con $B(E^*)$.

DEM: La equivalencia i) $\Leftrightarrow$ ii) ha sido establecida en el teorema 5.19
i) $\Rightarrow$ iii) Es bien sabido que en un espacio normado todo conjunto débilmente relativamente compacto es acotado. Por otra parte, si $K = (B(E^*), w^*)$, y $H \subset E$ es relativamente numerablemente compacto en (E, w) entonces $\widetilde{H}$ también lo es en $(C(K), t_p(K))$, y con el lema 5.9 se obtiene que $\widetilde{H}$ intercambia límites con K, lo que significa que H intercambia límites con K.
iii) $\Rightarrow$ i) En virtud del homeomorfismo natural entre (E, w) y $(\widetilde{E}, t_p(K))$, basta demostrar que $\widetilde{H}$ es relativamente compacto en $(\widetilde{E}, t_p(K))$. El teorema 5.17 nos dice que $\widetilde{H}$ es relativamente compacto en $C_p(K)$ y por lo tanto basta demostrar que la clausura de $\widetilde{H}$ en $C_p(K)$ está contenida en $\widetilde{E} \subset C_p(K)$.

Si f pertenece a esta clausura y todos los vectores $x^*, y^*, x^* + y^*, \alpha x^*$, $(\alpha \in \mathbb{R})$ están en $B(E^*)$ es fácil ver que

$$f(x^* + y^*) = f(x^*) + f(y^*); \quad f(\alpha x^*) = \alpha f(x^*) \text{ si } |\alpha| \leq 1.$$

Esta propiedad permite extender f a una forma lineal $\varphi : E^* \to \mathbb{R}$ poniendo: $\varphi(x^*) = \|x^*\| \; f(\|x^*\|^{-1} \; x^*)$ si $x^* \neq 0$. (La comprobación de que así queda definida una forma lineal φ sobre E^* se deja al cuidado del lector). La forma lineal $\varphi : E^* \to \mathbb{R}$ tiene la propiedad de que su restricción a la bola $K = B(E^*)$ es w^*-continua, ya que $\varphi|_K = f \in C(K)$. Entonces, según un teorema de Grothendieck la forma lineal $\varphi : E^* \to \mathbb{R}$ es w^*-continua, lo que permite asegurar que existe $x \in E$ tal que $\widehat{x} = \varphi$, lo que significa que $f = \widetilde{x} \in \widetilde{E}$. ■

Capítulo 6

Espacios con la propiedad de Namioka

Preliminares sobre espacios de Baire. Un espacio topológico $(X, \mathcal{G})$ se dice que es un espacio de Baire cuando la intersección de cualquier sucesión de abiertos densos es densa y se dice que es completamente metrizable cuando su topología $\mathcal{G}$ es metrizable con una distancia d tal que (X, d) es un espacio métrico completo.

Teorema 6.1 *Los espacios completamente metrizables y los espacios localmente compactos Hausdorff, son espacios de Baire.*

DEM: Sea $G_n \subset X$ una sucesión de abiertos densos: $\overline{G_n} = X$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Tenemos que demostrar que $S := \cap_{n=1}^{\infty} G_n$ es denso en X, es decir, que cada abierto no vacío $U \subset X$ contiene algún punto de S.
a) Supongamos que $(X, \mathcal{G})$ es completamente metrizable con la distancia d. Como G_1 es denso en X existe $a_1 \in U \cap G_1$. Sea $0 < r_1 < 1$ tal que

$$\overline{B(a_1, r_1)} \subset U \cap G_1$$

Como G_2 es denso en X, existe $a_2 \in B(a_1, r_1) \cap G_2$. Sea $0 < r_2 < 1/2$ tal que

$$\overline{B(a_2, r_2)} \subset B(a_1, r_1) \cap G_2$$

De modo recurrente se obtiene una sucesión $a_n \in X$ y una sucesión de números $0 < r_n < 1/n$ tales que para todo $n \in \mathbb{N}$ se cumple

$$\overline{B(a_n, r_n)} \subset B(a_{n-1}, r_{n-1}) \cap G_n$$

Para todo $p \in \mathbb{N}$ se cumple $a_{n+p} \in B(a_n, r_n)$, luego $d(a_{n+p}, a_n) \leq 1/n$, y se sigue que a_n es una sucesión de Cauchy en el espacio completo (X, d). Es claro que su límite $a = \lim_p a_{n+p}$ pertenece a cada $\overline{B(a_n, r_n)} \subset U \cap G_n$, luego $a \in U \cap S$.
b) Cuando $(X, \mathcal{G})$ es un espacio topológico Hausdorff localmente compacto se razona en forma análoga, pero eligiendo en cada etapa (en lugar de $\overline{B(a_n, r_n)}$) un entorno compacto K_n de a_n tal que $K_n \subset K_{n-1} \cap G_n$. La sucesión decreciente de compactos no vacíos K_n tiene intersección no vacía contenida en $U \cap S$. ■

Proposición 6.2 *Todo subconjunto abierto de un espacio de Baire es un espacio de Baire (para la topología relativa)*

DEM: Sea $U \subset X$ un subconjunto abierto del espacio de Baire $(X, \mathcal{G})$, y $V_n \subset U$ una sucesión de abiertos que son densos en U (para la topología relativa de U) lo que significa que $U \cap \overline{V_n} = U$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Es claro que $G_n = V_n \cup \overline{U}^c$ es una sucesión de abiertos densos en X (pues $\overline{G_n} \supset \overline{V_n} \supset \overline{U}$, y $\overline{G_n} \supset \overline{U}^c$, luego $\overline{G_n} = X$), luego $S = \cap_{n=1}^{\infty} G_n = (\cap_{n=1}^{\infty} V_n) \cup \overline{U}^c$ es denso en X y de aquí se sigue que la intersección $\cap_{n=1}^{\infty} V_n$ es densa en U. ■

El espacio topológico $(X, \mathcal{G})$ se dice que es hereditariamente Baire cuando todo conjunto cerrado es un espacio de Baire (para la topología relativa). Todo subconjunto cerrado de un espacio completamente metrizable (resp. localmente compacto Hausdorff) tiene la misma propiedad. Por lo tanto, en virtud del teorema 6.1, podemos afirmar que los espacios completamente metrizables y los espacios localmente compactos Hausdorff, son hereditariamente Baire.

Preliminares sobre funciones separadamente continuas. Dada una función $f : X \times Y \to \mathbb{R}$ donde X e Y son espacios topológicos Hausdorff, fijado un punto $x \in X$, denotaremos por $f_x : Y \to \mathbb{R}$ a la función parcial $f_x(y) = f(x, y)$. Análogamente, fijando un punto $y \in Y$ designaremos por $f^y : X \to \mathbb{R}$ a la otra función parcial $f^y(x) = f(x, y)$. Se dice que f es separadamente contínua (s.c.) cuando para cada $x \in X$ y cada $y \in Y$ las funciones parciales f_x, f^y son continuas. Dada una función s.c. $f : X \times Y \to \mathbb{R}$, en lo que sigue consideraremos frecuentemente los conjuntos

$$X_f = \{f_x : x \in X\} \subset C(Y); \quad Y_f = \{f^y : y \in Y\} \subset C(X)$$

que habitualmente se consideran con la topología de la convergencia puntual sobre Y y X respectivamente. En las aplicaciones que siguen frecuentemente X será completamente regular e Y compacto.

Hay una biyección natural entre las funciones $f : X \times Y \to \mathbb{R}$ que son continuas en la segunda variable y las aplicaciones $F : X \to C(Y)$, en la que a f le corresponde la aplicación F definida por $F(x) = f_x$. Es claro que f es separadamente continua si y sólo si F es continua cuando en $C(Y)$ se considera la topología de la convergencia puntual $t_p(Y)$.

El siguiente resultado, que es la versión topológica de un resultado habitual en la teoría de espacios vectoriales localmente convexos, tiene como consecuencia inmediata un resultado de Troallic (teorema 6.4) según el cual, para un compacto K, los subconjuntos $t_p(K)$-separables de $C(K)$ coinciden con los $\| \|_\infty$-separables.

Lema 6.3 *Sea $f : X \times K \to \mathbb{R}$ donde K es compacto. Son equivalentes:*

a) $K_f \subset C(X)$ *es* $t_p(X)$*-metrizable.*

b) $X_f \subset C(K)$ *es separable para la norma.*

c) $X_f \subset C(K)$ *es separable para la topología* $t_p(K)$.

DEM: a) $\Rightarrow$ b): La aplicación $\Psi : K \to (C(X), t_p(X))$, definida por $\Psi(y) = f^y$, es continua, luego $K_f = \Psi(K)$ es un subconjunto $t_p(X)$-compacto de $C(X)$. (se puede considerar que K_f es el espacio cociente de K mediante la relación de equivalencia $y_1 \approx y_2 \Leftrightarrow f^{y_1} = f^{y_2}$, y así podemos identificar f^y con la clase de equivalencia de y). Cada $x \in X$ lo podemos mirar como una función continua $\hat{x}(f^y) = f(x, y)$, definida sobre el compacto K_f.
[La continuidad de $\hat{x}$ se obtiene viendo que $\hat{x}^{-1}(C) \subset K_f$ es cerrado para cada cerrado $C \subset \mathbb{R}$: Como f_x es continua $C_x = \{y \in K : f(x, y) \in C\}$ es un subconjunto cerrado de K y por lo tanto es compacto. La continuidad de $\varphi(y) = f^y$, permite concluir que $\varphi(C_x) = \{f^y : f(x, y) \in C\} = \hat{x}^{-1}(C)$ es un subconjunto cerrado de $K_f = \varphi(K)$].

Si $x_1, x_2 \in X$, la norma de $\hat{x}_1 - \hat{x}_2$ en $(C(K_f), \| \|_\infty)$ viene dada por

$$\|\hat{x}_1 - \hat{x}_2\|_\infty = \max\{|\hat{x}_1(f^y) - \hat{x}_2(f^y)| : y \in K\} =$$

$$= \max\{|f(x_1, y) - f(x_2, y)| : y \in K\} = \|f_{x_1} - f_{x_2}\|_\infty$$

luego X_f con la distancia inducida por la norma de $C(K)$, es isométrico al subconjunto $\{\hat{x} : x \in X\}$ del espacio de Banach $C(K_f)$ y por lo tanto será separable cuando lo sea $(C(K_f), \| \ \|_\infty)$. Según el teorema 3.3 esto ocurre cuando se cumple a).
(b) $\Rightarrow$ (c) es inmediato.
(c) $\Rightarrow$ (a): Sea $\{x_n : n \in \mathbb{N}\} \subset X$ tal que $\{f_{x_n} : n \in \mathbb{N}\}$ es denso en X_f para la topología $t_p(K)$. Es fácil ver la fórmula

$$d(h_1, h_2) = \sum_n 2^{-n} \min\{1, |h_1(x_n) - h_2(x_n|)\}$$

define una distancia continua en el compacto K_f, y aplicando el lema 3.2 se obtiene que el compacto $(K_f, t_p(X))$ se metriza con esta distancia.
[La densidad de $\{f_{x_n} : n \in \mathbb{N}\}$ en X_f para la topología $t_p(K)$) interviene en la forma siguiente: Si $d(f^y, f^z) = 0$ entonces $f(x_n, y) = f(x_n, z)$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Como las evaluaciones $\delta_y, \delta_z : C_p(K) \to \mathbb{R}$ son $t_p(K)$ continuas y coinciden en $D = \{f_{x_n} : n \in \mathbb{N}\}$, también coinciden sobre su t_p-clausura $X_f = \overline{D}^{t_p}$, es decir, $f(x, y) = f(x, z)$ para todo $x \in X$, lo que significa que $f^y = f^z$]. ■

Teorema 6.4 [Troallic] *Si* K *es compacto los conjuntos* $t_p(K)$*-separables de* $C(K)$ *coinciden con los separables para la norma.*

DEM: Sea $X \subset C(K)$ dotado de la topología $t_p(K)$. Con esta topología la aplicación $f : X \times K \to \mathbb{R}$ dada por $f(\varphi, y) = \varphi(y)$ es separadamente continua y se cumple que $X_f = X$. Aplicando el teorema anterior se obtiene el resultado. ■

La propiedad de Namioka. En los problemas que se estudian a continuación, referentes a la existencia de puntos de continuidad conjunta de funciones reales s.c. $f : X \times Y \to \mathbb{R}$ no será restrictiva la consideración de funciones acotadas con valores en $[-1, 1]$ pues cuando $f : X \times Y \to \mathbb{R}$ no sea acotada, la podremos sustituir por $\alpha \circ f$ donde $\alpha : \mathbb{R} \to (-1, 1)$ es un homeomorfismo. En este caso las funciones s.c. acotadas $f : X \times Y \to [-1, 1]$ se corresponden con las funciones $t_p(Y)$-continuas $F : X \to C(Y)$ cuya imagen está contenida en la bola unidad del espacio de Banach $(C(Y), \| \ \|_\infty)$.

Si X e Y son espacios topológicos, utilizando la terminología habitual en este tema, denotaremos por $\mathcal{N}(X, Y)$ la siguiente propiedad:
Para cada aplicación s.c. $f : X \times Y \to [-1, 1]$ *existe un* G_δ *denso* $X_0 \subset X$ *tal que* f *es continua (conjuntamente continua) en cada punto de* $X_0 \times Y$.

La clase $\mathcal{N}$ de los espacios de *Namioka* es la formada por los espacios topológicos X tales que para todo compacto K se cumple $\mathcal{N}(X, K)$.

Análogamente la clase $\mathcal{N}^*$ de los espacios *co-Namioka* es la formada por los compactos K tales que para todo espacio de Baire X se cumple $\mathcal{N}(X, K)$.

NOTA: Christensen [9] demostró que la definición de la clase $\mathcal{N}$ es equivalente a la que resulta reemplazando el espacio de llegada $[-1, 1]$ por cualquier espacio métrico. Namioka y Pol [38] demostraron que la definición de la clase $\mathcal{N}^*$ es equivalente a la que resulta cuando se reemplaza el espacio de llegada $[-1, 1]$ por cualquier espacio métrico. En [5] se vuelve a demostrar este resultado con técnicas de juegos topológicos.

Lema 6.5 *Si* K *es compacto y* $f : X \times K \to \mathbb{R}$ *es separadamente continua dado un punto* $x_0 \in X$ *son equivalentes:*

a) f *es continua en cada punto de* $\{x_0\} \times K$.

b) La función asociada $F : X \to (C(K), \| \ \|_\infty)$ *es continua en* x_0.

c) La familia $K_f = \{f^y : y \in K\} \subset C(X)$ *es equicontinua en* x_0.

En particular f *es continua si y sólo si* $F : X \to (C(K), \| \ \|_\infty)$ *es continua, lo que equivale a que la familia de funciones* $K_f = \{f^y : y \in K\} \subset C(X)$ *sea equicontínua.*

DEM: Es inmediato que c) $\Leftrightarrow$ b) $\Rightarrow$ a). Veamos que a) $\Rightarrow$ b). Dado $\epsilon > 0$, para cada $y \in K$ existen entornos abiertos $A(y)$ y $B(y)$ de x_0 e y respectivamente, tales que para todo $x \in A(y)$ y todo $y' \in B(y)$ se cumple $|f(x, y') - f(x_0, y)| < \epsilon$. $\{B(y) : y \in K\}$ es un cubrimiento abierto del compacto K, del que se puede extraer un cubrimiento finito $\{B(y_j) : 1 \leq j \leq n\}$. Se sigue que $U(x_0) = \cap_{j=1}^n A(y_j)$ es un entorno abierto de x_0 tal que

$$x \in U(x_0) \Rightarrow \|F(x) - F(x_0)\|_\infty < 2\epsilon$$

■

OBSERVACIÓN:
Para una aplicación $F : X \to C(K)$ el conjunto de sus puntos de continuidad para la norma $\| \quad \|_\infty$, denotado $\mathrm{Cont}(F)$, siempre es un $\mathcal{G}_\delta$ en X ya que $\mathrm{Cont}(F) = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} O_{1/n}(F)$, donde $O_\epsilon = \bigcup\{V \in \mathcal{G}(X) : \mathrm{diam}\ F(V) < \epsilon\}$.

Cuando K es compacto, en virtud de la observación anterior y el lema 6.5, la condición $\mathcal{N}(X, K)$ se puede formular así: *Para cada función acotada $t_p(K)$-continua $F : X \to C(K)$ el conjunto G_δ, Cont(F), es denso en X.*

Es claro que el conjunto $\mathrm{Cont}(F) = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} O_{1/n}(F)$, será denso en X, cuando X sea un espacio de Baire y todos los abiertos $O_{1/n}(F)$ sean densos. Esta es la razón por la que los espacios de Baire intervienen en el problema que nos ocupa: Obtener condiciones suficientes para que un espacio sea de la clase $\mathcal{N}$.

Por otra parte, a la hora de obtener condiciones suficientes para que los abiertos $O_{1/n}(F)$ sean densos nos situamos en el contexto más general de una aplicación $F : X \to (E, \rho)$ con valores en un espacio métrico. En esta situación el conjunto de sus puntos de continuidad, que se expresa en la forma $\mathrm{Cont}(F) = \cap_n O_{1/n}(F)$, con $O_\epsilon(F) = \cup\{V \in \mathcal{G}(X) : \rho\text{-diam}\ F(V) < \epsilon\}$, sigue siendo un conjunto $\mathcal{G}_\delta$ en X. Para estudiar cuando este conjunto es denso son útiles las nociones que se introducen en la siguiente definición, donde $\mathcal{F}(X) \wedge \mathcal{G}(X)$ denota la familia de los subconjuntos de X que son de la forma $G \cap C$ con $G \subset X$ abierto y $C \subset X$ cerrado.

Definición 6.6 *Sea $F : X \to (E, \rho)$ definida en un espacio topológico X, con valores en un espacio métrico (E, ρ).*

i) Diremos que F tiene la propiedad $[h]$ si para cada $\epsilon > 0$ y cada abierto no vacío $U \subset X$ hay otro abierto no vacío $V \subset U$ tal que ρ-diam $F(V) < \epsilon$.

ii) Diremos que F tiene la propiedad $[h_\sigma]$ cuando para cada $\epsilon > 0$, existe una sucesión $X_n \in \mathcal{F}(X) \wedge \mathcal{G}(X)$ que cubre X, tal que, para cada n y cada abierto no vacío $U \subset X_n$ hay otro abierto no vacío $V \subset U$ tal que ρ-diam $F(V) < \epsilon$.

OBSERVACIÓN
F tiene la propiedad $[h]$ si y sólo si para cada $\epsilon > 0$ el abierto $O_\epsilon(F)$ es denso en X. Si $X_0 \subset X$ es denso y F tiene la propiedad $[h]$ entonces $F|_{X_0}$ también la tiene.

Un espacio topológico X tiene la propiedad de Kaplansky (countable tightness) cuando para cada $A \subset X$ y cada $t \in \overline{A}$, existe un conjunto numerable $C \subset A$ tal que $t \in \overline{C}$. El siguiente resultado, inspirado en la proposición 3.11 de [18] lo utilizaremos para demostrar el clásico teorema de Namioka 6.11

Proposición 6.7 *Sea X un espacio topológico con la propiedad de Kaplansky y $F : X \to (E, \rho)$ una aplicación tal que para cada conjunto numerable $D \subset X$ la restricción $F|_D$ tiene la propiedad $[h]$. Entonces F tiene la propiedad $[h]$.*

DEM: Si F no tiene la propiedad $[h]$ existe $\epsilon > 0$ y un abierto $U \subset X$ tal que todo abierto no vacío $V \subset U$ cumple diam $F(V) > 2\epsilon$. Entonces, dado un punto $x \in X$, para cada entorno abierto de x, $V \subset X$, podemos elegir $a(x, V) \in V$ tal que $\rho(F(x), F(a(x, V))) > \epsilon$. Consideremos el conjunto

$$M_x := \{a(x, V) : x \in V, \ V \text{ abierto } \}$$

Como $x \in \overline{M_x}$, por la propiedad de Kaplansky, existe un conjunto numerable $C_x \subset M_x$ tal que $x \in \overline{C_x}$ y, es claro que, $\rho(F(x), F(y)) > \epsilon$ para cada $y \in C_x$. Sea $a \in X$, y D_n la sucesión de conjuntos numerables definidos por

$$D_1 := \{a\} \qquad D_{n+1} := \cup\{C_x : x \in D_n\}$$

Entonces, $D = \cup D_n \subset X$ es numerable y $F|_D$ no tiene la propiedad $[h]$ pues cualquier abierto $W \subset X$ con $W \cap D \neq \emptyset$ cumple diam $F(W \cap D) > \epsilon$. Efectivamente, dado $z \in W \cap D$, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $z \in D_n$. Como $z \in \overline{C_z}$, existe $y \in W \cap C_z \subset W \cap D$, luego $\rho(F(y), F(z)) > \epsilon$, y se sigue que diam $F(W \cap D) > \epsilon$. ■

Lema 6.8 *Sea $F : X \to E$ una aplicación definida en un espacio de Baire X, con valores en un espacio métrico (E, ρ). Entonces son equivalentes:*

a) F tiene la propiedad $[h]$.

b) F tiene la propiedad $[h_\sigma]$.

c) Cont(F) es denso en X.

DEM: a) $\Rightarrow$ b) es inmediato (considerar la sucesión $X_n = X$ para todo $n \in \mathbb{N}$). b) $\Rightarrow$ c) Como X es un espacio de Baire y $\mathrm{Cont}(F) = \cap_n O_{1/n}(F)$, basta demostrar que para cada $\epsilon > 0$ el abierto $O_\epsilon(F)$ es denso en X. Sea $W \subset X$ un abierto no vacío y $X_n \in \mathcal{G}(X) \wedge \mathcal{F}(X)$ el cubrimiento de X, asociado a $\epsilon > 0$, que proporciona la propiedad $[h_\sigma]$. Cada X_n es de la forma $X_n = G_n \cap C_n$ donde $G_n \subset X$ es abierto y $C_n \subset X$ es cerrado.

Entonces $H_n = W \cap \overline{G_n} \cap C_n$ es una sucesión de cerrados, relativos a W, que cubre W. Según la proposición 6.2, W también es un espacio de Baire, y se sigue que algún H_n contiene un abierto no vacío U. Entonces $U \cap G_n$ es un abierto no vacío contenido en $X_n = G_n \cap C_n$, el cual, en virtud de la elección de los X_n, contendrá otro abierto no vacío $V \subset U \subset W$ verificando ρ-diam $F(V) < \epsilon$, luego $O_\epsilon(F) \cap W \neq \emptyset$. Como esto se cumple para todo abierto no vacío $W \subset X$, queda demostrado que $O_\epsilon(F)$ es denso en X. ■

Teorema 6.9 *Todo espacio de Baire separable X está en la clase $\mathcal{N}$. Todo compacto metrizable K está en la clase $\mathcal{N}^*$.*

DEM: Consideramos una función s.c. $f : X \times K \to [-1, 1]$ y la correspondiente función que es $t_p(K)$-continua, $F : X \to C(K)$. Si X es separable, $F(X) = X_f$ es $t_p(Y)$-separable y por lo tanto separable para la norma de $C(Y)$ en virtud de 6.4. Lo mismo ocurre cuando K es metrizable porque en este caso $(C(K), \| \|_\infty)$ es un espacio de Banach separable (teorema 3.3).

En ambos casos la aplicación F cumple la propiedad $[h_\sigma]$: $F(X) \subset C(K)$ se puede cubrir con una sucesión de bolas cerradas, de radio $\epsilon/2 > 0$, las cuales son $t_p(K)$ cerradas. Las preimágenes de estas bolas mediante la función $t_p(K)$ continua F proporciona una sucesión de cerrados X_n que cubre X, que sirve para demostrar que F tiene la propiedad $[h_\sigma]$.
Con la proposición 6.8 se obtiene que el conjunto de los puntos donde F es continua para la norma es un G_δ-denso. ■

Teorema 6.10 *Todo espacio hereditariamente Baire con la propiedad de Kaplansky está en la clase $\mathcal{N}$. En particular, todo espacio métrico completo está en la clase $\mathcal{N}$.*

DEM: Sea X un espacio hereditariamente Baire con la propiedad de Kaplansky y $f : X \times K \to [-1, 1]$ una función s.c. donde K es compacto. En virtud del lema 6.8 basta demostrar que la aplicación inducida $F : X \to C(K)$ tiene la propiedad $[h]$. Si $D \subset X$ es numerable, al ser X hereditariamente Baire, se cumple que $\overline{D}$ es un espacio de Baire separable. Con el teorema 6.9 y el lema 6.8 se obtiene que $F|_{\overline{D}}$ tiene la propiedad $[h]$, luego $F|_D$ también la tiene. Usando la proposición 6.7 se llega al resultado deseado. ■

OBSERVACIONES
a) Según su demostración, el teorema anterior sigue valiendo cuando sólo se supone que X es un espacio de Baire tal que cada cerrado separable $C \subset X$ es un espacio de Baire. Esta hipótesis, que parece más débil que la condición de ser X hereditariamente Baire, es equivalente a ella cuando cuando X es regular y cumple el primer axioma de numerabilidad [14].
b) Si X es hereditariamente Baire con la propiedad de Kaplansky, estas propiedades las heredan los subconjuntos cerrados de X y por lo tanto todo subespacio cerrado de X es de la clase $\mathcal{N}$. En [**?**] R.W. Hansell pregunta si es cierto que cada subespacio cerrado de un espacio de Namioka hereditariamente Baire sigue siendo un espacio de Namioka. También plantea Hansell el problema de averiguar si un G_δ de un espacio de Namioka es o no un espacio de Namioka.

El siguiente es el resultado clásico de Namioka [36]

Teorema 6.11 *Todo espacio localmente compacto es de la clase $\mathcal{N}$.*

DEM: Sea K compacto, y $F : X \to C_p(K)$ una función $t_p(K)$-continua. Suponemos primero que X es compacto. Para cada abierto $U \subset X$ se cumple que $F(\overline{U}) = H \subset C_p(K)$, con la topología de la convergencia puntual $t_p(K)$ es compacto, y es bien conocido que estos compactos tienen la propiedad de Kaplansky (véase el teorema 5.16). Como los compactos son hereditariamente Baire podemos utilizar el teorema 6.10 para deducir que la identidad $i : (H, t_p(K)) \to (C(K), \| \; \|_\infty)$ es continua en algún punto $\varphi \in H$. Si $a \in \overline{U}$ es tal que $F(a) = f_a = \varphi$ entonces $F|_{\overline{U}}$ es continua en a (para $\| \; \|_\infty$), y se sigue que para cada $\epsilon > 0$ hay un abierto $W \subset X$ tal que $a \in W \cap \overline{U}$ y $\operatorname{diam} F(W \cap \overline{U}) < \epsilon$. El abierto $V = W \cap U \subset U$ no es vacío y cumple la condición $\operatorname{diam} F(V) < \epsilon$ y así queda demostrado que F tiene la propiedad $[h]$. Con el lema 6.8 se obtiene que X es un espacio de Namioka.

Si X es localmente compacto y $U \subset X$ es abierto no vacío podemos considerar un abierto no vacío $G \subset U$ tal que $Y = \overline{G}$ sea compacto. Por el caso previo que acabamos de demostrar $F|_Y : Y \to (C(K), \| \; \|_\infty)$, es continua en algún punto $a \in Y$, luego para cada $\epsilon > 0$ hay un abierto $W \subset X$ tal que $a \in W \cap Y$ y $\operatorname{diam} F(W \cap Y) < \epsilon$. El abierto $V = W \cap G \subset U$ no es vacío y cumple la condición $\operatorname{diam} F(V) < \epsilon$. Queda demostrado que F tiene la propiedad $[h]$. Como los espacios localmente compactos son hereditariamente Baire, con el lema 6.8 concluimos que X es un espacio de Namioka. ■

Para proseguir con el estudio de la propiedad $\mathcal{N}(X, Y)$ conviene hacer algunas observaciones preliminares de carácter elemental.

Una función $\varphi : X \to [-\infty, \infty]$ definida en un espacio topológico X se dice que es semicontinua inferiormente cuando para todo número real c el conjunto $\{x \in X : \varphi > c\}$ es abierto. Dada una familia de funciones semicontinuas inferiormente $\varphi_j : X \to [-\infty, +\infty]$, $j \in J$, es fácil comprobar que su envoltura superior, $\varphi(t) = \sup_{j \in J} \varphi_j(t)$, es semicontinua inferiormente. Se sigue de esto que si ρ es la distancia asociada a la norma $\| \; \|_\infty$ de un espacio $C(K)$ entonces $\rho(f, g) = \sup\{|f(x) - g(x)| : x \in X\}$ es semicontinua inferiormente sobre el espacio producto $(C(K), t_p(K)) \times (C(K), t_p(K))$.

Si (E, ρ) es un espacio métrico y τ una topología en E tal que la distancia ρ es semicontinua inferiormente para la topología producto de $(E, \tau) \times (E, \tau)$, diremos que la distancia ρ es τ-semicontinua inferiormente (τ-s.i.). En general, para un espacio normado $(E, \| \; \|)$ hay varias topologías interesantes τ en E con la propiedad de que la distancia asociada a la norma, $\rho(x, y) = \| x - y \|$ es τ-semicontinua inferiormente. La topología débil, la topología débil* de un dual y la topología extremal $\sigma(E, \mathrm{ext})$ (la inducida por los puntos extremales de la bola del dual) son topologías con esta propiedad.

Si (E, ρ) es un espacio métrico y τ una topología en E tal que la distancia ρ es τ-semicontinua inferiormente entonces las bolas ρ-cerradas son τ-cerradas y se cumple que el diámetro de $A \subset E$ es igual al de su τ-clausura $\overline{A}^\tau$:

$$\rho\text{-diam } (A) = \rho\text{-diam } (\overline{A}^\tau)$$

(Si $\mu = \rho\text{-diam}(A)$, por la semicontinuidad inferior de la distancia el conjunto $\{(x, y) \in E \times E : \rho(x, y) \leq \mu\}$ es cerrado en el espacio producto $(E, \tau) \times (E, \tau)$. Como $A \times A$ está contenido en este conjunto, también está contenida en él su τ-clausura $\overline{A \times A}^{\,\tau} = \overline{A}^{\,\tau} \times \overline{A}^{\,\tau}$).

Lema 6.12 *Si $F : X \to (E, \rho)$ es continua para una topología τ en E tal que la distancia ρ es τ-s.i, y $A \subset X$ entonces $F|_A$ tiene la propiedad $[h]$ si y sólo si $F|_{\overline{A}}$ tiene la propiedad $[h]$.*

DEM: Si $F_{\overline{A}}$ tiene la propiedad $[h]$ es inmediato que $F|_A$ también la tiene. Recíprocamente, supongamos que $F|_A$ tiene la propiedad $[h]$. Si $U \subset X$ es abierto, y $U \cap \overline{A} \neq \emptyset$ entonces $U \cap A \neq \emptyset$, y por lo tanto existe un abierto $V \subset U$ tal que $V \cap A \neq \emptyset$ y ρ-diam $(F(V \cap A)) < \epsilon$. Este abierto también cumple

$$\rho\text{-diam } (F(V \cap \overline{A})) \leq \rho\text{-diam } (F(\overline{V \cap A})) \leq$$
$$\leq \rho\text{-diam } \overline{F(V \cap A)}^{\tau} = \rho\text{-diam } (F(U \cap A)) < \epsilon$$

La primera desigualdad es evidente. Para la segunda basta tener en cuenta la inclusión $F(\overline{V \cap A}) \subset \overline{F(V \cap A)}^{\tau}$ que es consecuencia de la τ-continuidad de F. La última desigualdad se cumple porque ρ es τ-s.i. Queda demostrado así que $F|_{\overline{A}}$ tiene la propiedad $[h]$. ■

Combinando el lema 6.12 con la proposición 6.8 se obtiene que si un espacio topológico X contiene un subespacio de Baire denso de la clase $\mathcal{N}$, entonces X también está en la clase $\mathcal{N}$.

Corolario 6.13 *Sea X un espacio topológico que tiene un subespacio denso $X_0 \subset X$ con la propiedad de Kaplansky y (E, ρ) un espacio métrico cuya distancia es τ-s.i. Si $F : X \to E$ es τ-continua y $F|_D$ tiene la propiedad $[h]$ para cada conjunto numerable $D \subset X_0$, entonces F tiene la propiedad $[h]$.*

DEM: En virtud de la proposición 6.12 basta demostrar que $F|_{X_0}$ tiene la propiedad $[h]$, lo que es consecuencia directa de la proposición 6.7. ■

El siguiente resultado, que mejora 6.10, aparece sin demostración en [26].

Teorema 6.14 *Sea X un espacio hereditariamente Baire que tiene un subespacio denso $X_0 \subset X$ con la propiedad de Kaplansky. Entonces X es un espacio de Namioka. En particular, todo espacio hereditariamente Baire con un subconjunto denso metrizable es un espacio de Namioka.*

DEM: Basta demostrar que si K es compacto toda aplicación $t_p(K)$-continua $F : X \to C(K)$ tiene la propiedad $[h]$ y para ello, según 6.13, que $F|_D$ tiene la propiedad $[h]$ para todo conjunto numerable $D \subset X_0$. Como $\overline{D} \subset X$ es un espacio de Baire separable, en virtud de 6.9, la restricción $F|_{\overline{D}}$ tiene la propiedad $[h]$ y por lo tanto $F|_D$ también la tine. ■

La siguiente definición, que desempeñará un papel importante en la siguiente sección, interviene en el lema 6.16.

Definición 6.15 *Sea $F : X \to (E, \rho)$ definida en un espacio topológico X con valores en un espacio métrico (E, ρ). Se dice que* *i) F es fragmentable si para cada $\epsilon > 0$ y cada conjunto no vacío $C \subset X$ hay un abierto $V \subset X$ tal que $C \cap V \neq \emptyset$ y ρ-diam $F(V \cap C) < \epsilon$.*

*ii) F es σ-fragmentable por conjuntos de $\mathcal{H} \subset \mathcal{P}(X)$ cuando para cada $\epsilon > 0$, existe una sucesión $X_n \in \mathcal{H}$ que cubre X, tal que para cada n y cada conjunto no vacío $C \subset X_n$ hay un abierto $V \subset X$ tal que $C \cap V \neq \emptyset$ y ρ-diam $F(C \cap V) < \epsilon$.
Cuando $\mathcal{H}$ es la familia de todas las partes de X se dice que F es σ-fragmentable y cuando $\mathcal{H}$ es la familia de los conjuntos cerrados se dice que F es σ-fragmentable por cerrados.*

Las siguientes observaciones son inmediatas:
i) La definición de aplicación fragmentable es equivalente a la que resulta considerando sólo conjuntos cerrados $C \subset X$.
ii) F es fragmentable si y sólo si para cada $C \subset X$ (que se puede suponer cerrado), la restricción $F|_C$ tiene la propiedad $[h]$. La afirmación, análoga para aplicaciones con la propiedad $[h]$ no es cierta.
iii) Toda función fragmentable es σ-fragmentable mediante conjuntos de cualquier familia $\mathcal{H}$ tal que $X \in \mathcal{H}$.
iv) Toda función σ-fragmentable mediante conjuntos de $\mathcal{F}(X) \bigwedge \mathcal{G}(X)$ tiene la propiedad $[h_\sigma]$.
v) Si $F : X \to E$ es σ-fragmentable (resp. σ-fragmentable por cerrados) y $\varphi : Y \to X$ es continua, siendo Y otro espacio topológico, entonces $F \circ \varphi$ también es σ-fragmentable (resp. σ-fragmentable por cerrados)

El siguiente lema, que complementa los resultados expuestos en el corolario 7.9 resulta útil para obtener resultados sobre la clase $\mathcal{N}^*$.

Lema 6.16 *Sea $F : X \to (E, \rho)$ una aplicación continua para una topología τ en E tal que ρ es τ-s.i. Si $F : X \to E$ es σ-fragmentable y X es un espacio de Baire entonces el conjunto ρ-Cont$(F) \subset X$ (de los puntos donde F es ρ-continua) es un $\mathcal{G}_\delta$ denso en X.*

Dem: Si demostramos que F tiene la propiedad $[h_\sigma]$, con el lema 6.8 se obtendrá el resultado.

Sea $\{X_n : n \in \mathbb{N}\}$ un cubrimiento de X tal que para todo conjunto no vacío $C \subset X_n$ existe un abierto $V \subset X$ tal que $C \cap V \neq \emptyset$ y ρ-diam $F(V \cap C) < \epsilon$. Si suponemos que $W \subset \overline{X_n}$ es un abierto no vacío se cumple que $C = W \cap X_n$ no es vacío y por lo tanto existe otro abierto $V \subset W$ tal que $\emptyset \neq V \cap C$ y ρ-diam $F(V \cap C) < \epsilon$. Razonando como en 6.12 se obtiene

$$\rho\text{-diam } F(V) = \rho\text{-diam } F(V \cap \overline{X_n}) \leq \rho\text{-diam } F(V \cap X_n) < \epsilon$$

y queda demostrado que F es cumple la propiedad $[h_\sigma]$ (usando la sucesión de cerrados $\overline{X_n}$). ■

Corolario 6.17 *Sea K un espacio compacto y $F : X \to C(K)$ una aplicación $t_p(K)$-continua y σ-fragmentable (con la norma usual de $C(K)$). Si X un espacio de Baire entonces $Cont(F) \subset X$ es un $\mathcal{G}_\delta$ denso en X.*

DEM: Es consecuencia directa del lema 6.16 ■

Siguiendo la terminología de [38] denotamos por Σ la clase de los compactos K tales que $(C(K), t_p(K))$ es σ-fragmentable por la norma usual de $C(K)$, lo que significa que la identidad $i : (C(K), t_p(K)) \to (C(K), \| \ \|_\infty)$ es σ-fragmentable según la definición 6.15. Si $K \in \Sigma$ es fácil ver que toda aplicación $t_p(K)$-continua $F : X \to (C(K), t_p(K))$ es σ-fragmentable luego, en virtud del corolario 6.17, K es de la clase $\mathcal{N}^*$ y queda establecida así la inclusión $\Sigma \subset \mathcal{N}^*$ ([38]). En [38] Namioka y Pol obtuvieron un ejemplo que demuestra que la inclusión es estricta, y que con una hipótesis especial de teoría de conjuntos (independiente de los axiomas ZFC) se puede obtener un compacto disperso $K \in \mathcal{N}^*$ tal que $(C(K), t_p(K))$ no es σ-fragmentable.

Se sabe que $(C(K), t_p(K))$ es σ-fragmentable cuando $C(K)$ admite una norma $\| \ \|$ equivalente a la usual, $t_p(K)$-semicontinua inferiormente, y con la propiedad de que en $S = \{f : \| f \| = 1\}$ la topología que induce la norma coincide con la inducida por $t_p(K)$ [28].

En relación con la clase Σ se sabe [31] que si K es un compacto que se expresa como unión numerable de compactos de la clase Σ entonces $K \in \Sigma$. Por otra parte en [28], y [31] se obtuvo que l_∞ no es σ-fragmentable, lo que implica que $\beta\mathbb{N} \notin \Sigma$.

El siguiente resultado, que volveremos utilizar en la siguiente sección, también sirve para demostrar que todo espacio de Baire metrizable está en la clase $\mathcal{N}$:

Proposición 6.18 *Si K es compacto, X es metrizable y $F : X \to C(K)$ es continua para la topología de la convergencia puntual $t_p(K)$. Entonces F es σ-fragmentable por cerrados.*

DEM: Consideremos primero el caso de una aplicación acotada $\|F(t)\|_\infty \leq 1$ para todo $t \in X$. Aplicando el teorema 2.6 a la función separadamente continua $f : X \times K \to [-1, 1]$, $f(t, y) = F(t)y$, se consigue una sucesión de funciones conjuntamente continuas $f_n : X \times K \to [-1, 1]$ que converge puntualmente hacia f. Las funciones inducidas $F_n : X \to C(K)$, $F_n(t)(y) = f_n(t, y)$ son continuas para la norma $\| \ \|_\infty$ y convergen puntualmente hacia F. Aplicando el teorema de la convergencia dominada de Lebesgue se obtiene que para cada $t \in X$ la sucesión $F_n(t)$ converge débilmente hacia $F(t)$ en el espacio de Banach $(C(K), \| \ \|_\infty)$. Sea $\{G_n : n \in \mathbb{N}\} \subset C(X, C(K))$ el conjunto numerable de las combinaciones convexas racionales de las funciones $\{F_n : n \in \mathbb{N}\}$. Entonces dado $\epsilon > 0$, la sucesión

$$X_n = \{t \in X : \|F(t) - G_n(t)\|_\infty \leq \epsilon/3\}$$

cubre X. (Recuérdese que en un espacio de Banach si una sucesión x_n converge débilmente hacia x entonces hay una sucesión en su envoltura convexa que converge hacia x en norma). Puesto que las bolas cerradas de $C(K)$ son cerradas para la topología de la convergencia puntual en $C(K)$ se sigue que cada X_n es un subconjunto cerrado de X.

Si $\emptyset \neq C \subset X_n$, como G_n es continua para la norma $\| \|_\infty$ existe un abierto $V \subset X$ tal que $C \cap V \neq \emptyset$ y ρ-diam $G_n(C \cap V) \leq \epsilon/3$, y usando que C está contenido en X_n se concluye que ρ-diam $F(C \cap V) \leq \epsilon$.

Finalmente, el caso general de una aplicación no acotada se reduce al caso anterior: Como la restricción de F a cada cerrado $X_n = \{t \in X : \|F(t)\|_\infty \leq n\}$ es σ-fragmentable por cerrados, F también lo es. ■

Ya hemos demostrado que los espacios completamente metrizables, y más generalmente, los espacios hereditariamente Baire con un subespacio denso metrizable, están en la clase $\mathcal{N}$. Como las aplicaciones σ-fragmentables por cerrados cumplen la propiedad $[h_\sigma]$, combinando la proposición 6.18 con el lema 6.8, o con el lema 6.16 obtenemos una demostración del siguiente resultado de Saint-Raymond [42]

Teorema 6.19 *Todo espacio de Baire metrizable es de la clase $\mathcal{N}$.*

Información sobre otros resultados. Según el resultado que demostró Namioka en 1974 [36], la clase $\mathcal{N}$ contiene a los espacios regulares fuertemente numerablemente completos, una clase que contiene a los espacios Cech-completos, y en particular a los localmente compactos y a los completamente metrizables. Christensen [9] en 1981, Saint-Raymond [42] en 1983 extendieron el teorema de Namioka a clases más amplias de espacios topológicos descritas en términos de juegos topológicos. Saint-Raymond [42] también demostró que todo espacio completamente regular de la clase $\mathcal{N}$ es un espacio de Baire, que un espacio metrizable es la clase $\mathcal{N}$ si y sólo si es de Baire y que todo espacio de Baire separable es de la clase $\mathcal{N}$. Por otra parte Talagrand [47] demostró en 1979 que cada espacio de Baire con una parte $\mathcal{K}$-analítica densa es de la clase $\mathcal{N}$ (esto lo vuelve a demostrar Debs [12] en 1986). Más recientemente Namioka y Pol [39] han demostrado que todo espacio completamente regular con un subespacio denso Cech-completo es de la clase $\mathcal{N}$

Los primeros resultados sobre la clase $\mathcal{N}^*$ se remontan a 1972 cuando Feiock demostró un resultado algo más fuerte del que se enuncia diciendo que la clase $\mathcal{N}^*$ contiene a los compactos metrizables.

En 1984 Deville demostró que los compactos de Eberlein son de la clase $\mathcal{N}^*$ y en 1986 Debs [11] mejoró el resultado estableciendo que la clase $\mathcal{N}^*$ contiene a los compactos de Corson. En 1986 Talagrand [46] obtuvo el primer ejemplo de un compacto $K \notin \mathcal{N}^*$ tal que $\mathcal{N}(B, K)$ se cumple para todo espacio α-favorable B (una clase especial de espacios de Baire). En 1989 Deville [15] logró demostrar que $\beta\mathbb{N}$ no está en la clase $\mathcal{N}^*$ y que todo compacto disperso K con $K^{(\omega_1)} = \emptyset$ está en la clase $\mathcal{N}^*$. (ω_1 es el primer ordinal no numerable). En relación con este último resultado merece la pena mencionar que Haydon [23] obtuvo un compacto $K \notin \mathcal{N}^*$, tal que $K^{(\omega_1)}$ se reduce a un punto.

Con técnicas de renormamiento de espacios de Banach, en 1992 Deville y Godefroy [16] demostraron que las imágenes continuas de los compactos de Valdivia (una clase de compactos más amplia que la de los compactos de Corson) son de la clase $\mathcal{N}^*$, lo que implica que la clase $\mathcal{N}^*$ contiene a los compactos diádicos (imágenes continuas de $\{0,1\}^I$) y a los grupos topológicos compactos. Según [16] el espacio de Ciesielki-Pol (un compacto no Eberlein, tal que $K^{(\omega_1)} \neq \emptyset$) es de la clase $\mathcal{N}^*$, no es Corson, y no contiene a $[0,\omega_1]$.

Deville y Godefroy [16] observaron que si el espacio de Banach $C(K)$ admitía una norma, equivalente a la usual, $t_p(K)$-semicontinua inferiormente y localmente uniformemente convexa entonces $K \in \mathcal{N}^*$, y plantearon la pregunta de la existencia de un compacto $K \in \mathcal{N}^*$ tal que $C(K)$ no admite una norma equivalente a la usual con estas propiedades. En [?] se contestó a la pregunta obteniendo un compacto disperso K, tal que $K^{(\omega_1)} \neq \emptyset$, con estas propiedades.

Los resultados más recientes sobre la clase $\mathcal{N}^*$ se deben a Bouziad [6] que consiguió demostrar que la clase $\mathcal{N}^*$ es estable por productos arbitrarios y que para un espacio de Baire B, si los compactos K_1, K_2 cumplen $\mathcal{N}(B, K_1)$ y $\mathcal{N}(B, K_2)$ entonces se cumple $\mathcal{N}(B, K_1 \times K_2)$. Como existen compactos que no están en la clase $\mathcal{N}^*$ y $[0,1]^\Gamma$ es de la clase $\mathcal{N}^*$ se sigue que la clase $\mathcal{N}^*$ no es estable por subespacios cerrados. Previamente [4] Bouziad había introducido una clase de compactos $\mathcal{P} \subset \mathcal{N}^*$ estable por productos y por otras operaciones topológicas, que contiene al compacto $[0,\omega_1]$ y a los compactos que son producto de espacios metrizables, y demostró que la clase $\mathcal{N}^*$ es estable por imágenes continuas (volviendo a obtener que los compactos diádicos están en la clase $\mathcal{N}^*$). En [5] Bouziad volvió a demostrar, con técnicas de juegos topológicos, que los compactos de ordinales $[0,\mu]$ y los compactos de Valdivia están en la clase $\mathcal{N}^*$ y que los compactos de Corson verifican una condición de Namioka fuerte (exigiendo sólo la continuidad de $F : X \to C(K)$ para la topología $t_p(D)$ de la convergencia puntual sobre un conjunto D denso en K).

COMENTARIOS: Las definiciones 6.6 son las formulaciones naturales, para funciones, de nociones análogas que intervienen en el estudio de propiedades topológicas de los espacios de Banach (que ahora corresponden al caso particular de la identidad $i : (A,\tau) \to (A, \| \ \|)$ donde A es un subconjunto de un espacio de Banach y τ es una topología más gruesa que la de la norma, como la débil, o la débil* en el caso de un dual ([18], [37], [27]) La noción de fragmentabilidad en el contexto de los espacios métricos se introdujo en [27]. Los espacios compactos (K,τ) que se pueden dotar de una distancia d tal que la identidad $i : (K,\tau) \to (K,d)$ es fragmentable desempeñan un papel destacado en la teoría de espacios de Banach (diferenciabilidad de funciones convexas) y han sido objeto de estudio en investigaciones recientes [37].

La definición de aplicación σ-fragmentable aparece en [29], como la extensión natural, al caso de funciones, de la noción de espacio σ-fragmentado considerada en [?].

Capítulo 7

Funciones de la primera clase. Teorema de Srivatsa

En lo que sigue X será un espacio topológico Hausdorff y E un espacio topológico, que casi siempre será un espacio métrico con métrica ρ, o un espacio normado con norma $\| \ \|$. La familia de los subconjuntos cerrados (resp. abiertos) de X, se denotará $\mathcal{F}(X)$ (resp. $\mathcal{G}(X)$). Análogamente $\mathcal{Z}(X)$ (resp. $\mathcal{U}(X)$) designará la subfamilia de $\mathcal{F}(X)$ (resp. $\mathcal{G}(X)$) formada por los conjuntos que son ceros (resp. coceros) de funciones reales continuas sobre X. Es fácil ver que $\mathcal{Z}(X)$ es estable frente a intersecciones numerables y uniones finitas.

Si $\mathcal{H}$ es una familia de subconjuntos de X entonces $\mathcal{H}_\sigma$ (resp. $\mathcal{H}_\delta$) es la familia de uniones (resp. intersecciones) numerables de conjuntos de $\mathcal{H}$. Si (X, d) es un espacio métrico se verifica $\mathcal{Z}(X) = \mathcal{F}(X)$ ya que para cada cerrado $C \subset X$ se cumple $C = \{t \in X : d(t, F) = 0\}$.

Utilizaremos las siguientes notaciones:

$C(X, E)$: Espacio de las funciones continuas de X en E.

$B_1(X, E)$: Espacio de las funciones de X en E que son límites puntuales de sucesiones en $C(X, E)$ (funciones de la primera clase de Baire).

$F_\sigma(X, E)$: Espacio de las funciones de X en E tales que $f^{-1}(G) \in \mathcal{F}_\sigma(X)$ para cada abierto $G \subset E$. (funciones de la primera clase de Borel). (Análogamente $Z_\sigma(X, E)$ designará el espacio de las funciones de X en E tales que $f^{-1}(G) \in \mathcal{Z}_\sigma(X)$ para cada abierto $G \subset E$.

$B_1(X) = B_1(X, \mathbb{R})$

Proposición 7.1 *Si X es un espacio topológico y (E, ρ) un espacio métrico se verifica $B_1(X, E) \subset Z_\sigma(X, E)$, luego toda función de la primera clase de Baire es de la primera clase de Borel.*

DEM: Sea $f \in B_1(X, E)$ y $\varphi_n \in C(X, E)$ una sucesión tal que $f(t) = \lim_n \varphi_n(t)$ para todo $t \in X$. Si $G \subset E$ es abierto existe una sucesión de cerrados $Z_n \subset E$

tal que

$$G = \bigcup_n Z_n \quad \text{y} \quad Z_n \subset \overset{\circ}{Z}_{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Como las funciones φ_j son continuas y $Z_k \in \mathcal{Z}(E)$ (porque E es un espacio métrico) podemos asegurar que para $m, k \in \mathbb{N}$ los conjuntos

$$F_{km} = \bigcap_{j \geq m} \varphi_j^{-1}(Z_k)$$

pertenecen a $\mathcal{Z}(X)$. Usando que $G = \cup_n \overset{\circ}{Z}_n = \cup_n Z_n$ y la definición de límite es fácil comprobar que $f^{-1}(G) = \bigcup_{k,m} F_{km} \in \mathcal{Z}_\sigma(X)$. ■

Con el siguiente ejemplo [41] se pone de manifiesto que el resultado anterior no es cierto cuando el espacio de llegada E no es metrizable.

Ejemplo 7.2 *Sea E el espacio vectorial de las funciones acotadas $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dotado de la topología de convergencia puntual. Sea $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por*

$$g(x,y) = \frac{2xy}{x^2 + y^2} \qquad \textit{si } (x,y) \neq (0,0) \quad g(0,0) = 0$$

La aplicación $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to E$ definida por $f(x,y)(t) = g(x-t, y-t)$ es de la primera clase de Baire porque es separadamente continua (véase el teorema 2.6) y sin embargo no es medible Borel.

DEM: f es separadamente continua porque g lo es y la topología de E es la de la convergencia puntual. Vamos a ver que existe un abierto $V \subset E$ tal que $f^{-1}(V)$ no es un conjunto de Borel en $\mathbb{R}^2$.

Para cada $t \in \mathbb{R}$, el conjunto $V_t := \{\varphi \in E : |\varphi(t)| < 1/2\}$ es abierto en E y $f(x,y) \in V_t$ sí y sólo sí $|g(x-t, y-t)| < 1/2$. La diagonal $\Delta \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ cumple que $\Delta \cap f^{-1}(V_t) = \{(t,t)\}$ (obsérvese que g vale 1 sobre $\Delta \setminus \{(0,0)\}$, luego el único punto $(a,a) \in \Delta$ que cumple $1/2 \geq |g(a-t, a-t)|$ es $(a,a) = (t,t)$). Entonces, si $S \subset \mathbb{R}$ no es de Borel, el abierto

$$V = \bigcup_{s \in S} V_s \subset E$$

tiene la propiedad de que $\Delta \cap f^{-1}(V) = \{(s,s) : s \in S\} = S \times S$ no es de Borel en $\mathbb{R}^2$, y por lo tanto $f^{-1}(V)$ tampoco es de Borel en $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$. ■

Proposición 7.3 *Sea X un espacio topológico y $(E, \|\ \|)$ un espacio de Banach. Si $f : X \to E$ es límite uniforme de una sucesión $f_n \in B_1(X,E)$ entonces $f \in B_1(X,E)$.*

DEM: Extrayendo una subsucesión, podemos suponer que para todo $t \in X$ y todo $n \in \mathbb{N}$ se cumple $\|f_n(t) - f(t)\| \leq 1/2^{n+2}$. Entonces podemos obtener f como suma de la serie telescópica $f = \varphi_1 + \sum_{n\geq 2} \varphi_n$, donde $\varphi_1 = f_1$, y para $n \geq 2$ es $\varphi_n = f_n - f_{n-1}$. En virtud de la desigualdad triangular, para todo $t \in X$ y todo $n \in \mathbb{N}$ se cumple $\|\varphi_n(t)\| < 1/2^n$.
Como $\varphi_n \in B_1(X, E)$ tenemos que $\varphi_n(t) = \lim_j \varphi_{nj}(t)$ donde $\varphi_{nj} \in C(X, E)$. Consideremos la función $\alpha_n : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ definida por

$$\alpha_n(t) = 1 \text{ si } 0 \leq t \leq 1/2^n, \quad \alpha_n(t) = 1/(2^n t) \text{ si } t \geq 1/2^n$$

Las funciones $\phi_{nj}(t) = \alpha_n(\| \varphi_{nj}(t) \|)\varphi_{nj}(t)$ son continuas, $\phi_{nj} \in C(X, E)$, y para todo $t \in X$ se cumple $\|\phi_{nj}(t)\| \leq 1/2^n$ (considere los casos $\|\varphi_{nj}(t)\| \leq 1/2^n$ y $\|\varphi_{nj}(t)\| > 1/2^n$) luego la serie $\sum_{n=2}^{\infty} \phi_{nj}(t)$ converge uniformemente respecto del par $(t, j) \in X \times \mathbb{N}$. Es claro que:

$$\lim_j \phi_{nj}(t) = \alpha_n(\|\varphi_n(t)\|)\varphi_n(t) = \varphi_n(t)$$

En virtud de la convergencia uniforme la suma $g_j(t) = \sum_{n=2}^{\infty} \phi_{nj}(t)$ es continua para todo $j \in \mathbb{N}$ y se cumple

$$\lim_j g_j(t) = \sum_{n\geq 2} \lim_j \phi_{nj}(t) = \sum_{n\geq 2} \varphi_n(t)$$

Queda establecido así que la función $g(t) = \sum_{n\geq 2} \varphi_n(t)$ está en $B_1(X, E)$ y se sigue que $f = g + \varphi_1 \in B_1(X, E)$. ■

OBSERVACIÓN: Xodo espacio métrico (E, ρ) se puede sumergir de modo isométrico en un espacio normado $(B, \| \, \|)$ como sigue: Sea $B = C_b(E)$ con la norma $\| \, \|_\infty$ Fijando un punto $a \in E$, sea $\varphi_e(t) = \rho(t, e) - \rho(t, a)$. Es fácil comprobar que la aplicación $j : E \to B$ definida por $j(e) = \varphi_e$ verifica

$$\|\varphi_{e_1} - \varphi_{e_2}\|_\infty = \sup_{t\in E} |\rho(t, e_1) - \rho(t, e_2)| = \rho(e_1, e_2)$$

Se sigue de esto que si f es límite uniforme de una sucesión de funciones $f_n \in B_1(X, E)$, con valores en un espacio métrico (E, ρ) entonces, según el lema anterior, existe una sucesión de funciones continuas $g_n \in C(X, B)$, ¡ con valores en B! que converge puntualmente hacia f. Cuando podamos asegurar la existencia de una retracción continua $r : B \to E$ también podremos asegurar que existe una sucesión de funciones continuas $r \circ g_n \in C(X, E)$, ¡ con valores en E!, que converge puntualmente hacia f y por lo tanto también se cumplirá que $f \in B_1(X, E)$.

Nuestro siguiente objetivo es obtener una caracterización útil de las funciones de la primera clase de Baire, definidas en un espacio métrico X con valores en un espacio de Banach $(E, \| \, \|)$.

Lema 7.4 *Sea (X, d) un espacio métrico, $(E, \| \ \|)$ un espacio de Banach y $f : X \to E$ una aplicación para la que existe una partición numerable de X, $\{X_n : n \in \mathbb{N}\}$, formada por conjuntos $\mathcal{F}_\sigma(X)$, tales que cada restricción $f|_{X_n}$ es continua. Entonces $f \in B_1(X, E)$.*

DEM: Para cada $n \in \mathbb{N}$ sea $\{A_{nk} : k \in \mathbb{N}\}$ una sucesión creciente de cerrados con unión X_n. Como $C_m = \cup\{A_{nm} : 1 \leq n \leq m\}$ es unión finita y disjunta de cerrados sobre los que f es continua, también es continua $f|_{C_m}$. Con el teorema de extensión de Borsuk-Dugundji 2.5 se consigue una sucesión de funciones continuas $f_m : X \to E$ tal que cada f_m coincide con f sobre C_m. Como la sucesión C_m es creciente se sigue que f es límite puntual de la sucesión de funciones continuas f_m. ■

Teorema 7.5 *Para una aplicación $f : X \to E$ definida en un espacio un métrico (X, d) con valores en un espacio de Banach $(E, \| \,\|)$, son equivalentes:*

a) $f \in B_1(X, E)$.

b) Para cada $\epsilon > 0$ hay una familia numerable de cerrados $\{X_n : n \in \mathbb{N}\}$ que cubre X y verifica
(*) Cada $a \in X_n$ tiene un entorno $V_a \subset X$ tal que ρ-diam $f(V_a \cap X_n) \leq \epsilon$.

c) f es σ-fragmentable por cerrados, es decir, para cada $\epsilon > 0$ hay una familia numerable de cerrados $\{X_n : n \in \mathbb{N}\}$ que cubre X y verifica
(**) Si $\emptyset \neq C \subset X_n$ hay un abierto $V \subset X$ tal que $C \cap V \neq \emptyset$ y ρ-diam $f(C \cap V) \leq \epsilon$.

DEM: a) $\Rightarrow$ b) Por hipótesis hay una sucesión $f_n \in C(X, E)$ tal que para cada $t \in X$ se cumple $\|f(t) - f_n(t)\| \to 0$. Considerando los conjuntos cerrados

$$X_n = \bigcap_{m \geq n} \{t \in X : \|f_n(t) - f_m(t)\| \leq \epsilon/3\}$$

es claro que para cada $t \in X$ se cumple $\|f_n(t) - f(t)\| \leq \epsilon/3$ $\quad\diamondsuit$

Por la continuidad de f_n cada $a \in X_n$ tiene un entorno abierto $V_a \subset X$, tal que ρ-diam $f_n(V_a) < \epsilon/3$ y usando $\diamondsuit$ se concluye que ρ-diam $f(V_a \cap X_n) \leq \epsilon$.

b) $\Rightarrow$ a) Si se cumple b) demostraremos que para cada $\epsilon > 0$ existe una función $f_\epsilon \in B_1(X, E)$ tal que $\|f(t) - f_\epsilon(t)\| \leq \epsilon$ para todo $t \in X$ y con la proposición 7.3 se obtendrá que $f \in B_1(X; E)$.

Con la sucesión de cerrados que suministra la condición b) se consigue una partición numerable $\{Y_n : n \in \mathbb{N}\}$ de X, tal que cada Y_n es un conjunto $\mathcal{F}_\sigma(X)$, (que puede suponerse no vacío) contenido en algún X_m. Por lo tanto se sigue cumpliendo que para cada $a \in Y_n$ hay un entorno abierto $V_a \subset X$ tal que ρ-diam $f(V_a \cap Y_n) \leq \epsilon$. En el razonamiento que sigue trabajamos en Y_n con su topología relativa y con el cubrimiento abierto de Y_n formado por los abiertos (relativos) $\{V_a \cap Y_n : a \in Y_n\}$. Sea $\{\varphi_i^n : i \in I_n\}$ una partición de la unidad localmente finita subordinada a este cubrimiento de Y_n. Escogiendo puntos $t_i^n \in Y_n$ con $\varphi_i^n(t_i^n) > 0$ se define la función continua

$$g_n(t) = \sum_{i \in I_n} \varphi_i^n(t) f(t_i^n)$$

que cumple $\| g_n(t) - f(t) \| \leq \epsilon$ para todo $t \in Y_n$. En virtud del lema 7.4 la función $f_\epsilon : X \to E$ que sobre cada Y_n coincide con g_n, pertenece a $B_1(Y_n, E)$ y verifica la condición requerida, $\|f(t) - f_\epsilon(t)\| \leq \epsilon$ para todo $t \in X$.

b) $\Leftrightarrow$ c): Es evidente que b) $\Rightarrow$ c) y basta demostrar c) $\Rightarrow$ b). Dado $\epsilon > 0$ sea X_n la sucesión de cerrados que proporciona la condición c). En lo que sigue, para simplificar la escritura, denotamos por T uno de estos cerrados con su topología relativa. Por hipótesis T cumple la condición

(P_ϵ) Para cada conjunto no vacío $C \subset T$ hay un abierto (relativo) $G \subset T$ tal que $C \cap G \neq \emptyset$ y ρ-diam $f(C \cap G) \leq \epsilon$.

Aplicando esta condición para $C = T$ obtenemos un abierto relativo no vacío $G_0 \subset T$ tal que ρ-diam $f(G_0) \leq \epsilon$. Si el conjunto $T \setminus G_0$ no es vacío, aplicando otra vez la condición (P_ϵ) al conjunto $C = T \setminus G_0$ se consigue otro abierto relativo no vacío $G_1 \subset T$ tal que

$$\rho\text{-diam } f(G_1 \cap (T \setminus G_0)) \leq \epsilon$$

Se continua usando recurrencia transfinita: Sea γ un ordinal tal que para cada ordinal $\xi < \gamma$ se tienen definidos abiertos relativos no vacíos $\{G_\xi : \xi < \gamma\}$ con la propiedad de que cada conjunto $M_\xi := G_\xi \cap \left(T \setminus \bigcup_{\mu<\xi} G_\mu\right)$ cumple ρ-diam $f(M_\xi) \leq \epsilon$. El proceso continua hasta llegar a un ordinal Γ para el que se cumple

$$T = \bigcup_{\mu<\Gamma} G_\mu = \bigcup_{\mu<\Gamma} M_\mu$$

Los conjuntos $F_0 = Y, \ \ F_\xi = T \setminus \bigcup_{\mu<\xi} G_\mu$, son cerrados en T y por lo tanto también son cerrados en T los conjuntos

$$F_{\xi k} = \{t \in F_\xi : d(t, T \setminus G_\xi) \geq 1/k\}$$

Es fácil comprobar que $M_\xi = \bigcup_k F_{\xi k}$ y que para cada $k \in \mathbb{N}$ la familia de cerrados $\{F_{\xi k} : \xi < \Gamma\}$ es discreta: Si $\gamma \neq \xi$, y $\gamma > \xi$, se tiene

$$d(F_{\xi k}, F_{\gamma k}) \geq d(F_{\xi k}, F_\gamma) \geq d(F_{\xi k}, T \setminus G_\xi) \geq 1/k$$

Como la unión de una familia discreta de cerrados es cerrada se sigue que cada $D_k = \bigcup_{\xi<\Gamma} F_{\xi k}$ es un subconjunto cerrado de T (y por lo tanto de X). Además, la sucesión de cerrados $\{D_k : k \in \mathbb{N}\}$ cubre T (dado $y \in T$ existe $\gamma < \Gamma$ tal que $y \in M_\gamma = G_\gamma \cap F_\gamma$ luego para algún $k \in \mathbb{N}$ se cumple $y \in F_{\gamma k} \subset D_k$).

Dado $a \in D_k$, como la familia $\{F_{\xi k} : \xi < \Gamma\}$ es discreta en T, existe $V_a \subset T$, entorno abierto de a (en X) tal que $V_a \cap T$ sólo corta a un cerrado $F_{\gamma n}$ de esta familia, luego $V_a \cap D_k = V_a \cap F_{\gamma k} \subset M_\gamma$ y por lo tanto ρ-diam $f(V_a \cap D_k) \leq \epsilon$.

Por lo que se acaba de demostrar cada X_n se puede expresar como unión de una sucesión de cerrados $\{D_k^n : k \in \mathbb{N}\}$ con la propiedad de que para cada $a \in D_k^n$ existe $V_a \subset X$, entorno un abierto de a, tal que ρ-diam $f(V_a \cap D_k^n) \leq \epsilon$.

El cubrimiento numerable de cerrados $\{D_k^n : (n,k) \in \mathbb{N}^2\}$ sirve para demostrar que f cumple b). ■

Teorema 7.6 [Srivatsa] *Sea K un espacio compacto y $(E, \| \ \ \|)$ un espacio de Banach. Si X es un espacio topológico metrizable se verifica:*
i) Toda función $f : X \to C(K)$ continua para la topología de la convergencia puntual $t_p(K)$ es de la primera clase de Baire.
ii) Toda función $f : X \to E$ continua para la topología débil $\sigma(E, E^*)$ es de la primera clase de Baire.

DEM: i) es consecuencia directa de la proposición 6.18 y el teorema 7.5.
Para obtener ii) basta considerar el compacto $K = B_{E^*}$ (con la topología débil*). Sea $j : E \hookrightarrow (C(K), \| \|_\infty)$ la isometría natural que permite identificar E con un subespacio de $C(K)$. La composición $\hat{f} = j \circ f : X \to C(K)$ es $t_p(K)$-continua y según la proposición 6.18, $\hat{f}$ es σ-fragmentable por cerrados, luego f también lo es. Con el teorema 7.5 se obtiene que $f \in B_1(X, E)$. ■

Teorema 7.7 *Si X es un espacio metrizable y $(E, \| \|)$ un espacio de Banach separable se verifica $B_1(X, E) = F_\sigma(X, E)$.*

DEM: Después de 7.1 basta demostrar que $F_\sigma(X, E) \subset B_1(X, E)$ y para ello que cada $f \in F_\sigma(X, E)$ es σ-fragmentable por cerrados: Si E es separable, para cada $\epsilon > 0$ hay una familia numerable de bolas abiertas $\{B_n : n \in \mathbb{N}\}$, de radio $\epsilon/2$, que cubre X. Entonces $H_n = f^{-1}(B_n) \in \mathcal{F}_\sigma(X)$ es una sucesión que cubre X y cada H_n es de la forma $H_n = \cup_{k=1}^\infty C_{nk}$, donde los conjuntos C_{nk} son cerrados. Como $C_{nk} \subset H_n$ se sigue que $f(C_{nk}) \subset B_n$ y por lo tanto ρ-diam$f(C_{nk}) \leq \epsilon$. La familia numerable de cerrados $\{C_{nk} : (n.k) \in \mathbb{N}^2\}$ cumple la condición P_ϵ que interviene en el teorema 7.5, y con este teorema se obtiene que $f \in B_1(X, E)$. ■

Corolario 7.8 *Si X es metrizable y $f : X \to \mathbb{R}$, son equivalentes:*

i) $f \in B_1(X)$

ii) $f^{-1}(G) \in \mathcal{F}_\sigma(X)$ *para cada abierto* $G \subset \mathbb{R}$.

La propiedad del punto de continuidad. Una función $f : X \to (E, \rho)$ definida en un espacio topológico X con valores en un espacio métrico (E, ρ) se dice que tiene la propiedad del punto de continuidad (P.C.) cuando para cada cerrado $C \subset X$ la restricción $f|_C$ es continua en algún punto. El espacio de las funciones $f : X \to (E, \rho)$ con la propiedad del punto de continuidad lo denotaremos $PC(X, E)$. Es inmediato que toda función con la propiedad del punto de continuidad es fragmentable.

Proposición 7.9 *Para una aplicación $f : X \to (E, \rho)$ definida en un espacio hereditariamente Baire X son equivalentes:*

a) f tiene la propiedad del punto de continuidad.

b) f es fragmentable.

c) f es σ-fragmentable mediante conjuntos cerrados.

d) f es σ-fragmentable mediante conjuntos $\mathcal{F} \wedge \mathcal{G}$.

DEM: Es evidente que a) $\Rightarrow$ b) $\Rightarrow$ c) $\Rightarrow$ d).
d) $\Rightarrow$ a): Si f es σ-fragmentable mediante conjuntos $\mathcal{F}(X)\wedge\mathcal{G}(X)$ es claro que su restricción a cada cerrado $C \subset X$ es σ-fragmentable mediante conjuntos $\mathcal{F}(C) \wedge \mathcal{G}(C)$ y por lo tanto tiene la propiedad $[h_\sigma]$. Por hipótesis C es un espacio de Baire y aplicando el lema 6.8 se obtiene que $f|_C$ tiene un punto de continuidad. ∎

OBSEREVACIÓN: De acuerdo con la demostración anterior y el lema 6.8, si X es hereditariamente Baire y $f : X \to (E, \rho)$ tiene la propiedad del punto de continuidad entonces, para cada cerrado $C \subset X$, el conjunto de los puntos de continuidad de $f|_C$ es un G_δ denso en C (para la topología relativa).

Corolario 7.10 *Para una aplicación $f : X \to (E, \rho)$ definida en un espacio métrico completo X, son equivalentes*

a) f tiene la propiedad del punto de continuidad.

b) $f|_K$ tiene un punto de continuidad para cada compacto $K \subset X$.

DEM: Basta demostrar que b) $\Rightarrow$ a), y lo haremos por reducción al absurdo.

En lo que sigue s representa una sucesión finita de ceros y unos, $|s|$ su longitud y $s, 0$ y $s, 1$ las sucesiones obtenidas añadiendo un cero o un uno a la sucesión s. Si f no tiene la propiedad del punto de continuidad, según la proposicion 7.9 f no es fragmentable, luego existe $\epsilon > 0$ y un conjunto no vacío $M \subset X$ tal que para todo abierto relativo no vacío $U = G \cap M$, $G \in \mathcal{G}(X)$ se cumple ρ-diam$(f(U)) > \epsilon$. En lo que sigue trabajamos en el subespacio métrico (M, d).

Fijada una bola abierta $B_M(a, r) \subset M$, como ρ-diam$(f(B_M(a, r))) > \epsilon$, existen x_0, $x_1 \in B_M(a, r)$ tales que $x_0 = a$ y $\rho(f(x_0), f(x_1)) > \varepsilon/2$. Tomamos $r_1 < r/2$ tal que $B_M(x_1, r_1) \subset B_M(a, r)$. Se repite la construcción con las bolas $B_M(x_0, r_1)$, $B_M(x_1, r_1)$ y, para $i = 0, 1$ y $k = 0, 1$ se obtienen bolas abiertas $B_M(x_{ik}, r_2) \subset B_M(x_i, r_1)$ con $x_{i0} = x_i$ y $r_2 < r_1/2$, verificando $\rho(f(x_{i0}), f(x_{i1})) > \varepsilon/2$. Repitiendo sucesivamente esta construcción se obtiene un conjunto precompacto numerable $P = \{x_s : |s| \geq 1\} \subset M$ y una familia numerable de bolas abiertas $\{B_M(x_s, r_n) : |s| = n \geq 1\}$, tal que para cada $y \in P$ hay una sucesión de bolas de esta familia, centradas en y, cuyos radios tienden a cero.

Es claro que P sigue siendo un subconjunto precompacto de X y por lo tanto, como X es métrico completo, $K = \overline{P}$ (adherencia en X) es un subconjunto compacto de X. Por hipótesis $f|_K$ es continua en algún punto $b \in K$ y existe un entorno abierto de b, $V \subset X$, tal que ρ-diam $f(V \cap K) < \epsilon/2$. Obsérvese que V tiene intersección no vacía con P. Dado $y \in P \cap V$, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $B(y, r_n) \subset V$ siendo $y = x_s$ para algún s con $|s| = n$. Puesto que $x_{s,0}$, $x_{s,1}$ pertenecen ambos a $B(y, r_n) \cap P$ se tiene que ρ-diam$(f(V \cap P)) > \epsilon/2$, y así se llega a una contradicción. ∎

OBSERVACIÓN: En el caso particular de un espacio metrizable X el resultado que se obtuvo en la proposición 6.7 está implícito en la demostración de 7.10

donde realmente se ha demostrado que la aplicación $f : X \to (E, \rho)$ tiene la propiedad $[h]$ si y sólo si para cada precompacto numerable $P \subset X$ la restricción $f|_P$ tiene propiedad $[h]$.

Un espacio topológico X se dice que es *polaco* si es separable y metrizable mediante una métrica para la que es completo. Las imágenes continuas de los espacios polacos reciben el nombre de espacios analíticos. Sea $\mathcal{A}(X)$ (resp. $\mathcal{B}(X)$) la familia de los subconjuntos analíticos (resp. de Borel) del espacio topológico X. En la demostración del siguiente lema utilizaremos los siguientes resultados de la teoría de espacios analíticos:

i) Si X es un espacio polaco entonces $\mathcal{B}(X) \subset \mathcal{A}(X)$.

ii) Si X es un espacio analítico no numerable entonces X contiene una copia del compacto de Cantor $\Delta = \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ y se verifica

$$\text{Card(X)} = \text{Card}(\mathcal{B}(X)) = \text{Card}(\mathcal{A}(X)) = c$$

Usando i) se obtiene que si P es un espacio polaco y $g : P \to \mathbb{R}$ es de la primera clase de Borel entonces g transforma conjuntos de Borel en conjuntos analíticos: Si $B \subset P$ es un conjunto de Borel es fácil ver que la gráfica de $G_B = \{(x, y) \in P \times \mathbb{R} : x \in B, y = g(x)\}$ es un subconjunto de Borel del espacio polaco $P \times \mathbb{R}$ y por lo tanto, en virtud de i) es un espacio analítico. Entonces su imagen continua mediante la segunda proyección $\pi_2(x, y) = y$, $\pi_2(G_B) = g(B)$ también es un espacio analítico.

Lema 7.11 *Si P es un espacio polaco, cada función de la primera clase de Borel $f : P \to (E, \rho)$ con valores en un espacio métrico (E, ρ), tiene imagen separable.*

DEM: Lo demostraremos por reducción al absurdo suponiendo que $f(P)$ no es separable. En ese caso existe $\delta > 0$ y un conjunto no numerable $D \subset f(P)$ tal que cada par de elementos distintos $e_1, e_2 \in D$ cumple $\rho(e_1, e_2) \geq \delta$. Podemos suponer que $\text{Card}(D) \leq c$, luego existe una inyección $\varphi : D \to [0, 1]$. Como D es un subconjunto discreto de E, podemos afirmar que D es un subconjunto cerrado de E y que φ es continua. Entonces φ admite una extensión continua $\phi : E \to [0, 1]$. La composición $\phi \circ f : P \to \mathbb{R}$ es de la primera clase de Borel, y según la observación preliminar transforma conjuntos de Borel en conjuntos analíticos. Se sigue de esto que cada $M_0 \subset M = \phi(D)$ es analítico: Sea $M_0 = \phi(D_0)$, con $D_0 \subset D$. Como D_0 es un subconjunto cerrado de E se cumple que $f^{-1}(D_0)$ es un conjunto de Borel en X y su imagen $M_0 = \phi \circ f(f^{-1}(D_0))$ mediante $\phi \circ f$ es un conjunto analítico. En particular M es un conjunto analítico no numerable y según ii) M contiene una copia del conjunto de Cantor Δ. Se llega así a una contradicción porque Δ contiene subconjuntos no analíticos. ■

Proposición 7.12 *Si* (X, d) *es un espacio métrico completo, cada función de la primera clase de Borel* $f : X \to (E, \rho)$ *tiene la propiedad del punto de continuidad.*

DEM: El compacto $K \subset X$ es un espacio polaco. Como $f|_K$ es de la primera clase de Borel, según el lema 7.11, $f(K)$ es un subconjunto separable de E y por lo tanto $f|_K$ es σ-fragmentable por cerrados. Aplicando el corolario 7.9 se concluye que $f|_K$ tiene algún punto de continuidad, y el resultado se obtiene invocando 7.10. ■

En general no es cierto que las funciones de la primera clase de Borel tengan la propiedad del punto de continuidad: Si $X = \mathbb{Q}$ con la topología usual, cada función definida sobre X es de la primera clase de Borel, pero existe $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$ sin la propiedad del punto de continuidad (véase [32],remark 3, p. 396).

Los resultados obtenidos hasta ahora proporcionan la siguiente caracterización de las funciones de la primera clase, que combina resultados de [44] y [22], y hace intervenir la noción de aplicación σ-fragmentable por cerrados considerada en [29]:

Teorema 7.13 *Para una aplicación* $f : X \to E$ *definida en un espacio métrico completo* (X, d)*, con valores un espacio de Banach* $(E, \| \|)$ *son equivalentes*

a) *Para cada cerrado* $C \subset X$*,* $f|_C$ *tiene algún punto de continuidad.*

a') *Para cada compacto* $K \subset X$*,* $f|_K$ *tiene algún punto de continuidad.*

b) f *es* σ*-fragmentable por cerrados.*

c) $f \in B_1(X, E)$

d) $f \in F_\sigma(X, E)$

Material complementario. El resultado obtenido en el lema 7.3 sigue valiendo cuando las funciones toman valores en un espacio métrico retráctil (E, ρ): Esto significa que para cada $r > 0$ existe una función continua $h_r : E \times E \to E$ que verifica

1. $\rho(h_r(x, y), y) \leq r$ para todo $(x, y) \in E \times E$
2. $h_r(x, y) = x$ si $\rho(x, y) \leq r$

Obsérvese que $x \to h_r(x, y)$ es una retracción de E sobre la bola cerrada $\{x : \rho(x, y) \leq r\}$. Todo espacio normado es retráctil, mediante las funciones

$$h_r(x, y) = \begin{cases} x & \text{si } ||x - y|| \leq r \\ \frac{r}{||x||}x + y & \text{si } x \neq 0, \ ||x - y|| > r \\ y & \text{si } x = 0, \ ||y|| > r \end{cases}$$

Entonces, en virtud de la siguiente proposición, el lema 7.3 sigue valiendo cuando el espacio normado $(E, \| \|)$ no se supone completo.

Proposición 7.14 *Sea X un espacio topológico y (E,ρ) un espacio métrico retráctil. Si $f : X \to E$ es límite uniforme de una sucesión $f_n \in B_1(X,E)$ entonces $f \in B_1(X,E)$.*

DEM: Extrayendo una subsucesión podemos suponer que

$$\rho(f_n(x), f(x)) < \frac{1}{2^{n+1}} \text{ para todo } x \in X$$

con lo cual

$$\rho(f_n(x), f_{n+1}(x)) < \frac{1}{2^n} \text{ para todo } x \in X$$

Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea φ_k^n una sucesión en $C(X,E)$ tal que

$$\lim_k \varphi_k^n(x) = f_n(x) \ \text{ para todo } \ x \in X$$

Definimos por inducción las sucesiones

$$\psi_k^1(x) = \varphi_k^1(x); \quad \psi_k^{n+1}(x) = h_{2^{-n}}(\varphi_k^{n+1}(x), \psi_k^n(x))$$

donde, para cada $n \in \mathbb{N}$, las funciones $h_{2^{-n}}$ son las que intervienen en la definición de espacio retráctil, para $r = 2^{-n}$.

Como $\rho(\varphi_k^2(x), \psi_k^1(x))$ converge hacia $\rho(f_2(x), f_1(x)) < 1/2$, existe $k_1(x) \in \mathbb{N}$ tal que para $k > k_1(x)$ se cumple $\rho(\varphi_k^2(x), \psi_k^1(x)) < 1/2$ con lo cual

$$\psi_k^2(x) = h_{2^{-1}}(\varphi_k^2(x), \psi_k^1(x)) = \varphi_k^2(x)$$

y se sigue que

$$\lim_k \psi_k^2(x) = \lim_k \varphi_k^2(x) = f_2(x)$$

De modo recurrente se prueba que para cada $n \in \mathbb{N}$, existe $k_n(x) \in \mathbb{N}$ tal que si $k > k_n(x)$ entonces $\psi_k^n(x) = \varphi_k^n(x)$ luego

$$\lim_k \psi_k^n(x) = f_n(x) \text{ para todo } x \in X$$

Por la construcción

$$\rho(\psi_k^{n+1}(x), \psi_k^n(x)) \leq 2^{-n} \text{ para todo } x \in X \text{ y todo } k \in \mathbb{N}$$

La sucesión de $\psi_k^k \in C(X,E)$ converge puntualmente hacia f. Efectivamente, dado $x \in X$ y $\varepsilon > 0$ sea $m \in \mathbb{N}$ tal que $1/2^{m-1} < \varepsilon/3$. Existe $p_m(x) \in \mathbb{N}$ tal que para $k > p_m(x)$ se cumple $\rho(f_m(x), \psi_k^m(x)) \leq \varepsilon/3$. Tomando $k > \max\{m, p_m(x)\}$ resulta

$$\begin{aligned}\rho(f(x),&\psi_k^k(x)) \leq \rho(f(x), f_m(x)) + \rho(f_m(x), \psi_k^m(x)) + \rho(\psi_k^m(x), \psi_k^k(x)) \leq \\ &\leq \varepsilon/3 + \varepsilon/3 + \rho(\psi_k^m(x), \psi_k^{m+1}(x)) + \cdots + \rho(\psi_k^{k-1}(x), \psi_k^k(x)) \leq \\ &\leq \varepsilon/3 + \varepsilon/3 + \left(\frac{1}{2^m} + \frac{1}{2^{m+1}} + \cdots + \frac{1}{2^k}\right) \leq \varepsilon/3 + \varepsilon/3 + \varepsilon/3 = \varepsilon.\end{aligned}$$

■

NOTA: Si el espacio métrico (E, ρ) se puede sumergir como un subconjunto convexo de algún espacio vectorial topológico localmente convexo entonces se sabe que E es isométrico a un subconjunto cerrado de un espacio normado B desde el que existe una retracción $r : B \to E$ ([**?**, corolario 5.3]). Por lo tanto el lema 7.3 se sigue cumpliendo cuando E es un subconjunto convexo de un espacio normado, pero no es cierto para un espacio métrico arbitrario (E, ρ) ([20]).

Cuando $(E, \| \quad \|)$ no es separable y el espacio métrico (X, d) no es completo, la inclusión $B_1(X, E) \subset F_\sigma(X, E)$ puede ser estricta. La igualdad se consigue reemplazando $F_\sigma(X, E)$ por $F_\sigma(X, E) \cap \Sigma(X, E)$, donde $\Sigma(X, E)$ es el conjunto de las aplicaciones σ-discretas $f : X \to E$ que definimos a continuación:

Una aplicación $f : X \to E$ definida en un espacio topológico X con valores en un espacio métrico (E, ρ) se dice que es *σ-discreta* cuando existe una familia σ-discreta $\mathcal{D}_f$ de partes de X tal que para cada abierto $G \subset E$ se cumple

$$f^{-1}(G) = \bigcup \{D \in \mathcal{D}_f : f(D) \subset G\}$$

La clase de las funciones σ-discretas, definidas en X con valores en E denotada $\Sigma(X, E)$ contiene a las funciones con rango separable y a las funciones continuas.

La noción de aplicación σ-discreta fue introducida por Hansell, que justifica la necesidad de considerar este tipo de funciones con el siguiente hecho: Con el axioma de Martin y la negación de la hipótesis del continuo, existe un subconjunto $X \subset \mathbb{R}$ no numerable con la propiedad de que cada subconjunto de X es un F_σ. Si $f : X \to E$ es una función inyectiva sobre un conjunto discreto $f(X)$ de un espacio Banach no separable E entonces f es de la primera clase de Borel pero no es de la primera clase de Baire, porque toda función continua definida sobre X tiene imagen separable, y lo mismo le ocurre a f.

Por otra parte la condición de aplicación σ-discreta no es demasiado restrictiva pues se sabe que es relativamente consistente, con los axiomas de la teoría de conjuntos, asumir que cada función de la primera clase de Borel definida en un espacio métrico es σ-discreta [**?**]. Por lo tanto, si quitamos la condición de función σ-discreta no es posible encontrar un contraejemplo que haga fallar el teorema 7.15. En [29] se de una demostración del siguiente resultado

Teorema 7.15 *Si $f : X \to E$ es una aplicación definida en un espacio métrico X con valores en un espacio normado $(E, \| \, \|)$, son equivalentes*

a) $f \in B_1(X, E)$.

b) $f \in \mathcal{F}_\sigma(X, E) \cap \Sigma(X, E)$.

c) *f es σ-fragmentable por cerrados.*

DEM: Esquema de la prueba:
a) $\Leftrightarrow$ c): Recuérdese que en virtud de la proposición 7.14 el teorema 7.5 sigue valiendo aunque E no sea completo.
a) $\Rightarrow$ b) se obtiene utilizando que las funciones continuas son σ-discretas y que $\Sigma(X, E)$ es estable frente a límites puntuales de sucesiones.
Para demostrar que b) $\Rightarrow$ a) conviene introducir la noción de aplicación τ-constante. Diremos que $g : X \to E$ es τ-constante si existe una partición $\{H_j : j \in J\}$ de X tal que para cada $j \in J$ la restricción $f|_{H_j}$ es constante y además $H_j = \cup_n C_{jn}$ donde, para cada $n \in \mathbb{N}$, $\{C_{jn} : j \in J\}$ es una familia discreta de cerrados.
Usando que E es conexo por caminos se demuestra que las funciones τ-constantes son de la primera clase de Baire. Dada $f \in F_\sigma(X, E) \cap \Sigma(X, E)$ y $\epsilon > 0$, por el teorema de Stone 1.9 existe un cubrimiento σ-discreto $\mathcal{B}_\epsilon$ de $f(X)$, formado por bolas abiertas de radio ϵ. Utilizando que f es σ-discreta se consigue una partición $\{H_j : j \in J\}$ de X, con la propiedad que interviene en la definición de función τ-constante, tal que cada $f(H_j)$ está contenido en alguna bola $B(e_j, \epsilon) \in \mathcal{B}_\epsilon$. Si para $t \in H_j$ se define $g_\epsilon(t) = e_j$ se consigue una función τ-constante $g_\epsilon : X \to E$ que cumple $\rho(f(t), g_\epsilon(t)) \leq \epsilon$. Con esto se demuestra que f es límite uniforme de la sucesión $g_{1/n} \in B_1(X, E)$ y acudiendo a la proposición 7.14 se concluye que $f \in B_1(X, E)$. ■

Combinando el último teorema con el teorema 7.13 se obtiene que para un espacio métrico completo X todas las funciones de la primera clase de Borel $f : X \to E$ son σ-discretas.

Fosgerau [20] extendió la equivalencia a) $\Leftrightarrow$ b) del teorema anterior para espacios de llegada más generales, demostrando que las funciones de la primera clase de Baire coinciden con las funciones σ-discretas de la primera clase de Borel cuando E es un espacio métrico completo arcoconexo y localmente arcoconexo. Más aún, para un espacio métrico completo (E, ρ) son equivalentes

$$B_1([0,1], E) = F_\sigma([0,1], E) \Leftrightarrow E \text{ es arco conexo y localmente arco conexo}$$

En [22] R. W. Hansell demostró que si X es un espacio colectivamente normal y E un subconjunto cerrado convexo de un espacio de Banach entonces las funciones de la primera clase de Baire coinciden con las funciones σ-discretas de la primera clase de Borel: $B_1(X, E) = F_\sigma(X, E) \cap \Sigma(X, E)$.

L. Vesely [50] logró extender y unificar los resultados de Fosgerau y Hansell analizando las propiedades del par (X, E) que implican la igualdad

$$B_1(X, E) = F_\sigma(X, E) \cap \Sigma^*(X, E)$$

donde $\Sigma^*(X, E)$ es el conjunto de las funciones fuertemente σ-discretas. Vesely observó que las funciones de la primera clase de Baire no sólo son σ-discretas sino que son fuertemente σ-discretas La consideración de estas funciones, que coinciden con las σ-discretas cuando X es colectivamente normal, le permitió extender el resultado de Hansell al caso en que X sólo se supone normal.

Vesely también logró extender los resultados de Fosgerau [20] demostrando que cuando X es normal y E es arcoconexo y localmente arcoconexo entonces las funciones de la primera clase de Baire coinciden con las fuertemente σ-discretas de la primera clase de Borel.

Bibliografía

[1] A.V.Arkhangel'skii y V.I.Ponomarev, *Fundamentals of General Topology*, D.Reidel Publishing Company,1984.

[2] Y.Benyamini and J.Lindenstrauss, *Geometric Nonlinear Functional Analysis.*

[3] J. Bourgain *Compact sets of first Baire class,*

[4] A. Bouziad. *Une classe d'espaces co-Namioka,* C.R.Acad. Sci. Paris **310** (1990), 779-782

[5] A. Bouziad. *Notes sur la propriété de Namioka,* Trans. Amer. Math. Soc. **344** (1994), 873-883.

[6] A. Bouziad *The classe of co-Namioka compact spaces is stable under products.* Proc. Amer. Math. Soc. **124** (1996), 983-986.

[7] A. Bouziad *A quasi-closure preseving sum theorem about the Namioka property,* Top. Appl. **81** (1997), 163-170.

[8] J. Calbrix, J.P. Troallic. *Aplications séparément continues.* C.R.A.S. Paris **288A** (1979), 467-468.

[9] J.P.R.Christensen *Joint continuity of separately continuous functions.* Proc. Amer. Math. Soc. bf 82 (1981), 455-461.

[10] J.P.R.Christensen. *Remarks on Namioka spaces and R.E.Jonhson's theorem on the norm separability of the range of certain mappings,* Math. Scand. **52** (1983), 112-116.

[11] G. Debs. *Pointwise and uniform convergence on a Corson compact space* Top. Appl. **23** (1986), 299-303.

[12] G. Debs. *Points de continuité d'une fonction séparément continue.* Proc. Amer. Math. Soc. **97** (1986), 167-176.

[13] G. Debs. *Points de continuité d'une fonction séparément continue II* Proc. Amer. Math. Soc. **99** (1987), 777-782.

[14] G. Debs. *Espaces héréditairement de Baire.* Fund. Math. **129** (1988), 199-206.

[15] R. Deville. *Convergence ponctuelle et uniforme sur un espace compact* Bull. Acad. Polon. Sci. Vol 37 (1989), 7-12.

[16] R. Deville and G. Godefroy, *Some applications of projective resolutions of unity* Proc. London Math. Soc. **22** (1990), 261-268.

[17] J. Dieudonné, *Une généralisation des espaces compacts,* J.Math. Pures Appl., 23, (1944), 65-76.

[18] G.A.Edgar and R.F.Wheeler.*Topological properties of Banach spaces* Pacific J. of Math., **115** (1984), 317-349.

[19] R. Engelking, *General Topology*, Warszawa 1977.

[20] M. Fosgerau, *When are Borel functions Baire functions?*, Fund. Math. **143** (1993), 137-152.

[21] G.Gruenhage, *Generalized Metric Spaces*, Handbook of set-theoretic topology, Elsevier Science Publishers B.V.,423-501, 1984.

[22] R. W. Hansell, *First Class Functions with Values in Nonseparable Spaces*, Collection: Constantin Carathéodory: An international tribute (1991), 461-475

[23] R. Haydon, *A counterexample to several questions about scattered compact spaces* Bull. London Math. Soc. **22** (1990), 261-268.

[24] R. Haydon, *Countable unions of compact spaces with Namioka property.* Mathematika **41** (1994), 141-144.

[25] R. Haydon, *Baire trees, bad norms and the Namioka property*

[26] D. Helmer. *Criteria for Eberlein compactness in spaces of continuous functions.* Manuscripta Math. **35** (1981), 27-51.

[27] J. E. Jayne and C.A.Rogers. *Borel selectors for upper semi-continuous set-valued maps.* Acta Math. **155**, (1985), 41-79.

[28] J.E.Jayne, I.Namioka and C.A.Rogers, *Fragmentability and σ-fragmentability* Fund. Math. 143 (1993), 207-220.

[29] J. E. Jayne, J. Orihuela, J. Pallarés and G. Vera, *σ-Fragmentability of multivalued maps and selection theorems,* Journal of Functional Analysis **117**, (1993), 243-273.

[30] J.L.Kelley, *Topología General*, Eudeba 1962.

[31] Kenderov and Moors, *Fragmentability and σ-fragmentability of Banach spaces* preprint

[32] K. Kuratowski, *Topology I*, Academic Press, New York, 1966.

[33] H. Lebesgue. *Une propriété caractéristique des fonctions de classe 1* Bull. Soc. Math. de France, **32**, (1904), 229-124.

[34] J. Lukes, J. Maly and L. Zajizek, *Fine Topology Methods in Real Analysis and Potential Theory*, Lect. Notes in Math., vol 1189, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 1986.

[35] J.Nagata, Modern General Topology, North-Holland, 1985.

[36] I. Namioka. *Separate and joint continuity.* Pac. J. Math. **51** (1974), 515-531.

[37] I. Namioka. *Radon-Nikodym compact spaces and fragmentability.* Matematika, 31 (1987), 258-281.

[38] I.Namioka, R.Pol *Mapping of Baire spaces into function spaces and Kadec renorming.* Israel J. Math. **78** (1992), 1-20.

[39] I.Namioka, R.Pol *σ-fragmentability and analyticity.* Mathematika **43**(1996), 172-182.

[40] I.Namioka, R.Pol *σ-fragmentability of mappings into $C_p(K)$* Top. Appl. **8p** (1998), 249-263.

[41] W. Rudin, *Lebesgue first theorem,* Math. Analysis and Appl. Partt B (L. Nachbin, ed.) , Adv. in Math. Supplem. Studies 7B, Academic Press, 1981, 741-747.

[42] J. Saint-Raimond, *Jeux topologiques et espaces de Namioka,* Proc. Amer. Math. Soc. **87** (1983), 499-504.

[43] Z. Semadeni *Banach spaces of continuous functions* Polish scientific publishers, Warszawa, 1971.

[44] C. Stegall, *Functions of the first Baire class with values in Banach spaces*, Proc. Amer. Math. Soc. **111** (4)(1991), 981-991.

[45] A.Stone, *Paracompactness and product spaces*, Bull. Amer. Math. 54, 977-982, 1948.

[46] M.Talagrand *Espaces de Baire et compacts de Namioka,* Math. Ann. **270** (1985), 159-164.

[47] M.Talagrand *Deux generalisations d'un theorem de Namioka,* Pac. J. of Math. **81** (1979), 239-251.

[48] J.P.Troallic *Fonctions à valeus dans des espaces fonctionnels géner-aux:théorèmes de R. Ellis et de I. Namioka.* C.R.A.Sci Paris **287A** (1978), 63-66.

[49] J.P.Troallic *Espaces fonctionelles et théorèmes de I. Namioka.* Bull. Soc. Math. France. **107** (1979), 127-137.

[50] L. Vesely, *Characterization of Baire-one functions between topological spaces*, Acta Univ. Carolinae Math. et Phys.**33**, (1992), 143-156.