G. VERA BOTI

UNA CARACTERIZACION DE LOS ESPACIOS DE BANACH REFLEXIVOS

PUBLICADO EN «ACTAS DE LAS PRIMERAS JORNADAS MATEMÁTICAS LUSO-ESPAÑOLAS»

MADRID

UNA CARACTERIZACION DE LOS ESPACIOS DE BANACH REFLEXIVOS

por

G. VERA BOTI

Sea (E, $\|\ \|$) un espacio vectorial real normado. Denotaremos por B (E) el espacio vectorial de todas las sucesiones acotadas en E, y por $\mathcal{L}$ (E) el álgebra de todas las aplicaciones lineales continuas a: E $\longrightarrow$ E. Si A $\subset \mathcal{L}$ (E) es un anillo, se dice que una aplicación lineal Lim: B (E) $\longrightarrow$ E es un límite generalizado de Banach respecto de A si posee las propiedades:

i) $\operatorname*{Lim}_n a\, x_n = a \operatorname*{Lim}_n x_n$ para cada $a \in$ A y $(x_n) \in$ B (E).

ii) $\operatorname*{Lim}_n x_n = x$ si $x_n = x$ para todo $n \in$ N.

iii) $\operatorname*{Lim}_n x_n = \operatorname*{Lim}_n x_{n+1}$ para cada $(x_n) \in$ B (E).

iv) $\| \operatorname*{Lim}_n x_n \| \leqslant \sup_n \| x_n \|$ para cada $(x_n) \in$ B (E).

Se deduce fácilmente que si existe sobre B (E) un límite generalizado de Banach, entonces E es necesariamente completo.

1. Teorema.—*Para cada espacio vectorial normado real E, existe una aplicación Lim′: B (E) $\longrightarrow$ E″ con las propiedades i), ii), iii) y iv) cuando A = $\mathcal{L}$ (E)* (*).

Demostración.—Si Lim* es un límite generalizado sobre B ($\mathbb{R}$) y se define para cada $x' \in$ E′: $\psi(x') = \operatorname*{Lim^*}_n \langle x_n, x' \rangle$ donde $(x_n) \in$ B (E), se com-

---

(*) Si $x'' \in$ E″ entonces $a\, x''$ es la forma lineal continua sobre E′ definida por

$$a\, x''(x') = \langle x'', {}^t a\, x' \rangle,$$

donde ${}^t a$: E′ $\longrightarrow$ E′ es la aplicación lineal traspuesta de a.

prueba fácilmente que ψ es una forma lineal continua sobre E′, de modo que queda establecida una aplicación Lim′: B (E) $\longrightarrow$ E″ cuando se pone $\operatorname{Lim}'_n x_n = \psi$, que fácilmente se comprueba que cumple las propiedades requeridas.

2. COROLARIO.—*Sea E un espacio vectorial normado real tal que existe una aplicación lineal continua* $M: E'' \longrightarrow E$ *de norma* $\| M \| = 1$ *que verifica:*

2.1. $M(a\, x'') = a\, M(x'')$ *para cada* $a \in A$ *y* $x'' \in E''$.

2.2. $M(x) = x$ *para cada* $x \in E$.

Entonces existe un límite generalizado de Banach sobre B (E) respecto de A.

DEMOSTRACIÓN.—Basta definir Lim = M∘ Lim′ donde Lim′ es la aplicación lineal establecida en el teorema 1. Se comprueba fácilmente que Lim es un límite generalizado de Banach sobre B (E) respecto de A.

OBSERVACIÓN.—Las hipótesis del corolario 2 se verifican evidentemente cuando E es reflexivo y A = $\mathcal{L}$ (E), pues basta tomar como aplicación M la identificación canónica entre E″ y E. También se verifican cuando E es el dual de otro espacio vectorial normado F y $A = \{a \in \mathcal{L}(E) : a = {}^t b,\ b \in \mathcal{L}(F)\}$, pues puede tomarse como aplicación M: E″ $\longrightarrow$ E la traspuesta de la inmersión j: F $\longrightarrow$ F″.

3. LEMA.—*Si* $E \neq (0)$ *es un espacio vectorial real normado y existe sobre B (E) un límite generalizado de Banach Lim respecto de un anillo A que contenga todas las aplicaciones lineales continuas* $a \in \mathcal{L}(E)$ *tales que* $a(x) = \langle x, x'_0 \rangle x_0$ *para todo* $x \in E$ *con* $x_0 \in E$ *y* $x'_0 \in E'$, *entonces existe sobre B* ($\mathbb{R}$) *un límite generalizado de Banach Lim* tal que si* $(x_n) \in B(E)$.

3.1 $\operatorname{Lim}^*_n \langle x_n, x' \rangle = \langle \operatorname{Lim}_n x_n, x' \rangle$ *para todo* $x' \in E'$.

DEMOSTRACIÓN.—Sea $x_0 \in E$, $x_0 \neq 0$, y $x'_0 \in E'$ tal que $\langle x_0, x'_0 \rangle = 1$. Si $(\alpha_n) \in B(\mathbb{R})$ se define $\operatorname{Lim}^*_n \alpha_n = \langle \operatorname{Lim}_n (\alpha_n x_0), x'_0 \rangle$. Se comprueba que Lim* es un límite generalizado de Banach sobre B ($\mathbb{R}$). Si ahora $(x_n) \in B(E)$ y $x' \in E'$, consideremos las aplicaciones lineales continuas $a, b \in A$, definidas por

$$a(x) = \langle x, x'_0 \rangle x_0, \quad b(x) = \langle x, x' \rangle x_0.$$

Si $\alpha_n = \langle x_n, x' \rangle$ se obtiene:

$$(\operatorname{Lim}^*_n \alpha_n) x_0 = \langle \operatorname{Lim}_n (\alpha_n x_0), x'_0 \rangle x_0 = a \operatorname{Lim}_n (\alpha_n x_0) = \operatorname{Lim}_n (\alpha_n a x_0) =$$

$$= \operatorname{Lim} (\alpha_n x_0) = \operatorname{Lim} (\langle x_n, x' \rangle x_0) = \operatorname{Lim} (b\, x_n) = b \operatorname{Lim} x_n = \langle \operatorname{Lim} x_n, x' \rangle x_0.$$

Como $x_0 \neq 0$ se deduce

$$\operatorname*{Lim}_n{}^* \langle x_n, x' \rangle = \langle \operatorname*{Lim}_n x_n, x' \rangle.$$

4. TEOREMA.—*Un espacio vectorial real normado $E \neq (0)$ es reflexivo si y sólo si existe sobre $B(E)$ un límite generalizado de Banach respecto de $\mathcal{L}(E)$.*

DEMOSTRACIÓN.—Si existe sobre B (E) un límite generalizado de Banach Lim respecto de $\mathcal{L}$ (E), se deduce del lema 3 que existe sobre B (R) un límite generalizado de Banach Lim* tal que se verifica 3.1. Como consecuencia de 3.1 se deduce que para cada $(x_n) \in$ B (E), el punto $\operatorname*{Lim}_n$ es débilmente adherente a la envoltura convexa de

$$S = \{x_n : n \in N\}.$$

Entonces si M_1, M_2 son dos subconjuntos de E acotados cerrados y convexos, resulta que su suma $M = M_1 + M_2$ es cerrada, pues si $x \in M$ y (x_n) es una sucesión de puntos de M que converge a x, será $x_n = x_n^1 + x_n^2$ con $x_n^1 \in M_1$, $x_n^2 \in M_2$ para todo $n \in N$ y entonces

$$x = \lim x_n = \operatorname*{Lim}_n x_n = \operatorname*{Lim}_n x_n^1 + \operatorname*{Lim}_n x_n^2$$

con $\operatorname*{Lim}_n x_n^1 \in M_1$, $\operatorname*{Lim}_n x_n^2 \in M_2$ por ser M_1 y M_2 cerrados y convexos.

Entonces como consecuencia de la proposición 24.4.(4) de [1] se deduce que E es reflexivo.

Recíprocamente, si E es reflexivo, se sabe que existe sobre B (E) un límite generalizado de Banach respecto de $\mathcal{L}$ (E) como consecuencia del corolario 2.

BIBLIOGRAFÍA

[1] G. KÖTHE: *Topological Vector Spaces*, I.

[2] T. NISHIURA and D. WATERMAN: *Reflexivity and sumability*, I y II. «Studia Mathematica», t. XXIII (1963) y t. XXXII (1969).

[3] G. VERA: *Límites generalizados en A-módulo normados*. Tesis doctoral. (En preparación.)