Límites generalizados en A-módulos

por

Gabriel Vera Botí

Presentado por el académico correspondiente D. Baltasar Rodríguez-Salinas

Introducción

Utilizando el teorema de extensión de aplicaciones lineales S. Banach (1) y S. Mazur (15), probaron que a cada sucesión acotada (x_n) de números reales se le puede asignar un límite generalizado $\operatorname*{Lim}_n x_n$ con las propiedades:

(i) $\operatorname*{Lim}_n (\lambda x_n + \mu y_n) = \lambda \operatorname*{Lim}_n x_n + \mu \operatorname*{Lim}_n y_n \quad (\lambda, \mu \in \mathbb{R}).$

(ii) $\operatorname*{Lim}_n x_n = x$ si $x_n = x$ para todo $n \in$ N.

(iii) $|\operatorname*{Lim}_n x_n| \leqslant \sup_n |x_n|.$

(iv) $\operatorname*{Lim}_m x_n = \operatorname*{Lim}_n x_{n+1}.$

Uno de estos límites, que en lo sucesivo llamaremos límite generalizado de Banach, no es más que una media invariante sobre el espacio B $(\mathbb{R})$ de todas las sucesiones acotadas de números reales, y es un caso particular de lo que en este trabajo llamamos límite generalizado, que no ha de verificar necesariamente la condición de invariancia (iv) sino otra más débil:

(iv.b) $\operatorname*{Lim}_n x_n = \operatorname*{Lim}_n y_n$ cuando $x_n = y_n$ para $n \geqslant n_0$

que evidentemente permite extender la noción de límite generalizado al caso de redes acotadas con índices en un conjunto dirigido fijo I.

Por otra parte, en (3), H. Cartan introdujo el concepto de filtro y ultrafiltro. Como consecuencia del lema de Zorn, que permite asegurar la existencia de ultrafiltros, y utilizando la noción de límite de una función según un ultrafiltro, no es difícil probar la existencia de un límite generalizado sobre el espacio B (I, $\mathbb{R}$) de todas las redes acotadas de números reales con índices en el conjunto dirigido I. Los límites generalizados que se obtienen de este modo poseen la propiedad del producto:

$$\text{(v)}\quad \operatorname*{Lim}_{i}\,(x_i\, y_i) = (\operatorname*{Lim}_{i}\, x_i)\,(\operatorname*{Lim}_{i}\, y_i)$$

(propiedad que no tienen los límites generalizados de Banach) y los llamaremos P-límites generalizados (véase corolario I.12).

El interés que tiene el poder disponer de un límite generalizado sobre todas las sucesiones (o redes) acotadas de números reales es obvio, especialmente como una técnica muy útil para demostrar algunos resultados importantes de Análisis Funcional. Así, por ejemplo, en (21) se puede ver una demostración (de Banach) del teorema de existencia de una medida de Haar sobre un grupo metrizable separable localmente compacto. Si en la demostración de este teorema en vez de utilizar un límite generalizado de Banach (necesariamente definido sobre sucesiones) se considera un límite generalizado sobre B (I, $\mathbb{R}$) cuando I es el conjunto dirigido de los entornos de 0 en el grupo que se considera, es posible extender esta demostración al caso general de un grupo localmente compacto.

Pero donde los límites generalizados ofrecen un interés especial es en la teoría de sumabilidad de series divergentes. Uno de los resultados más interesantes de esta teoría es el obtenido por Lorentz en (14), donde se caracterizan las sucesiones casi-convergentes de números reales, que son aquellas sucesiones acotadas a las que todos los límites generalizados de Banach le asignan el mismo valor (véase teorema V.12).

Existe abundante literatura que trata de estudiar los métodos matriciales de sumabilidad que conservan la casi-convergencia (22). La consideración de la casi-convergencia se ha revelado de especial interés en otras ramas del Análisis, como por ejemplo en teoría ergódica (23, 24), donde en términos de límites de Banach se dan condiciones necesarias y suficientes para la existencia de una medida invariante equivalente a otra medida.

Por lo que se acaba de indicar, es claro que también ofrece gran interés el poder disponer de un límite generalizado sobre sucesiones y redes a valores no necesariamente numéricos, por ejemplo en un espacio vectorial localmente convexo, o en un A-módulo normado. Es ésta una cuestión que ha sido poco tratada. Solamente algunos autores (6, 20, 19) al tratar el problema de la existencia de medias invariantes sobre funciones acotadas en un semigrupo (a valores no numéricos) han tratado el caso particularmente interesante de la existencia de tales medias cuando el semigrupo es el de los números naturales, a las cuales también se les da el nombre de límites generalizados de Banach. Generalmente en estos trabajos se le imponen al espacio que se considera condiciones bastante fuertes que aseguren la existencia de medias invariantes sobre cierta clase de sucesiones acotadas, preocupándose poco de las consecuencias que se deducirían de la existencia de una de estas medias. Así, por ejemplo, en (20) se trata el caso de sucesiones con valores en un cuerpo normado no arquimediano esféricamente completo, y en (19) se estudia el problema cuando se trata de sucesiones en un A-módulo normado con la propiedad de extensión, generalizándose los resultados de (20).

El objetivo principal de este trabajo es el problema de la existencia de límites generalizados (no necesariamente de Banach) para sucesiones y redes en A-módulos F-normados o espacios vectoriales localmente convexos, dedicando una atención especial al problema de la caracterización de aquellos espacios para los que existe uno de estos límites sobre cierta clase de sucesiones o redes acotadas.

También se expone un método para obtener límites generalizados de Banach con ciertas propiedades interesantes desde el punto de vista de la teoría de sumabilidad de series divergentes (teorema VI.10) y se obtienen algunas aplicaciones importantes en la teoría de espacios vectoriales localmente convexos.

En el primer capítulo, además de introducir las notaciones y definiciones previas utilizadas, en el resto del trabajo se prueba que siempre existe un P-límite generalizado sobre el A-módulo F-normado τ B (I, Y) de todas las redes con índice en el conjunto dirigido I cuyo recorrido es totalmente acotado en el A-módulo F-normado completo Y (teorema I.11). Para ello basta considerar el límite de cada una de estas redes según un ultrafiltro $\mathcal{U}$ en I que contenga a la base de filtro de las secciones. Pero el resultado más importante de este capítulo es el teorema I.13, que afirma que si A es un anillo normado completo cuyos únicos elementos idempotentes son 0 y 1, entonces cada límite generalizado sobre τ B (I, A) con la propiedad (v) del producto es precisamente el obtenido de este modo a partir de cierto ultrafiltro $\mathcal{U}$ sobre I ,que contiene a la base de filtro de las secciones. Finalmente, se expone un resumen de los resultados que B. Rodríguez-Salinas ha obtenido en (19) referentes a la existencia de límites generalizados sobre ciertos submódulos de sucesiones acotadas en un A-módulo normado Y con la propiedad de extensión. Estos resultados fueron el punto de partida de este trabajo, donde se utilizan con frecuencia los conceptos allí introducidos, y se extienden algunos de aquellos resultados, especialmente el teorema 32, que caracteriza los A-mdulos normados Y con la propiedad de extensión tales que existe un límite generalizado de Banach sobre el A-módulo τ B (Y) de todas las sucesiones totalmente acotadas en Y.

En el capítulo segundo se trata de obtener una caracterización análoga para los A-módulos F-normados completos (no necesariamente con la propiedad de extensión). Se prueba (teorema II.11) que la existencia de un límite generalizado de Banach sobre τ B (Y) permite dotar el A-módulo F-normado Y (necesariamente completo) de estructura de A-módulo F-normado convexo después de cambiar la F-norma por otra equivalente que es regular (su regularizada).

Recíprocamente, si Y es un A-módulo F-normado convexo completo se prueba que existe un límite generalizado de Banach sobre τ B (Y) y para ello se requiere dar previamente una definición de integral para funciones con valores en un A-módulo F-normado preconvexo y completo, respecto de una medida finitamente aditiva. El método que se sigue para definir esta integral, aunque es típico en el caso de funciones a valores reales, requiere en nuestro caso bastantes detalles de carácter técnico que se exponen detenidamente. Entonces, si μ es la medida finitamente aditiva que sobre todas las partes de $\mathbb{N}$ induce un límite generalizado de Banach sobre B ($\mathbb{R}$), se comprueba que la integral de una sucesión $(x_n) \in \tau$ B (Y) respecto de μ es un límite generalizado de Banach (teorema II.21). Es interesante señalar el teorema II.24, donde se prueba que si se utiliza el límite generalizado sobre τ B (Y) que se ha construido mediante la integral para dotar a Y de estructura de A-módulo F-normado convexo, entonces se obtiene la estructura de A-módulo F-normado convexo dada inicialmente.

También se estudian en este capítulo algunas propiedades generales de estos A-módulos, cuyo estudio ofrece interés debido al hecho de que es posible definir una noción de integral para funciones con valores en ellos, por lo cual los A-módulos F-normados convexos constituyen unos espacios muy generales a los que es posible extender algunas de las teorías importantes del Análisis Funcional. Así, por ejemplo, para funciones con valores en estos A-módulos, definidas en un grupo localmente compacto, se ha resuelto el problema de la existencia y unicidad (en un cierto sentido) de medidas invariantes (2).

Pero el interés de estos espacios también reside en que incluyen como caso particular lo que hemos llamados A-módulos F-normados convexos continuos, que no son otra cosa que espacios vectoriales reales localmente convexos metrizables dotados de una F-norma adecuada para que las bolas cerradas resulten convexas. El capítulo tercero se dedica en parte a obtener esta caracterización.

Es fácil comprobar que todo A-módulo F-normado convexo continuo es un espacio vectorial real localmente convexo metrizable. Recíprocamente, cada uno de estos espacios vectoriales Y es posible dotarlo de una F-norma que defina su topología, de tal modo que Y sea un A-módulo F-normado convexo continuo para cualquier anillo A de aplicaciones lineales continuas $a : Y \to Y$. El método seguido para definir esta F-norma está basado en una parte de la demostración del teorema de metrización de grupos topológicos expuesto en (9). Basta comprobar que con la idea expuesta allí se puede obtener una F-norma con los requisitos que nos interesan. Finalmente, en este capítulo se da un ejemplo de un A-módulo F-normado convexo completo no continuo que no es espacio vectorial (ejemplo III.14), y un ejemplo de un A-módulo F-normado convexo que no puede ser A-módulo normado para ninguna norma sobre A (ejemplo III.15). También es interesante hacer notar que un espacio vectorial topológico real metrizable Y en general no es posible dotarlo de estructura de A-módulo normado si el anillo A es demasiado amplio, hecho que será interesante considerar en el siguiente capítulo. Pero antes de comentar la segunda parte de este trabajo, es conveniente tener presentes las consideraciones que siguen: si Y es un espacio vectorial topológico real metrizable completo dotado de una F-norma, considerado como A-módulo F-normado completo, es claro que sobre τ B (Y) existirá un límite generalizado de Banach sólo en el caso de que Y sea localmente convexo y la F-norma tenga la propiedad de que las bolas cerradas sean convexas, ya que una condición necesaria para la existencia de este límite generalizado es que Y sea un A-módulo F-normado preconvexo (teorema II.11), necesariamente convexo por ser continuo, y en estos A-módulos se sabe que las bolas cerradas tienen la citada propiedad. Si se tiene en cuenta que el concepto de conjunto totalmente acotado en Y depende sólo de la topología de Y y no de la F-norma considerada, estas observaciones muestran que el concepto de límite generalizado que se ha dado en los A-módulos F-normados está ligado, no sólo a la topología del espacio, sino que también lo está a la F-norma que se tenga en él.

Entonces se hace deseable dar una definición de límite generalizado para el caso general de redes o sucesiones en un espacio vectorial localmente convexo E, acotadas en el sentido de la topología vectorial de E. En el caso particular de que E sea metrizable y sea posible considerarlo como A-módulo F-normado convexo continuo para alguna F-norma sobre E que defina su topología, el nuevo concepto de límite generalizado (independiente de la F-norma) ha de ser un caso particular del concepto que ya se tiene cuando E se considera como A-módulo F-normado, el cual en lo sucesivo, para evitar posibles confusiones, llamaremos límite (F)-generalizado, indicando así que está asociado a alguna F-norma particular.

En el capítulo cuarto se da ya la definición de límite generalizado sobre redes acotadas en un espacio vectorial localmente convexo separado E. La propiedad iii) se sustituye ahora por

$$\text{(iii.b)}\quad \underset{i}{\operatorname{Lim}}\ \underline{x_i} \in S^{00}, \qquad \text{donde} \qquad S = \{x_i,\ i \in I\}$$

y se incluye además en la definición el requisito de que el límite generalizado conmute con las aplicaciones lineales continuas de cierto anillo $A \subset \mathcal{L}(E)$, de modo que hay que hablar de límite generalizado respecto de algún anillo A, que en el peor de los casos se reducirá al cuerpo K ($\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$) sobre el que se considera el espacio vectorial E. Esta condicin se incluyó en la definición con la intensión de que todos los resultados que se obtuvieran en lo sucesivo se pudiesen aplicar, como caso particular, cuando E fuese un A-módulo F-normado convexo continuo. Pero posteriormente resultó que la consideración de tal anillo fue muy útil en la obtención de alguno de los resultados más interesantes de este trabajo. En efecto, se prueba que si el anillo A contiene suficientes aplicaciones lineales continuas (más exactamente, si $A \supset A_0$, donde

$$A_0 = \{ a \in \mathcal{L}(E) : a\,x \equiv \langle x, x'_0 \rangle\, x_0, x_0 \in E, x'_0 \in E' \}),$$

entonces cada límite generalizado Lim respecto de A sobre un subespacio $X \subset B(I, E)$ que contenga al menos las redes $(\alpha_i\, x)$ con $x \in E$, $(\alpha_i) \in B(I, K)$, se puede considerar que está inducido por cierto límite generalizado Lim* sobre B (I, K) mediante la relación

$$\text{(vi)} \quad \operatorname*{Lim^*}_i \langle x_i, x' \rangle = \langle \operatorname*{Lim}_i x_i, x' \rangle \quad \text{para cada } x' \in E',$$

y este hecho será fundamental para deducir muchos de los resultados de este capítulo. En primer lugar, este resultado (teorema IV.10) y otro análogo (teorema IV.12) establecidos para límites (F)-generalizados cuando E es metrizable dotado de una F-norma cuyas bolas cerradas son absolutamente convexas, permite probar (teorema IV.13) que los dos conceptos de límite generalizado respecto de A y límite (F)-generalizado (como A-módulo) coinciden siempre que A contenga suficientes aplicaciones lineales continuas ($A \supset A_0$).

Otra consecuencia muy importante que se deduce en las condiciones en que vale (vi) es que el límite generalizado de una red es en este caso un punto de la envoltura cerrada convexa de su recorrido, lo cual permite deducir el teorema IV.15, que establece una condición que deben verificar los acotados de E cuando existe sobre B (E) un límite generalizado respecto de un anillo A tal que $A_0 \subset A$. Este teorema permitirá deducir una interesante caracterización de la semi-reflexividad que veremos más adelante.

Si E es un espacio vectorial localmente convexo casi-completo e I es un conjunto dirigido, se deduce que existe un límite generalizado sobre τ B (I, E) respecto de $\mathcal{L}$ (E) (teorema IV.16). El modo de proceder para definir un límite generalizado Lim sobre τ B (I, E) es el natural, mediante la relación (vi) a partir de un límite generalizado Lim* sobre B (I, K). Naturalmente que también se distinguen ahora dos tipos particularmente interesantes de límites generalizados, los límites de Banach (si I = N) y los P-límites (donde ahora $P : E \times E \to E$ es una aplicación bilineal) y se prueba que sobre τ B (I, E) existen ambos tipos de límites. En particular, como consecuencia de los resultados del capítulo primero (teorema I.13), se puede asegurar que cada P-límite generalizado sobre τ B (I, E) (para algunas aplicaciones bilineales P) se puede obtener tomando el límite débil de las redes totalmente acotadas según un ultrafiltro $\mathcal{U}$ que contiene a la base de filtro de las secciones de I (teorema IV.17).

Si se sigue el mismo método para definir un límite generalizado sobre B (I, E), se obtiene (teorema IV.21) que una condición suficiente para obtener así un límite generalizado respecto de $\mathcal{L}$ (E) es que E sea semi-reflexivo. Recíprocamente, se prueba que la semi-reflexividad de E es una condición necesaria para que exista un límite generalizado sobre B (I, E) para cierto conjunto dirigido I. Se obtiene así una sencilla caracterización de los espacios vectoriales localmente convexos semi-reflexivos (teorema IV.22), que no resulta muy útil en la práctica, puesto que es necesario considerar un conjunto dirigido I ligado a la topología de E.

La caracterización de la semi-reflexividad considerando solamente límites generalizados de sucesiones no es tan inmediata y en general se obtiene bajo propiedades adicionales del espacio E (teoremas IV-25 y IV-26).

De todas las caracterizaciones de semi-reflexividad que se han obtenido, la más importante es la contenida en el teorema IV.27, donde pidiendo solamente que E sea casi-completo para su topología de Mackey, se deduce que E es semi-reflexivo si y sólo si existe sobre B (E) un límite generalizado respecto de un anillo A tal que $A_0 \subset A$. Como consecuencia de éste y otros teoremas, se deducen otras caracterizaciones y condiciones suficientes de semi-reflexividad, ya no en términos de límites generalizados, algunas de las cuales quizá se podrían demostrar directamente, pero que exponemos como muestra de aplicación de las técnicas de demostración basadas en la teoría de límites generalizados (teorema 23 y corolario 24).

También se da en este capítulo una caracterización análoga de la reflexividad para espacios metrizables dotados de F-norma en términos de límites (F)-generalizados (teorema IV.29) y se muestra que cuando E es un espacio de Banach, la condición $A \supset A_0$ es esencial para poder caracterizar su reflexividad mediante la existencia de un límite (F)-generalizado sobre B (E) respecto de A (teorema IV.33), ya que se prueba que si E es el dual de otro espacio de Banach, entonces siempre existe un límite generalizado sobre

B (E) respecto de cierto anillo A que evidentemente no verificará la condición $A \supset A_0$ si E no es reflexivo.

En (18) y (25) se plantea el problema de ver si en un espacio de Banach E la reflexividad es equivalente a alguna propiedad de sumabilidad y se resuelve de modo satisfactorio, pues se prueba que E es reflexivo si y sólo si para cada sucesión (x_n) acotada en E existe un método matricial T de sumabilidad, de matriz $T = (t_{ij})$ regular esencialmente positiva y una subsección (x_{n_k}) de (x_n), cuyas T- medias

$$y_i = \sum_k t_{i_k} x_{n_k}$$

convergen fuertemente (o débilmente).

En este trabajo se ha obtenido otra solución más elegante del problema propuesto, ya que se prueba que un espacio de Banach E es reflexivo si y sólo si existe sobre B (E) un límite generalizado (o (F)-generalizado) de Banach respecto de $\mathcal{L}$ (E).

El capítulo quinto se dedica preferentemente a las aplicaciones de la teoría de límites generalizados en los espacios vectoriales localmente convexos, por ejemplo para deducir caracterización de semi-reflexividad en espacios localmente convexos con descomposición de Schauder. En primer lugar, se obtiene una formulación equivalente de la propiedad: «existe un límite generalizado sobre B (I, E) respecto de $\mathcal{L}$ (E)», cuya verificación puede ser más cómoda en las aplicaciones. Esto se ha conseguido en el teorema V.4 en términos de la que hemos llamado propiedad L. P. (de límites permutables) que se refiere a la permutabilidad de límite ordinario con un límite generalizado sobre una red doble.

Esta propiedad se ha mostrado muy útil en las aplicaciones y se da una condición suficiente (teorema V.2) para su validez que tendrá interesantes consecuencias, como por ejemplo una breve demostración de un reciente resultado de Thurlow A. Coox (4), que caracteriza los espacios vectoriales localmente convexos con descomposición de Schauder que son semi-reflexivos mediante propiedades de esta descomposición. Estos resultados son una generalización de los obtenidos por James (1)) para los espacios Banach. Por último, se introduce en este capítulo el concepto de sucesión casi-convergente en un espacio vectorial localmente convexo, y se deduce una caracterización de la casi-convergencia en los espacios localmente convexos con descomposición de Schauder reductora (no necesariamente semi-reflexivos), resultado que generaliza parte del expuesto en (5) para espacios de Hilbert separables.

Finalmente, en el capítulo VI se expone un método que permite construir límites generalizados de Banach a partir de límites generalizados de redes mediante una matriz infinita de números reales con ciertas propiedades (teorema VI.3). Si se define la suma generalizada de una serie como el límite generalizado de Banach de sus sumas parciales, utilizando dicho método se prueba que existe una suma generalizada Σ^* tal que

$$\sum_n{}^* x_n = \operatorname*{Lim}_{t \in I} \sum_k t^{k-1} x_k$$

(teorema VI.8).

Esta suma generalizada tiene la interesante propiedad de que la suma generalizada del producto de Cauchy de dos series es igual al producto de sus sumas generalizadas (se debe entender el producto mediante cierta aplicación bilineal $P : E \times E \to E$) (teorema VI.10).

También se obtienen resultados análogos para los límites (F)-generalizados. Por último se estudian propiedades de los límites generalizados en algunos espacios de funciones usuales. Se prueba que si (μ_i) es una red de medidas de Radon tal que $(\mu_i(\psi))$ es una red acotada para cada $\psi \in K(\Omega)$ ($\Omega \subset \mathbb{R}^n$ abierto), se deduce una medida de Radon μ poniendo

$$\mu(\psi) = \operatorname*{Lim^*}_{i} \mu_i(\psi)$$

cuando Lim* es un límite generalizado sobre $B(I, \mathbb{R})$.

También se deducen condiciones bajo las cuales el límite generalizado permuta con la integral y con la derivada en ciertos espacios de funciones.

CAPÍTULO PRIMERO

§ 1. DEFINICIONES Y NOTACIONES

1. DEFINICIÓN.—Sea Y un grupo conmutativo. Una *F-norma* sobre Y es una aplicación $|\ |: Y \to \mathbb{R}$ que verifica

1.1. $|0| = 0, \ |x| > 0, \quad \forall x \in Y - \{0\}.$
1.2. $|x + y| \leqslant |x| + |y|, \quad \forall (x, y) \in Y^2.$
1.3. $|x| = |-x|, \quad \forall x \in Y.$

2. DEFINICIÓN.—Sea A un anillo con unidad e. Una *norma* sobre A es una F-norma que verifica

2.1. $|a\, b| \leqslant |a|\, |b|, \quad \forall (a, b) \in A^2.$
2.2. $|e| = 1.$

Un *anillo normado o valorado* (resp. *grupo F-normado*) es un anillo con unidad (resp. grupo conmutativo) sobre el que hay definida una norma (resp. F-norma), dotado de la topología de espacio métrico definida por la distancia asociada a la norma (resp. F-norma): $d(a, b) = |a - b|$.

3. DEFINICIÓN.—Si A es un anillo con unidad e Y es un A-módulo (a la izquierda) sobre A, se dice que Y es un *A-módulo F-normado* si Y es un grupo F-normado con una F-norma $\|\ \|$, tal que se verifica:

3.1. Para cada $a \in A$ es continua la aplicación $x \longmapsto a\, x$ de Y en Y.

Se dice que un A-módulo F-normado es un *A-módulo normado* si A es un anillo normado con una norma $|\ |$ que verifica:

3.2. $\|a\, x\| \leqslant |a|\, \|x\|, \quad \forall a \in A, \forall x \in Y.$

Entonces se dice que la F-norma $\|\ \|$ es una *norma* sobre el A-módulo Y

En todo este trabajo, I designará siempre un conjunto dirigido. Si Y es un A-módulo F-normado, se designa por B (I, Y) (resp.

τ B (I, Y)) el conjunto de todas las redes (y_i) con índices $i \in$ I de elementos $y_i \in$ Y tales que

$$\{ y_i : i \in I \} = y(I)$$

es un conjunto acotado (resp. totalmente acotado) en el A-módulo F-normado Y. Se define del modo usual la suma de dos redes

$$(x_i) + (y_i) = (x_i + y_i),$$

y también el producto de un elemento a del anillo A por una red: $a(x_i) = (a x_i)$.

Se verifica que si $x \in \tau$ B (I, Y) y si $a \in$ A, entonces también $a x \in \tau$ B (I, Y), pues dado $\varepsilon > 0$, como consecuencia de 3.1 se deduce que existe $\delta > 0$ tal que $\| a x \| \leqslant \varepsilon$ siempre que $\| x \| \leqslant \delta$. Como x (I) se puede recubrir con un número finito de bolas de radio δ, se deduce que $a x$ (I) se puede recubrir con un número finito de bolas de radio ε, y esto prueba que

$$a x \in \tau \, B(I, Y).$$

Si Y es un A-módulo normado también se verifica que $a x \in$ B (I, Y) para cada $x \in$ B (I, Y) y $a \in$ A, pero esto no se verifica en general cuando Y es un A-módulo F-normado. (Véase ejemplo III.15).

Si se define la F-norma de una red $(x_i) = x \in$ B (I, Y) así:

$$\| x \| = \sup_i \| x_i \|$$

es inmediato comprobar que B (I, Y) (resp. τ B (I, Y)) es un Z-módulo F-normado (resp. A-módulo F-normado) si Y es un A-módulo F-normado, y que B (I, Y) es un A-módulo normado si Y es un A-módulo nomado.

Es cómodo considerar Y identificando con el submódulo $\tilde{Y}$ de B (I, Y) formado por las redes constantes, asociando a cada $y \in$ Y la red constante (y_i) tal que $y_i = y$ para cada $i \in$ I, denotando también por y dicha red.

Para cada red $x = (x_i)$ y para cada $j \in$ I designaremos por $x \rho^j$ la red definida por $x \rho^j = (\rho_i^j x_i)$, donde $\rho_i^j = 1$ si $i \geqslant j$, $\rho_i^j = 0$ si $i \not\geqslant j$.

Frecuentemente se considerará el caso de que I sea el conjunto N de los números naturales dirigido con el orden usual de N. Entonces B (N, Y), τ B (N, Y) se denotarán más brevemente por B (Y), τ B (Y), respectivamente, y para cada sucesión $x = (x_n)$ se designará por $x\,\sigma$ la sucesión $x\,\sigma = (x_n{}^+)$, donde $x_n{}^+ = x_{n+1}$.

Un subconjunto $X \subset B(I, Y)$ (resp. $X \subset B(Y)$) diremos que es ρ-invariante (resp. σ-invariante) si se verifica que $x\,\rho^j \in X$ para cada $x \in X$ y $j \in I$ (resp. $x\,\sigma \in X$).

Si $X \subset B(Y)$ es un submódulo σ-invariante y se verifica que $x \in X$ siempre que $x\,\sigma \in X$, se dirá que X es σ^*-invariante. Es claro que τ B (Y) es un submódulo σ^*-invariante y que cada submódulo $X \subset B(Y)$ que es σ^*-invariante también es ρ-invariante.

Si $X \subset B(Y)$ es un submódulo σ-invariante, designaremos por

$$X\,\sigma = \{ x \in B(Y) : \exists\, p \in N,\ x\,\sigma^p \in X \}.$$

Evidentemente $X\,\sigma$ es un submódulo σ^*-invariante de B (Y) que contiene a X.

Supondremos siempre que el A-módulo F-normado Y no se reduce a $\{0\}$, caso que carece de interés y para el cual todos los resultados son triviales.

4. Definición. — Sean X, Y dos A-módulos F-normados y $f : X \to Y$ un A-homomorfismo. Se define la *norma* de f así:

$$4.1.\quad \| f \| = \sup \left\{ \frac{\| f(x) \|}{\| x \|} : x \in X - \{0\} \right\}.$$

Si $\| f \|$ es finito se dice que f es un A-homomorfismo acotado.

5. Definición.—Sean Y un A-módulo F-normado y X un submódulo de B (I, Y) que es ρ-invariante, contiene las redes constantes, y verifica que $a\,x \in X$ para cada $a \in A$ y $x \in X$ (1). Se llama *límite generalizado sobre X* y se designa por Lim a una aplicación Lim : $X \to Y$ con las siguientes propiedades:

(1) X es un submódulo de B (I, Y) como Z-módulo. Cuando B (I, Y) sea un A-módulo, entonces si X se supone submódulo de B (I, Y) como A-módulo, esta última condición no será necesario especificarla.

5.1. $\mathrm{Lim}\,(a\,x + b\,y) = a\,\mathrm{Lim}\,x + b\,\mathrm{Lim}\,y \quad \forall\,(a, b) \in A^2$, $\forall\,(x, y) \in X^2$.

5.2. $\mathrm{Lim}\,x = x, \quad \forall\,x \in \tilde{Y}$.

5.3. $\|\,\mathrm{Lim}\,x\,\| \leqslant \|\,x\,\|, \quad \forall\,x\,X$.

5.4. $\mathrm{Lim}\,x = \mathrm{Lim}\,x\,\rho^j, \quad \forall\,x \in X,\ \forall\,j \in I$.

De estas propiedades se deduce que Lim es un A-homomorfismo de norma 1 que es ρ^j invariante para cada $j \in I$.

6. Definición.—En las condiciones de la definición 5, sea

$$P : Y \times Y \rightarrow Y$$

una aplicación con las propiedades:

6.1. $P\,(x + x', y) = P\,(x, y) + P\,(x', y), \quad \forall\,(x, x', y) \in Y^3$.
6.2. $P\,(x, y + y') = P\,(x, y) + P\,(x, y'), \quad \forall\,(x, y, y') \in Y^3$.
6.3. $\exists\,k > 0$ tal que $\|\,P\,(x, y)\,\| \leqslant k\,\|\,x\,\|\,\|\,y\,\|, \quad \forall\,(x, y) \in Y^2$.

Entonces un límite generalizado Lim sobre X se dice que es un *P-límite o límite generalizado con la propiedad del producto P* si se verifica que:

6.4. $\mathrm{Lim}\,z = P\,(\mathrm{Lim}\,x, \mathrm{Lim}\,y)$ cuando $z = (P\,(x_i, y_i)) \in X$, siendo $x = (x_i) \in X$, $y = (y_i) \in X$.

7. Definición.—En las condiciones de la definición 5, cuando se pone $I = N$ se dice que un límite generalizado Lim sobre X es un *límite generalizado de Banach* si se verifica que X es σ-invariante y

7.1. $\mathrm{Lim}\,x = \mathrm{Lim}\,x\,\sigma, \quad \forall\,x \in X$.

Es evidente que cada límite generalizado de Banach sobre X es una media σ-invariante sobre X con valores en Y.

Observación.—Nótese que en la definición 7 se ha supuesto que X es ρ-invariante. Esta condición se incluye sólo por comodidad en los enunciados de teoremas posteriores, ya que así cada límite generalizado de Banach se podrá considerar como un caso particular de límite generalizado según la definición 5. No se pierde generalidad al añadir esta condición en la definición 7, pues si no se hubiese hecho así, y se hubiese dado la definición de límite generalizado de Banach pidiendo solamente que X fuese σ-invariante, es claro que entonces cada límite generalizado de Banach, Lim así definido sobre X se podría extender a un límite generalizado de Banach sobre el submódulo $X\sigma \supset X$, el cual es σ^*-invariante y por tanto ρ-invariante, poniendo para cada $x \in X\sigma$, $\operatorname{Lim} x = \operatorname{Lim} z$ cuando $z \in X$ es tal que $z\sigma^p = x$. Por lo tanto, en todas las cuestiones relativas a la existencia de límites generalizados de Banach sobre un submódulo $X \subset B(Y)$ no habrá inconveniente en suponer que X no sólo es σ-invariante, sino que además es ρ-invariante.

En lo sucesivo, frecuentemente se utilizará la notación más flexible $\operatorname{Lim}_i x_i$ para designar $\operatorname{Lim} x$ cuando $x = (x_i)$. Así, por ejemplo, la propiedad 5.3 se escribirá

$$\| \operatorname{Lim}_i x_i \| \leqslant \sup_i \| x_i \|$$

y la propiedad 7.1 se indicará así:

$$\operatorname{Lim}_n x_n = \operatorname{Lim}_n x_{n+1}.$$

8. Proposición.—*La propiedad 5.3 del límite generalizado se puede sustituir equivalentemente por la siguiente:*

8.1. $\| \operatorname{Lim}_i x_i \| \leqslant \overline{\lim_i} \| x_i \|.$

Demostración.—Para cada $j \in I$ se verifica

$$\| \operatorname{Lim}_i x_i \| = \| \operatorname{Lim}_i x_i \rho_i{}^j \| \leqslant \sup_{i \geq j} \| x_i \|,$$

y entonces

$$\| \operatorname{Lim}_i x_i \| \leqslant \inf_j \sup_{i \geq j} \| x_i \| = \overline{\lim_i} \| x_i \|.$$

Recíprocamente, es evidente que de 8.1 se deduce 5.3.

9. Proposición.—*En las condiciones de la definición 5, si* $x = (x_i) \in X$ *es una red de Cauchy, entonces es convergente y su límite es* $\operatorname{Lim}_i x_i$.

Demostración.—Sea $x_0 = \operatorname{Lim}_i x_i$; entonces

$$\| x_i - x_0 \| = \| \operatorname{Lim}_j x_i - \operatorname{Lim}_j x_j \| = \| \operatorname{Lim}_j (x_i - x_j) \| \leqslant$$

$$\leqslant \overline{\lim_j} \| x_i - x_j \| = \inf_a \sup_{j \geq a} \| x_i - x_j \| \leqslant \epsilon$$

siempre que sea $i \geqslant i_0$, donde $i_0 \in I$ es tal que

$$\| x_i - x_j \| \leqslant \epsilon \quad \text{si} \quad i \geqslant i_0, j \geqslant i_0.$$

10. Proposición.—*Sea* Y *un* A*-módulo* F*-normado y* $X \subset B(Y)$, *un submódulo* ρ*-invariante que contiene las sucesiones de Cauchy y que verifica* $a x \in X$ *para cada* $a \in A$ *y* $x \in X$. *Si existe un límite generalizado sobre* X, *entonces* Y *es completo.*

Demostración.—Consecuencia inmediata de la proposición 9.

Es interesante hacer notar que en las condiciones de la definición 6, si P no es idénticamente nula, si I = N y si X contiene las sucesiones de recorrido finito y es σ-invariante, entonces un P-límite generalizado Lim sobre X nunca puede ser un límite generalizado de Banach, pues si $x, y \in Y$ son tales que $P(x, y) \neq 0$ y si $x_n = y_n = 0$ si n es par, $x_n = x$, $y_n = y$ si n es impar, sea

$$x_0 = \operatorname{Lim}_n x_n, \; y_0 = \operatorname{Lim}_n y_n.$$

Si Lim es un límite generalizado de Banach, se deduciría de 5.1 y 7.1 que $x_0 + x_0 = x$, $y_0 + y_0 = y$. Por otra parte, teniendo en cuenta que $P(x, 0) = P(0, y) = 0$, y utilizando de nuevo 7.1, se deduciría

$$P(x, y) = P(x_0 + x_0, y_0 + y_0) = 4\, P(x_0, y_0) = 4\, P(\operatorname{Lim}_n x_n, \operatorname{Lim}_n y_n) =$$

$$= 4\, P(\operatorname{Lim}_n x_n, \operatorname{Lim}_n y_{n+1}) = 4 \operatorname{Lim}_n P(x_n, y_{n+1}) = 0.$$

que contradice la hipótesis.

§ 2. P-límites generalizados sobre redes totalmente acotadas en un A-módulo F-normado

Si $\mathcal{B} = \{B_j\}_{j \in I}$ es la base de filtro asociada al conjunto dirigido I ($B_j = \{i \in I : i \geqslant j\}$ para cada $j \in I$), y si $\mathcal{U}$ es un filtro sobre I que contiene a $\mathcal{B}$, indicaremos por $\lim\limits_{\mathcal{U}} x_i$ el límite, si existe, de la base de filtro $x(\mathcal{U})$, imagen de $\mathcal{U}$ en Y mediante la aplicación $x : i \longmapsto x_i$.

11. Teorema.—*Sea Y un A-módulo F-normado y sea $P : Y \times Y \to Y$ una aplicación con las propiedades* 6.1, 6.2, 6.3. *Una condición necesaria y suficiente para que exista un P-límite generalizado Lim sobre $\tau B(I, Y)$ para cada conjunto dirigido I, es que Y sea completo.*

En este caso, para cada ultrafiltro $\mathcal{U}$ que contenga a la base de filtro $\mathcal{B}$ asociada al conjunto dirigido I, queda definido un P-límite generalizado Lim sobre $\tau B(I, Y)$ poniendo

$$\operatorname*{Lim}_{i} x_i = \lim_{\mathcal{U}} x_i$$

Demostración.—La necesidad de la condición es consecuencia inmediata de la proposición 10 si se toma I = N. Recíprocamente, si Y es completo y si $\mathcal{U}$ es un ultrafiltro tal que $\mathcal{B} \subset \mathcal{U}$, para cada red $(x_i) \in \tau B(I, Y)$ se verifica que

$$x(\mathcal{U}) = \{x(V) : V \in \mathcal{U}\}$$

es base de un ultrafiltro θ sobre Y que es convergente. En efecto, dado $\varepsilon > 0$ existen $x_{i_1}, \ldots, x_{i_p} \in x(I)$ tales que

$$x(I) \subset \bigcup_{k=1}^{p} B(x_{i_k}, \varepsilon/2),$$

por ser $x(I)$ totalmente acotado. Como $I \in \mathcal{U}$, se verifica que

$$x(I) = \bigcup_{k=1}^{p} (B(x_{i_k}, \varepsilon/2) \cap x(I)) \in \theta.$$

y por ser θ un ultrafiltro se deduce que existe i_k $(1 \leqslant k \leqslant p)$ tal que

$$D = B\,(x_{i_k}, \varepsilon/2) \cap x\,(I) \in \theta\,;$$

entonces $D - D \subset B\,(0, \varepsilon)$, lo que prueba que θ es un filtro de Cauchy en Y completo y por tanto convergente a un punto $x_0 \in Y$.

Si se define ahora $\operatorname*{Lim}_i x_i = x_0$, donde

$$x_0 = \lim_{\mathcal{U}} x_i = \lim \theta,$$

sólo queda por comprobar que se verifican las propiedades 5.1, 5.2, 5.3, 5.4 y 6.4 de los P-límites generalizados.

5.1. Sean $a \in A$, $x = (x_i) \in \tau\,B\,(I, Y)$. Si se designa por x_a la aplicación $i \longmapsto a\,x_i$, es inmediato que si la base de filtro $x\,(\mathcal{U})$ converge a x_0, entonces la base de filtro $x_a\,(\mathcal{U})$ converge a $a\,x_0$, pues basta tener en cuenta 3.1, ya que $x_a\,(V) = a\,x\,(V)$ para cada $V \in \mathcal{U}$. Esto prueba que

$$\operatorname*{Lim}_i a\,x_i = a \operatorname*{Lim}_i x_i.$$

También es inmediato que

$$\operatorname*{Lim}_i (x_i + y_i) = \operatorname*{Lim}_i x_i + \operatorname*{Lim}_i y_i$$

si

$$(x_i) \in \tau\,B\,(I, Y),\ (y_i) \in \tau\,B\,(I, Y).$$

5.2. Evidente

5.3. Sea $x_i \in \tau\,B\,(I, Y)$ y $x_0 = \operatorname*{Lim}_i x_i$. Como la base de filtro $x\,(\mathcal{U})$ converge a x_0, dado $\varepsilon > 0$ existe $V \in \mathcal{U}$ tal que

$$x\,(V) \subset B\,(x_0, \varepsilon)$$

entonces $\| x_i - x_0 \| < \varepsilon$ si $i \in V$ y por tanto

$$\| x_0 \| < \| x_i \| + \varepsilon$$

para cada $i \in V$, y de aquí se deduce 5.3.

5.4. Sea $(x_i) \in \tau\,B\,(I, Y)$. Si $j \in I$, sea $x_i' = \rho_i^j\,x_i$, donde $\rho_i^j = 1$ si $i \geqslant j$, $\rho_i^j = 0$ si $i \not\geqslant j$. Entonces las dos bases de filtro,

$x(\mathcal{U})$, $x'(\mathcal{U})$ son equivalentes y por tanto tienen el mismo límite. En efecto, si $x(V) \in x(\mathcal{U})$, sea $W = V \cap B_j \in \mathcal{U}$; entonces

$$x'(W) = x(W) \subset x(V),$$

es decir, cada conjunto de $x(\mathcal{U})$ contiene un conjunto de $x'(\mathcal{U})$ y recíprocamente. Esto prueba que

$$\operatorname*{Lim}_i x_i = \operatorname*{Lim}_i \rho_i{}^j x_i$$

para cada $j \in I$, o sea, **5.4.**

6.4. Sean $(x_i) \in \tau B(I, Y)$, $(y_i) \in \tau B(I, Y)$. Si se define $z_i = P(x_i, y_i)$ se verifica que $(z_i) \in \tau B(I, Y)$, pues si $x(I)$ se recubre con p bolas de radio $\varepsilon/2\,k\,M'$ y si $y(I)$ se recubre con q bolas de radio $\varepsilon/2\,k\,M$, siendo

$$M = \sup_i \| x_i \|, \quad M' = \sup_i \| y_i \|,$$

y $k > 0$ la constante que aparece en **6.3**, es fácil ver que $z(I)$ se puede recubrir con $p\,q$ bolas de radio ε. Sean entonces

$$x_0 = \operatorname*{Lim}_i x_i, \quad y_0 = \operatorname*{Lim}_i y_i;$$

como las bases de filtro $x(\mathcal{U})$, $y(\mathcal{U})$ convergen respectivamente a x_0, y_0, para cada $\varepsilon > 0$ existen $V' \in \mathcal{U}$, $V'' \in \mathcal{U}$ tales que

$$x(V') \subset B(x_0, \varepsilon/2\,k\,M'); \quad y(V'') \subset B(y_0, \varepsilon/2\,k\,M).$$

Si $V = V' \cap V''$, para cada $i \in V$ se verifica

$$\| z_i - P(x_0, y_0) \| = \| P(x_i, y_i) - P(x_0, y_0) \| \leqslant \| P(x_i, y_i) - P(x_i, y_0) \| +$$
$$+ \| P(x_i, y_0) - P(x_0, y_0) \| \leqslant k \| x_i \| \, \| y_0 - y_i \| + k \| y_0 \| \, \| x_i - x_0 \| \leqslant$$
$$\leqslant k\,M \frac{\epsilon}{2\,k\,M} + k\,M' \frac{\epsilon}{2\,k\,M'} = \varepsilon.$$

Entonces

$$z(V) \subset B(z_0, \epsilon) \quad \text{con} \quad z_0 = P(x_0, y_0),$$

lo que prueba que $z(\mathcal{U})$ converge a z_0, es decir, **6.4.**

Es inmediato comprobar que B (I, A) es un anillo normado cuando A es un anillo normado si se define el producto de dos redes (a_i), (b_i) del modo obvio:

$$(a_i)(b_i) = (a_i\, b_i).$$

Entonces, según lo que se acaba de indicar en la última parte de la demostración del teorema 11, resulta claro que τ B (I, A) es un subanillo de B (I, A).

12. Corolario.—*Si A es un anillo normado completo y si* $\pi : A \times A \to A$ *es el producto del anillo* $\pi(a, b) = a\, b$, *entonces para cada ultrafiltro* $\mathcal{U}$ *que contenga a la base de filtro* $\mathcal{B}$ *asociada al conjunto dirigido I, queda definido un* π*-límite generalizado Lim sobre* $\tau B(I, A)$ *si se pone* $\operatorname{Lim}_i a_i = \lim_{\mathcal{U}} a_i$ *para cada* $(a_i) \in \tau B(I, A)$.

Demostración.—Evidente.

El siguiente resultado es interesante porque prueba que bajo ciertas condiciones del anillo A se puede obtener un resultado recíproco del anterior.

13. Teorema.—*Sea A un anillo normado completo cuyos únicos elementos idempotentes son 0 y 1. Si existe un* π*-límite generalizado Lim sobre* $\tau B(I, A)$, *donde* π *es la aplicación producto del anillo A, entonces existe un ultrafiltro* $\mathcal{U}$ *que contiene a la base de filtro* $\mathcal{B}$ *asociada al conjunto dirigido I, tal que* $\operatorname{Lim}_i a_i = \lim_{\mathcal{U}} a_i$ *para cada* $(a_i) \in \tau B(I, A)$.

Demostración.—Para cada $V \subset I$ sea (v_i) su red característica definida por $v_i = 1$ si $i \in V$, $v_i = 0$ si $i \notin V$. Como $v_i(1 - v_i) = 0$, para todo $i \in V$, resulta

$$0 = \operatorname{Lim}_i (v_i(1 - v_i)) = \operatorname{Lim}_i v_i \operatorname{Lim}_i (1 - v_i) = \operatorname{Lim}_i v_i \,(1 - \operatorname{Lim}_i v_i),$$

o sea

$$\operatorname{Lim}_i v_i = (\operatorname{Lim}_i v\,)^2,$$

y teniendo en cuenta la hipótesis sobre A se deduce que el π-límite generalizado de cada red característica (v_i) sólo puede ser **0** ó **1**. Sea $\mathcal{U}$ la familia de las partes V de I que verifican $\operatorname{Lim}_i v_i = 1$, cuando (v_i) es la red característica de V. Evidentemente $\mathcal{U}$ no es vacía y $\Phi \notin \mathcal{U}$. Se verifica que si $V' \in \mathcal{U}$, $V'' \in \mathcal{U}$, entonces

$$V = V' \cap V'' \in \mathcal{U},$$

pues si (v_i) es la red característica de V y se verificase $\operatorname{Lim}_i v_i = \mathbf{0}$, se deduciría que

$$W' = V' - V \in \mathcal{U},\ W'' = V'' - V \in \mathcal{U},$$

siendo $W' \cap W'' = \Phi$, lo cual es absurdo, pues si $w_i = w_i' + w_i''$, **se** tendría $\operatorname{Lim}_i w_i = 2$, siendo (w_i) una red característica.

Por otra parte, si $V \in \mathcal{U}$ y $W \supset V$, entonces $W \in \mathcal{U}$, pues si $W' = W - V$, se tiene

$$\operatorname{Lim}_i w_i = \operatorname{Lim}_i v_i + \operatorname{Lim}_i w_j' = 1 + \operatorname{Lim}_i w_i',$$

y como (w_i) es una red característica debe ser $\operatorname{Lim}_i w_i' = 0$ y $\operatorname{Lim}_i w_i = 1$, y entonces $W \in \mathcal{U}$. Acabamos de probar que $\mathcal{U}$ es un filtro. Es inmediato que $\mathcal{U}$ es un ultrafiltro, pues si $V' \subset I$, $V'' \subset I$ son tales que

$$V = V' \cup V'' \in \mathcal{U},\ V' \cap V'' = \Phi,$$

y si (v_i), (v_i'), (v_i'') son las redes características de V, V′, V″, respectivamente, se tiene que $v_i = v_i' + v_i''$ y por tanto

$$1 = \operatorname{Lim}_i v_i = \operatorname{Lim}_i v_i' + \operatorname{Lim}_i v_i'',$$

de modo que o $V' \in \mathcal{U}$, o $V'' \in \mathcal{U}$.

El ultrafiltro $\mathcal{U}$ contiene a la base de filtro $\mathcal{B} = \{B_i\}_{i \in I}$ asociada al conjunto dirigido I. En efecto, sea (b_i) la red característica de $B_j = \{i : i \gg j\}$, y sea $b_i' = 1$ para todo $i \in I$; entonces

$$\operatorname{Lim}_i b_i = \operatorname{Lim}_i b_i' = 1$$

como consecuencia de 5.4, pues $b_i = \rho_i^j b_i'$, y esto prueba que $B_j \in \mathcal{U}$ para cada $j \in I$.

Por último, hay que probar que si $(a_i) \in \tau B(I, A)$, entonces la base de filtro $a(\mathcal{U})$ converge a $a_0 = \operatorname{Lim}_i a_i$. En efecto, como $a(I)$ es totalmente acotado, existe un número finito de bolas $B(b_k, \varepsilon/2)$, $k = 1, \ldots, m$ tales que recubren $a(I)$. Sea

$$I_k = \{ i \in I : a_i \in B(b_k, \varepsilon/2) \};$$

como

$$\bigcup_{k=1}^{m} I_k = I \in \mathcal{U}$$

y $\mathcal{U}$ es ultrafiltro, se deduce que existe k, $1 \leqslant k \leqslant m$, tal que $I_k \in \mathcal{U}$.

Si $V = I_k$, y (v_i) es su red característica, definimos

$$b_i^j = a_i (1 - v_i) + a_j v_i$$

para cada $i \in I$ y cada $j \in V$; evidentemente se verifica que $b_i^j = a_j$ si $i \in V$, $b_i^j = a_i$ si $i \notin V$. Entonces para cada $j \in V$ resulta

$$\operatorname{Lim}_i b_i^j = \operatorname{Lim}_i (a_i (1 - v_i) + a_j v_j) = a_j,$$

pues $\operatorname{Lim}_i v_i = 1$, ya que $V \in \mathcal{U}$. Y teniendo en cuenta esto, se obtiene

$$| a_0 - a_j | = | \operatorname{Lim}_i a_i - \operatorname{Lim}_i b_i^j | \leqslant \sup_{i \in I} | a_i - b_i^j | =$$

$$= \sup_{i \in V} | a_i - b_i^j | = \sup_{i \in V} | a_i - a_j | < \varepsilon$$

para cada $j \in V$, pues $V = B(b_k, \varepsilon/2)$. Esto prueba que

$$a(V) \subset B(a_0, \varepsilon)$$

y por tanto que la base de filtro $a(V)$ converge al punto a_0.

14. Corolario.—*Sea A un anillo normado completo cuyos únicos elementos idempotentes son 0 y 1. Sea $\mathcal{P}$ la familia de todas las aplicaciones $P : A \times A \to A$ con las propiedades* **6.1**, **6.2** *y* **6.3**. *Entonces si Lim es un π-límite generalizado sobre $\pi\, B\,(I, A)$ cuando π es la aplicación producto del anillo, también es un P-límite para cada $P \in \mathcal{P}$.*

Demostración.—Consecuencia inmediata de los teoremas 13 y 11.

§ 3. Límites generalizados de Banach sobre sucesiones acotadas en un A-módulo normado con la propiedad de extensión

En el capítulo VII de la memoria «El problema de la medida», de B. Rodríguez-Salinas (19), hay establecidos una serie de resultados referentes a la existencia de límites generalizados de Banach sobre ciertos submódulos de B(Y) cuando Y es un A módulo normado inyectivo. Se puede verificar fácilmente que todos estos resultados siguen siendo válidos si se pide solamente que el A-módulo normado Y tenga la siguiente propiedad que llamamos propiedad de extensión ε.

16. Definición.—Se dice que el A-módulo normado Y tiene la ***propiedad de extensión*** ε cuando para cada submódulo $X \subset B\,(Y)$ se verifica que para todo submódulo $X_0 \subset X$ y para todo A-homomorfismo $f_0 : X_0 \to Y$ acotado, existe un A-homomorfismo $f : X \to Y$ de norma $\| f \| = \| f_0 \|$, que es una extensión de f_0.

17. Definición.—Un *A-módulo normado Y* se dice que es ***no arquimediano de tipo*** $\alpha \in \mathbb{R}_+$ si se verifica que

$$\left\| \sum_{k=1}^{n} y_k \right\| \leqslant \alpha \max_{1 \leq k \leq n} \| y_k \|$$

para cada subconjunto finito $\{y_1, \ldots, y_n\} \subset Y$. Si $\alpha = 1$, se dice abreviadamente que *Y es no arquimediano*.

La definición que da B. Rodríguez-Salinas de A-módulo normado inyectivo es la siguiente:

18. DEFINICIÓN.—Se dice que el *A-módulo normado* (resp. *no arquimediano*) Y es *inyectivo* cuando para cada A-módulo normado (resp. no arquimediano) X se verifica que para todo submódulo $X_0 \subset X$ y para todo A-homomorfismo $f_0 : X_0 \to Y$ acotado, existe un A-homomorfismo $f : X \to Y$ de norma $\| f \| = \| f_0 \|$ que es una extensión de f_0.

Es evidente que cada A-módulo normado inyectivo tiene la propiedad de extensión ε, pues en el caso de que Y sea no arquimediano, se sabe ((17), teorema V.2) que B (Y) también es no arquimediano. Entonces, si A es un cuerpo normado completo no arquimediano y si Y es un espacio vectorial sobre A esféricamente completo, se verifica la propiedad de extensión ε y se pueden aplicar en este caso todos los resultados que siguen. El caso particular de cuerpos no arquimedianos está tratado en (20).

A continuación exponemos los resultados obtenidos en (19) cambiando la hipótesis de que Y sea inyectivo por la de que tenga la propiedad de extensión ε. Las demostraciones que se dan en (19) siguen siendo válidas; indicaremos de manera concreta en cada caso dónde se encuentran. El teorema fundamental es el siguiente:

19. TEOREMA.—*Sea Y un A-módulo normado con la propiedad de extensión ε y sea $X \subset B(Y)$ un submódulo que contiene las sucesiones constantes y es σ-invariante. Entonces para que exista un límite generalizado de Banach Lim sobre X es necesario y suficiente que se verifique:*

19.1. $\| y \| \leqslant \| y - (x\sigma - x) \|$ para cada $y \in Y$ y $x \in X$.

DEMOSTRACIÓN.—Véase (19), teorema 56.

Utilizando este teorema se puede probar que, al igual que los A-módulos normados inyectivos, los A-módulos normados con la propiedad de extensión ε también son completos. En efecto, si $X \subset B(Y)$ es el submódulo de las sucesiones de Cauchy, bastará probar que existe un límite generalizado sobre X y tener en cuenta la proposición 10. Para cada sucesión de Cauchy $x = (x_n)$ y cada $y \in Y$ se tiene

$$\| y \| = \lim_n \| y - (x_{n+1} - x_n) \|,$$

de modo que dado $\varepsilon > 0$ existe $n \in N$ tal que

$$\| y \| - \varepsilon \leqslant \| y - (x_{m+1} - x_m) \| \leqslant \sup_n \| y - (x_{n+1} - x_n) \| = \| y - x(\sigma - x) \|,$$

y esto prueba que se verifica 19.1 y por tanto que existe un límite generalizado de Banach sobre X.

20. DEFINICIÓN.—Se dice que A-módulo normado Y posee la *propiedad* P_n ($n \in \mathbb{N}$) cuando se verifican las dos condiciones:

20.1. Para cada $y \in Y$ existe un único $y' \in Y$ tal que $n\, y' = y$.

20.2. Si $\{y_1, \ldots, y_n\} \subset Y$, y si $n\, y = y_1 + \ldots + y_n$, entonces

$$\| y \| \leqslant \max_{1 \leq k \leq n} \| y_k \|$$

En las proposiciones que siguen designaremos por M el conjunto de los números naturales para los que vale la propiedadd P_n en el A-módulo normado Y. Se demuestra ((19), proposición VII.27) que $1 \in M$, y que si $m \in M$ y $n \in M$, entonces $n\, m \in M$, y si $m \in M$ y n es un divisor de m, entonces también $n \in M$.

21. PROPOSICIÓN.—*La función real* p : $B(Y) \to \mathbb{R}$ *definida por*

21.1. $$p(x) = \inf \left\{ \left\| \frac{1}{m} \sum_{h=1}^{m} x\, \sigma^{i_h} \right\| : m \in M,\ i_h \in N \right\}$$

es una seminorma.

DEMOSTRACIÓN.—Véase (19), observ. 60.

22. TEOREMA.—*Sea Y un A-módulo normado con la propiedad de extensión* ε *y sea* $X \subset B(Y)$ *un submódulo* σ*-invariante que contiene las sucesiones constantes y que verifica* x/n $\in X$ *para cada* x $\in X$ *y cada* n $\in M$. *Entonces una condición necesaria y suficiente para que exista un límite generalizado de Banach sobre X es que se verifique*

22.1. $\| y \| \leqslant p\,(y - (x\,\sigma - x))$ para cada $y \in Y$ y $x \in X$, *donde* p *es la seminorma definida por* 21.1.

DEMOSTRACIÓN.—Véase (19), teorema 59.

Se obtiene un teorema análogo al teorema 22 si se cambia la condición ($x/n \in X$ para cada $x \in X$ y cada $n \in M$) por la siguiente

$$\| n\, y \| = | n\, e |\ \| y \| \quad \text{para cada} \quad y \in Y \ \text{ y } \ n \in M.$$

23. DEFINICIÓN.—*Una sucesión* x $\in$ B (Y) se dice que es *regular* si $p\,(x\,\sigma - x) = 0$, donde p es la seminorma definida por 21.1. Se designa por R (Y) el conjunto de las sucesiones de B (Y) que son regulares.

24. Teorema.—*Sea Y un A-módulo normado con la propiedad de extensión ε. Entonces $R(Y)$ es completo y existe un límite generalizado de Banach sobre $R(Y)$.*

Demostración.—Véase (19), teorema 62.

25. Teorema.—*Sea Y un A-módulo normado con la propiedad de extensión ε y sea* p *la seminorma definida por* 21.1. *Entonces* $X_0 = \{x \in B(Y):$ *existe* $y \in Y$ *tal que* $p(x - y) = 0\}$ *es un submódulo σ-invariante de $R(Y)$ que contiene las sucesiones convergentes y que verifica* $x/n \in X_0$ *para cada* $x \in X_0$ *y* $n \in M$. *Además existe un límite generalizado de Banach, Lim sobre X_0 unívocamente determinado por ser* Lim $x = y$ $(y \in Y)$ *cuando* $p(x - y) = 0$.

Demostración.—Véase (19), teorema 63.

26. Definición.—Se define $Q(Y)$ como el conjunto de las sucesiones $x = (x_n) \in B(Y)$ que verifican

$$\inf \left\{ \left\| \frac{x\,\sigma^{n+m} - x\,\sigma^{n}}{m} \right\| : (m, n) \in M \times N \right\} = 0.$$

27. Teorema.—*Sea Y un A-módulo normado con la propiedad de extensión ε. Existe un límite generalizado de Banach sobre $Q(Y)$.*

Demostración.—Véase (19), teorema 68.

28. Teorema.—*Sea Y un A-módulo normado con la propiedad de extensión ε. Si se verifica que*

$$\inf_{n \in M} \ \sup_{\|y\| \leq r} \left\| \frac{y}{n} \right\| = 0$$

$(y \in Y)$ *para cada* $r > 0$, *entonces* $Q(Y) = B(Y)$ *y existe un límite generalizado de Banach sobre $B(Y)$.*

Demostración.—Véase (19), teorema 69.

29. Teorema.—*Sea Y un A-módulo normado con la propiedad de extensión ε que verifica* $\|n\,y\| = |n\,e|\ \|y\|$ *para cada* $y \in Y$

y $n \in M$. *Entonces si* $\{|ne| : n \in M\}$ *es un conjunto no acotado, existe un límite generalizado de Banach sobre* $B(Y)$.

DEMOSTRACIÓN.—Véase (19), corolario 70.

30. TEOREMA.—*Sea* Y *un* A*-módulo normado tal que existe un límite generalizado de Banach sobre* $B(Y)$. *Entonces se verifica la propiedad* P_n *para cada* $n \in N$ *y* $\{|ne| : n \in N\}$ *es un conjunto no acotado.*

DEMOSTRACIÓN.—Véase (19), teorema 71.

31. TEOREMA.—*Sea* Y *un* A*-módulo normado con la propiedad de extensión* ε *que verifica* $\|ny\| = |ne| \, \|y\|$ *para cada* $y \in Y$ *y cada* $n \in M$. *Para que exista un límite generalizado de Banach sobre* $B(Y)$ *es necesario y suficiente que se verifique la propiedad* P_n *para cada* $n \in N$ *y que* $\{|ne| : n \in N\}$ *sea un conjunto no acotado.*

DEMOSTRACIÓN.—Véase (19), teorema 72.

32. TEOREMA.—*Sea* Y *un* A*-módulo normado con la propiedad de extensión* ε. *Para que exista un límite generalizado de Banach sobre* $\tau B(Y)$ *es necesario y suficiente que se verifique la propiedad* P_n *para cada* $n \in N$.

DEMOSTRACIÓN.—Véase (19), teorema 78.

33. TEOREMA.—*Sea* Y *un* A*-módulo normado con la propiedad de extensión* ε *y* X_0 *un submódulo* σ*-invariante de* $B(Y)$ *tal que:*
i) *Contiene las sucesiones constantes.* ii) $x/n \in X_0$ *para cada* $x \in X_0$ *y* $n \in M$. iii) *Existe un límite generalizado de Banach* Lim_0 *sobre* X_0. *Entonces existe un límite generalizado de Banach* Lim *sobre el* A*-módulo* σ*-invariante* $X = X_0 + R(Y)$ *que es una extensión de* Lim_0.

DEMOSTRACIÓN.—Véase (19), teorema 64.

34. TEOREMA.—*En las hipótesis del teorema 33 existe un submódulo* X *de* $B(Y)$ *que es maximal entre los submódulos* σ*-invariantes* $B(Y)$ *con las propiedades i), ii) iii).*

DEMOSTRACIÓN.—Véase (19), teorema 65.

Seguidamente exponemos los resultados correspondientes al caso de A-módulos normados no arquimedianos.

35. DEFINICIÓN.—Si Y es un A-módulo normado no arquimediano se dice que *dos elementos* x, y $\in$ *Y son ortogonales* si se verifica:

35.1. $\| a\,x + b\,y \| = \max\,\{\| a\,x \|,\ \| b\,y \|\}$ para cada $a \in$ A y $b \in$ A. Entonces se escribe $x \perp y$. Se dice que $y \in$ Y es ortogonal a un subconjunto $Y^* \subset Y$ si $y \perp y^*$ para cada $y^* \in Y^*$ y se escribe $y \perp Y^*$.

36. TEOREMA.—*Sea Y un A-módulo normado no arquimediano con la propiedad de extensión* ε *y sea X un submódulo* σ*-invariante de B (Y) que contiene las sucesiones constantes. Una condición necesaria y suficiente para que exista un límite generalizado de Banach sobre X es que la sucesión* (n y) *sea ortogonal a X para cada* y $\in$ *Y.*

DEMOSTRACIÓN.—Véase (19), teorema 58.

37. TEOREMA.—*Sea Y un A-módulo normado no arquimediano de tipo* α *con la propiedad de extensión* ε*. Entonces sobre R (Y) existe un único límite generalizado de Banach. Si X es un submódulo de B (Y) que es maximal entre los submódulos de B (Y) con las propiedades i), ii), iii) del teorema 33, entonces existe un único límite generalizado de Banach sobre X.*

DEMOSTRACIÓN.—Véase (19), teorema 67.

Por último, damos el siguiente teorema, que es el que sugiere la definición de A-módulo normado convexo que se da en el capítulo II.

38. TEOREMA.—*Sea Y un A-módulo normado tal que existe un límite generalizado de Banach sobre B (Y) y tal que se verifica:*

38.1. $\lim\limits_{n} \left\| \dfrac{y}{n} \right\| = 0, \qquad \forall\, y \in Y.$

Entonces, para cada par $(\alpha, y) \in \mathbb{R} \times Y$ *se puede definir un producto* $\alpha\,y \in Y$ *con las propiedades:*

38.2. $1\,y = y, \qquad \forall\, y \in Y.$

38.3. $(\alpha + \beta)\,y = \alpha\,y + \beta\,y, \qquad \forall\, y \in Y,\ \forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$

38.4. $\alpha\,(x + y) = \alpha\,x + \alpha\,y, \qquad \forall\,(x, y) \in Y^2, \forall\, \alpha \in \mathbb{R}.$

38.5. $\alpha (a y) = a (\alpha y) \quad \forall y \in Y \quad \forall \alpha \in \mathbb{R} \quad \forall a \in A.$

38.6. $\alpha (r y) = (\alpha r) y = r (\alpha y) \quad \forall y \in Y, \ \forall \alpha \in \mathbb{R}, \ \forall r \in Q.$

38.7. Si $\sum_{k=1}^{n} \alpha_k \leqslant m \ (m \in N)$, $\alpha_k \geqslant 0$ para $k = 1, \ldots, n$, y si $\{y_1, \ldots, y_n\} \subset Y$, entonces

$$\left\| \sum_{k=1}^{n} \alpha_k y_k \right\| \leqslant | m e | \max_{1 \leq k \leq n} \| y_k \|.$$

Demostración.—Véase (19), teorema 80.

Nótese que en todos los resultados de este último apartado desempeña un papel muy importante la norma del anillo A, de modo que estos resultados en general no se pueden extender para los A-módulos F-normados.

Capítulo II

§ 1. A-módulos F-normados convexos y preconvexos

1. Definición.—*Un A-módulo F-normado Y se dice que es preconvexo si hay definida una aplicación* $(\alpha, y) \longmapsto \alpha y$ *de* $\mathbb{R} \times Y$ *en* Y *que verifica las siguientes condiciones:*

1.1. $1 y = y, \quad \forall y \in Y.$

1.2. $(\alpha + \beta) y = \alpha y + \beta y, \quad \forall y \in Y, \ \forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2.$

1.3. $\alpha (x + y) = \alpha x + \alpha y, \quad \forall (x, y) \in Y^2, \ \forall \alpha \in \mathbb{R}.$

1.4. $\alpha (a y) = a (\alpha y) \quad \forall y \in Y, \quad \forall a \in A, \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}.$

1.5. Si $\sum_{k=1}^{n} \alpha_k < 1$, con $\alpha_k \geqslant 0$, para $k = 1, \ldots, n$, y si

$$\{ y_1, \ldots, y_n \} \subset Y.$$

entonces

$$\left\| \sum_{k=1}^{n} \alpha_k y_k \right\| \leqslant \max_{1 \leq k \leq n} \| y_k \|.$$

2. Proposición.—*Si Y es un A-módulo F-normado preconvexo se verifica:*

2.1. $\alpha(r\, y) = r\,(\alpha\, y) = (r\,\alpha)\, y, \quad \forall\, y \in \mathrm{Y},\ \forall\, r \in \mathrm{Q},\ \forall\, \alpha \in \mathbb{R}.$

2.2. Para cada número real α, la aplicación de Y en Y definida por $y \longmapsto \alpha\, y$ es continua.

DEMOSTRACIÓN.—De 1.2 y 1.3 se deduce que

$$\alpha\,(n\, y) = n\,(\alpha\, y) = (n\,\alpha)\, y,$$

cuando n es entero; entonces si $r = \dfrac{m}{n}$ con $n > 0$, se obtiene:

$$n\,[(r\,\alpha)\, y] = (n\, r\,\alpha)\, y = (m\,\alpha)\, y = m\,(\alpha\, y);$$

análogamente,

$$n\,[\alpha\,(r\, y)] = \alpha\,(m\, y) = m\,(\alpha\, y).$$

Multiplicando por $\beta = \dfrac{1}{n}$ se obtiene 2.1.

La continuidad de la aplicación $y \longmapsto \alpha\, y$ es consecuencia de 1.3 y de la continuidad en $y = 0$ deducida de la relación

$$\|\,\alpha\, y\,\| \leqslant ([\alpha] + 1)\,\|\, y\,\|,$$

que es consecuencia de 1.5, donde $[\alpha]$ es la parte entera del número real α.

3. DEFINICIÓN. — Un *A-módulo F-normado Y* se dice que es *convexo*, si es preconvexo y además se verifica:

3.1. Si $\sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_k \leqslant 1$, con $\alpha_k \geqslant 0$ para $k = 1, \ldots, n$, y si

$$\{\, y_1, \ldots, y_n \,\} \subset \mathrm{Y},$$

entonces

$$\left\|\, \sum_{k=1}^{n} \alpha_k\, y_k \right\| \leqslant \max_{1 \leq k \leq n} \|\, y_k\,\|.$$

4. Proposición.—*Sea Y un A-módulo normado preconvexo (resp. convexo) y* m *un número natural. Si*

$$\sum_{k=1}^{n} \alpha_k < m$$

(resp. $\leqslant m$) *con* $\alpha_k \geqslant 0$ *para* $k = 1, \ldots, n$, *y si* $\{y_1, \ldots, y_n\} \subset Y$, *entonces se cumple*

4.1. $$\left\| \sum_{k=1}^{m} \alpha_k\, y_k \right\| \leqslant |\, m\, e\,| \max_{1 \leqq k \leqq n} \| y_k \|.$$

Demostración. — Consecuencia inmediata de 1.5 (resp. 3.1), si se toma $\alpha'_k = \alpha_k/m$, pues

$$\sum_{k=1}^{n} \alpha'_k < 1 \qquad (\text{resp. } \leqslant 1).$$

5. Definición.—En un A-módulo F-normado preconvexo Y se dice que *la F-norma es regular* si:

5.1. $\| x \| = \inf \{\| r\, x \| : r \in Q,\ r > 1\}, \quad \forall\, x \in Y.$

6. Proposición.—*Sea Y un A-módulo F-normado (resp. normado) preconvexo para la F-norma (resp. norma)* $\| \ \|$. *Si se pone:*

6.1. $\| x \|^* = \inf \{\| r\, x \| : r \in Q,\ r > 1\}$ *para cada* $x \in Y$ *resulta que* $\| \ \|^*$ *es una F-norma (resp. norma) sobre Y equivalente a* $\| \ \|$. *Y es un A-módulo F-normado (resp. normado) preconvexo para esta nueva F-norma* $\| \ \|^*$, *la cual es regular.*

Demostración.—En toda la demostración que sigue hay que tener siempre presente la propiedad 2.1.

Para cada número racional $r > 1$, como consecuencia de 1.5 se verifica

$$\| x \| = \left\| \frac{1}{r}\, (r\, x) \right\| \leqslant \| r\, x \|,$$

cualquiera que sea $x \in Y$. Es claro que

$$\| x \| \leqslant \| x \|^* \leqslant 2 \| x \|$$

para todo $x \in Y$. Una vez probado que $\| \ \|^*$ es una F-norma, esta relación muestra que $\| \ \|$ y $\| \ \|^*$ son dos F-normas equivalentes sobre Y.

Evidentemente

$$\| 0 \|^* = 0, \ \| x \|^* > 0$$

para cada $x \in Y - \{0\}$, y

$$\| x \|^* = \| -x \|^*$$

para todo $x \in Y$. Si $r_1 > 1$, $r_2 > 1$ son números racionales tales que

$$\| x \|^* \leqslant \| r_1 x \| \leqslant \| x \|^* + \epsilon/2, \ \| y \|^* \leqslant \| r_2 y \| \leqslant \| y \|^* + \epsilon/2,$$

tomemos un número racional r tal que $1 < r < \min (r_1, r_2)$; entonces

$$\left\| \frac{r}{r_1} (r_1 x) + \frac{r}{r_2} (r_2 y) \right\| \leqslant \| r_1 x \| + \| r_2 y \| \leqslant \| x \|^* + \| y \|^* + \epsilon$$

de donde

$$\| x + y \|^* \leqslant \| r (x + y) \| \leqslant \| x \|^* + \| y \|^* + \epsilon$$

para cada $\epsilon > 0$, y de aquí se deduce que

$$\| x + y \|^* \leqslant \| x \|^* + \| y \|^*$$

para cada $x \in Y$ e $y \in Y$.

Es inmediato que si $\| \ \|$ es una norma, entonces $\| \ \|^*$ también lo es.

Veamos que se verifica 1.5 para la nueva F-norma $\| \ \|^*$, lo cual probará que Y es un A-módulo F-normado preconvexo para esta F-norma. Si

$$\sum_{k=1}^{n} \alpha_k < 1,$$

sea r un número racional, $r > 1$, tal que

$$\sum_{k=1}^{n} (r\,\alpha_k) < 1.$$

Entonces

$$\left\| \sum_{k=1}^{n} \alpha_k\, y_k \right\|^* \leqslant \left\| \sum_{k=1}^{n} (\alpha_k\, r)\, y_k \right\| \leqslant \max_{1 \leq k \leq n} \| y_k \| \leqslant \max_{1 \leq k \leq n} \| y_k \|^*$$

Por último, probamos que $\| \ \|^*$ es regular. Siendo

$$\| r\,x \|^* = \inf \{ \| s\,r\,x \| \ : \ s \in Q,\ s > 1 \}$$

$$\| x \|^* = \inf \{ \| t\,x \| \ : \ t \in Q,\ t > 1 \}$$

es obvio que

$$\| r\,x \|^* \geqslant \| x \|^*$$

para cada número racional $r > 1$.

Distinguiremos dos casos: A) existe un número racional $t > 1$ tal que

$$\| t\,x \| = \| x \|^*$$

entonces si r es un número racional tal que $1 < r < t$, como $s = \dfrac{t}{r} > 1$, resulta

$$\| r\,x \|^* \leqslant \| (s\,r)\,x \| = \| t\,x \| = \| x \|^*,$$

y esto prueba que en este caso se verifica 5.1 para la F-norma $\| \ \|^*$. B) Si no existe un número racional $t > 1$ tal que

$$\| t\,x \| = \| x \|^*,$$

dado $\varepsilon > 0$ existe un número racional $t_1 > 1$, tal que

$$\| x \|^* < \| t_1\, x \| \leqslant \| x \|^* + \varepsilon,$$

y un número racional $t_2 > 1$ tal que

$$\| x \|^* < \| t_2 x \| < \| t_1 x \| \leqslant \| x \|^* + \varepsilon.$$

Es claro que debe ser $t_2 < t_1$, y entonces si se toma $s = t_1/t_2 > 1$, resulta

$$\| x \|^* \leqslant \| t_2 x \|^* \leqslant \| s\, t_2 x \| = \| t_1 x \| \leqslant \| x \|^* + \varepsilon$$

y esto prueba 5.1 para la F-norma $\| \; \|^*$ en este segundo caso.

7. TEOREMA. — *Cada A-módulo F-normado preconvexo Y cuya F-norma es regular es un A-módulo F-normado convexo.*

DEMOSTRACIÓN.—Si

$$\sum_{k=1}^{n} \alpha_k = 1, \; \alpha_k \geqslant 0, \; y_k \in \mathrm{Y} \quad \text{para} \quad k = 1, \ldots, n,$$

entonces, teniendo en cuenta la proposición 2 y la propiedad 1.5 de los A-módulos F-normados preconvexos, se deduce que para cada número racional $r > 1$ es

$$\left\| \sum_{k=1}^{n} \alpha_k y_k \right\| = \left\| \sum_{k=1}^{n} \frac{\alpha_k}{r} (r\, y_k) \right\| \leqslant \max_{1 \leq k \leq n} \| r\, y_k \|.$$

Bastará probar que cuando la F-norma es regular, se verifica

$$\inf \{ \max_{1 \leq k \leq n} \| r\, y_k \| : r \in \mathrm{Q},\; r > 1 \} = \max_{1 \leq k \leq n} \| y_k \|,$$

Para probar esto supongamos que

$$\| y_n \| = \max_{1 \leq k \leq n} \| y_k \| ;$$

entonces, dado $\varepsilon > 0$, se tiene

$$\| y_k \| < \| y_n \| + \varepsilon \quad \text{para} \quad k = 1, \ldots, n,$$

de modo que para cada k, $1 \leqslant k \leqslant n$, al ser la F-norma regular, existe $r_k > 1$ racional tal que

$$\| y_k \| \leqslant \| r_k y_k \| \leqslant \| y_n \| + \epsilon.$$

Si t es un número racional que verifica

$$1 < t < \min_{1 \leq k \leq n} r_k,$$

y si $s_k = t/r_k < 1$, se obtiene

$$\| y_k \| \leqslant \| t y_k \| = \| s_k (r_k y_k) \| \leqslant \| r_k y_k \| \leqslant \| y_n \| + \epsilon \quad \text{para} \quad k = 1, \ldots, n.$$

Entonces resulta

$$\inf \{ \max_{1 \leq k \leq n} \| r y_k \| : r \in Q, r > 1 \} \leqslant \max_{1 \leq k \leq n} \| t y_k \| \leqslant \| y_n \| + \epsilon,$$

y de aquí se deduce

$$\inf \{ \max_{1 \leq k \leq n} \| r y_k \| : r \in Q, r > 1 \} \leqslant \max_{1 \leq k \leq n} \| y_k \|.$$

La desigualdad en el otro sentido es evidente.

8. TEOREMA. — *Sea Y un A-módulo F-normado. Sea $X \subset \mathbb{B}(Y)$ un submódulo σ-invariante que verifica* a x $\in X$ *para cada* a $\in A$ *y* x $\in X$ *que contiene las sucesiones de recorrido finito. Si existe un límite generalizado de Banach Lim sobre X, entonces se puede dotar a Y de estructura de A-módulo F-normado preconvexo si se define*

$$\alpha \mathrm{y} = \operatorname*{Lim}_{\mathrm{n}} ([(\mathrm{n} + 1) \alpha] - [\mathrm{n}\, \alpha])\, \mathrm{y},$$

para cada $\alpha \in \mathbb{R}$ e $y \in \mathrm{Y}$ (2).

DEMOSTRACIÓN.—Evidentemente, si

$$y_n = ([(n + 1) \alpha] - [n\, \alpha])\, y,$$

(2) $[\lambda]$ designa el mayor entero menor o igual que el número real λ.

entonces (y_n) es una sucesión de recorrido finito, y el producto $(\alpha, y) \longmapsto \alpha\, y$ que se ha definido verifica las propiedades **1.1**, 1.3 y **1.4** como consecuencia de las propiedades del límite generalizado. Veamos las restantes propiedades:

1.2

$$(\alpha + \beta)\, y - \alpha\, y - \beta\, y = \operatorname*{Lim}_n\,([(n + 1)(\alpha + \beta)] - [n(\alpha + \beta)])\, y -$$
$$- \operatorname*{Lim}_n\,([(n + 1)\,\alpha] - [n\,\alpha])\, y - \operatorname*{Lim}_n\,([(n + 1)\,\beta] - [n\,\beta])\, y =$$
$$= \operatorname*{Lim}_n\,(z_{n+1} - z_n) = 0,$$

donde la sucesión (z_n) definida por

$$z_n = ([n(\alpha + \beta)] - [n\,\alpha] - [n\,\beta])\, y$$

tiene recorrido finito.

1.3. En primer lugar, hay que tener en cuenta que bajo las hipótesis consideradas se deduce que el A-módulo F-normado Y posee las propiedad P_n para cada $n \in N$, pues dados $y_1, \ldots, y_n$ elementos de Y, si $y = \operatorname*{Lim}_m z_m$, donde (z_m) es la sucesión de recorrido finito definida por $z_m = y_k$ cuando $m \equiv k \pmod{n}$, se verifica:

$$\| y \| \leqslant \max_{1 \leq k \leq n} \| y_k \|, \quad n\, y = \operatorname*{Lim}_m\,(z_{m+1} + z_{m+2} + \ldots + z_{m+n}) = y_1 + \ldots + y_n,$$

y además y es el único elemento de Y que verifica esta última condición, pues si $n\, y' = 0$, entonces la sucesión $(k\, y')$ toma sólo un número finito de valores y resulta

$$y' = \operatorname*{Lim}_k\,((k + 1)\, y' - k\, y') = \operatorname*{Lim}_k\,(k + 1)\, y' - \operatorname*{Lim}_k\, k\, y' = 0.$$

Nótese que si $\alpha \in Q$, el producto $(\alpha, y) \longmapsto \alpha\, y$ que se ha definido es tal que si $\alpha = m_1/m$, entonces $\alpha\, y$ es el único elemento de Y que verifica $m\,(\alpha\, y) = m_1\, y$. Teniendo en cuenta esto, resulta que si

$$\alpha_k = \frac{m_k}{m} \in Q, \; \alpha_k \geqslant 0 \quad \text{para} \quad k = 1, \ldots, n,$$

y si

$$\sum_{k=1}^{n} \alpha_k \leqslant 1,$$

entonces

$$\left\| \sum_{k=1}^{n} \alpha_k y_k \right\| = \left\| \frac{1}{m} (m_1 y_1) + \dots + \frac{1}{m} (m_n y_n) \right\| \leqslant \max_{1 \leq k \leq n} \| y_k \|,$$

como consecuencia de la propiedad P_m.

Sea ahora $\alpha_k \in \mathbb{R}$, $\alpha_k \geqslant 0$ para $k = 1, \dots, n$ con

$$\sum_{k=1}^{n} \alpha_k < 1.$$

Si

$$\alpha_k^{(m)} = [(m+1)\alpha_k] - [m \alpha_k] \quad \text{para} \quad k = 1, \dots, n$$

y cada $m \in N$, pongamos

$$r_k(m, p) = \frac{\alpha_k^{(m)} + \alpha_k^{(m+1)} + \dots + \alpha_k^{(m+p-1)}}{p} \quad (p \in N).$$

Se tiene

$$\alpha_k^{(m)} + \alpha_k^{(m+1)} + \dots + \alpha^{(m+p-1)} = [(m+p)\alpha_k] - [\mathrm{m}\, \alpha_k] \leqslant$$

$$\leqslant \alpha_k (m+p) - (\alpha_k m - 1) = \alpha_k p + 1.$$

Si tomamos $p > \dfrac{n}{1-\alpha}$, donde

$$\alpha = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k < 1,$$

resulta

$$\sum_{k=1}^{n} r_k(m, p) \leqslant \frac{1}{p} \sum_{k=1}^{n} (\alpha_k p + 1) = \frac{\alpha p + n}{n} < 1.$$

Teniendo en cuenta el resultado que acabamos de obtener cuando $\alpha_k \in Q$ para $k = 1, \ldots, n$, resulta:

$$\left\| \sum_{k=1}^{n} \alpha_k y_k \right\| = \left\| \operatorname*{Lim}_{n} \sum_{k=1}^{n} \alpha_k^{(m)} y_k \right\| =$$

$$= \left\| \operatorname*{Lim}_{m} \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{\alpha_k^{(m)} + \ldots + \alpha_k^{(m+\nu-1)}}{p} \right) y_k \right\| \leqslant$$

$$\leqslant \sup_{m} \left\| \sum_{k=1}^{n} r_k(m, p) y_k \right\| \leqslant \max_{1 \leq k \leq n} \| y_k \|,$$

pues

$$\sum_{k=1}^{n} r_k(m, p) < 1 \quad \text{y} \quad r_k(m, p) \in Q \quad \text{para} \quad k = 1, \ldots, n.$$

Esto termina la demostración.

9. Proposición.—*En las condiciones del teorema 8, si existe un límite generalizado de Banach sobre X y se dota a Y de estructura de A-módulo F-normado preconvexo del modo indicado en dicho teorema, entonces se verifica la propiedad* 3.1 *para el caso* n = 2.

Demostración.—Teniendo en cuenta lo que se ha visto en la demostración del teorema 8, sólo queda por probar que si $\alpha_1 + \alpha_2 = 1$ con

$$\alpha_1 > 0, \ \alpha_2 > 0, \ \alpha_1 \notin Q, \alpha_2 \notin Q,$$

entonces

$$\| \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 \| \leqslant \max_{i=1,2} \| y_i \|.$$

En efecto, si

$$T(\alpha_i) = \{ n \in N : \exists m \in N, n \alpha_i < m < (n+1)\alpha_i \} \quad (i = 1, 2)$$

es fácil ver que

$$\alpha_n^{(i)} = [(n+1)\alpha_i] - [n \alpha_i] = 1$$

si y sólo si $n \in T(\alpha_i)$. Obsérvese que $\alpha_n^{(1)}$, $\alpha_n^{(2)}$ sólo pueden tomar los valores 0 y 1, pero no pueden tomar simultáneamente el valor 1, pues si fuese $\alpha_n^{(1)} = \alpha_n^{(2)} = 1$, entonces sería

$$n \in T(\alpha_1) \cap T(\alpha_2)$$

de modo que deben existir $m_1 \in N$, $m_2 \in N$, tales que

$$n \alpha_1 < m_1 < (n+1)\alpha_1 \quad \text{y} \quad n \alpha_2 < m_2 < (n+1)\alpha_2 ;$$

pero en este caso resultaría

$$n < m_1 + m_2 < n + 1,$$

lo cual es absurdo. Entonces

$$\| \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 \| = \| \operatorname{Lim}_n (\alpha_n^{(1)} y_1 + \alpha_n^{(2)} y_2) \| \leqslant$$

$$\leqslant \sup_n \| \alpha_n^{(1)} y_1 + \alpha_n^{(2)} y_2 \| \leqslant \max_{i=1,2} \| y_i \|.$$

10. PROPOSICIÓN.—*Sea Y un A-módulo F-normado convexo (o un A-módulo F-normado preconvexo con el producto* $(\alpha, y) \longmapsto \alpha y$ *definido como en el teorema 8). Entonces se verifica la propiedad* P_n *para cada* $n \in N$.

DEMOSTRACIÓN.—Dado $y \in Y$, sea $\alpha = \dfrac{1}{n}$, entonces si $y' = \alpha y$ se obtiene $n y' = y$. Además este elemento $y' \in Y$ es único, pues si $n y' = 0$,, se deduce

$$0 = \frac{1}{n} (n y') = y'.$$

Si Y es convexo, como consecuencia de la propiedad 3.1 resulta

$$\left\| \frac{1}{n} (y_1 + \dots + y_n) \right\| \leqslant \max_{1 \leq k \leq n} \| y_k \|.$$

Si Y es preconvexo, pero la estructura de A-módulo preconvexo se define como en el teorema 8, ya se vio en la demostración de dicho teorema que se verificaba la propiedad P_n para cada $n \in N$.

11. TEOREMA.—*Sea Y un A-módulo F-normado. Si existe sobhe $\tau B(Y)$ un límite generalizado de Banach Lim, entonces Y es completo y se puede dotar a Y de estructura de A-módulo F-normado preconvexo y por tanto de estructura de A-módulo F-normado convexo si se cambia la F-norma por otra F-norma equivalente.*

DEMOSTRACIÓN. — La primera afirmación es consecuencia inmediata de la proposición I.10, y la segunda es una consecuencia del teorema 8, del teorema 7 y de la proposición 6.

En el siguiente apartado nos proponemos dar una definición de integral para funciones con valores en un A-módulo F-normado convexo y completo, requisito previo para poder probar luego la existencia de límites generalizados de Banach sobre τ B (Y) cuando Y es un A-módulo F-normado convexo y completo, resultado que viene a ser en cierto modo recíproco del teorema 11 que acabamos de establecer.

§ 2. INTEGRACIÓN DE FUNCIONES CON VALORES EN UN A-MÓDULO F-NORMADO PRECONVEXO Y COMPLETO

En todo este apartado designaremos por T un conjunto no vacío y por $\mathcal{A}$ un álgebra de subconjuntos de T y μ una medida sobre $\mathcal{A}$, positiva y finitamente aditiva tal que $\mu(T) < \infty$. Una partición de T es una familia $\Pi = (E_1, \dots, E_n)$ de subconjuntos $E_k \in \mathcal{A}$ $(k = 1, \dots, n)$ tales que

$$\bigcup_{k=1}^{n} E_k = T \text{ y } E_k \cap E_j = \phi \quad \text{si} \quad k \neq j.$$

Denotaremos por D el conjunto de todos los pares (τ, Π), donde $\Pi = (E_1, ..., E_n)$ es una partición de T y donde $\tau = (t_1, ..., t_n)$ con $t_k \in E_k$ para $k = 1, ..., n$. En D se define la siguiente relación de preorden, $(\tau, \Pi) \leqslant (\tau', \Pi')$ si y sólo si para cada $j \in \{1, 2, ..., m\}$ existe $k(j) \in \{1, 2, ..., n\}$ tal que $E'_j \subset E_{k(j)}$, siendo

$$\Pi = (E_1, ..., E_n) \quad \text{y} \quad \Pi' = (E'_1, ..., E'_m).$$

Entonces D es un conjunto dirigido con esta relación de preorden. Si ahora Y es un A-módulo F-normado preconvexo, para cada función $x : T \to Y$ se define su red asociada (x_d) así:

$$x_d = \sum_{k=1}^{n} \mu(E_k) \, x(t_k)$$

cuando $d = (\tau, \Pi)$, siendo

$$\tau = (t_1, ..., t_n), \; \Pi = (E_1, ..., E_n).$$

12. Definición.—Si Y es un A-módulo F-normado preconvexo, *una función* x : $T \to Y$ *se dice que es integrable* si para cada $\varepsilon > 0$ existe una partición de T, $\Pi_\varepsilon = (E_1, ..., E_n)$ tal que cada $x(E_k)$ $(k = 1, ..., n)$ tiene diámetro menor que ε.

13. Teorema.—*Sea Y un A-módulo F-normado preconvexo. Para cada función* x : $T \to Y$ *integrable, la red asociada* (x_d) *es una red de Cauchy*

Demostración. — Sea r un número racional tal que $\mu(T) < r$. Por ser x integrable, dado $\varepsilon > 0$ existe una partición

$$\Pi_\varepsilon = (E_1, ..., E_n)$$

de T tal que cada $x(E_k)$ tiene diámetro menor que ε.

Tomemos $t_k \in E_k$ $(k = 1, ..., n)$ y sea $\tau = (t_1, ..., t_n)$ y $d = (\tau, \Pi_\varepsilon)$. Probaremos en primer lugar que si $d' \geqslant d$, $d'' \geqslant d$, entonces

$$\left\| \frac{1}{r} x_{d'} - \frac{1}{r} x_{d''} \right\| \leqslant \varepsilon$$

En efecto, si

$$d' = (\tau', \Pi') \quad \text{y} \quad d'' = (\tau'', \Pi''),$$

donde

$$\tau' = (t'_1, \dots, t'_p),\ \Pi' = (E'_1, \dots, E'_p),\ \tau'' = (t_1'', \dots, t_q''),\ \Pi'' = (E_1'', \dots, E_q'')$$

como

$$\mu(E_i') = \sum_{j=1}^{q} \mu(E_i' \cap E_j'')$$

resulta

$$x_{d'} = \sum_{i=1}^{p} \mu(E'_i)\, x(t'_i) = \sum_{i,j=1}^{p,q} \mu(E_i' \cap E_j'')\, x(t_i').$$

Análogamente se obtiene

$$x_{d''} = \sum_{i,j=1}^{p,q} \mu(E_i' \cap E_j'')\, x(t_j'').$$

Teniendo en cuenta la proposición 2, resulta

$$\frac{1}{r} x_{d'} - \frac{1}{r} x_{d''} = \sum_{i,j=1}^{p,q} \left(\frac{1}{r} \mu(E_i' \cap E_j'') \right) (x(t_i') - x(t_j'')).$$

En esta suma sólo hay que tener en cuenta los sumando para los que $E_i' \cap E_j'' \neq \phi$; pero para estos términos, E'_i, E_j'' están contenidos en un mismo E_k de diámetro menor que ε, lo cual implica

$$\| x(t_i') - x(t_j'') \| < \epsilon.$$

Como consecuencia de la propiedad 1.5 de los A-módulos F-normados preconvexos, se deduce

$$\left\| \frac{1}{r} x_{d'} - \frac{1}{r} x_{d''} \right\| \leqslant \epsilon$$

si $d' \geqslant d$, $d'' \geqslant d$. Esto prueba que $\left(\frac{1}{r}\, x_d\right)$ es una red de Cauchy. Como consecuecia de la propiedad 1.5 se deduce también que

$$\| r\, y \| \leqslant ([r] + 1) \| y \|$$

para cada $y \in$ Y, y por tanto (x_d) también es una red de Cauchy en el A-módulo F-normado Y.

14. Definición.—Sea Y un A-módulo F-normado preconvexo y completo. Para cada función integrable x : T $\rightarrow$ Y se define *la integral de* x *sobre T* como el límite de la red (x_d) asociada a x y se escribe:

$$\text{14.1.} \quad \int_T d\, \mu\, x\,(t) = \lim_d x_d = \lim_d \sum_{k=1}^{n} \mu\,(\mathrm{E}_k)\, x\,(t_k) \qquad (d = (\tau, \Pi)).$$

15. Proposición.—*Si $\mathcal{A}$ es el álgebra de todas las partes de T, entonces son integrables todas las funciones* x : $T \rightarrow Y$ *cuya imaben* x (T) *es un conjunto totalmente acotado en el A-módulo F-normado preconvexo Y.*

Demostración.—Dado $\varepsilon > 0$ puede recubrirse x (T) con un número finito de bolas, $B_1, \ldots, B_n$, de radio $\varepsilon/2$. Si

$$F_k = x^{-1}(B_k) \quad (k = 1, \ldots, n)$$

si se toma $\Pi_\varepsilon = (E_1, \ldots, E_n)$, donde

$$E_1 = F_1,\ E_k = F_k - \bigcup_{i=1}^{k-1} F_i \quad \text{si} \quad 1 < k \leqslant n,$$

se verifica que cada x (E_k) tiene diámetro menor que ε y por tanto x es integrable.

16. Proposición. — *La integral definida por* 14.1 *cuando Y es un A-módulo F-normado preconvexo y completo y cuando* x : $T \rightarrow Y$ *es una función integrable tiene las siguientes propiedades:*

16.1. $\int_T d\,\mu\,(x_1(t) + x_2(t)) = \int_T d\,\mu\,x_1(t) + \int_T d\,\mu\,x_2(t)$, *para cada par de funciones integrables* x_1, x_2.

16.2. $\int_T d\,\mu\,(a\,x(t)) = a \int_T d\,\mu\,x(t)$, *para cada función* x *integrable y cada* a $\in A$.

16.3. $\left\| \int_T d\,\mu\,x(t) \right\| \leqslant \sup_{t\in T} \| r\,x(t) \|$, *para cada* $r \in Q$ *tal que* $r > \mu(T)$, *y para cada función* x *integrable.*

Demostración.—Es evidente que la suma de dos funciones integrables es una función integrable y la propiedad 16.1 es inmediata. Si una función $x : T \to Y$ es integrable, también lo es la función $a\,x$, pues dado $\varepsilon > 0$, si δ es tal que $\| a\,x \| < \varepsilon$ cuando $\| x \| < \delta$, y si $\Pi_\delta = (E_1, \ldots, E_k)$ es una partición de T tal que cada $x(E_k)$ tiene diámetro menor que δ, se deduce que $a\,x(E_k)$ tiene diámetro menor que ε. Entonces la propiedad 16.2 se deduce fácilmente teniendo en cuenta la propiedad 1.4 de los A-módulos preconvexos y la continuidad de la aplicación $y \to ay$. Por último, 16.3 es consecuencia de la continuidad de la norma y de la relación

$$\| x_d \| = \left\| \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{\mu(E_k)}{r} \right) (r\,x(t_k)) \right\| \leqslant \max_{1 \leq k \leq n} \| r\,x(t_k) \| \leqslant$$

$$\leqslant \sup_{t\in T} \| r\,x(t) \|.$$

17. Proposición.—*Sea* $M \in \mathcal{R}$ *y sea* $x : T \to Y$ *la función definida por* $x(t) = 0$ *si* $t \notin M$, $x(t) = x_0$ *si* $t \in M$, *donde* x_0 *es un elemento del A-módulo F-normado preconvexo Y. Entonces* x *es ingrable y se tiene*

$$\int_T d\mu\,x(t) = \mu(M)\,x_0.$$

Demostración.—Sea $d_0 \in D$, donde $d_0 = (\tau_0, \Pi_0)$, siendo $\Pi_0 =$

$= (E_1^0, E_2^0)$ con $E_1^0 = M$, $E_2^0 = \complement M$. Entonces $x(E_i^0)$, $i = 1, 2$, tienen diámetro nulo y x es integrable. Si $d \geqslant d_0$, se tiene

$$x_d = \sum_{k=1}^{n} \mu(E_k)\, x(t_k) = \sum_{k=1}^{n} \mu(E_k \cap M)\, x(t_k) = \mu(M)\, x_0,$$

y la red (x_d) asociada a x converge a $\mu(M)\, x_0$ (aunque Y no sea completo).

Un subconjunto M de un A-módulo F-normado convexo Y se dice que es convexo si se verifica que

$$\sum_{k=1}^{n} \alpha_k y_k \in M$$

para cada subconjunto finito $\{y_1, \ldots, y_n\} \subset M$, cuando

$$\sum_{k=1}^{n} \alpha_k = 1$$

y $\alpha_k \geqslant 0$ para $k = 1, \ldots, n$. Hay que hacer notar que al no valer la propiedad $\alpha(\beta y) = (\alpha \beta) y$ ($\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $y \in Y$) en los A-módulos F-normados convexos (ver ejemplo III.14) no basta con dar la definición de conjunto convexo para el caso $n = 2$, como suele hacerse en los espacios vectoriales reales.

Es evidente que cada bola cerrada es un conjunto convexo como consecuencia de la propiedad 3.1. Se define la envoltura convexa M^c de un conjunto $M \subset Y$ como el mínimo conjunto convexo que que contiene a M y es la intersección de todos los conjuntos convexos que contienen a M. Obsérvese que si se define

$$c(M) = \left\{ \sum_{k=1}^{n} \alpha_k y_k : \alpha_k \geqslant 0,\ y_k \in M,\ (k = 1, \ldots, n),\ \sum_{k=1}^{n} \alpha_k = 1,\ n \in \mathbb{N} \right\}$$

por la razón que hemos indicado antes, $c(M)$ no será en general un conjunto convexo, de modo que $c(M) \neq M^c$, verificándose $c(M) \subset M^c$. Si M es convexo, entonces $c(M) = M^c = M$.

Si $M \subset Y$ es un conjunto convexo, entonces $\overline{M}$ también lo es, pues si $\{y_1, \ldots, y_n\} \subset \overline{M}$, si $\alpha_k \geqslant 0$ $(k = 1, \ldots, n)$ y

$$\sum_{k=1}^{n} \alpha_k = 1,$$

entonces' dado $\varepsilon > 0$ existen $y'_k \in M$ $(k = 1, \ldots, n)$ tales que $\| y_k - y'_k \| \leqslant \varepsilon$ y por tanto

$$\left\| \sum_{k=1}^{n} \alpha_k y_k - \sum_{k=1}^{n} \alpha_k y'_k \right\| \leqslant \max_{1 \leq k \leq n} \| y_k - y'_k \| \leqslant \epsilon.$$

Como

$$\sum_{k=1}^{n} \alpha_k y'_k \in M,$$

esto prueba que

$$\sum_{k=1}^{n} \alpha_k y_k \in \overline{M}.$$

Como consecuencia de esto, si $M \subset Y$, es evidente que $\overline{M^c}$ es el mínimo conjunto cerrado convexo que contiene a M, y le llamaremos *envoltura cerrada convexa* de M.

Una vez introducidas estas notaciones, exponemos la siguiente proposición, que da una interesante propiedad de la integral.

18. Proposición.—*Sea Y un A-módulo F-normado convexo completo y* $x : T \to Y$ *una función integrable. Si* $\mu(T)$ *es racional, entonces la integral*

$$\int_T d\mu\, x(t)$$

es un punto adherente a c $(\mu(T)\, x(T))$ *y por tanto está en la envoltura cerrada convexa de* $\mu(T)\, x\ (T)$.

Demostración.—Si $\mu(T) = r \in Q$, para cada $d \in D$ se tiene $x_d \in c\,(r\,x\,(T))$, pues

$$x_d = \sum_{k=1}^{n} \frac{\mu(E_k)}{r} (r\,x\,(t_k))$$

en virtud de la proposición 2. Entonces

$$\int_T d\,\mu\,x\,(t) = \lim_d x_d$$

es un punto adherente de este conjunto.

19. Corolario. — *En las condiciones de la proposición 18 se verifica*

19.1. $\left\| \int_T d\,\mu\,x\,(t) \right\| \leqslant \sup_{t \in T} \| r\,x\,(t) \|$, donde $r = \mu(T) \in Q$.

Demostración.—Evidente, pues la envoltura cerrada convexa de $r\,x\,(T)$ está contenida en la bola cerrada convexa $B^*(0, \rho)$, donde

$$\rho = \sup_{t \in T} \| r\,x\,(t) \|.$$

20. Proposición.—*Sea Y un A-módulo F-normado preconvexo completo que verifica:*

20.1. $\alpha(\beta\,y) = \beta(\alpha\,y)$ *cuando* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $y \in Y$.

Entonces, si $x : T \to Y$ *es integrable, se cumple:*

20.2. $\int_T d\,\mu\,(\alpha\,x\,(t)) = \alpha \int_T d\,\mu\,x\,(t)$ para cada $\alpha \in \mathbb{R}$

Demostración.—Inmediata, si se tiene presente la definición de la integral y la continuidad de la aplicación $y \longmapsto \alpha\,y$ (proposición 2), pues evidentemente $\alpha\,x : T \to Y$ también es integrable.

§ 3. Límites generalizados de Banach sobre sucesiones totalmente acotadas en un A-módulo F-normado convexo completo

Utilizando los resultados del apartado anterior referentes a la integral de funciones con valores en un A-módulo F-normado convexo completo, respecto de una medida positiva finitamente aditiva, probamos el siguiente teorema que habíamos anunciado al final del § 1.

21. Teorema.—*Si Y es un A-módulo F-normado convexo completo, existe un límite generalizado de Banach sobre $\tau B(Y)$.*

Demostración.—Sea Lim^* un límite generalizado de Banach sobre $B(\mathbb{R})$; si para cada subconjunto $M \subset N$ se define $\mu(M) = \lim\limits_{n}{}^{*} M_n$, donde (M_n) es la sucesión característica de M ($M_n = 1$ si $n \in M$, $M_n = 0$ si $n \notin M$) es fácil comprobar que μ es una medida positiva finitamente aditiva sobre el álgebra $\mathcal{A}$ de todas las partes de N.

Para cada sucesión $(x_n) \in \tau B(Y)$ existe la integral

$$\int_N d\,\mu\,x(n)$$

como consecuencia de la proposición 15. Se define entonces:

$$\operatorname*{Lim}_n x_n = \int_N d\,\mu\,x(n).$$

Seguidamente comprobamos que Lim es un límite generalizado de Banach sobre $\tau B(Y)$. Se verifica:

i) $\operatorname*{Lim}_n (a\,x_n + b\,y_n) = a \operatorname*{Lim}_n x_n + b \operatorname*{Lim}_n y_n$ como consecuencia de las propiedades 16.1 y 16.2 de la integral.

ii) $\operatorname*{Lim}_n x_n = x_0$ cuando $x_n = x_0$ para cada $n \in N$, en virtud de la proposición 17, pues $\mu(N) = 1$.

iii) $\| \operatorname*{Lim}_n x_n \| \leqslant \sup_n \| x_n \|$, esto es, precisamente la propiedad 19.1 cuando $r = 1$.

iv) $\operatorname*{Lim}_n x_n = \operatorname*{Lim}_n x_{n+1}$. Es consecuencia de que la medida finitamente aditiva μ definida sobre el álgebra de todas las partes de $\mathbb{N}$ tiene la propiedad $\mu(\mathrm{M}) = \mu(1 + \mathrm{M})$ para cada $\mathrm{M} \subset \mathrm{N}$. Para probar iv) consideremos la aplicación $\sigma : \mathrm{D} \to \mathrm{D}$ definida por

$$\sigma(\tau, \Pi) = (\tau', \Pi'),$$

siendo

$$\tau' = (1, n_1 + 1, \ldots, n_p + 1), \quad \Pi' = (\{1\}, \mathrm{E}_1 + 1, \ldots, \mathrm{E}_p + 1)$$

cuando

$$\tau = (n_1, \ldots, n_p), \quad \Pi = (\mathrm{E}_1, \ldots, \mathrm{E}_p).$$

Esta aplicación verifica las dos condiciones siguientes:

1) $d_1 \leqslant d_2 \Longrightarrow \sigma d_1 \leqslant \sigma d_2$, evidente.

2) Para cada $d_1 \in \mathrm{D}$, existe $d_2 \in \mathrm{D}$ tal que $\sigma d_2 \geqslant d_1$. En efecto: si $d_1 = (\tau_1, \Pi_1)$, donde

$$\tau_1 = (m_1, \ldots, m_q), \quad \Pi_1 = (\mathrm{F}_1, \ldots, \mathrm{F}_q),$$

podemos suponer que $1 \in \mathrm{F}_1$ y distinguimos dos casos: a) $\mathrm{F}_1 = \{1\}$, entonces $m_1 = 1$ y basta tomar $d_2 = (\tau_2, \Pi_2)$, donde

$$\tau_2 = (m_2 - 1, \ldots, m_q - 1), \Pi_2 = (\mathrm{F}_2 - 1, \ldots, \mathrm{F}_q - 1).$$

b) Si $\mathrm{F}_1 \neq \{1\}$ como hemos supuesto que $1 \in \mathrm{F}_1$ resulta que F_1 tiene al menos dos elementos y puede suponerse que $m_1 \neq 1$; entonces basta con tomar $d_2 = (\tau_2, \Pi_2)$, donde

$$\tau_2 = (m_1 - 1, \ldots, m_q - 1). \; \Pi_2 = (\{\mathrm{F}_1 - 1\} - \{0\}, \mathrm{F}_2 - 1, \ldots \mathrm{F}_q - 1),$$

puesto que así se verifica

$$\sigma(\tau_2, \Pi_2) = ((1, m_1, \ldots, m_q), (\{1\}, \mathrm{F}_1 - \{1\}, \mathrm{F}_2, \ldots, \mathrm{F}_q))$$

y evidentemente se tiene

$$\sigma(\tau_2, \Pi_2) \geqslant (\tau_1, \Pi_1).$$

Sea ahora $x_n^+ = x_{n+1}$ para cada $n \in \mathrm{N}$,

$$x_0 = \operatorname*{Lim}_n x_n, \quad x_0^+ = \operatorname*{Lim}_n x_n^+.$$

Para cada $d \in \mathrm{D}$:

$$x_d^+ = \sum_{k=1}^{p} \mu(\mathrm{E}_k)\, x^+(n_k) = \sum_{k=1}^{p} \mu(\mathrm{E}_k + 1)\, x(n_k + 1) = x_{\sigma d},$$

pero las propiedades 1) y 2) muestran que $(x_{\sigma d})$ es una subred de la red convergente (x_d), y entonces se obtiene

$$x_0^+ = \lim_d x_d^+ = \lim_d x_{\sigma d} = \lim_d x_d = x_0,$$

o sea

$$\operatorname*{Lim}_n x_{n+1} = \operatorname*{Lim}_n x_n.$$

22. Proposición.—*Si Y es un A-módulo F-normado convexo y Lim un límite generalizado de Banach sobre $\tau B(Y)$ construido como en el teorema 21, se verifica que para* $(\mathrm{x_n}) \in \tau B(Y)$ *el punto* $\mathrm{x_0} = Lim\, \mathrm{x_n}$ *es adherente a cada* $\mathrm{c}(S_k)$, *donde* $S_k = \{\mathrm{x_n} : \mathrm{n} \geqslant \mathrm{k}\}$. *Entonces* $\mathrm{x_0}$ *es un punto de la envoltura cerrada conexa* $\overline{S^\circ_k}$ *de cada* S_k.

Demostración.—Consecuencia inmediata de la proposición 18 y de la propiedad

$$\operatorname*{Lim}_n x_n = \operatorname*{Lim}_n x_{n+k}$$

para cada $k \in \mathrm{N}$.

23. Proposición.—*En las mismas hipótesis de la proposición 22 se verifica que para cada* $(\mathrm{x_n}) \in \tau B(Y)$ *el punto* $\mathrm{x_0} = \operatorname*{Lim}_n \mathrm{x_n}$ *es adherente a* $\mathrm{c}(H)$, *donde H es el conjunto de los puntos de aglomeración de la sucesión* $(\mathrm{x_n})$. *Entonces* $\mathrm{x_0}$ *es un punto de la envoltura cerrada convexa* $\overline{H^\circ}$ *de H.*

DEMOSTRACIÓN.—Si $(x_n) \in \tau\, B(Y)$, el conjunto $S = \{x_n : n \in N\}$ se puede recubrir con un número finito de bolas cerradas

$$B_k^*(z_k, \varepsilon/4) \quad (k = 1, \ldots, m)$$

de radio prefijado $\varepsilon/4$. Si el conjunto

$$H \cap B_1^*(z_1, \varepsilon/4)$$

es vacío, se deduce que

$$\{ n \in N : x_n \in B_1^*(z_1, \varepsilon/4) \}$$

es un conjunto finito, pues en caso contrario existiría una subsucesión (x_{n_k}) con

$$x_{n_k} \in B^*(z_1, \varepsilon/4)$$

para todo $k \in N$, que por tener recorrido precompacto en Y completo, tendría un punto de aglomeración en $B_1^*(z_1, \varepsilon/4)$, en contra de la hipótesis.

Entonces, si se considera la sucesión (x_{n+p}), donde p es un número natural fijo tal que

$$p > \max \{ n \in N : x_n \in B_1^*(z_1, \varepsilon/4) \}$$

es obvio que su recorrido está recubierto por

$$B_k^*(z_k, \varepsilon/4), \ (k = 2, \ldots, m).$$

Esto prueba que si se considera la sucesión (x_{n+p}) con p suficiente grande (que tiene el mismo límite generalizado y los mismos puntos de aglomeraciones que la sucesión (x_n)), entonces se puede prescindir de todas las bolas tales que

$$B_k^*(z_k, \varepsilon/4) \cap H = \phi.$$

Por esta razón puede suponerse que esto no sucede para ninguna de las bolas; sea entonces

$$h_k \in B_k^*(z_k, \varepsilon/4) \cap H \quad (k = 1, \ldots, m).$$

Teniendo en cuenta la proposición 22 se deduce que existe

$$z = \sum_{i=1}^{p} \alpha_i x_i \in c\,(\mathrm{S}) \quad \text{con} \quad \alpha_i \geqslant 0, \ \sum_{i=1}^{p} \alpha_i = 1,$$

tal que

$$\| x_0 - z \| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} \cdot$$

Sea

$$x_i \in \mathrm{B}^*_{k(i)} (z_{k(i)}, \epsilon/4)$$

y

$$z' = \sum_{i=1}^{p} \alpha_i h_{k(i)} \in c\,(\mathrm{H}).$$

Se obtiene así

$$\| x_0 - z' \| \leqslant \| x_0 - z \| + \| z - z' \| \leqslant \epsilon/2 + \left\| \sum_{i=1}^{p} \alpha_i (x_i - h_{k(i)}) \right\| \leqslant$$

$$\leqslant \epsilon/2 + \max_{1 \leqq i \leqq p} \| x_i - h_{k(i)} \| \leqslant \epsilon/2 + \epsilon/2 = \epsilon.$$

Se ha visto en el teorema 21 que si Y es un A-módulo F-normado convexo completo se puede construir sobre τ B (Y) un límite generalizado de Banach Lim a partir de un límite generalizado de Banach Lim* sobre B ($\mathbb{R}$), utilizando la integral definida en 14.1.

Por otra parte, el teorema 11 muestra que cada límite generalizado de Banach sobre τ B (Y) permite definir en Y una estructura de A-módulo F-normado preconvexo. El siguiente resultado es interesante porque muestra que el límite generalizado construido en el teorema 21 nos define sobre Y la estructura de A-módulo F-normado preconvexo original, cuando se procede como en el teorema 11.

TEOREMA.—*Sea Y un A-módulo F-normado convexo y completo y sea Lim un límite generalizado de Banach sobre $\tau B(Y)$ construido como en el teorema 21. Entonces para cada $\alpha \in \mathbb{R}$ y cada $y \in Y$ se verifica*

$$\alpha y = \operatorname*{Lim}_{n} ([(n+1)\alpha] - [n\alpha])\, y.$$

DEMOSTRACIÓN.—Se sabe (3), que una condición necesaria y suficiente para que el valor de los límites generalizados de Banach sobre una sucesión $(\delta_n) \in B(\mathbb{R})$ sea constante y valga α es que

$$\lim_{p} \frac{1}{p} (\delta_n + \delta_{n+1} + \dots + \delta_{n+p-1}) = \alpha$$

uniformemente en n.

Como cada número real α puede ponerse en la forma $\alpha = [\alpha] + \varepsilon$ con $[\alpha]$ entero, $0 \leqslant \varepsilon < 1$, basta probarlo cuando $0 \leqslant \alpha < 1$. Sea

$$\delta_n = [(n+1)\alpha] - [n\alpha].$$

Evidentemente $(\delta_n) \in B(\mathbb{R})$ y

$$\frac{1}{p} (\delta_n + \delta_{n+1} + \dots + \delta_{n+p-1}) = \frac{[(n+p)\alpha] - [n\alpha]}{p}$$

Como

$$\frac{p\alpha - 1}{p} \leq \frac{1}{p} (\delta_n + \dots + \delta_{n+p-1}) \leqslant \frac{p\alpha + 1}{p}$$

para cada $p \in N$, se deduce que

$$\lim_{p} \frac{1}{p} (\delta_n + \dots + \delta_{n+p-1}) = \alpha$$

uniformemente en n. Entonces $\operatorname*{Lim^*}_{n} \delta_n = \alpha$ para cada límite generalizado de Banach Lim* sobre $B(\mathbb{R})$.

(3) Véase (14).

Como (δ_n) es la sucesión característica del conjunto

$$T_\alpha = \{ n \in N : \delta_n = 1 \}$$

se obtiene

$$\alpha = \operatorname{Lim}^* \delta_n = \mu (T_\alpha),$$

donde μ es la medida finitamente aditiva asociada a Lim*. Teniendo en cuenta la proposición 17, resulta

$$\operatorname*{Lim}_n ([(n+1)\alpha] - [n\alpha]) y = \operatorname*{Lim}_n (\delta_n y) = \int_N d\mu (\delta_n y) = \mu (T\alpha) y = \alpha y.$$

25. Proposición.—*Sea Y un A-módulo F-normado convexo y completo. Sea Lim un límite generalizado de Banach sobre $\tau B(Y)$ construido como en el teorema 21. Una condición necesaria y suficiente para que se verifique $\alpha \operatorname*{Lim}_n x_n = \operatorname*{Lim}_n (\alpha x_n)$ para cada $(x_n) \in \in \tau B(Y)$ y $\alpha \in \mathbb{R}$ es que se verifique $\alpha (\beta y) = \beta (\alpha y)$ para todo $y \in Y$, $\alpha \in \mathbb{R}$ y $\beta \in \mathbb{R}$.*

Demostración.—Como consecuencia de la continuidad de la aplicación $y \longmapsto \alpha y$ se deduce que $(\alpha x_n) \in \tau B(Y)$ cuando $(x_n) \in \in \tau B(Y)$ y $\alpha \in \mathbb{R}$. La condición expuesta es necesaria, pues si

$$\beta_n = [(n+1)\beta] - [n\beta] \quad \text{y} \quad \alpha_n = [(n+1)\alpha] - [n\alpha],$$

del teorema 24 se deduce

$$\alpha (\beta y) = \alpha (\operatorname*{Lim}_n \beta_n y) = \operatorname*{Lim}_n \alpha (\beta \cap y) = \operatorname*{Lim}_n \beta_n (\alpha y) = \beta (\alpha y).$$

También es suficiente, pues

$$\alpha \operatorname*{Lim}_n x_n = \alpha \int_N d\mu\, x(n) = \int_N d\mu (\alpha x(n)) = \operatorname*{Lim}_n \alpha x_n$$

como consecuencia de la proposición 20.

(Continuará)