Límites generalizados en A-módulos

por

Gabriel Vera Botí

PRESENTADO POR EL ACADÉMICO CORRESPONDIENTE D. BALTASAR RODRÍGUEZ-SALINAS

(Conclusión)

CAPÍTULO III

§ 1. A-MÓDULOS F-NORMADOS CONVEXOS CONTINUOS

Ya se probó (proposición II.2) que en un A-módulo F-normado preconvexo Y simpre es continua la aplicación $y \longmapsto \alpha y$ para cada $\alpha \in \mathbb{R}$. Lo que no es cierto en general es que también sea continua la aplicación $\alpha \longmapsto \alpha y$ para cada $y \in Y$ (véase ejemplo 13). En este capítulo se estudiarán los A-módulos F-normados convexos para los que esta última aplicación es continua. Nótese que si sucede esto en un A-módulo F-normado preconvexo, entonces la norma es regular y por tanto es convexo, de modo que en este caso no cabe la distinción entre éstos dos tipos de A-módulos.

1. DEFINICIÓN.—Se dice que un *A-módulo F-normado convexo Y* es continuo si la aplicación de $\mathbb{R}$ en Y, $\alpha \longmapsto \alpha y$ es continua para cada $y \in Y$.

2. PROPOSICIÓN.—*Una condición necesaria para que el A-módulo F-normado Y sea convexo continuo es que se verifique la propiedad P_n para cada* $n \in N$ *y que*

$$\lim_n \left\| \frac{y}{n} \right\| = 0$$

para todo $y \in Y$.

DEMOSTRACIÓN.—Evidente si se tiene en cuenta la proposición II.10.

3. TEOREMA.—*Una condición suficiente para que el A-módulo F-normado completo Y sea convexo continuo es que se verifique la propiedad* P_n *para cada* $n \in N$ *y que*

$$\lim_n \left\| \frac{y}{n} \right\| = 0$$

para cada $y \in Y$.

DEMOSTRACIÓN.—Para cada $\alpha \in \mathbb{R}$ y cada $y \in Y$ se define el producto

$$\alpha y = \lim_n \left(\frac{[n \alpha]}{n} y \right),$$

límite que existe por ser $\left(\frac{[n \alpha]}{n} y \right)$ una sucesión de Cauchy en Y completo. En efecto, si p, q son números naturales y si

$$m = q [p \alpha] - p [q \alpha]$$

se tiene

$$\left| \frac{m}{p q} \right| = \left| \frac{[p \alpha]}{p} - \frac{[q \alpha]}{q} \right| \leq \frac{1}{p}$$

si $p \leqslant q$, pues

$$\frac{[p \alpha]}{p} \leqslant \alpha < \frac{[p \alpha] + 1}{p}, \quad \frac{[q \alpha]}{q} \leqslant \alpha < \frac{[q \alpha] + 1}{q}.$$

Entonces $\left| \frac{m}{q} \right| \leqslant 1$ y como consecuencia de la propiedad P_q se deduce

$$\left\| \frac{[p \alpha]}{p} y - \frac{[q \alpha]}{q} y \right\| = \left\| \frac{m}{p q} y \right\| \leq \left\| \frac{y}{p} \right\|;$$

pero $\left\| \dfrac{y}{p} \right\| \leqslant \varepsilon$ si $p \geqslant n_\varepsilon$ para cierto $n_\varepsilon \in \mathrm{N}$, pues

$$\lim_n \left\| \frac{y}{n} \right\| = 0.$$

Entonces si $q \geqslant p \geqslant n_\varepsilon$ se verifica

$$\left\| \frac{[p\,\alpha]}{p}\, y - \frac{[q\,\alpha]}{q}\, y \right\| \leqslant \varepsilon.$$

El producto $(\alpha, y) \longmapsto \alpha\, y$ que se acaba de definir tiene las propiedades deseadas 1.1, 1.2, 1.3, 1.4 y 3.1 del capítulo II.

Las propiedades 1.1 y 1.3 son evidentes.

1.2. $(\alpha + \beta)\, y = \alpha\, y + \beta\, y$, pues

$$\| (\alpha + \beta)\, y - \alpha\, y - \beta\, y \| =$$

$$= \left\| \lim_n \left(\frac{[n\,(\alpha + \beta)]}{n} - \frac{[n\,\alpha] + [n\,\beta]}{n} \right) y \right\| =$$

$$= \left\| \lim_n \frac{\delta_n}{n}\, y \right\| \leqslant \lim_n \left\| \frac{y}{n} \right\| = 0,$$

pues

$$\delta_n = [n\,(\alpha + \beta)] - [n\,\alpha] - [n\,\beta]$$

sólo toma los valores 0 ó 1.

1.4. $\alpha\,(a\,y) = a\,(\alpha\,y)$ es consecuencia de la continuidad de la aplicación $y \longmapsto a\,y$ $(a \in \mathrm{A})$ y de la propiedad $r\,(a\,y) = a\,(r\,y)$, que evidentemente se verifica cuando $r \in \mathrm{Q}$.

3.1.

$$\left\| \sum_{k=1}^{n} \alpha_k\, y_k \right\| \leqslant \max_{1 \leqq k \leqq n} \| y_k \|$$

cuando $y_k \in Y$, $\alpha_k \geqslant 0$ ... $(k = 1, ..., n)$,

$$\sum_{k=1}^{n} \alpha_k = 1,$$

pues

$$\left\| \sum_{k=1}^{n} \alpha_k y_k \right\| = \left\| \sum_{k=1}^{n} \lim_{h} \frac{[h\,\alpha_k]}{h} y_k \right\| =$$

$$= \left\| \lim_{h} \sum_{k=1}^{n} \frac{[h\,\alpha_k]}{h} y_k \right\| \leqslant \overline{\lim_{h}} \left\| \sum_{k=1}^{n} \frac{[h\,\alpha_k]}{h} y_k \right\| \leqslant \max_{1 \leq k \leq n} \| y_k \|,$$

ya que por la propiedad P_h se tiene

$$\left\| \sum_{k=1}^{n} \frac{[h\,\alpha_k]}{h} y_k \right\| \leqslant \max_{1 \leq k \leq n} \| y_k \|$$

por ser

$$\sum_{k=1}^{n} [h\,\alpha_k] \leqslant h.$$

Queda por probar la continuidad de la aplicación $\alpha \longmapsto \alpha\, y$ para cada $y \in Y$. Dado $\varepsilon > 0$, sea $m \in N$ tal que $\left\| \frac{y}{m} \right\| \leqslant \varepsilon$; entonces si $|\alpha| \leqslant \frac{1}{m}$, resulta

$$\| \alpha\, y \| = \left\| (m\,\alpha) \frac{y}{m} \right\| \leqslant \left\| \frac{y}{m} \right\| < \varepsilon,$$

pues $| m\,\alpha | \leqslant 1$. Esto prueba la continuidad en $\alpha = 0$. La continuidad en cualquier otro punto α_0 se deduce poniendo

$$\alpha\, y - \alpha_0\, y = (\alpha - \alpha_0)\, y.$$

Si se compara este teorema con el teorema I.38 se observa que es un resultado más fuerte que aquél, puesto que la hipótesis de ser Y completo es más débil que la hipótesis de la existencia de un límite generalizado de Banach sobre B (Y) (proposición I.10). Parte de la demostración del teorema 3 (verificación de las propiedades 1.1, 1.2, 1.3, 1.4 y 3.1) es igual que en la demostración del teorema I.38.

4. Proposición.—*Si Y es un A-módulo F-normado convexo continuo completo, entonces existe sobre τ B (Y) un límite generalizado de Banach Lim que verifica*

$$\alpha \operatorname*{Lim}_{n} x_n = \operatorname*{Lim}_{n} \alpha x_n$$

para cada $(x_n) \in \tau B(Y)$ *y cada* $\alpha \in \mathbb{R}$.

Demostración.—Al ser Y convexo continuo se deduce de la proposición II.2.1. que se verifica

$$(\alpha \beta) y = \alpha (\beta y) = \beta (\alpha y)$$

para cada $y \in Y$, $\alpha \in \mathbb{R}$ y $\beta \in \mathbb{R}$. El resultado entonces es consecuencia de la proposición II.25.

5. Proposición.—*Sea Y un A-módulo F-normado completo tal que se verifica la propiedad* P_n *para cada* $n \in M$, *donde* $M \subset N$ *es un conjunto infinito, y tal que*

$$\lim_{n \in M} \left\| \frac{y}{n} \right\| = 0$$

para cada $y \in Y$. *Entonces Y es un A-módulo F-normado convexo continuo.*

Demostración.—Si suponemos ordenados los elementos de M en orden creciente

$$M = \{ m_1, m_2, ..., m_n, ... \}.$$

la demostración es análoga a la del teorema 3 con modificaciones obvias, definiendo el producto

$$\alpha\, y = \lim_{n} \frac{[m_n\, \alpha]}{m_n}\, y.$$

6. Corolario.—*Si en el A-módulo F-normado completo Y se verifica la propiedad P_n para cada* n $\in M$ *y si*

$$\lim_{n \in M} \left\| \frac{y}{n} \right\| = 0$$

para cada y $\in Y$, *donde* $M \subset N$ *es un conjunto infinito, entonces también se verifica la propiedad P_n para cada* n $\in N$, *y*

$$\lim_{n} \left\| \frac{y}{n} \right\| = 0$$

para cada y $\in Y$.

Demostración.—Como Y es convexo continuo como consecuencia de la *proposición* 5, el *resultado* es consecuencia de la *proposición* 2.

Obsérvese que como consecuencia de este corolario es posible definir, como en el teorema 3, el producto

$$\alpha * y = \lim_{n} \frac{[n\, \alpha]}{n}\, y,$$

pero como $\left(\frac{[m_n\, \alpha]}{m_n}\, y \right)$ es una subsucesión de la sucesión $\left(\frac{[n\, \alpha]}{n}\, y, \right)$ resulta que

$$\alpha\, y = \lim_{n} \frac{[m_n\, \alpha]}{m_n}\, y = \lim_{n} \frac{[n\, \alpha]}{n}\, y = \alpha * y.$$

§ 2. Caracterización de los A-módulos F-normados covexos continuos

7. Teorema. — *Sea Y un A-módulo F-normado convexo continuo. Entonces Y es un espacio vectorial real y la topología definida en Y por la F-norma es compatible con la estructura de espacio vectorial de Y, de modo que Y, con esta topología es un espacio vectorial real localmente convexo metrizable.*

Demostración.—Y es un espacio vectorial real, pues se verifica $\alpha(\beta y) = (\alpha\beta) y$ para cada $y \in Y$, $\alpha \in \mathbb{R}$ y $\beta \in \mathbb{R}$, según se indicó en la demostración de la proposición 4. La topología definida en Y por la F-norma es evidentemente compatible con la adición, como consecuencia de la propiedad triangular de la F-norma. También es compatible con la ley externa $(\alpha, y) \longmapsto \alpha y$, pues

$$\alpha y - \alpha_0 y_0 = (\alpha - \alpha_0) y_0 + \alpha_0 (y - y_0) + (\alpha - \alpha_0)(y - y_0),$$

y dado $\varepsilon > 0$, existe δ, $0 < \delta \leqslant 1$ tal que si $|\alpha - \alpha_0| < \delta$, entonces

$$\|(\alpha - \alpha_0) y_0\| \leqslant \varepsilon.$$

Entonces si se toma

$$\|y - y_0\| < \varepsilon, \quad |\alpha - \alpha_0| \leqslant \delta,$$

resulta

$$\|\alpha y - \alpha_0 y_0\| \leqslant \varepsilon (3 + [\alpha_0]).$$

Entonces Y es un espacio vectorial topológico, en el cual la sucesión de bolas

$$B_n = \{ y \in Y : \|y\| \leqslant 1/n \}$$

es un sistema fundamental de entornos de 0, numerable, formado por conjuntos equilibrados convexos y absorbentes, ya que cada bola B_n es convexa como consecuencia de II.3.1, absorbente por ser continua la aplicación $\alpha \longmapsto \alpha y$ para $\alpha = 0$ y equilibrada por verificarse

$\| \alpha y \| \leqslant \| y \|$ si $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$ y $\| y \| = \| -y \|$. Esto prueba que Y es un espacio vectorial real localmente convexo metrizable.

Seguidamente nos proponemos probar un resultado recíproco de este último, que nos permitirá caracterizar los A-módulos F-normados convexos continuos como espacios vectoriales reales localmente convexos metrizables. El problema es el siguiente: si Y es un espacio vectorial real localmente convexo metrizable, se trata de encontrar una métrica d sobre Y que defina la topología localmente convexa de Y. Esta métrica d deberá ser invariante por traslaciones y cumplir el requisito de que las bolas cerradas definidas con dicha métrica sean convexas. Entonces, si se define

$$\| x \| = d(x, 0)$$

resultará que $\| \ \|$ es una F-norma sobre Y, para la cual Y es un A-módulo F-normado convexo continuo, si se toma como anillo A un anillo de aplicaciones $a : Y \rightarrow Y$ lineales y continuas. El probar que existe una distancia d en Y con estas condiciones es algo laborioso. El método que utilizamos para construir esta distancia está basado en el que se expone en la demostración del teorema de metrización de grupos topológicos (no necesariamente abelianos) del libro (9). Antes de probar el resultado que se ha anunciado, son necesarias algunas definiciones y lemas de carácter técnico.

Si Y es un espacio vectorial real localmente convexo metrizable, se sabe que existe en Y un sistema fundamental de entornos de 0 numerable $\{\mathcal{U}_k\}$ que verifica:

a) $\bigcap_{k \in N} \mathcal{U}_k = \{0\}$.

b) Cada $\mathcal{U}_k$ es convexo absorbente y simétrico.

c) $\mathcal{U}_{k+1} + \mathcal{U}_{k+1} \subset \mathcal{U}_k$ para cada $k \in N$.

Por razones de notación convenimos en poner

$$\mathcal{U}_0 = Y. \quad \mathcal{U}_\infty = \{0\}.$$

Para cada $k \in N$ sea

$$V\left(\frac{1}{2^k}\right) = \mathcal{U}_k. \quad V(0) = \mathcal{U}_\infty. \quad V(1) = \mathcal{U}_0.$$

y para cada número racional diádico

$$r = \frac{1}{2^{k_1}} + \dots + \frac{1}{2^{k_n}} \; (0 < k_1 < \dots < k_n) \quad 0 < r < 1$$

definimos

$$V(r) = V\left(\frac{1}{2^{k_1}}\right) + \dots + V\left(\frac{1}{2^{k_n}}\right)$$

Tenemos definido $V(r)$ para cada número racional diádico $r \in [0,1]$. Si $r > 1$ se define $V(r) = Y$. Para algunas de las demostraciones que siguen es conveniente introducir la notación siguiente: si $r \geqslant 0$ es un número racional diádico, se define $\tau(r) = 0$ cuando $r = 0$ o $r \geqslant 1$, y $\tau(r) = n$ cuando

$$r = \frac{1}{2^{k_1}} + \dots + \frac{1}{2^{k_n}} \; (0 < k_1 < \dots < k_n, \; 0 < r < 1).$$

8. Lema.—*Si* r, s *son racionales diádicos y* $0 \leqslant r < s$, *entonces* $V(r) \subset V(s)$.

Demostración.—Es evidente si $r = 0$ o si $s \geqslant 1$. Sean pues,

$$0 < r < s < 1, \; r = \frac{1}{2^{k_1}} + \dots + \frac{1}{2^{k_n}}, \; s = \frac{1}{2^{p_1}} + \dots + \frac{1}{2^{p_m}} \cdot$$

Existe un único entero i tal que $k_j = p_j$ para $j < i$ y $k_i > p_i$. Sea

$$W = V\left(\frac{1}{2^{k_1}}\right) + \dots + V\left(\frac{1}{2^{k_{i-1}}}\right) \cdot$$

Entonces

$$V(r) = W + V\left(\frac{1}{2^{k_i}}\right) + V\left(\frac{1}{2^{k_{i+1}}}\right) + \dots + V\left(\frac{1}{2^{k_n}}\right) \subset W + V\left(\frac{1}{2^{k_i}}\right) +$$

$$+ V\left(\frac{1}{2^{k_i+1}}\right) + V\left(\frac{1}{2^{k_i+2}}\right) + \dots + V\left(\frac{1}{2^{k_n-1}}\right) + V\left(\frac{1}{2^{k_n}}\right) +$$

$$+ V\left(\frac{1}{2^{k_n}}\right) \subset W + V\left(\frac{1}{2^{k_i}}\right) + V\left(\frac{1}{2^{k_i+1}}\right) + V\left(\frac{1}{2^{k_i+2}}\right) +$$

$$+ \dots + V\left(\frac{1}{2^{k_n-1}}\right) + V\left(\frac{1}{2^{k_n-1}}\right) \dots \subset W + V\left(\frac{1}{2^{k_i}}\right) + V\left(\frac{1}{2^{k_i}}\right) \subset$$

$$\subset W + V\left(\frac{1}{2^{k_i-1}}\right) \subset W + V\left(\frac{1}{2^{p_i}}\right) =$$

$$= \left(V\left(\frac{1}{2^{p_1}}\right) + \dots + V\left(\frac{1}{2^{p_{i-1}}}\right)\right) + V\left(\frac{1}{2^{p_i}}\right) \subset V(s).$$

La demostración de este lema está tomada de (9), donde aparece como parte de la demostración del teorema 8.2 del capítulo II. El siguiente lema que necesitamos ya no aparece en (9).

9. Lema.—*Sean* r $\geqslant 0$ *y* s $\geqslant 0$ *racionales diádicos. Entonces se verifica*

$$V(r) + V(s) \subset V(r+s).$$

Demostración.—Para $\tau(r) = 0$ o $\tau(s) = 0$ es evidente. Cuando $\tau(r) \geqslant 1$ y $\tau(s) \geqslant 1$, lo demostraremos por inducción.

a) Si $\tau(r) = \tau(s) = 1$, sea

$$r = \frac{1}{2^k}, \quad s = \frac{1}{2^p};$$

si $k \neq p$,

$$V(r) + V(s) \subset V(r+s)$$

por definición de $V(r+s)$. Si $k = p$, entonces

$$V(r) + V(s) = \mathcal{U}_k + \mathcal{U}_k \subset \mathcal{U}_{k-1} = V\left(\frac{1}{2^{k-1}}\right) = V\left(\frac{1}{2^k} + \frac{1}{2^k}\right) = V(r+s).$$

(Para el caso $k = p = 1$ hay que tener presente que $\mathcal{U}_0 = V(1) = Y$).

b) Sea $\tau(r) = n$, $\tau(s) = 1$. Se supone cierto el resultado cuando $\tau(r) < n$, $\tau(s) = 1$. Sea, pues,

$$r = \frac{1}{2^{k_1}} + \dots + \frac{1}{2^{k_n}}; \quad s = \frac{1}{2^p}.$$

Si $p \neq k_j$ para cada $j \in \{1, .., n\}$, entonces por definición de $V(r + s)$ resulta que

$$V(r+s) = V(r) + V(s)$$

En caso contrario, sea $p = k_j$ con $1 \leqslant j \leqslant n$, y si

$$r' = r - \frac{1}{2^{k_j}}$$

se verifica que $\tau(r') = n - 1$ y entonces aplicando la hipótesis de inducción se obtiene

$$V(r) + V(s) = \left(V(r') + V\left(\frac{1}{2^{k_j}}\right)\right) + V(s) = V(r') + V\left(\frac{1}{2^p}\right) +$$

$$+ V\left(\frac{1}{2^p}\right) \subset V(r') + V\left(\frac{1}{2^{p-1}}\right) \subset V\left(r + \frac{1}{2^{p-1}}\right) = V(r+s).$$

c) Sea ahora $\tau(r) = n$, $\tau(s) = m$. Se supone cierto el resultado para cada $\tau(r)$ cuando $\tau(s) < m$. Si

$$r = \frac{1}{2^{k_1}} + \ldots + \frac{1}{2^{k_n}}, \quad s = \frac{1}{2^{p_1}} + \ldots + \frac{1}{2^{p_m}}.$$

Si se verifica que $k_i \neq p_j$ para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$ y cada $j \in \{1, \ldots, m\}$, el resultado es evidente por definición de $V(r + s)$, pero si $k_i = p_j$ para algún i $(0 \leqslant i \leqslant n)$ y algún j $(0 \leqslant i \leqslant m)$ se consideran los números racionales diádicos:

$$r' = r - \frac{1}{2^{k_i}}, \quad s' = s - \frac{1}{2^{p_j}}$$

tales que

$$\tau(r') = n - 1, \quad \tau(s') = m - 1$$

y se obtiene aplicando la hipótesis de inducción:

$$\mathrm{V}(r) + \mathrm{V}(s) = \mathrm{V}(r') + \mathrm{V}\left(\frac{1}{2^{k_i}}\right) + \mathrm{V}(s') + \mathrm{V}\left(\frac{1}{2^{p_j}}\right) \subset$$

$$\subset \mathrm{V}(r') + \mathrm{V}\left(\frac{1}{2^{k_i-1}}\right) + \mathrm{V}(s') \subset \mathrm{V}(r'') + \mathrm{V}(s') \subset \mathrm{V}(r'' + s') = \mathrm{V}(r + s),$$

donde

$$r'' = r' + \left(\frac{1}{2^{k_i-1}}\right).$$

10. LEMA.—*Si* r *y* s *son racionales diádicos y* $0 \leqslant r < s$, *entonces* $\overline{V}_r \subset \mathring{V}_s$.

DEMOSTRACIÓN. — Si $r = 0$ o $s = 1$, es trivial. Sea, pues, $0 < r < s < 1$:

$$r = \frac{1}{2^{k_1}} + \ldots + \frac{1}{2^{k_n}}, \quad s = \frac{1}{2^{p_1}} + \ldots + \frac{1}{2^{p_m}},$$

y sea $k \in \mathrm{N}$ tal que

$$r + \frac{1}{2^k} < s, \text{ y } k > k_n.$$

Entonces, si $x \in \mathrm{V}_r$ resulta

$$x + \mathrm{V}\left(\frac{1}{2^k}\right) \in \mathrm{V}(r) + \mathrm{V}\left(\frac{1}{2^k}\right) = \mathrm{V}\left(r + \frac{1}{2^k}\right) \subset \mathrm{V}(s)$$

como consecuencia del lema 8, y esto prueba que $x \in \mathring{\mathrm{V}}(s)$ y por tanto $\mathrm{V}(r) \subset \mathring{\mathrm{V}}(s)$. Sea ahora $x \in \overline{\mathrm{V}}(r)$; entonces

$$\left(x + \mathrm{V}\left(\frac{1}{2^k}\right)\right) \cap \mathrm{V}(r) \neq \phi.$$

y esto prueba que

$$x \in V(r) - V\left(\frac{1}{2^k}\right) = V(r) + V\left(\frac{1}{2^k}\right) \subset V(s)$$

y por tanto

$$\overline{V}(r) \subset V(s).$$

Si t es un número racional diádico tal que $r < t < s$ como consecuencia de las dos relaciones obtenidas, se deduce

$$\overline{V}(r) \subset V(t) \subset \overset{\circ}{V}(s).$$

11. Teorema.—*Sea Y un espacio vectorial real localmente convexo metrizable. Con las notaciones anteriores sea*

$$\| x \| = \inf \{ r : x \in V(r) \}.$$

Entonces $\| \ \|$ *es una F-norma sobre Y que induce en Y la topología localmente convexa dada inicialmente. Más aún:*

$$\overset{\circ}{V}(r) \supset \{ x : \| x \| < r \}$$

y

$$\overline{V}(r) = \{ x : \| x \| \leqslant r \}$$

para cada número racional diádico $r > 0$.

Demostración.—$\| x \| = 0$ es equivalente a

$$x \in V\left(\frac{1}{2^k}\right) = \mathcal{U}_k$$

para cada $k \in N$ y esto a que sea $x = 0$. Como cada $V(r)$ es simétrico se deduce que $\| x \| = \| -x \|$. Si $\| x \| = \alpha$ y $\| y \| = \beta$, dado $\varepsilon > 0$, existen racionales diádicos r, s tales que

$$\alpha \leqslant r < \alpha + \varepsilon, \quad \beta \leqslant s < \beta + \varepsilon, \quad x \in V(r), \quad y \in V(s)$$

y entonces $x + y \in V(r + s)$ como consecuencia del lema 9. Esto prueba que

$$\| x + y \| \leqslant r + s < \alpha + \beta + 2\epsilon$$

para cada $\varepsilon > 0$ y por tanto que

$$\| x + y \| \leqslant \| x \| + \| y \|.$$

Entonces $\| \ \|$ es una F-norma sobre Y. Por otra parte, para cada número racional diádico r, $0 < r < 1$, si $\| x \| < r$, se deduce que existe un racional diádico s tal que

$$\| x \| \leqslant s < r \quad \text{y} \quad x \in V(s) \subset \overset{\circ}{V}(r),$$

lo cual prueba que

$$\overset{\circ}{V}(r) \supset \{ x : \| x \| < r \}.$$

Sea ahora $x \in Y$ tal que $\| x \| \leqslant r$; si $\| x \| < r$ entonces

$$x \in \overset{\circ}{V}(r) \subset \overline{V}(r)$$

y si $\| x \| = r$, sea

$$r = \frac{1}{2^{k_1}} + \ldots + \frac{1}{2^{k_n}}$$

entonces también $x \in \overline{V}(r)$, pues en caso contrario existiría un número natural $k > k_n$ tal que

$$\left(x + V\left(\frac{1}{2^k}\right)\right) \cap V(r) = \phi$$

y por tanto

$$x \notin V(r) + V\left(\frac{1}{2^k}\right) = V(s)$$

con

$$s = r + \frac{1}{2^k} > r = \| x \|$$

y se llegaría al absurdo de que existe un racional diádico t que verificaría

$$\| x \| \leqslant t < s \quad \text{y} \quad x \in V(t) \subset V(s).$$

Esto prueba que

$$\overline{V}(r) \supset \{ x : \| x \| \leqslant r \}$$

cuando $0 < r < 1$; en el caso $r = 0$ o $r \geqslant 1$ esta inclusión es trivial. Sea ahora $x \in \overline{V}(r)$; entonces para cada racional diádico $s > r$ se tiene $\overline{V}(r) \subset V(s)$ y por tanto

$$\| x \| \leqslant s \quad \text{y} \quad \| x \| \leqslant r,$$

con lo que queda probado que

$$\overline{V}(r) \subset \{ x : \| x \| \leqslant r \}.$$

12. Teorema.—*Sea Y un espacio vectorial real localmente convexo metrizable. Entonces existe una F-norma sobre Y que dota a Y de su topología original y tal que Y resulta ser un A-módulo F-normado convexo continuo cuando A es un anillo de aplicaciones lineales continuas de Y en Y.*

Demostración. — Teniendo en cuenta el teorema 11, sólo hay que comprobar que la F-norma definida en dicho teorema verifica la propiedad 3.1 del capítulo II. Por ser Y un espacio vectorial real, bastará con probar dicha propiedad en el caso $n = 2$. Sea, pues,

$$\| y_1 \| = \lambda, \quad \| y_2 \| = \mu;$$

para cada $\varepsilon > 0$ existen números sracionales diádicos r, s tales que

$$y_1 \in V(r),\ y_2 \in V(s),\quad \lambda \leqslant r \leqslant \lambda + \varepsilon,\quad \mu \leqslant s \leqslant \mu + \varepsilon,$$

si es $r \leqslant s$, entonces

$$y_1 \in V(r) \subset V(s), \; y_2 \in V(s)$$

y como V (s) es convexo se deduce que

$$\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 \in V(s)$$

cuando

$$\alpha_1 + \alpha_2 = 1, \; \alpha_1 \geqslant 0, \; \alpha_2 \geqslant 0,$$

y por tanto

$$\| \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 \| \leqslant s \leqslant \mu + \epsilon \leqslant \max_{i=1,2} \| y_i \| + \epsilon,$$

y de aquí se deduce

$$\| \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 \| \leqslant \max_{i=1,2} \| y_i \|.$$

OBSERVACIÓN.—Si Y es un espacio vectorial complejo localmente convexo metrizable y el sistema fundamental de entornos de 0 $\{\mathcal{U}_k\}$ de que se partió para definir la F-norma $\| \; \|$ es tal que cada $\mathcal{U}_k$ es equilibrado, entonces cada V (r) también es equilibrado, y como consecuencia también lo es cada bola $\{x : \| x \| \leqslant \rho\}$, como fácilmente se comprueba.

En las condiciones del teorema 12 cabe distinguir dos conceptos de conjunto acotado: 1) conjunto acotado según la F-norma; 2) conjunto acotado según la topología localmente convexa de Y. Entonces cuando pueda haber confusión designaremos por $B_{\| \|}$ (I, Y) (resp. B (I, Y)) el conjunto de las redes acotadas según la F-norma (resp. acotadas según la topología localmente convexa) de Y. Si Y es un espacio vectorial normado, entonces

$$B(I, Y) = B_{\| \|}(I, Y).$$

Obsérvese que para los conjuntos totalmente acotados no cabe tal distinción.

Por otra parte, el resultado que acabamos de obtener pone de manifiesto que el problema de la existencia de límites generalizados de Banach sobre todas las sucesiones acotadas de un A-módulo F-normado convexo completo no tiene solución en general, aunque dicho A-módulo sea continuo. En efecto, los teoremas 11 y 12 muestran que existen A-módulos F-normados convexos continuos completos tales que la F-norma verifica $0 \leqslant \| x \| \leqslant 1$ para cada x. Entonces si Y es uno de tales A-módulos, resulta que para cada $y \in Y$ se tiene $(n\, y) \in B_{\|\,\|}(Y)$, pues todos los subconjuntos de Y son acotados en F-norma. Si existiese un límite generalizado de Banach, Lim sobre $B_{\|\,\|}(Y)$ se deduciría

$$y = \operatorname*{Lim}_n y = \operatorname*{Lim}_n ((n+1)\, y - n\, y) = \operatorname*{Lim}_n (n+1)\, y - \operatorname*{Lim}_n n\, y = 0,$$

para cada $y \in Y$, lo cual es absurdo si $Y \neq \{0\}$.

§ 3. Ejemplos de A-módulos F-normados

13. Ejemplo.—Sea E un espacio vectorial real y sea S (E) el conjunto de todas las sucesiones (x^n) de vectores $x^n \in E$ para cada $n \in N$. Se define en S (E) la suma del modo ordinario y se dota a S (E) de la siguiente F-norma: a) $\| 0 \| = 0$; b) si $x = (x^n) \neq 0$; $\| x \| = \frac{1}{n}$, donde $n \in N$ es el mínimo número natural tal que $x^n \neq 0$. Se comprueba fácilmente que $\| \; \|$ es una F-norma sobre S (E), y S (E) puede considerarse como A-módulo F-normado, siendo A un anillo de aplicaciones aditivas y continuas $a : S(E) \to S(E)$. Si se define el producto $\alpha\,(x^n) = (\alpha\, x^n)$ para cada $\alpha \in \mathbb{R}$ y cada $(x^n) \in S(E)$, es evidente que $\| \alpha\, x \| = \| x \|$ si $\alpha \neq 0$. Como consecuencia de esto y de la propiedad

$$\Big\| \sum_{k=1}^{n} x_k \Big\| \leqslant \max_{1 \leq k \leq n} \| x_k \|,$$

fácil de comprobar, se deduce que

$$\Big\| \sum_{k=1}^{n} \alpha_k\, x_k \Big\| \leqslant \max_{1 \leq k \leq n} \| x_k \|,$$

cuando

$$\sum_{k=1}^{n} \alpha_k \leqslant 1, \; \alpha_k \geqslant 0 \qquad (k = 1, \ldots, n).$$

Si ahora A es un anillo de aplicaciones $a : S(E) \to S(E)$ R-lineales y continuas, resulta que S (E) es un *A-módulo F-normdao no arquimediano convexo*. Es fácil ver que S (E) es *completo*. Evidentemente S (E) es *no continuo*, pues la aplicación $\alpha \longmapsto \alpha x$ no puede ser continua en $\alpha = 0$ si $x \neq 0$ como consecuencia de que $\| \alpha x \| = \| x \|$ si $\alpha \neq 0$.

También es evidente que se verifica la propiedad

$$(\alpha \beta) x = \alpha (\beta x)$$

para cada $x \in S(E)$, $\alpha \in \mathbb{R}$ y $\beta \in \mathbb{R}$. Entonces existe un límite generalizado de Banach Lim sobre $\tau B(S(E))$ que verifica

$$\alpha \operatorname*{Lim}_{n} x_n = \operatorname*{Lim}_{n} \alpha x_n$$

para cada

$$\alpha \in \mathbb{R} \quad \text{y} \quad (x_n) \in \tau B(S(E)),$$

según la proposición II.25.

14. Ejemplo. — Sea S (E) el mismo A-módulo F-normado del ejemplo anterior. Se define un nuevo producto $(\alpha, x) \longmapsto \alpha * x$ del siguiente modo: si $\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una función aditiva y no multiplicativa que verifica $\psi(1) = 1$, (4), se define $\alpha * x = (\psi(\alpha) x^n)$ si $x = (x^n)$. Entonces si

$$\sum_{k=1}^{n} \alpha_k \leqslant 1,$$

(4) La existencia de tales funciones resulta, como es sabido, del axioma de elección.

con $\alpha_k \geqslant 0$ para $k = 1, \ldots, n$ y si $\{x_1, \ldots, x_n\} \subset S(E)$ se tiene

$$\left\| \sum_{i=1}^{n} \alpha_i * x_i \right\| \leqslant \max_{1 \leqq i \leqq n} \| \alpha_i * x_i \| \leqslant \max_{1 \leqq i \leqq n} \| x_i \|,$$

pues

$$\| \alpha_i * x_i \| = \| \psi(\alpha_i) x_i \| = \| x_i \| \quad \text{si} \quad \psi(\alpha_i) \neq 0.$$

Es inmediato comprobar que con este nuevo producto se verifican las demás condiciones de A-módulo F-normado convexo.

Es evidente que ahora no se verifica la propiedad

$$(\alpha \beta) * x = \alpha * (\beta * x)$$

para cada $x \in S(E)$, $\alpha \in \mathbb{R}$ y $\beta \in \mathbb{R}$, pero sí se verifica la condición

$$\alpha * (\beta * x) = \beta * (\alpha * x),$$

que aparece en la proposición II.25.

15. Ejemplo.—Es interesante dar un ejemplo de un A-módulo F-normado convexo que no pueda ser A-módulo normado para ninguna norma sobre A. Sea E un espacio vectorial real normado con norma q. Con las mismas notaciones del ejemplo 13 se define una nueva F-norma sobre S (E) así:

$$\| x \|_0 = \max (\| x \|, q(x^1))$$

donde

$$x = (x_n) \in S(E),$$

siendo $\| \ \|$ la F-norma definida en 13. Sea ahora A el anillo de todas las aplicaciones $a : S(E) \to S(E)$ $\mathbb{R}$-lineales y continuas.

Evidentemente la aplicación $\sigma : (x^n) \to (x^{n+1})$ es $\mathbb{R}$-lineal. Es continua, pues dado $\varepsilon > 0$, si

$$\delta < \min \left\{ 1/2, \frac{\varepsilon}{\varepsilon + 1} \right\}$$

y si

$$\| x - y \|_0 < \delta$$

se deduce que

$$\| x - y \| \delta < \frac{1}{2}$$

y por tanto

$$x^1 - y^1 = 0, \quad x^2 - y^2 = 0.$$

Entonces

$$\| \sigma x - \sigma y \|_0 = \| \sigma x - \sigma y \|,$$

y si

$$\| x - y \| = \frac{1}{m} < \delta, \quad \left(m > \frac{1}{\delta} > 2 \right)$$

se deduce

$$\| \sigma x - \sigma y \|_0 = \| \sigma x - \sigma y \| = \frac{1}{m-1} < \frac{1}{\frac{1}{\delta} - 1} = \frac{\delta}{1 - \delta} < \epsilon.$$

Entonces $\sigma \in A$, pero σ no transforma sucesiones acotadas en sucesiones acotadas, pues si $y \in E$ e $y \neq 0$, la sucesión (x_n) definida por

$$x_n = \{ 0, n\, y, 0, 0, \ldots \} \in S(E)$$

verifica $\| x_n \|_0 = \dfrac{1}{2}$, pero

$$\| \sigma x_n \|_0 \geqslant n\, q\,(y)$$

no está acotado.

Se comprueba fácilmente que con la F-norma $\| \|_0$ también es S (E) un A-módulo F-normado convexo no continuo cuando se define el producto $(\alpha, x) \longmapsto \alpha\, x$ como en el ejemplo 14. Naturalmente, que ahora S (E) no será no arquimediano, como ocurría con la norma $\| \|$.

Capítulo IV

§ 1. Definiciones y notaciones

En este trabajo, en lo sucesivo, cuando se hable de espacios vectoriales localmente convexos, debe entenderse que nos referimos siempre a espacios vectoriales topológicos separados localmente convexos, reales o complejos. Se designará por K el cuerpo real o complejo, y por E un espacio vectorial localmente convexo sobre K no reducido a $\{0\}$, cuya topología se supondrá que viene dada por la familia saturada de seminormas $\{p_j : j \in J\}$. Por $\mathcal{L}$ (E) designaremos el anillo de todas las aplicaciones $a : E \to E$ lineales y continuas, por A un subanillo de $\mathcal{L}$ (E) y por A_0 el subanillo de $\mathcal{L}$ (E) engendrado por todas las aplicaciones lineales continuas $a_0 : E \to E$ tales que

$$a_0\, x = \langle x, x'_0 \rangle\, x_0$$

para cada $x \in E$, donde $x'_0 \in E'$ y $x_0 \in E$. La familia de todas las aplicaciones bilineales continuas $P : E \times E \to E$ se denotará por $\mathcal{P}$ (E), y $\mathcal{P}_A$ (E) designará el subconjunto de $\mathcal{P}$ (E) formado por todas las aplicaciones bilineales continuas que son de la forma

$$P(x, y) = \langle x, x'_0 \rangle\, a\, y$$

con $x'_0 \in E'$ y $a \in A$. En el caso de que E además sea un álgebra, se designará por Π la aplicación producto $\Pi(x, y) = x\, y$ del álgebra. La misma letra Π se reservará también para designar el producto del cuerpo K.

Si I es un conjunto dirigido, una red $x = (x_i)$ de vectores $x_i \in E$ $(i \in I)$ está acotada si y sólo si

$$q_j(x) = \sup \{ p_j(x_i) : i \in I \} < +\infty$$

para cada $j \in J$. Entonces $\{q_j : j \in J\}$ es una familia de seminormas sobre el espacio vectorial B (I, E) de las redes acotadas con valores en E e índices en I; se supondrá que B (I, E) está dotado de la topología localmente convexa definida por esta familia de seminormas. Las notaciones que se utilizarán serán análogas a las usadas en los capítulos anteriores para el caso de sucesiones o redes con valores en un A-módulo F-normado. Así, por ejemplo, τ B (I, E) es el subespacio vectorial de B (I, E) formado por las redes cuyo recorrido es totalmente acotado y $\ddot{E}$ el subespacio de las redes constantes que también se identificará con E.

Para cada red (resp. sucesión) (x_i) con $x_i \in E$ se define $x\,\rho^j$ (resp. $x\,\sigma$) igual que se hizo en el capítulo I. Un subespacio vectorial $X \subset B\,(I, E)$ (resp. B (E)) se dice que es (A, ρ)-invariante (resp. (A, σ)-invariante) si para cada $x = (x_i) \in X$ se verifica que $a\,x = (a\,x_i) \in X$ para cada $a \in A$ y $x\,\rho^j \in X$ para cada $j \in I$ (resp. $x\,\sigma \in X$). Cada subespacio $X \subset B\,(I, E)$ se supondrá dotado de la topología relativa. Generalmente nos referiremos a subespacios X de B (I, E) tales que si $I = N$ tienen la propiedad de que $x\,\sigma \in X$ si y sólo si $x \in X$. Entonces X es (A, ρ) invariante si es (A, σ)-invariante.

Sobre esta cuestión pueden hacerse consideraciones análogas a las que se hicieron en el capítulo primero.

1. Definición.—Sea E un espacio vectorial localmente convexo y X un subespacio de B (I, E) que es (A, ρ)-ivariante y contiene las redes constantes. Se llama *límite generalizado sobre X respecto de A* y se designa por Lim a una aplicación lineal Lim : $X \to E$ con las siguientes propiedades:

1.1. $\operatorname{Lim} a\,x = a \operatorname{Lim} x \quad \forall\, x \in X,\ \forall\, a \in A.$

1.2. $\operatorname{Lim} x = x \quad \forall\, x \in E.$

1.3. $\operatorname{Lim} x \in S^{00}$, donde $S = \{x_i : i \in I\} \quad \forall\, x = (x_i) \in X$ (5)

1.4. $\operatorname{Lim} x = \operatorname{Lim} x\,\rho^j \quad \forall\, x \in X,\ \forall\, j \in I.$

En las proposiciones que sean ciertas, cualquiera que sea el anillo A se omitirá el calificativo «respecto de A». (Nótese que siempre se puede suponer que $A \supset K$.) Así sucede en la siguiente proposición, que es una consecuencia inmediata de la definición.

(5) Para cada conjunto $M \subset E$ designamos por M^0 su polar (absoluta): $M^0 = \{x' \in E' : |\langle x, x' \rangle| \leqslant 1\ \forall\, x \in M\}$, y por M^{00} su bipolar.

2. Proposición.—*En las condiciones de la definición 1 se verifica que cada límite generalizado Lim sobre X es una aplicación lineal continua.*

Demostración.—Si U es un entorno de 0 en E, que se puede suponer de la forma

$$U = \{ y \in E : p_j(y) \leqslant \epsilon \}$$

por ser $\{p_j : j \in J\}$ una familia saturada de seminormas, entonces

$$V = \{ x \in X : q_j(x) \leqslant \epsilon \}$$

es un entorno de 0 en X tal que Lim $x \in U$, siempre que $x \in V$, pues si $x = (x_i) \in V$ resulta que

$$\sup \{ p_j(x_i) ; \ i \in I \} \leqslant \epsilon,$$

de modo que $x_i \in U$ para cada $i \in I$ y por tanto

$$\operatorname*{Lim}_i x_i \in S^{00} \subset U,$$

pues U es cerrado y absolutamente convexo (6).

Designemos por τ la topología localmente convexa de E. Si τ_1 es otra topología localmente convexa sobre E compatible con la dualidad del par (E, E′) y si designamos por E_1 el espacio dotado de la topología τ_1, es evidente que

$$B(I, E) = B(I, E_1),$$

pues los conjuntos acotados son los mismos para estas dos topologías ((10), teorema 3.5.3).

Entonces, si Lim es un límite generalizado sobre X respecto de $A \subset \mathcal{L}(E)$, cuando sobre E se considera la topología τ, también es un límite generalizado sobre X respecto de

$$A_1 = \mathcal{L}(E_1) \cap A,$$

---

(6) Se verifica que M^{00} es la envoltura cerrada absolutamente convexa de M.

cuando sobre E se considera la topología τ_1, puesto que la bipolar S^{00} de un conjunto S sólo depende del par dual (E, E'). En el caso de ser $\tau_1 = \sigma$ (E, E') se verifica que $A_1 = A$, pues $\mathcal{L}(E) \subset \mathcal{L}(E_1)$ en virtud de (10), proposición 3.12.3. Lo mismo sucede cuando τ_1 es la topología de Mackel τ (E, E') como consecuencia de lo que se acaba de indicar y de (10), proposición 3.12.5. Entonces algunos de los resultados que se obtengan en lo sucesivo serán válidos cualquiera que sea la topología localmente convexa, compatible con la dualidad del par (E, E'), que se considere sobre E.

Por otra parte, si E es un espacio vectorial localmente convexo metrizable, se vio en el capítulo III que cabe considerarlo como A-módulo F-normado cuando se le dota de una F-norma como se indica en los teoremas III.11 y III.12, siendo A un subanillo de $\mathcal{L}$ (E). Entonces, si X $\subset$ B (I, E) es un subespacio vectorial (A, ρ)-invariante cabe considerar sobre X dos definiciones de límite generalizado.

La definición I.5 cuando E y X se consideran como A-módulos F-normados, y la definición IV.1 cuando E y X se consideran como espacios vectoriales localmente convexos. Para distinguir estos dos conceptos, en el resto de este trabajo, cuando E sea metrizable, llamaremos *límite (F)-generalizado* a un liímte generlizado sobre X en el sentido de la definición I.5.

Igual que se hizo en el caso de A-módulos F-normados, distinguimos dos tipos importantes de límites generalizados:

3. Definición. — En las condiciones de la definición 1, si $P \in \mathcal{P}$, un límite generalizado Lim sobre X se dice que es un *P-límite generalizado o límite generalizado con la propiedad del producto P* si se verifica que:

3.1. Lim z = P (Lim x, Lim y) cuando $z = (P(x_i, y_i)) \in X$, siendo

$$x = (x_i) \in X, \; y = (y_i) \in X.$$

4. Definición.—En las condiciones de la definición 1, cuando I = N, se dice que un límite generalizado Lim sobre X es un *límite generalizado de Banach* si se verifica que X es σ-invariante y

4.1. Lim x = Lim $x\,\sigma$, $\quad \forall\, x \in X$.

Evidentemente, de 4.1 se deduce 1.4.

Observación.—Por consideraciones análogas a las que se hicieron en el capítulo primero después de la definición 1.7 no hay inconveniente en pedir que el subespacio vectorial X sea ρ-invariante, condición que no sería necesario exigirla, pero que simplificará la exposición de los resultados que siguen, pues así cada límite generalizado de Banach podrá considerarse como un caso particular de límite generalizado. Naturalmente, que cuando se enuncie algún resultado referente a límites generalizados sobre algún subespacio $X \subset B(E)$, si se trata de límites generalizados de Banach, deberá suponerse entonces que X es σ-invariante, aunque esto no se diga explícitamente, ya que esta condición viene dada implícitamente por la definición 4.

§ 2. Condiciones necesarias para la existencia de límites generalizados

5. Proposición.—*En las condiciones de la definición 1, si existe un límite generalizado Lim sobre X y si* $x = (x_i) \in X$ *es una red de Cauchy, entonces es convergente y su límite es* $\operatorname{Lim}_i x_i$.

Demostración.—Si $(x_i) \in X$ es una red de Cauchy, para cada entorno de 0, U en E que sea cerrado y absolutamente convexo existe $i_0 \in I$ tal que $x_j - x_i \in U$ siempre que $i \geqslant i_0$, $j \geqslant i_0$, de modo que si $j \geqslant i_0$, resulta

$$x_j - \operatorname{Lim}_i x_i = \operatorname{Lim}_i (x_j - x_i) = \operatorname{Lim}_i \rho_i^{i_0} (x_j - x_i) \in S^{00},$$

donde

$$S = \{ \rho_i^{i_0} (x_j - x_i) : i \in I \}$$

y evidentemente $S \subset U$ y por lo tanto también $S^{00} \subset U$. Esto prueba que la red (x_i) es convergente a $\operatorname{Lim}_i x_i$.

Sea τ_1 una topología localmente convexa compatible con la dualidad del par (E, E'). Sea $\mathcal{U} = \{U_d\}_{d \in D}$ una base de τ_1-entornos de

0 simétricos. Se define $d_1 \leqslant d_2$ cuando $U_{d_1} \supset U_{d_2}$; entonces D es un conjunto dirigido.

6. Proposición.—*Sea E un espacio vectorial localmente convexo y X un subespacio vectorial de B (E) que es (A, ρ)-invariante y contiene todas las sucesiones de Cauchy para una topología localmente convexa* τ_1 *compatible con la dualidad del par (E, E'). Si existe un límite generalizado Lim sobre X, entonces E es sucesionalmente* τ_1*-completo.*

Demostración. — Considerando lo que se indicó después de la proposición 2, puede suponerse que la topología dada inicialmente en E es la τ_1 y el resultado es una consecuencia inmediata de la proposición 5.

7. Proposición.—*Sea E un espacio vectorial localmente convexo y D el conjunto dirigido de los entornos simétricos de 0 para una topología localmente convexa* τ_1 *compatible con la dualidad del par (E, E'). Sea X un subespacio vectorial de B (D, E) que es (A, ρ)-invariante y que contiene todas las redes de Cauchy para la topología* τ_1 *que son acotadas. Una condición necesaria para que exista un límite generalizado sobre X es que E sea casi completo para la topología* τ_1.

Demostración.—La proposición 5 nos permite afirmar que cada red de Cauchy para la topología τ_1 que sea acotada y con índices en D es convergente. Entonces se deduce que cada subconjunto acotado y τ_1-cerrado de E es completo en virtud de (13) 5.5 (1) y entonces E es casi completo para la topología τ_1.

8. Teorema.—*Sea E un espacio vectorial localmente convexo y* $A \subset \mathcal{L}(E)$ *un anillo que verifica:*

8.1. *Para cada* $x \in E$, $x \neq 0$, *y cada* $y \in E$ *existe* $a \in A$ *tal que* $a\,x = y$.

Sea $X \subset B(I, E)$ *un subespacio vectorial (A, ρ)-invariante que contiene todas las redes de la forma* $(\alpha_i\, x)$ *con* $(\alpha_i) \in B(I, K)$ *y* $x \in E$. *Entonces si existe un límite generalizado Lim sobre X respecto de A, se verifica que existe un límite generalizado Lim* sobre B (I, K) tal que:*

8.2. $(\mathrm{Lim}^* \alpha_i)\, x = \mathrm{Lim}\,(\alpha_i\, x)$ para cada $(\alpha_i) \in B(I, K)$ y $x \in E$.

DEMOSTRACIÓN.—Como se ha supuesto $E \neq \{0\}$, sea $x \in E$, $x \neq 0$. Para cada red $(\alpha_i) \in B(I, K)$ se tiene

$$(\alpha_i x) \in X, \quad \text{y} \quad \operatorname*{Lim}_i (\alpha_i x) \in S^{00},$$

donde

$$S = \{ \alpha_i x : i \in I \}.$$

Pero S^{00} es la envoltura cerrada absolutamente convexa de S que está contenida en el subespacio engendrado por x, de modo que existe un único $\alpha \in K$ tal que

$$\operatorname*{Lim}_i (\alpha_i x) = \alpha x.$$

Definimos entonces

$$\operatorname*{Lim^*}_i \alpha_i = \alpha.$$

Nótese que esta definición es independiente del vector x, pues si $y \in E$, $y \neq 0$, sea $a \in A$ tal que $a x = y$; entonces, si

$$\operatorname*{Lim}_i \alpha_i y = \alpha' y$$

resulta

$$\alpha y = \alpha (a x) = a (\alpha x) = a \operatorname*{Lim}_i \alpha_i x = \operatorname*{Lim}_i \alpha_i (a x) = \operatorname*{Lim}_i \alpha_i y = \alpha' y,$$

de modo que $\alpha = \alpha'$. Esto prueba ya la propiedad 8.2. Seguidamente comprobamos que Lim* es un límite generalizado sobre B (I, K). Hay que verificar las propiedades 5.1, 5.2, 5.3 y 5.4 del capítulo primero cuando se considera K como K-módulo normado. Si

$$(\alpha_i) \in B(I, K) \quad \text{y si} \quad M = \sup_i |\alpha_i|,$$

entonces para cada $x \in \mathrm{E}$, $x \neq 0$ se tiene

$$\mathrm{S} \subset \{\lambda x : |\lambda| \leqslant \mathrm{M}\}$$

y también

$$\mathrm{S}^{00} \subset \{\lambda x : |\lambda| \leqslant \mathrm{M}\},$$

pues este último conjunto es absolutamente convexo y cerrado. Así se deduce 5.3, pues

$$\alpha x \in \mathrm{S}^{00} \quad \text{si} \quad \alpha = \operatorname*{Lim^*}_i \alpha_i.$$

Las restantes propiedades son inmediatas.

9. TEOREMA.—*En las condiciones del teorema 8 si Lim es un P-límite generalizado para alguna aplicación bilineal $P \in \mathcal{P}(E)$ no idénticamente nula, entonces Lim* es un π-límite generalizado, y si $I = N$ y Lim es un límite generalizado de Banach, entonces Lim* también es un límite generalizado de Banach.*

DEMOSTRACIÓN.—Si $\mathrm{P} \in \mathcal{P}(\mathrm{E})$ no es idénticamente nula, sean $x \in \mathrm{E}$, $y \in \mathrm{E}$ tales que

$$z = \mathrm{P}(x, y) \neq 0.$$

Entonces, para cada

$$(\alpha_i) \in \mathrm{B}(\mathrm{I}, \mathrm{K}) \quad \text{y} \quad (\beta_i) \in \mathrm{B}(\mathrm{I}, \mathrm{K})$$

se obtiene

$$\begin{aligned}(\operatorname*{Lim^*}_i (\alpha_i \beta_i))\, z &= \operatorname*{Lim}_i (\alpha_i \beta_i z) = \operatorname*{Lim}_i \mathrm{P}(\alpha_i x, \beta_i y) = \\ &= \mathrm{P}(\operatorname*{Lim}_i \alpha_i x, \operatorname*{Lim}_i \beta_i y) = \mathrm{P}(\alpha x, \beta y) = (\alpha \beta)\, z\end{aligned}$$

con

$$\alpha = \operatorname*{Lim^*}_i \alpha_i, \quad \beta = \operatorname{Lim^*} \beta_i \quad \text{y} \quad z \neq 0.$$

Esto prueba que

$$\operatorname*{Lim^*}_{i}\,(\alpha_i\,\beta_i) = (\operatorname*{Lim^*}_{i}\,\alpha_i)\,(\operatorname*{Lim^*}_{i}\,\beta_i).$$

Por otra parte, si I = N y Lim es un límite generalizado de Banach, es inmediato que Lim* también lo es.

10. TEOREMA.—*Sea E un espacio vectorial localmente convexo y $A \subset \mathcal{L}(E)$ un anillo tal que $A_0 \subset A$. Sea $X \subset B(I, E)$ un subespacio vectorial (A, ρ)-invariante que contiene todas las redes de la forma $(\alpha_i\, x)$ con $(\alpha_i) \in B(I, K)$ y $x \in E$. Entonces si existe un límite generalizado Lim sobre X respecto de A se verifica que existe un límite generalizado Lim* sobre $B(I, K)$ tal que:*

10.1. $(\operatorname*{Lim^*}_{i}\,\alpha_i)\,x = \operatorname*{Lim}_{i}\,(\alpha_i\, x)$ para cada $(\alpha_i) \in B(I, K)$ y $x \in E$.

10.2. $\operatorname*{Lim^*}_{i}\,\langle x_i, x'\rangle = \langle \operatorname*{Lim}_{i}\, x_i, x'\rangle$ para cada $(x_i) \in X$ y $x' \in E'$.

Además, si Lim es un P-límite con $P \neq 0$, entonces Lim es un π-límite, y si Lim es un límite generalizado de Banach (cuando $I = N$) también Lim* es un límite generalizado de Banach.*

DEMOSTRACIÓN.—Evidentemente se verifica la condición **8.1**, pues si $x_0 \in E$ $y_0 \in E$ y $x_0 \neq 0$, existe $x'_0 \in E'$ tal que

$$\langle x_0, x'_0\rangle = 1,$$

y entonces $a_0(x_0) = y_0$, siendo

$$a_0(x) = \langle x, x'_0\rangle\, y_0,\quad a_0 \in A_0 \subset A.$$

Teniendo en cuenta los teoremas 8 y 9 bastará con verificar **10.2.** Sea, pues,

$$(x_i) \in X,\ x' \in E',\ \alpha_i = \langle x_i, x'\rangle$$

para cada $i \in I$; evidentemente $(\alpha_i) \in B(I, K)$ y si

$$b_0(x) = \langle x, x'\rangle\, x_0,$$

se obtiene

$$(\operatorname*{Lim^*}_i \alpha_i)\, x_0 = \operatorname*{Lim}_i (\alpha_i\, x_0) = \operatorname*{Lim}_i b_0\, x_i = b_0 \operatorname*{Lim}_i x_i = \langle \operatorname*{Lim}_i x_i,\, x' \rangle\, x_0$$

y entonces al ser $x_0 \neq 0$ resulta 10.2.

11. Corolario.—*En las condiciones del teorema 10, si existe un límite generalizado Lim sobre X respecto de A, entonces Lim es un límite generalizado respecto de* $\mathcal{L}$ *(E).*

Demostración.—Para cada $a \in \mathcal{L}$ (E) sea $a^t : E' \to E'$ la aplicación lineal traspuesta. Como consecuencia de 10.2 se deduce

$$\langle a \operatorname*{Lim}_i x_i, x' \rangle = \langle \operatorname*{Lim}_i x_i,\, a^t\, x' \rangle = \operatorname*{Lim^*}_i \langle x_i,\, a^t\, x' \rangle =$$

$$= \operatorname*{Lim^*}_i \langle a\, x_i,\, x' \rangle = \langle \operatorname*{Lim}_i a\, x_i,\, x' \rangle$$

para cada $x' \in E'$. Entonces

$$a \operatorname*{Lim}_i x_i = \operatorname*{Lim}_i a\, x_i$$

para cada $a \in \mathcal{L}$ (E) y $(x_i) \in X$.

Para el caso de los límites (F)-generalizados se puede obtener un resultado análogo al del teorema 10, que lo utilizaremos posteriormente para probar la equivalencia de los dos conceptos de límite (F)-generalizado y límite generalizado cuando $A \supset A_0$.

12. Teorema.—*Sea E un espacio vectorial localmente convexo metrizable dotado de una F-norma* $\| \; \|$ *tal que cada bola*

$$\{ x \in E : \| x \| \leqslant r \}$$

es equilibrada y sea $A \subset \mathcal{L}(E)$ *un anillo tal que* $A_0 \subset A$. *Sea* $X \subset B_{\| \|}(I, E)$ *un sub A-módulo* (A, ρ)*-invariante que contiene todas las redes de la forma* $(\alpha_i\, x)$ *con* $(\alpha_i) \in B(I, K)$ *y* $x \in E$. *Entonces, si existe un límite (F)-generalizado Lim sobre X se verifica que existe un límite generalizado Lim* sobre* $B(I, K)$ *tal que:*

12.1. $(\operatorname*{Lim^*}_i \alpha_i)\, x = \operatorname*{Lim}_i (\alpha_i\, x)$ para cada $(\alpha_i) \in B(I, K)$ y $x \in E$.

12.2. $\operatorname*{Lim*}_i \langle x'_i, x' \rangle = \langle \operatorname*{Lim}_i x_i, x' \rangle$ para cada $(x_i) \in X$ y $x' \in E'$.

Además, si Lim es un P-límite (F)-generalizado y $P \neq 0$ es bilineal (resp. un límite (F)-generalizado de Banach), entonces Lim es un* Π*-límite generalizado (resp. un límite generalizado de Banach).*

DEMOSTRACIÓN.—Como se supone que $E \neq \{0\}$, sea $x_0 \in E$, $x_0 \neq 0$; existe $x'_0 \in E'$ tal que $\langle x_0, x'_0 \rangle = 1$. Entonces si

$$(\alpha_i) \in B(I, K)$$

resulta que $(\alpha_i x_0) \in X$ y se define

$$\operatorname*{Lim*}_i \alpha_i = \langle \operatorname*{Lim}_i (\alpha_i x_0), x'_0 \rangle$$

En primer lugar probamos 12.2: sea $(x_i) \in X$ y $x' \in E'$; entonces

$$a(x) = \langle x, x'_0 \rangle x_0 \quad \text{y} \quad b(x) = \langle x, x' \rangle x_0$$

definen dos elementos a, b de A. Si $\alpha_i = \langle x_i, x' \rangle$, es evidente que $(\alpha_i) \in B(I, K)$ y

$$\begin{aligned}(\operatorname*{Lim*}_i \langle x_i, x' \rangle) x_0 &= (\operatorname*{Lim*}_i \alpha_i) x_0 = \langle \operatorname*{Lim}_i (\alpha_i x_0), x'_0 \rangle x_0 = \\ &= a(\operatorname*{Lim}_i (\alpha_i x_0)) = \operatorname*{Lim}_i (a(\alpha_i x_0)) = \operatorname*{Lim}_i \alpha_i x_0 = \operatorname*{Lim}_i \langle x_i, x' \rangle x_0 = \\ &= \operatorname*{Lim}_i (b x_i) = b(\operatorname*{Lim}_i x_i) = \langle \operatorname*{Lim}_i x_i, x' \rangle x_0.\end{aligned}$$

Como $x_0 \neq 0$, se deduce 12.2 Si en la relación que se acaba de obtener:

$$(\operatorname*{Lim*}_i \langle x_i, x' \rangle) x_0 = \operatorname*{Lim}_i \langle x_i, x' \rangle x_0$$

se pone

$$x_i = \alpha_i x_0, \; x' = x'_0,$$

se obtiene 12.1 cuando $x = x_0 \neq 0$. Como 12.2 prueba que la definicción de Lim es independiente de los vectores x_0, x'_0 elegidos, resulta que 12.1 es válido para cada $x \neq 0$ (si $x = 0$ es trivial). Seguidamente se comprueba que Lim* es un límite generalizado sobre B (I, K). Es evidente que si

$$(\alpha_i) \in B(I, K) \quad y \quad (\beta_i) \in B(I, K),$$

se verifica que

$$\operatorname*{Lim^*}_i (\alpha_i + \beta_i) = \operatorname*{Lim^*}_i \alpha_i + \operatorname*{Lim^*}_i \beta_i ;$$

además, si $\lambda \in K$, se tiene

$$\operatorname*{Lim^*}_i (\lambda \alpha_i) = \langle \operatorname*{Lim}_i (\lambda \alpha_i x_0), x'_0 \rangle = \operatorname*{Lim^*}_i \langle \lambda \alpha_i x_0, x'_0 \rangle =$$
$$= \operatorname*{Lim^*}_i \langle \alpha_i x_0, \lambda x'_0 \rangle = \langle \operatorname*{Lim}_i (\alpha_i x_0), \lambda x'_0 \rangle = \lambda \operatorname*{Lim^*}_i \alpha_i$$

(Nótese que no se supone $A \supset K$.) Teniendo en cuenta lo que acabamos de probar, bastará establecer que

$$|\operatorname*{Lim^*}_i \alpha_i| \leqslant \sup_i |\alpha_i|$$

en el caso de que $\sup_i |\alpha_i| = 1$. Sea, pues, $r > 0$, tal que

$$|\langle x, x'_0 \rangle| \leqslant 1$$

cuando $\| x \| \leqslant r$, y sea

$$\delta = \sup \{ |\langle x, x'_0 \rangle| : \| x \| \leqslant r \}.$$

Si

$$y'_0 = \frac{1}{\delta} x'_0$$

se tiene que

$$1 = \sup \{ |\langle x, y'_0 \rangle| : \| x \| \leqslant r \}.$$

Para cada $\varepsilon > 0$, $0 < \varepsilon < 1$ existe $x \in E$, $x \neq 0$ tal que

$$\| x \| \leqslant r \quad \text{y} \quad 1 - \varepsilon \leqslant | \langle x, y'_0 \rangle | \leqslant 1.$$

Si se toma

$$t = \langle x, y'_0 \rangle \quad \text{y} \quad x_i = \frac{\alpha_i}{t} x$$

se verifica

$$\alpha_i = \langle x_i, y'_0 \rangle \quad \text{y} \quad | \operatorname*{Lim^*}_i \alpha_i | = | \operatorname*{Lim^*}_i \langle x_i, y'_0 \rangle | = | \operatorname*{Lim^*}_i \langle \alpha_i x, t^{-1} y'_0 \rangle | =$$

$$= | \langle \operatorname*{Lim}_i (\alpha_i x), t^{-1} y'_0 \rangle | \leqslant \left| \frac{1}{t} \right| \leqslant \frac{1}{1 - \varepsilon},$$

puesto que

$$\| \operatorname*{Lim}_i (\alpha_i x) \| \leqslant \sup_i \| \alpha_i x \| \leqslant \| x \| \leqslant r,$$

ya que las bolas centradas en el origen son equilibradas. Las restantes propiedades del límite generalizado son evidentes. También es inmediato que si Lim es un P-límite (F)-generalizado, donde $P \neq 0$ es bilineal (resp. un límite (F)-generalizado de Banach), entonces Lim* es un Π-límite (resp. un límite generalizado de Banach). La demostración es igual que en el teorema 9.

13. TEOREMA.—*Sea E un espacio vectorial localmente convexo metrizable dotado de una F-norma $\| \ \|$ tal que cada bola*

$$\{ x \in E : \| x \| \leqslant r \}$$

es absolutamente convexa y sea $A \subset \mathcal{L}(E)$ un anillo. Sea $X \subset B(I, E)$ un subespacio vectorial que es (A, ρ)-invariante. Entonces, si Lim es un límite generalizado sobre X respecto de A, también es un límite (F)-generalizado sobre X. Recíprocamente, si X contiene todas las redes de la forma $(\alpha_i x)$ con $(\alpha_i) \in B(I, K)$ y $x \in E$ y si $A_0 \subset A$, entonces si Lim es un límite (F)-generalizado sobre X como A-módulo, también es un límtie generalizado sobre X respecto de $\mathcal{L}(E)$.

DEMOSTRACIÓN.—Si Lim es un límite generalizado sobre X respecto de A, se verifica que $\operatorname*{Lim}_i x_i \in S^{00}$ con $S = \{x_i : i \in I\}$ para cada $(x_i) \in X$. Si

$$r = \sup_i \| x_i \| < \infty,$$

como

$$S \subset \{ x : \| x \| \leqslant r \},$$

al ser este último conjunto cerrado y absolutamente convexo se deduce que

$$S^{00} \subset \{ x : \| x \| \leqslant r \}$$

y por tanto

$$\| \operatorname*{Lim}_i x_i \| \leqslant \sup_i \| x_i \|.$$

Recíprocamente, por un razonamiento idéntico al de la demostración del corolario 11 se demuestra que

$$\operatorname*{Lim}_i a\, x_i = a \operatorname*{Lim}_i x_i$$

para cada $a \in \mathcal{L}(E)$ y cada $(x_i) \in X$. Como cada escalar $\lambda \in K$ puede considerarse como un elemento de $\mathcal{L}(E)$, queda demostrado también que $\mathrm{Lim} : X \to E$ es una aplicación lineal. Por otra parte, si $x' \in S^0$ resulta que

$$| \langle \operatorname*{Lim}_i x_i, x' \rangle | = | \operatorname*{Lim^*}_i \langle x_i, x' \rangle | \leqslant \sup_i | \langle x_i, x' \rangle | \leqslant 1,$$

y esto prueba que

$$\operatorname*{Lim}_i x_i \in S^{00}.$$

OBSERVACIÓN.—En relación con la hipótesis de que cada bola

$$\{ x \in E : \| x \| \leqslant r \}$$

sea absolutamente convexa, véase la observación que sigue al teorema III.12.

Designaremos por S^c la envoltura convexa de cada conjunto $S \subset E$. Entonces $\overline{S^c}$ es la envoltura cerrada convexa del conjunto S.

14. Teorema.—*En las condiciones del teorema 10, cada límite generalizado Lim sobre X respecto de A tiene la propiedad:*

14.1. *Para cada* $(x_i) \in X$ *se verifica que* $\operatorname{Lim}_i x_i \in \overline{S_j^c}$ *para cada* $j \in I$, *donde* $S_j = \{x_i : i \geqslant j\}$.

Demostración.—En primer lugar, probaremos que $\operatorname{Lim}_i x_i \in \overline{S^c}$, donde $S = \{x_i : i \in I\}$. Como S es acotado en E, es precompacto para la topología débil $\sigma(E, E')$ ((10), 3.2, ejercicio 2), de modo que si

$$V = \{x \in E : |\langle x, x'_k \rangle| \leqslant \epsilon,\ x'_k \in E',\ k = 1, \ldots, m\}$$

es un $\sigma(E, E')$-entorno de 0 en E, existen $y_1, \ldots, y_p$ elementos de S tales que

$$S \subset \bigcup_{n=1}^{p} B_n,$$

donde

$$B_n = y_n + V \qquad (n = 1, \ldots, p).$$

Se define entonces

$$I_1 = \{i \in I : x_i \in B_1\},$$

$$I_h = \Big\} i \in I : x_i \in \Big(B_h - \bigcup_{n=1}^{h-1} B_n \Big) \Big\{ \quad \text{para} \quad h = 2, \ldots p, .$$

Es evidente que

$$I_h \cap I_k = \Phi \quad \text{si} \quad h \neq k,$$

y que

$$I = \bigcup_{h=1}^{p} I_h.$$

Para cada $n = 1, \ldots, p$ sea (α_i^n) la red característica de I_n. Evidentemente $(\alpha_i^n\, y_n) \in X$ para $n = 1, \ldots, p$ y se verifica que

$$\operatorname*{Lim}_i (\alpha_i^n\, y_n) = (\operatorname*{Lim^*}_i \alpha_i^n)\, y_n = \alpha_n\, y_n,$$

con

$$\alpha_n = \operatorname*{Lim^*}_i \alpha_i^n, \text{ y } \sum_{n=1}^{p} \alpha_n = 1.$$

Sea entonces

$$x_0 = \operatorname*{Lim}_i x_i\, ;$$

para cada $k = 1, \ldots, m$ se deduce

$$\left| < \sum_{n=1}^{p} \alpha_n\, y_n - x_0, x'_k > \right| = \left| < \operatorname*{Lim}_i \left(\sum_{n=1}^{p} \alpha_i^n\, y_n - x_i \right), x'_k > \right| =$$

$$= \left| \operatorname*{Lim^*}_i < \sum_{n=1}^{p} \alpha_i^n\, y_n - x_i, x'_k > \right| \leqslant \sup_i \left| < \sum_{n=1}^{p} \alpha_i^n\, y_n - x_i, x'_k > \right| \leqslant \epsilon,$$

ya que si $i \in I_h$, entonces

$$\sum_{n=1}^{p} \alpha_i^n\, y_n - x_i = y_h - x_i \in V,$$

pues

$$x_i \in B_h = y_h + V.$$

Esto prueba que

$$\sum_{n=1}^{p} \alpha_n y_n \in x_0 + V,$$

y por tanto, x_0 es un punto σ (E, E′) adherente a la envoltura convexa de S. Teniendo en cuenta que los conjuntos cerrados convexos de E son los mismos para todas las topologías compatibles con la dualidad del par (E, E′) ((10), proposición 3.4.3) ,resulta que $\operatorname{Lim}_i x_i$ es un punto de la envoltura cerrada convexa $\overline{S^c}$ de S.

Evidentemente, la red (z_i) definida por

$$z_i = (1 - \rho_i{}^j)\, x_j + \rho_i{}^j\, x_i$$

pertenece a X. Como

$$\{ z_i : i \in I \} = S_j \quad \text{y} \quad \operatorname{Lim}_i x_i = \operatorname{Lim}_i z_i,$$

el resultado que se acaba de obtener aplicado a la red (z_i) nos permite deducir 14.1.

Si E es un espacio vectorial localmente convexo, un subconjunto $M \subset E$ se dice que es *débilmente convexo compacto* cuando se verifica que si

$$K_1 \supset K_2 \supset \dots \supset K_n \supset K_{n+1} \dots$$

es una sucesión decreciente de subconjuntos cerrados convexos de E tales que $K_n \cap M \neq \phi$ para todo $n \in N$, entonces existe un punto de M que es débilmente adherente a cada conjunto $M \cap K_n$ ((13), 24.3).

15. Teorema.—*Sea E un espacio vectorial localmente convexo. Una condición necesaria para que exista un límite generalizado sobre B (E) respecto de $\mathcal{L}$ (E) es que cada subconjunto $M \subset E$ acotado cerrado y convexo sea débilmente convexo compacto.*

Demostración.—Sea $K_1 \supset K_2 \supset \dots$ una sucesión decreciente de subconjuntos cerrados convexos de E tales que $K_n \cap M \neq \phi$ para cada $n \in N$. Sea $x_n \in K_n \cap M$. Entonces $(x_n) \in B(E)$ y si $x = \lim\limits_n x_n$, como consecuencia del teorema 14 se verifica que para cada $m \in N$, x es un punto adherente a la envoltura convexa de

$$S_m = \{x_n : n \geqslant m\},$$

que evidentemente está contenida en $K_m \cap M$, que es convexo y cerrado y por tanto $x \in K_m \cap M$ para cada $m \in N$.

§ 3. Condiciones suficientes para la existencia de límites generalizados. Semirreflexividad

En este apartado nos ocuparemos, en primer lugar, del problema de la existencia de límites generalizados sobre $\tau B(I, E)$. Según los resultados de los capítulos anteriores (teoremas I.11 y II.21), en el caso de que el espacio vectorial localmente convexo E sea metrizable y completo, se sabe que existe un P-límite (F)-generalizado y un límite (F)-generalizado de Banach (si $I = N$) sobre $\tau B(I, E)$ cuando E se considera como A-módulo F-normado según se indica en el teorema III.12, pudiendo tomarse $A = \mathcal{L}(E)$. El teorema 13 de este capítulo prueba que estos límites (F)-generalizados también son límites generalizados. Seguidamente extendemos estos resultados al caso general de un espacio vectorial localmente convexo casi completo.

16 Teorema.—*Sea E un espacio vectorial localmente convexo casi completo. Para cada $P \in \mathcal{P}_{\mathcal{L}(E)}(E)$ existe un P-límite generalizado Lim sobre $\tau B(I, E)$ respecto de $\mathcal{L}(E)$ cualquiera que sea el conjunto dirigido I. También existe un límite generalizado de Banach sobre $\tau B(E)$ respecto de $\mathcal{L}(E)$.*

Demostración.—Sea Lim* un límite generalizado sobre $B(I, K)$ y sea $(x_i) \in \tau B(I, E)$. Para cada $x' \in E'$ sea

$$x(x') = \operatorname*{Lim^*}_i \langle x_i, x' \rangle.$$

Es claro que x es lineal y continua para la topología $\lambda(E', E)$ de la convergencia uniforme sobre los conjuntos precompactos de E, pues dado $\varepsilon > 0$, εS^0 es un $\lambda(E', E)$ entorno de 0 en E', ya que

$$S = \{x_i : i \in I\}$$

es precompacto, y si $x' \in \varepsilon S^0$ se verifica

$$|\langle x, x' \rangle| \leqslant \sup_i |\langle x_i, x' \rangle| \leqslant \varepsilon.$$

Pero si E es casi completo, se sabe ((13), 21.6, (1)) que el dual de E' para la topología $\lambda(E', E)$ es precisamente E y por tanto $x \in E$. Definimos entonces $\operatorname{Lim}_i x_i = x$. Es inmediato que

$$\operatorname{Lim} : \tau B(I, E) \to E$$

es una aplicación lineal que verifica

$$\operatorname{Lim}_i a\, x_i = a \operatorname{Lim}_i x_i$$

para cada $a \in \mathcal{L}(E)$. (Véase la demostración del corolario 11.) Para cada $x' \in S^0$ se tiene

$$|\langle x, x' \rangle| = |\operatorname{Lim}^*_i \langle x_i, x' \rangle| \leqslant \sup_i |\langle x_i, x' \rangle| \leqslant 1$$

y entonces $\operatorname{Lim}_i x_i \in S^{00}$. Las restantes propiedades del límite generalizado son inmediatas. Es obvio que si $I = N$ y Lim^* es un límite de Banach, entonces Lim también lo es. Si ahora se supone que

$$P \in \mathcal{P}_{\mathcal{L}(E)}(E),\ P(x, y) = \langle x, x'_0 \rangle\, a\, y$$

$(a \in \mathcal{L}(E))$ es claro que para cada

$$(x_i) \in \tau B(I, E) \quad \text{e} \quad (y_i) \in \tau B(I, E)$$

se verifica

$$(P(x_i, y_i)) \in \tau B(I, E),$$

pues un conjunto es precompacto en E si y sólo si es relativamente compacto. Si Lim* es un Π-límite generalizado sobre B (I, K), se tiene

$$\operatorname*{Lim^*}_i \langle P(x_i, y_i), x' \rangle = \operatorname*{Lim^*}_i (\langle x_i, x'_0 \rangle \langle a\, y_i, x' \rangle) =$$

$$= \operatorname*{Lim^*}_i \langle x_i, x'_0 \rangle \operatorname*{Lim^*}_i \langle a\, y_i, x' \rangle = \langle \operatorname*{Lim}_i x_i, x'_0 \rangle \langle a \operatorname*{Lim}_i y_i, x' \rangle =$$

$$= \langle P(\operatorname*{Lim}_i x_i, \operatorname*{Lim}_i y\,), x' \rangle$$

para cada $x' \in E'$, y esto prueba que

$$P(\operatorname*{Lim}_i x_i, \operatorname*{Lim}_i y_i) = \operatorname*{Lim}_i P(x_i, y_i).$$

17. Teorema.—*Sea E un espacio vectorial localmente convexo casi completo. Si $\mathcal{U}$ es un ultrafiltro que contiene a la base de filtro $\mathcal{B}$ asociada al conjunto dirigido I, para cada $P \in \mathcal{P}_{\mathcal{L}(E)}(E)$ queda definido sobre $\tau\, B\,(I, E)$ un P-límite generalizado Lim respecto de $\mathcal{L}\,(E)$ cuando se pone*

$$\operatorname*{\mathit{Lim}}_i x_i = \operatorname*{\mathit{lim}}_{\mathcal{U}} x_i \quad \mathit{si} \quad (x_i) \in \tau\, B\,(I, E).$$

Recíprocamente, si $P \in \mathcal{P}\,(E)$ y $P \neq 0$ para cada P-límite generalizado Lim sobre $\tau\, B\,(I, E)$ respecto de $\mathcal{L}\,(E)$ existe un ultrafiltro $\mathcal{U}$ que contiene a $\mathcal{B}$ tal que

$$\operatorname*{\mathit{Lim}}_i x_i = \operatorname*{\mathit{lim}}_{\mathcal{U}} x_i$$

para cada $(x_i) \in \tau\, B\,(I, E)$.

Demostración.—Sea Lim* el Π-límite generalizado que el ultrafiltro $\mathcal{U}$ define sobre B (I, K) (corolario I.12). Como E es casi completo, se deduce de un modo análogo a como se hizo en el teorema I.11 que existe el límite de la red (x_i) según el ultrafiltro $\mathcal{U}$, de modo que se verifica

$$\langle \operatorname*{Lim}_i x_i, x' \rangle = \langle \operatorname*{lim}_{\mathcal{U}} x_i, x' \rangle = \operatorname*{lim}_{\mathcal{U}} \langle x_i, x' \rangle = \operatorname*{Lim^*}_i \langle x_i, x' \rangle$$

para cada $x' \in E'$, y de aquí se deduce que Lim es un P-límite generalizado si se procede como en la demostración del teorema anterior.

Recíprocamente, si Lim es un P-límite sobre τ B (I,E) respecto de $\mathcal{L}$ (E) con $P \neq 0$, se deduce como consecuencia del teorema 10 y del teorema I.13 que existe un ultrafiltro $\mathcal{U} \supset \mathcal{B}$ tal que

$$\lim_{\mathcal{U}} \langle x_i, x' \rangle = \langle \underset{i}{\mathrm{Lim}}\ x_i, x' \rangle$$

para cada $x' \in E'$, es decir, $\underset{i}{\mathrm{Lim}}\ x_i$ es el límite débil de la red (x_i) según el ultrafiltro $\mathcal{U}$ y por tanto también es el límite de la red (x_i) en la topología τ de E, según dicho ultrafiltro, puesto que este límite existe.

Nótese que como consecuencia del teorema 14 los límites generalizados considerados en los teoremas 16 y 17 tienen la propiedad 14.1.

Seguidamente pasamos a ocuparnos del problema de la existencia de límites generalizados sobre B (I, E). Para cada conjunto $M \subset E'$ designaremos por M^0 su polar en E y por $M^\bullet$ su polar en E″, donde E″ es el dual de E′ para la topología fuerte β (E′, E) de E′. Evidentemente $M^\bullet \cap E = M^0$. Se designa por ε (E″, E′) la topología sobre E″ de la convergencia uniforme sobre los conjuntos equicontinuos de E′. Entonces ε (E″, E′) induce sobre E su topología original. Si $a \in \mathcal{L}$ (E) y si $x'' \in E''$, se define $a\, x''$ así:

$$\langle a\, x'', x' \rangle = \langle x'', a^t x' \rangle$$

para cada $x' \in E'$.

El siguiente teorema es importante, pues de él se deducen casi todos los resultados que siguen en este capítulo:

18. Teorema.—*Sea E un espacio vectorial localmente convexo. Para cada límite generalizazdo Lim* sobre B (I, K) queda definida una aplicación lineal $L : B(I, E) \to E''$, continua para la topología ε (E″, E), cuando se pone*

$$\langle \underset{i}{L} (x_i), x' \rangle = \underset{i}{Lim^*} \langle x_i, x' \rangle$$

para cada $x' \in E'$.

Esta aplicación lineal tiene las siguientes propiedades:

18.1. $\underset{i}{L}(a\, x_i) = a\, \underset{i}{L}(x_i)$ *para cada* $(x_i) \in B\,(I, E)$ *y* $a \in \mathcal{L}\,(E)$.

18.2. $\underset{i}{L}(x_i) = x$ *si* $x_i = x$ *para cada* $i \in I$.

18.3. $\underset{i}{L}(x_i) \in S^{0\,\bullet}$ *para cada* $(x_i) \in B\,(I, E)$, *siendo*

$$S = \{ x_i : i \in I \}.$$

18.4. $\underset{i}{L}(x_i) = \underset{i}{L}(\rho_i^j\, x_i)$ *para cada* $(x_i) \in B\,(I, E)$ *y* $j \in I$.

Demostración.—Es evidente que si $(x_i) \in$ B (I, E), entonces

$$(\langle x_i, x' \rangle) \in \mathrm{B}\,(\mathrm{I}, \mathrm{K})$$

para cada $x' \in$ E′, de modo que si se define x'' : E′ → K poniendo

$$\langle x'', x' \rangle = \underset{i}{\mathrm{Lim}^*} \langle x_i, x' \rangle$$

resulta que x'' es una forma lineal sobre E′ que es continua para la topología fuerte β (E′, E), pues dado $\varepsilon > 0$, se tiene que $\varepsilon\, S^0$ es un entorno de 0 para esta topología tal que si $x' \in \varepsilon\, S^0$ se verifica

$$|\langle x'', x' \rangle| = |\underset{i}{\mathrm{Lim}^*} \langle x_i, x' \rangle| \leqslant \sup_i |\langle x_i, x' \rangle| \leqslant \varepsilon.$$

Puesto que $x'' \in$ E″, queda definida la aplicación

$$\mathrm{L} : \mathrm{B}\,(\mathrm{I}, \mathrm{E}) \to \mathrm{E}'' \quad \text{por} \quad \underset{i}{\mathrm{L}}(x_i) = x'',$$

que evidentemente es lineal. Esta aplicación es continua para la topología ε (E″, E), pues si V es un entorno de 0 en E″ para esta topología, que puede suponerse de la forma V = $\mathrm{M}^\bullet$ con M ⊂ E′ equicontinuo, entonces U = M^0 es un entorno de 0 en E que contendrá un conjunto de la forma

$$\{ x \in \mathrm{E} : p_j(x) \leqslant \varepsilon \}.$$

Sea

$$W = \{ (x_i) \in B(I, E) : \sup_i p_j(x_i) \leqslant \epsilon \}$$

el correspondiente entorno de 0 en B (I, E). Si $(x_i) \in W$, se verifica $x_i \in M^0$ para cada $i \in I$ y así

$$|\langle x'', x' \rangle| = |\operatorname{Lim}^*_i \langle x_i, x' \rangle| \leqslant \sup_i |\langle x_i, x' \rangle| \leqslant 1$$

para cada $x' \in M$, de modo que $x'' \in M^0 = V$. Esto prueba la continuidad de L. Para cada $a \in \mathcal{L}(E)$ se obtiene

$$\langle a\, x'', x' \rangle = \langle x'', a^t x' \rangle = \operatorname{Lim}^*_i \langle x_i, a^t x' \rangle =$$

$$= \operatorname{Lim}^*_i \langle a\, x_i, x' \rangle = \langle \operatorname{L}_i (a\, x_i), x' \rangle,$$

de modo que se verifica 18.1. La comprobación de 18.2 y 18.4 es elemental. Por último, si $x' \in S^0$ se tiene

$$|\langle x'', x' \rangle| = |\operatorname{Lim}^*_i \langle x_i, x' \rangle| \leqslant \sup_i |\langle x_i, x' \rangle| \leqslant 1,$$

y esto prueba 18.3

19. Proposición.—*En las condiciones del teorema 18 se verifica:*

19.1. $L_i(\alpha_i\, x) = (Lim^*_i\, \alpha_i)\, x$ *para cada* $(\alpha_i) \in B(I, K)$ *y* $x \in E$.

Si además Lim es un* Π*-límite generalizado, entonces se obtiene:*

19.2. $L_i(\alpha_i\, x_i) = (Lim^*_i\, \alpha_i)\, L_i(x_i)$ *para cada* $(\alpha_i) \in B(I, K)$ *y* $(x_i) \in B(I, E)$.

Por último, si $I = N$ *y Lim* es un límite generalizado de Banach, entonces:*

19.3. $L_n(x_n) = L_n(x_{n+1})$ *para cada* $(x_n) \in B(E)$.

Demostración.—19.1 y 19.3 son evidentes teniendo en cuenta la definición de L, y 19.2 es consecuencia de la igualdad

$$\langle \underset{i}{\mathrm{L}} (\alpha_i\, x), x'\rangle = \underset{i}{\mathrm{Lim}^*} \langle \alpha_i\, x_i, x'\rangle = \underset{i}{\mathrm{Lim}^*} (\alpha_i \langle x_i, x'\rangle) =$$

$$= (\underset{i}{\mathrm{Lim}^*}\, \alpha_i)\, (\underset{i}{\mathrm{Lim}^*} \langle x_i, x'\rangle) = \langle (\underset{i}{\mathrm{Lim}^*}\, \alpha_i)\, \underset{i}{\mathrm{L}} (x_i), x'\rangle$$

válida para cada $x' \in \mathrm{E}'$.

20. Proposición.—*En las condiciones del teorema 18 se verifica que para cada* $(x_i) \in B(I, E)$, *el punto* $L(x_i)$ *es* $\sigma(E'', E')$-*adherente a la envoltura convexa* S_j° *de cada* $S_j = \{x_i : i \geqslant j\}$.

Demostración.—Es análoga a la del teorema 14, pues también se verifica que $\mathrm{S} = \{x_i : i \in \mathrm{I}\}$ es acotado en E″ para la topología $\sigma(\mathrm{E}'', \mathrm{E}')$ y por tanto precompacto para dicha topología ((10), 3.2, ejercicio 2). Entonces, si

$$\mathrm{V} = \{ x'' \in \mathrm{E}'' : | \langle x'', x'_k\rangle | \leqslant \epsilon,\ x'_k \in \mathrm{E}',\ k = 1, \ldots, m \}$$

se procede de la misma manera que se hizo entonces, puesto que ahora también se cumple

$$\underset{i}{\mathrm{L}} (\alpha_i{}^n\, y_n) = (\underset{i}{\mathrm{Lim}^*}\, \alpha_i{}^n)\, y_n = \alpha_n\, y_n$$

en virtud de 19.1.

21. Teorema.—*Si E es un espacio vectorial localmente convexo semi-reflexivo existe sobre B (I, E) un P-límite generalizado respecto de* $\mathcal{L}(E)$ *para cada* $P \in \mathcal{P}_{\mathcal{L}(E)}(E)$, *cualquiera que sea el conjunto dirigido I, y sobre B (E) un límite generalizado de Banach.*

Demostración.—Es consecuencia inmediata del teorema 18, pues si E″ = E, entonces L es un límite generalizado sobre B (I, E) respecto de $\mathcal{L}$ (E). Como consecuencia de la proposición 19 se deduce que si Lim* es un Π-límite (resp. límite generalizado de Banach), entonces Lim es un P-límite (resp. límite generalizado de Banach), pues si

$$\mathrm{P}(x, y) = \langle x, x'_0\rangle\, a\, y$$

se tiene que para cada $(x_i) \in B(I, E)$ y cada $(y_i) \in B(I, E)$ resulta, como consecuencia de 19,2

$$L(P(x_i, y_i)) = \operatorname*{Lim^*}_i \langle x_i, x'_0\rangle L(a\, y_i) = \langle \operatorname*{L}_i(x_i), x'_0\rangle\, a \operatorname*{L}_i(y_i) =$$

$$= P(\operatorname*{L}_i(x_i), \operatorname*{L}_i(y_i)).$$

Como consecuencia de este teorema y de la proposición 7, se deduce la siguiente caracterización de los espacios vectoriales localmente convexos semi-reflexivos:

22. TEOREMA. — *El espacio vectorial localmente convexo E es semi-reflexivo si y sólo si existe un límite generalizado sobre $B(I, E)$ para cada conjunto dirigido I.*

DEMOSTRACIÓN.—Si existe un límite geseralizado sobre $B(I, E)$ para cada conjunto dirigido I, se deduce de la proposición 7 que E es casi completo para la topología $\sigma(E, E')$ y por tanto semi-reflexivo ((10), proposición 3.8.2). El recíproco resulta del teorema 21.

23. TEOREMA.—*El espacio vectorial localmente convexo E es semi-reflexivo si y sólo si existe una aplicación lineal $\Pi : E'' \to E$ que verifique:*

23.1. $\Pi(S^0) \subset S^{0\bullet}$ *para cada subconjunto acotado* $S \subset E$.

23.2. $\Pi(x) = x$ *para cada* $x \in E$.

DEMOSTRACIÓN.—Si existe una aplicación lineal $\Pi : E'' \to E$ con estas propiedades y se define $\mathrm{Lim} = \Pi \circ L$, donde L es una aplicación lineal con las propiedades que se indican en el teorema 18, es evidente que $\mathrm{Lim} : B(I, E) \to E$ es un límite generalizado sobre $B(I, E)$ respecto de $A = K$, y por tanto E es semi-reflexivo según el teorema 22. Recíprocamente, si E es semi-reflexivo basta tomar la identidad como aplicación Π.

24. COROLARIO.—*Sea E un espacio vectorial localmente convexo cuyo dual E' es separable para la topología débil $\sigma(E', E)$. Si se verifica que cada conjunto $M \subset E$ acotado cerrado y convexo es débilmente convexo compacto, entonces E es semi-reflexivo.*

DEMOSTRACIÓN. — Como consecuencia del teorema 23 bastará comprobar que existe una aplicación lineal $\Pi : E'' \to E$ con las propiedades 23.1 y 23.2. Sea, pues, (x'_k) una sucesión densa en E′ para la topología débil $\sigma(E', E)$. Dado $x'' \in E''$ existe un conjunto acotado cerrado y convexo $M \subset E$ tal que x'' es adherente a M para $\sigma(E'', E')$ ((13), § 23.2 (3)). Como M es débilmente convexo compacto por hipótesis, teniendo en cuenta (13), § 24.3 (4), resulta que existe $x \in M$ tal que

$$\lim_k \langle x'' - x, x'_k \rangle = 0.$$

Este vector x es único, pues si

$$\lim_k \langle x'' - y, x'_k \rangle = 0$$

se deduciría que

$$\lim_k \langle x - y, x'_k \rangle = 0,$$

de modo que existiría $k_0 \in N$ tal que para $k \geqslant k_0$ se verificaría

$$| \langle x - y, x'_k \rangle | \leqslant 1.$$

Pero

$$D = \{ x'_k : k \geqslant k_0 \}$$

sigue siendo denso en E′ para la topología $\sigma(E', E)$ y por tanto $D^{oo} = E'$ y así

$$x - y \in D^o = D^{ooo} = \{ 0 \}.$$

Nótese también que el vector x es independiente del conjunto acotado cerrado convexo M que se eligió. Entonces, si $x'' \in S^{o\bullet}$, es claro que $x \in S^{oo}$, pues S^{oo} es acotado cerrado y convexo. Queda así establecida una aplicación lineal $\Pi : E'' \to E$ poniendo $\Pi(x'') = x$ que verifica 23.1 y 23.2.

Seguidamente nos proponemos caracterizar los espacios vectoriales localmente convexos semi-reflexivos considerando solamente límites generalizados sobre B (E).

25. TEOREMA.—*El espacio vectorial localmente convexo es semi-reflexivo si y sólo si se verifican las dos condiciones:*

25.1. *Existe un límite generalizado sobre $B(E)$.*

25.2. *Para cada* $x'' \in E''$ *existe una sucesión* (x_n), *con* $x_n \in E$ $\forall\, n \in N$, *que converge a* x'' *para la topología* $\sigma(E'', E')$.

DEMOSTRACIÓN.—Si E es semi-reflexivo, es evidente que se verifica 25.1 y 25.2. Recíprocamente, si se verifica 25,1, entonces E es sucesionalmente completo para la topología $\sigma(E, E')$ como consecuencia de la proposición 6. Entonces, dado $x'' \in E''$, si (x_n) es una sucesión que converge a x'' para la topología $\sigma(E'', E')$ y si $x_n \in E$ para cada $n \in N$, es claro que (x_n) es una sucesión de Cauchy para la topología $\sigma(E, E')$ y se deduce que $x'' \in E$.

26.—TEOREMA.—*Sea E un espacio vectorial localmente convexo cuyo dual E' es separable para la topología fuerte* $\beta(E', E)$. *Una condición necesaria y suficiente para que E sea semi-reflexivo es que exista un límite generalizado sobre* $B(E)$.

DEMOSTRACIÓN.—Teniendo en cuenta el teorema 25, bastará comprobar que cuando E' es separable para la topología fuerte $\beta(E', E)$, la condición 25.2 queda satisfecha. En efecto, se sabe que dado $x'' \in E''$ existe un acotado $M \subset E$ tal que x'' es $\sigma(E'', E')$ adherente a M ((13), § 23.2 (3)). Pero M^0 es un entorno de 0 en E' para la topología fuerte $\beta(E', E)$ y por tanto la polar $M^{0\bullet}$ de M^0 en E'' es un conjunto $\beta(E', E)$-equicontinuo y por tanto metrizable para la topología $\sigma(E'', E')$ ((13), 21.3 (4)). Como $x'' \in M^{0\bullet}$ se deduce que existe una sucesión (x_n) con $x_n \in M$ para cada $n \in N$ que converge a x'' para la topología $\sigma(E'', E')$.

27. TEOREMA.—*Sea E un espacio vectorial localmente convexo tal que:*

27.1. *La envoltura cerrada convexa de cada conjunto acotado de E es completa para la topología de Mackey.*

Entonces una condición necesaria y suficiente para que E sea semi-reflexivo es que exista un límite generalizado sobre $B(E)$ *respecto de* $\mathcal{L}(E)$.

DEMOSTRACIÓN.—La necesidad es consecuencia del teorema 21. Recíprocamente, por verificarse 27.1, cada conjunto débilmente convexo compacto es débilmente relativamente compacto ((13), 24.3 (7)) y entonces se deduce, como consecuencia del teorema 15, que cada subconjunto $M \subset E$ acotado cerrado y convexo es débilmente compacto. Basta recordar entonces que un espacio vectorial localmente convexo es semi-reflexivo si y sólo si cada subconjunto $M \subset E$ acotado y débilmente cerrado es débilmente compacto ((10), proposición 3.8.1).

OBSERVACIÓN.—La condición 27.1 se verifica si E es casi completo para la topología de Mackey $\tau(E, E')$ por definición de espacio casi-completo y por tanto si E es un espacio vectorial localmente convexo casi completo, pues entonces es casi completo para la topología de Mackey ((13), 18.4 (4)).

28. TEOREMA.—*Una condición necesaria y suficiente para que el espacio vectorial localmente convexo metrizable E sea reflexivo es que exista un límite generalizado sobre B (E) respecto de* $\mathcal{L}(E)$.

DEMOSTRACIÓN.—Si existe un límite generalizado sobre B (E) se deduce que E es sucesionalmente completo y por tanto completo por ser metrizable. Entonces se verifica la condición 27.1, de modo que E es semi-reflexivo y por tanto reflexivo por ser un espacio de Frechet ((10), porposición 3.8.6).

29. TEOREMA.—*Sea E un espacio vectorial localmente convexo metrizable dotado de una (F)-norma tal que cada bola*

$$\{x \in E : \|x\| \leqslant r\}$$

es absolutamente convexa, y sea $A \subset \mathcal{L}(E)$ *un anillo tal que* $A_0 \subset A$. *Una condición necesaria y suficiente para que E sea reflexivo es que exista un límite (F)-generalizado sobre el A-módulo F-normado B (E).*

DEMOSTRACIÓN.—Según el teorema 13, cada límite (F)-generalizado sobre B (E) es un límite generalizado sobre B (E) respecto de $\mathcal{L}(E)$ y recíprocamente, de modo que el resultado se sigue de forma inmediata del teorema anterior.

Y por último, damos un teorema de existencia de Π-límites generalizados cuando E es un álgebra de Banach y Π el producto del álgebra.

30. Teorema.—*Sea E un álgebra de Banach sobre $\mathbb{C}$ semisimple y $X \subset B(I, E)$ un subálgebra. Si existe sobre X un límite generalizado Lim tal que*

$$\langle \mathop{Lim}_{i} x_i, x' \rangle = \mathop{Lim^*}_{i} \langle x_i, x' \rangle$$

para cada $(x_i) \in X$ *y cada* $x' \in E'$, *siendo Lim* un* Π*-límite generalizado sobre* $B(I, \mathbb{C})$, *entonces Lim es un* Π*-límite generalizado para el producto* Π *del álgebra.*

Demostración.—Para cada forma lineal continua $x' \in E'$ se tiene

$$\mathop{\mathrm{Lim}^*}_{i} \langle x_i\, y_i, x' \rangle = \langle \mathop{\mathrm{Lim}}_{i} x_i\, y_i, x' \rangle$$

y en particular para cada homomorfismo continuo $h : E \to \mathbb{C}$ se verifica

$$\langle \mathop{\mathrm{Lim}}_{i} x_i\, y_i, h \rangle = \mathop{\mathrm{Lim}^*}_{i} \langle x_i\, y_i, h \rangle = \mathop{\mathrm{Lim}^*}_{i} \langle x_i, h \rangle \mathop{\mathrm{Lim}^*}_{i} \langle y_i, h \rangle =$$
$$= \langle \mathop{\mathrm{Lim}}_{i} x_i, h \rangle \langle \mathop{\mathrm{Lim}}_{i} y_i, h \rangle = \langle \mathop{\mathrm{Lim}}_{i} x_i \cdot \mathop{\mathrm{Lim}}_{i} y_i, h \rangle$$

y por tanto si E es semisimple, se obtiene

$$\mathop{\mathrm{Lim}}_{i} x_i\, y_i = \mathop{\mathrm{Lim}}_{i} x_i \cdot \mathop{\mathrm{Lim}}_{i} y_i$$

para cada $(x_i) \in X$ y cada $(y_i) \in X$.

Observación.—Obsérvese que cuando $X = \tau B(I, E)$ y cuando E es semi-reflexivo y $X = B(I, E)$ se verifican las hipótesis del teorema si E es un álgebra de Banach sobre $\mathbb{C}$ semisimple.

§ 4. Teoremas de existencia de límites (F)-generalizados sobre B (I, E)

31. Teorema.—*Sea E un espacio vectorial normado y $A \subset \mathcal{L}(E)$ un anillo. Se supone que cuando se consideran E y E'' como A-módulos normados existe un A-homomorfismo $\Pi : E'' \to E$ tal que $\|\Pi\| = 1$ y $\Pi(x) = x$ para cada $x \in E$. Entonces existe sobre $B(I, E)$ (resp. $B(E)$) un límite (F)-generalizado (resp. un límite (F)-generalizado de Banach).*

Demostración.—Si L es una aplicación lineal $L : B(I, E) \to E''$ definida a partir de un límite generalizado Lim* sobre $B(I, K)$ como se indica en el teorema 18 y si se define $\mathrm{Lim} = \Pi \circ L$, es evidente que se verifica I.5.1 como consecuencia de 18.1 y de ser Π un A-homomorfismo. Las propiedades I.5.2 y I.5.4 son inmediatas, teniendo en cuenta las propiedades de L y Π. Por último, I.5.3 es consecuencia de que $\| \Pi \| = 1$, pues si $(x_i) \in B(I, E)$ y si

$$x'' = \underset{i}{L}(x_i)$$

se tiene

$$\| x'' \| = \sup \{ | \langle x'', x' \rangle | : \| x' \| \leqslant 1 \} = \sup \{ | \underset{i}{\mathrm{Lim}^*} \langle x_i, x' \rangle | : \| x' \| \leqslant 1 \} \leqslant$$

$$\leqslant \sup \{ \sup_i | \langle x_i, x' \rangle | : \| x' \| \leqslant 1 \} \leqslant \sup_i \| x_i \|.$$

y por lo tanto

$$\| \underset{i}{\mathrm{Lim}}\, x_i \| = \| \Pi(x'') \| \leqslant \| x'' \| \leqslant \sup_i \| x_i \|.$$

También es obvio que Lim es un límite de Banach si Lim* lo es.

32. Proposición.—*En las condiciones del teorema 31, si además $K \subset A$, entonces existe un Π-límite generalizado Lim* sobre $B(I, K)$ y un límite (F)-generalizado Lim sobre $B(I, E)$ tales que se cumple:*

32.1. $\underset{i}{Lim}(\alpha_i x_i) = (\underset{i}{Lim^*} \alpha_i)(\underset{i}{Lim}\, x_i)$ *para cada* $(\alpha_i) \in B(I, K)$ *y* $(x_i) \in B(I, E)$.

Demostración.—Si se procede como en el teorema anterior, pero siendo Lim* un Π-límite generalizado, se obtiene, como consecuencia de 19.2,

$$\underset{i}{\mathrm{Lim}}(\alpha_i x_i) = \Pi \circ \underset{i}{L}(\alpha_i x_i) = \Pi \circ [(\mathrm{Lim}^* \alpha_i)\, \underset{i}{L}(x_i)] =$$

$$= (\underset{i}{\mathrm{Lim}^*} \alpha_i)(\Pi \circ \underset{i}{L}(x_i)) = (\underset{i}{\mathrm{Lim}^*} \alpha_i)\, \underset{i}{\mathrm{Lim}}\, x_i .$$

33. Teorema.—*Sea F un espacio vectorial normado y E su dual dotado de la topología fuerte. Sea*

$$A = \{ a \in \mathcal{L}(E) : a = b^t, \quad b \in \mathcal{L}(F) \}$$

Entonces existe sobre $B(I, E)$ un límite (F)-generalizado Lim cuando E se considera como A-módulo normado y sobre $B(I, K)$ un Π-límite generalizado Lim tal que se verifica 32.1. También existe un límite (F)-generlizado de Banach sobre $B(E)$.*

DEMOSTRACIÓN.—En efecto, la aplicación $\Pi : E'' \to E$ traspuesta de la inclusión $i : F \to F''$ verifica

$$\|\Pi\| = \|i\| = 1, \; \Pi(x) = x$$

para cada $x \in E$. Además, si $a = b^t \in A$ se tiene que para cada $x'' \in E''$ se verifica

$$\langle \Pi(a x''), f \rangle = \langle b^t x'', i(f) \rangle = \langle x'', i(b f) \rangle = \langle \Pi(x''), b f \rangle = \langle a \Pi(x''), f \rangle$$

para cada $f \in F$. Esto prueba que Π es un A-homomorfismo. El resultado es consecuencia del teorema 31 y de la proposición 32.

OBSERVACIÓN.—Nótese que en este caso, si E no es reflexivo, no se puede verificar $A_0 \subset A$, según el teorema 29.

34. TEOREMA.—*Sea E un espacio vectorial normado y $A \subset \mathcal{L}(E)$ un anillo. Se supone que E es inyectivo cuando se considera como A-módulo normado. Entonces existe un límite (F)-generalizado sobre $B(I, E)$ y un límite (F)-generalizado de Banach sobre $B(E)$.*

DEMOSTRACIÓN.—La identidad $i : E \to E$ es un A-homomorfismo de norma $\|i\| = 1$ se puede extender a un A-homomorfismo $\Pi : E'' \to E$ de norma $\|\Pi\| = 1$, que evidentemente verifica las condiciones requeridas en el teorema 3.3.

OBSERVACIÓN. — La existencia de un límite (F)-generalizado de Banach sobre B (E) también se deduce inmediatamente del teorema I.29.

35. COROLARIO.—*Sea E un espacio vectorial normado y $A \subset \mathcal{L}(E)$ un anillo tal que $A_0 \subset A$. Si E es un A-módulo normado inyectivo, entonces E es reflexivo.*

DEMOSTRACIÓN.—Consecuencia de los teoremas 29 y 34.

Capítulo V

§ 1. La propiedad (L · P)

1. Definición.—Sea E un espacio vectorial localmente convexo tal que existe un límite generalizado Lim sobre B (I, E). Una red doble $(x_{i\,d})_{(i,\,d)\in I\times D}$ de vectores de E se dice que posee la *propiedad* $(L \cdot P)$ (*de límites permutables*) respecto de Lim si existen y son iguales los límites reiterados.

1.1 $$\operatorname*{Lim}_{i} \operatorname*{lim^w}_{d} x_{i\,d} = \operatorname*{lim^w}_{d} \operatorname*{Lim}_{i} x_{i\,d},$$

donde $\operatorname*{lim^w}_{d}$ designa el límite en la topología débil $\sigma(E, E')$ de una red con índices en el conjunto dirigido D.

2. Teorema.—*Sea E un espacio vectorial localmente convexo tal que existe un límite generalizado Lim sobre B (I, E). Sea*

$$(x_{i\,d})_{(i,\,d)\in I\times D}$$

un red doble de vectores de E tal que:

2.1. $(x_{i\,d})$ *es una red acotada para cada* $d \in D$.

2.2. *Para cada* $i \in I$ *existe* $\operatorname*{lim^w}_{d} x_{i\,d} = x_i$ *uniformemente en* i.

Entonces $(x_{i\,d})$ *posee la propiedad* $(L \cdot P)$ *respecto de Lim.*

Demostración.—Sea U un $\sigma(E, E')$-entorno de 0 cerrado y absolutamente convexo, y sea p_u su funcional de Minkowsky. Se deduce de 2.2 que existe $d_0 \in D$ tal que para $d \geqslant d_0$ se verifica $x_{i\,d} - x_i \in U$ para cada $i \in I$, de modo que si define

$$\varepsilon_d = \sup p_u(x_{i\,d} - x_i) \ (\leqslant 1)$$

cuando $d \geqslant d_0$ y $\varepsilon_d = 1$ cuando $d \not\geqslant d_0$, se obtiene una red (ε_d) convergente a 0 como consecuencia de la hipótesis 2.2. Por otra parte, para cada $d \geqslant d_0$ se verifica $x_{i\,d} - x_i \in \varepsilon_d U$ y por lo tanto

$$|\langle x_{i\,d} - x_i, x' \rangle| \leqslant \varepsilon_d$$

para todo $i \in \mathrm{I}$, siempre que $x \in \mathrm{U}^0$. De esta relación y de 2.1 se deduce que $(\langle x, x' \rangle)$ es una red acotada. Como las polares U^0 de los $\sigma(\mathrm{E}, \mathrm{E}')$-entornos de 0 cubren E', queda probado que (x_i) es una red acotada. Sea, pues, $x = \operatorname*{Lim}_i x_i$. Entonces si

$$y_d = \operatorname*{Lim}_i x_{i\,d}$$

resulta

$$x - y_d = \operatorname*{Lim}_i (x_i - x_{i\,d}) \in \mathrm{S}^{00},$$

donde

$$\mathrm{S} = \{ x_i - x_{i\,d} : i \in \mathrm{I} \} \subset \epsilon_d \mathrm{U}$$

para $d \geqslant d_0$ y por tanto

$$x - y_d \in \mathrm{S}^{00} \subset \epsilon_d \mathrm{U}$$

para $d \geqslant d_0$, por ser U cerrado y absolutamente convexo. Se deduce entonces que

$$| \langle x - y_d, x' \rangle | \leqslant \epsilon_d$$

para $x' \in \mathrm{U}^0$ y esto prueba que

$$x = \operatorname*{lim^w}_d y_d,$$

pues E' puede recubrirse por las polares U^0 de los entornos U de **0**.

3. Corolario.—*Sea Lim* un límite generalizado sobre $B(I, K)$ y sea $(\lambda_{i\,d})_{(i,\,d) \in I \times D}$ una red doble de escalares $\lambda_{i\,d} \in K$ tal que:*

3.1. $(\lambda_{i\,d})$ *es una red acotada para cada* $d \in D$.

3.2. *Para cada* $i \in I$ *existe* $\lim_d \lambda_{i\,d} = \lambda_i$ *uniformemente en* i.

Entonces $(\lambda_{i\,d})$ *posee la propiedad* $(L \cdot P)$ *respecto de Lim*.*

Demostración.—Evidente.

4. Teorema.—*Sea E un espacio vectorial localmente convexo. Una condición necesaria y suficiente para que exista un límite gene-*

ralizado Lim sobre B (I, E) respecto de $\mathcal{L}$ (E) es que exista un límite generalizado Lim sobre B (I, K) tal que para cada red* $(x_i) \in B(I, E)$ *y para cada red* (x'_d), $\sigma(E', E)$*-convergente, la red doble* $(\langle x_i, x'_d \rangle)$ *posea la propiedad* $(L \cdot P)$ *respecto de Lim*.*

Demostración.—Se sabe por el teorema IV.10 que si existe un límite generalizado Lim sobre B (I, E) respecto de $\mathcal{L}$ (E), entonces existe un límite generalizado Lim* sobre B (I, K) tal que para cada $x' \in E'$ se tiene

$$\operatorname*{Lim^*}_i \langle x_i, x' \rangle = \langle \operatorname*{Lim}_i x_i, x' \rangle.$$

Sea, pues, (x'_d) una red en E', σ (E', E)-convergente a x', y

$$(x_i) \in B(I, E).$$

Se verifica

$$\operatorname*{Lim^*}_i \lim_d \langle x_i, x'_d \rangle = \operatorname*{Lim^*}_i \langle x_i, x' \rangle = \langle \operatorname*{Lim}_i x_i, x' \rangle =$$
$$= \lim_d \langle \operatorname*{Lim}_i x_i, x'_d \rangle = \lim_d \operatorname*{Lim^*}_i \langle x_i, x'_d \rangle.$$

Recíprocamente, si suponemos que dichas redes dobles $(\langle x_i, x'_d \rangle)$ poseen la propiedad $(L \cdot P)$ respecto de Lim*, a partir de Lim* se puede definir una aplicación lineal $L : B(I, B) \to E''$ como se indica en el teorema IV.18, poniendo

$$\langle \operatorname*{L}_i (x_i), x' \rangle = \operatorname*{Lim^*}_i \langle x_i, x' \rangle$$

para cada $x' \in E'$. Si (x'_d) es una red en E' que converge a x' en la topología débil σ (E', E) resulta

$$\lim_d \langle \operatorname*{L}_i (x_i), x'_d \rangle = \lim_d \operatorname*{Lim^*}_i \langle x_i, x'_d \rangle = \operatorname*{Lim^*}_i \lim_d \langle x_i, x'_d \rangle =$$
$$= \operatorname*{Lim^*}_i \langle x_i, x' \rangle = \langle \operatorname*{L}_i (x_i), x_i \rangle,$$

y esto prueba que $\operatorname*{L}_i (x_i) \in E''$ es continua para la topología débil σ (E', E) y por tanto que $\operatorname*{L}_i (x_i) \in E$ de modo que L es un límite generalizado sobre B (I, E) respecto de $\mathcal{L}$ (E) como consecuencia del teorema 18.

5. TEOREMA. — *Sea E un espacio vectorial localmente convexo completo y separable. Una condición necesaria y suficiente para que exista un límite generalizado Lim sobre B (I, E) respecto de $\mathcal{L}$ (E) es que exista un límite generalizado Lim* sobre B (I, K) tal que para cada sucesión* σ *(E′, E)-convergente* (x'_k) *y cada red* $(x_i) \in$ $\in$ *B (I, E) la red doble* $(\langle x_i, x'_k \rangle)$ *posea la propiedad (L · P) respecto de Lim*.*

DEMOSTRACIÓN.—Análoga a la del teorema 4, teniendo en cuenta (10), proposición 3.11.5.

Si E es un espacio vectorial localmente convexo, designaremos por n (E′, E) la topología sobre E′ de la convergencia uniforme sobre los conjuntos acotados numerables de E. Evidentemente la topología n (E′, E) es más fina que la topología débil σ (E′, E) de la convergencia uniforme sobre los conjuntos finitos de E.

6. TEOREMA.—*Si E es un espacio vectorial localmente convexo (resp. y completo y separable) tal que en E′ cada red (resp. sucesión)* σ *(E′, E)-convergente es también* n *(E′, E)-convergente, entonces existe sobre B (E) un límite generalizado respecto de* $\mathcal{L}$ *(E) y por tanto E es semi-reflexivo si es casi completo para la topología de Mackey.*

DEMOSTRACIÓN.—Si $(x_n) \in$ B (E) y si (x'_d) es una red (resp- sucesión) en E′, convergente para la topología débil σ (E′, E), sea

$$\lambda_{n\,d} = \langle x_n, x'_d \rangle.$$

Es evidente que la red doble $(\lambda_{n\,d})$ verifica 3.1. También se verifica 3.2 como consecuencia de la convergencia de la red (x'_d) para la topología n (E′, E), pues si

$$x' = \lim_{d}{}^{w} x'_d,$$

como

$$S = \{ x_n : n \in N \}$$

es acotado y numerable, dado $\varepsilon > 0$ existe $d_\varepsilon \in D$ tal que $x'_d - x' \in$ $\in \varepsilon S^0$ para $d \geqslant d_\varepsilon$, es decir,

$$|\langle x_n, x'_d\rangle - \langle x_n, x'\rangle| \leqslant \varepsilon$$

para $d \geqslant d_\varepsilon$ y todo $n \in N$, lo cual prueba que para cada n, (λ_{nd}) converge uniformemente respecto de n. Entonces el resultado es consecuencia del corolario 3, los teoremas 4 y 5 y de la observación del teorema IV.27.

Un subconjunto M de un espacio vectorial localmente convexo E se dice que posee la *propiedad de permutabilidad de límites* si para cada sucesión (x_n) de vectores $x_n \in M$ y para cada sucesión (x'_k) de formas lineales continuas $x'_k \in H \subset E'$, donde H es absolutamente convexo y $\sigma(E', E)$-compacto, se verifica que los límites dobles

$$\lim_n \lim_k \langle x_n, x'_k\rangle, \ \lim_k \lim_n \langle x_n, x'_k\rangle,$$

si existen, son iguales.

7. Teorema.—*Sea E un espacio vectorial localmente convexo tal que existe sobre* B (E) *un límite generalizado Lim respecto de* $\mathcal{L}(E)$. *Entonces cada conjunto $M \subset E$ acotado posee la propiedad de permutabilidad de límites.*

Demostración.—Sea $H \subset E'$ absolutamente convexo y $\sigma(E', E)$-compacto, y x'_0 un punto de aglomeración de una sucesión (x'_k) con $x'_k \in E'$. Si $(x_n) \in B(E)$ con $x_n \in M$, y se supone que existen los límites

$$\alpha = \lim_n \lim_k \langle x, x'_k\rangle, \ \beta = \lim_k \lim_n \langle x_n, x'_k\rangle$$

se obtiene

$$\alpha = \lim_n \langle x_n, x'_0\rangle = \langle \operatorname{Lim}_n x_n, x'_0\rangle, \ \beta = \lim_k \langle \operatorname{Lim}_n x_n, x'_k\rangle =$$
$$= \langle \operatorname{Lim}_n x_n, x'_0\rangle = \alpha.$$

(Se ha utilizado el teorema IV.10.)

En las hipótesis del teorema 7 si además E es completo para la topología de Mackey, se deduce que E es *semi-reflexivo*, pues se sabe que entonces un subconjunto $M \subset E$ acotado es débilmente relativamente compacto si y sólo si posee la propiedad de permutabilidad de límites (13), 24,6 (1). Este resultado está incluido, como caso particular, en el teorema IV.27.

§ 2. Límites generalizados en espacios vectoriales localmente convexos con descomposición de Schauder

Si E es un espacio vectorial localmente convexo, una *descomposición de Schauder* de E es una familia $(P_\lambda)_{\lambda \in L}$ de proyecciones continuas $P_\lambda : E \to E$ que verifican $P_\mu \circ P_\lambda = 0$ si $\mu \neq \lambda$ y tal que para cada $x \in E$ la familia $(P_\lambda(x))_{\lambda \in L}$ es sumable y su suma es

$$x = \sum_{\lambda \in L} P_\lambda(x).$$

Si D es el conjunto de todas las partes finitas de L dirigido por la relación de inclusión $d_1 \geqslant d_2$ si $d_1 \supset d_2$, la suma de la familia $(P_\lambda(x))$ se debe entender como el límite de la red

$$S_d = \sum_{\lambda \in d} P_\lambda(x)$$

en la topología localmente convexa dada en E.

Es claro que si $\{P_\lambda\}_{\lambda \in L}$ es una descomposición de Schauder de E entonces $(P^t{}_\lambda)_{\lambda \in L}$ es una descomposición de Schauder de E′ para la topología débil de $\sigma(E', E)$ como consecuencia de (10), proposición 3.12.3, puesto que para cada $x' \in E'$ la red

$$S'_d = \sum_{\lambda \in d} P^t{}_\lambda(x') \; (d \in D)$$

converge a x' para la topología débil $\sigma(E', E)$ por ser

$$\langle x, S'_d \rangle = \langle S_d, x' \rangle$$

para todo $x \in E$. Si se verifica que $(P'_\lambda)_{\lambda \in L}$ es una descomposición de Schauder de E' para la topología fuerte $\beta(E', E)$, entonces se dice que la *descomposición de Schauder* $(P_t^\lambda)_{\lambda \in L}$ es *reductora* (shrinking). Una descomposición de Schauder $(P_\lambda)_{\lambda \in L}$ de E se dice que es *acotada completa* si para cada familia $(x_\lambda)_{\lambda \in L}$ con $x_\lambda \in P_\lambda(E)$ tal que

$$\left\} \sum_{\lambda \in d} x_\lambda : d \in D \right\{$$

está acotado, se verifica que existe $x \in E$ tal que

$$x = \sum_{\lambda \in L} x_\lambda.$$

Si la familia $(P_\lambda)_{\lambda \in L}$ es numerable ($L = N$) y si cada subespacio vectorial $P_\lambda(E)$ está engendrado por un solo elemento e_λ, entonces se dice que $(e_\lambda)_{\lambda \in N}$ es una base de Schauder de E y en tal caso a cada proyección P_λ le corresponde una forma lineal continua e'_λ tal que

$$P_\lambda(x) = e'_\lambda(x)\, e_\lambda$$

para todo $x \in E$.

Es un resultado conocido (16) que si E es un espacio vectorial localmente convexo atonelado, entonces cada descomposición de Schauder $(P_k)_{k \in N}$ de E para su topología débil $\sigma(E, E')$ también lo es para su topología atonelada dada inicialmente. Este resultado se extiende sin dificultad en el caso de que la descomposición de Schauder $(P_\lambda)_{\lambda \in L}$ no sea numerable.

8. LEMA.—*Sea E un espacio vectorial localmente convexo con una descomposición de Schauder* $(P_\lambda)_{\lambda \in L}$ *reductora. Entonces para* $(x_i) \in B(I, E)$ *y* $x' \in E'$ *la red doble*

$$(\lambda_{i\,d})_{(i,\,d) \in I \times D}$$

definida por

$$\lambda_{i\,d} = < \sum_{\lambda \in d} P_\lambda(x_i), x' >$$

posee la propiedad $(L \cdot P)$ *respecto de cada límite generalizado* Lim* *sobre* $B(I, K)$.

DEMOSTRACIÓN.—Según el corolario 3 bastará comprobar que se verifica 3.1 y 3.2. La propiedad 3.1 es evidente. Por otra parte,

$$|\lambda_{i\,d} - \langle x_i, x' \rangle| = \left| < \sum_{\lambda \in d} P_\lambda(x_i) - x_i, x' > \right| = \left| < \sum_{\lambda \in L - d} P_\lambda(x_i), x' > \right| =$$

$$= \left| < x_i, \sum_{\lambda \in L - d} P^t_\lambda(x') > \right|$$

Como $(P_\lambda)_{\lambda \in L}$ es una descomposición de Schauder reductora, la familia $(P^t_\lambda(x'))_{\lambda \in L}$ es sumable para la topología $\beta(E', E)$ de la convergencia uniforme sobre los conjuntos acotados de E de modo que por ser $\{x_i : i \in I\}$ un conjunto acotado, se deduce que la red $(\lambda_{i\,d})_{d \in D}$ converge a $\langle x_i, x' \rangle$ uniformemente respecto de i.

9. TEOREMA. — *Sea* E *un espacio vectorial localmente convexo con una descomposición de Schauder* $(P_\lambda)_{\lambda \in L}$ *reductora y acotada completa. Si cada subespacio* $P_\lambda(E)$ *es semi-reflexivo, se verifica que existe un límite generalizado* Lim *sobre* $B(I, E)$ *respecto de* $\mathcal{L}(E)$ *para cada conjunto dirigido* I.

DEMOSTRACIÓN.—Sea Lim* un límite generalizado sobre B (I, K) y sea $(x_i) \in$ B (I, E). Como cada P_λ (E) es semi-reflexivo, denotemos por $\mathrm{Lim}^{(\lambda)}$ el correspondiente límite generalizado sobre B (I, P_λ (E)) asociado a Lim*. Si

$$y_\lambda = \mathrm{Lim}^{(\lambda)}_i \, P_\lambda(x_i),$$

para cada $x' \in E'$ se verifica

$$\langle y_\lambda, x' \rangle = \mathrm{Lim}^*_i \, \langle P_\lambda(x_i), x' \rangle$$

y entonces, para cada $d \in D$:

$$< \sum_{\lambda \in d} y_\lambda, x' > = \sum_{\lambda \in d} \mathrm{Lim}^*_i \, \langle P_\lambda(x_i), x' \rangle = \mathrm{Lim}^*_i \, \lambda_{i\,d}$$

con

$$\lambda_{i\,d} = < \sum_{\lambda \in d} P_\lambda (x_i), x' >$$

Según el lema 8 existe

$$\lim_d \operatorname{Lim}^*_i \lambda_{i\,d},$$

y esto prueba que existe $d_0 \in D$ tal que está acotado el conjunto

$$\left\} < \sum_{\lambda \in d} y_\lambda, x' > : d \geqslant d_0 \right\{ .$$

Puesto que cada $d \in D$ se puede expresar como diferencia (conjuntista) $d = d_2 - d_1$ con $d_1 \leqslant d_0$, $d_2 \geqslant d_0$ se deduce que

$$\left\} < \sum_{\lambda \in d} y_\lambda, x' > : d \in D \right\{$$

es un conjunto acotado para todo $x' \in E'$. Como la descomposición de Schauder $(P_\lambda)_{\lambda \in L}$ es acotada completa, se deduce que existe $x \in E$ tal que

$$x = \sum_{\lambda \in L} y_\lambda .$$

Teniendo en cuenta el lema 8, se deduce

$$\operatorname{Lim}^*_i \langle x_i, x' \rangle = \operatorname{Lim}^*_i \lim_d \lambda_{i\,d} = \lim_d \operatorname{Lim}^*_i \lambda_{i\,d} = \lim_d < \sum_{\lambda \in d} y_\lambda, x' > = \langle x, x' \rangle$$

para todo $x' \in E'$, y esto prueba que si se pone

$$\operatorname{Lim}_i x_i = x$$

queda definido un límite generalizado Lim sobre B (I, E) respecto de $\mathcal{L}$ (E).

10. Teorema.—*Si E es un espacio vectorial localmente convexo con una descomposición de Schauder $(P_\lambda)_{\lambda \in L}$, sea D el conjunto de las partes finitas de L dirigido por la inclusión. Si existe sobre $B(D, E)$ un límite generalizado Lim respecto de un anillo A que contenga cada P_λ, entonces $(P_\lambda)_{\lambda \in L}$ es una descomposición de Schauder acotada completa.*

Demostraciónn.—Si (y_λ) es una familia de vectores $y_\lambda \in P_\lambda(E)$ tal que

$$\left\} \sum_{\lambda \in d} y_\lambda : d \in D \right\{$$

está acotado, y si

$$y = \operatorname*{Lim}_{d} \sum_{\lambda \in d} y_\lambda$$

se verifica

$$P_\mu(y) = \operatorname*{Lim}_{d} P_\mu \left(\sum_{\lambda \in d} y_\lambda \right) = \operatorname*{Lim}_{d} y_\mu = y_\mu$$

como consecuencia de las propiedades IV.1.1 y IV.1.4 de Lim, de modo que $(P_\lambda)_{\lambda \in L}$ es una descomposición de Schauder acotada completa.

En (11) James caracterizó los espacios de Banach reflexivos con base de Schauder mediante las propiedades de la base de ser reductora y acotada completa. Este resultado se ha generalizado posteriormente por diversos autores. Recientemente (4) Thurlow A. Coox han extendido los resultados de James para el caso de descomposiciones de Schauder numerables en espacios vectoriales localmente convexos.

Como ejemplo de aplicación de la teoría de límites generalizados en espacios vectoriales localmente convexos, damos una nueva demostración de dichos resultados para el caso de una descomposición de Schauder no necesariamente numerable.

11. Teorema.—*Sea E un espacio vectorial localmente convexo con una descomposición de Schauder $(P_\lambda)_{\lambda \in L}$. Si E es semi-reflexi-*

vo, entonces $(P_\lambda)_{\lambda \in L}$ *es reductora y cotada completa. Recíprocamente, si* $(P_\lambda)_{\lambda \in L}$ *es reductora y acotada completa y si cada subespacio* $P_\lambda(E)$ *es semi-reflexivo, entonces E es semi-reflexivo.*

DEMOSTRACIÓN.—Si E es semi-reflexivo, se deduce como consecuencia de los teoremas 10 y IV.22 que $(P_\lambda)_{\lambda \in L}$ es una descomposición de Schauder acotada completa. La demostración de que $(P_\lambda)_{\lambda \in L}$ es una descomposición reductora es análoga a la dada en (4) y es consecuencia de lo que se indicó antes del lema 8, pues por ser E semi-reflexivo, E′ es atonelado para $\beta(E', E)$ ((10), proposición 3.8.4) y sobre E′ coinciden las dos topologías $\sigma(E', E)$ y $\sigma(E', E'')$. El recíproco es una consecuencia inmediata de los teoremas 9 y IV.22.

§ 3. SUCESIONES CASI CONVERGENTES EN ESPACIOS VECTORIALES LOCALMENTE CONVEXOS

Si E es un espacio vectorial localmente convexo, designaremos por $\Lambda(E)$ el conjunto de todos los límites generalizados de Banach sobre B (E) respecto de $\mathcal{L}(E)$. Una *sucesión* $(\alpha_n) \in B(K)$ se dice que es *casi convergente* (almost convergent) a α y se escribe

$$c\text{-}\lim_n \alpha_n = \alpha$$

si para todo límite generalizado de Banach $\mathrm{Lim}^* \in \Lambda(K)$ se verifica

$$\mathrm{Lim}^*_n \alpha_n = \alpha.$$

Éste concepto fue introducido por Lorentz en (14) para sucesiones acotadas de escalares, donde caracterizó dichas sucesiones con el siguiente teorema.

12. TEOREMA.—*Una sucesión* $(\alpha_n) \in B(K)$ *es casi convergente y*

$$c - \lim_n \alpha_n = \alpha$$

si y sólo si

$$\lim_{p} \frac{\alpha_{n+1} + \dots + \alpha_{n+p}}{p} = \alpha$$

uniformemente en n.

DEMOSTRACIÓN.—Véase (14).

Para espacios vectoriales localmente convexos damos la siguiente definición de sucesiones casi convergentes.

13. DEFINICIÓN.—Si E es un espacio vectorial localmente convexo, se dice que una sucesión $(x_n) \in \dot{B}(E)$ es *casi convergente* a x y se escribe

$$c - \lim_{n} x_n = x,$$

si y sólo si

$$\mathrm{Lim}^* \langle x_n, x' \rangle = \langle x, x' \rangle$$

para todo $x' \in E'$ cualquiera que sea

$$\mathrm{Lim}^* \in \Lambda(K).$$

14. PROPOSICIÓN.—*Si E es un espacio vectorial localmente convexo semi-reflexivo, una sucesión* $(x_n) \in B(E)$ *es casi convergente y* $c\text{-}\lim_{n} x_n = x$ *si y sólo* $\mathrm{Lim}_{n}\, x_n = x$ *para todo* $\mathrm{Lim} \in \Lambda(E)$.

DEMOSTRACIÓN.—Consecuencia inmediata de los teoremas IV.21 y IV.10.

Como consecuencia de esta proposición resulta que el concepto de casi convergencia que hemos dado para sucesiones acotadas en un espacio vectorial localmente convexo E coincide con el dado por J. B. Deebs en (5) cuando E es un espacio de Hilbert separable. En dicho trabajo se prueba el siguiente resultado:

15. TEOREMA.—*Sea E un espacio de Hilbert seprable con base* $(e_k)_{k \in N}$. *Si* $(x_n) \in \tau B(E)$, *son equivalentes* 15.1, 15.2 *y* 15.3.

15.1. $\text{c-}\lim_{n} x_n = x.$

15.2. $\text{c-}\lim_{n} \langle x_n, e_k \rangle = \langle x, e_k \rangle$ *para todo* $k \in N.$

15.3. $\lim_{p} \left\| \frac{x_{n+1} + \ldots + x_{n+p}}{p} - x \right\| = 0$ *uniformemente en* n.

DEMOSTRACIÓN.—Véase (5).

Seguidamente exponemos un resultado análogo para el caso de sucesiones acotadas en un espacio vectorial localmente convexo, no necesariamente semi-reflexivo con una descomposición de Schauder $(P_\lambda)_{\lambda \in L}$ reductora (en general no numerable).

TEOREMA.—*Sea E un espacio vectorial localmente convexo con una descomposición de Schauder* $(P_\lambda)_{\lambda \in L}$ *reductora. Si* $(x_n) \in B(E)$, *son equivalentes* 16.1, 16.2 *y* 16.3.

16.1. $\text{c-}\lim_{n} x_n = x.$

16.2. $\text{c-}\lim_{n} P_\lambda(x_n) = P_\lambda(x)$ *para todo* $\lambda \in L.$

16.3. $\lim_{p}{}^{w} \frac{x_{n+1} + \ldots + x_{n+p}}{p} = x$ *uniformemente en* n.

DEMOSTRACIÓN.—Si se supone que se verifica 16.1, entonces para cada $\lambda \in L$,

$$\operatorname{Lim}^*_{n} \langle x_n, P^t_\lambda(x') \rangle = \langle x, P^t_\lambda(x') \rangle,$$

o bien

$$\operatorname{Lim}^*_{n} \langle P_\lambda(x_n), x' \rangle = \langle P_\lambda(x), x' \rangle$$

para cada $x' \in E'$, cualquiera que sea $\operatorname{Lim}^* \in \Lambda(K)$. Como toda forma lineal continua x'_λ sobre $P_\lambda(E)$ se puede extender a una forma lineal continua x' sobre E, se deduce 16.2. Recíprocamente, si vale 16.2, sea

$$\alpha_{nd} = \left\langle \sum_{\lambda \in d} P_\lambda(x_n), x' \right\rangle$$

donde $d \subset L$ es un subconjunto finito de L y $x' \in E'$. Como consecuencia del lema 8 se deduce

$$\operatorname*{Lim^*}_n \langle x_n, x' \rangle = \operatorname*{Lim^*}_n \lim_d \alpha_{n\,d} = \lim_d \operatorname*{Lim^*}_n \alpha_{n\,d} =$$

$$= \lim_d \sum_{\lambda \in d} \operatorname*{Lim^*}_n \langle P_\lambda (x_n), x' \rangle = \lim_d \sum_{\lambda \in d} \langle P_\lambda (x), x' \rangle = \langle x, x' \rangle$$

para cada

$$x' \in E' \quad \text{y} \quad \mathrm{Lim}^* \in \Lambda (K),$$

lo cual prueba que se verifica 16.1. La equivalencia de **16.1** y **16.3** es consecuencia del teorema 12.

Capítulo VI

§ 1. Límites generalizados de Banach generados por una matriz infinta

En este apartado se indica cómo es posible construir límites generalizados de Banach a partir de límites generalizados mediante una matriz infinita de números reales con ciertas propiedades. Eligiendo adecuadamente dicha matriz será posible obtener límites generalizados de Banach que posean alguna propiedad interesante, como se verá en el apartado siguiente.

1. Teorema. — *Sea E un espacio vectorial localmente convexo sucesionalmente completo, I un conjunto dirigido y $\alpha : I \times N \to \mathbb{R}$ una función que verifica:*

1.1. $\alpha_{i\,k} \geqslant 0$ *para todo* $i \in I$, $n \in N$.

1.2 $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_{i\,k} = 1$ *para cada* $i \in I$.

Entonces, para toda sucesión $(x_n) \in B(E)$ *la serie*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_{i\,k}\, x_k$$

converge cualquiera que sea i $\in I$. *Si* (y_i) *es la red definida por*

$$y_i = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_{ik}\, x_k,$$

queda establecida una aplicación lineal continua

$$\Phi : B(E) \to B(I, E)$$

definiendo

$$\Phi((x_n)) = (y_i),$$

que posee las propiedades siguientes:

1.3. $\Phi(a(x_n)) = a\,\Phi((x_n))$ *para cada* $a \in \mathcal{L}(E)$ *y* $(x_n) \in B(E)$.

1.4. *Si* $\Phi((x_n)) = (y_i)$, *entonces* $S^0 \subset R^0$, *donde* $S = \{x_n : n \in N\}$, $R = \{y_i : i \in I\}$.

1.5. $\Phi(\tau B(E)) \subset \tau B(I, E)$.

Demostración.—Sea

$$(x_n) \in B(E) \quad y \quad M_j = \sup_n p_j(x_n),$$

donde $\{p_j\}_{j \in J}$ es una familia saturada de seminormas que define la topología localmente convexa de E. Para cada $j \in J$ se obtiene

$$\sum_k p_j(\alpha_{ik}\, x_k) \leqslant M_j \sum_k \alpha_{ik} = M_j,$$

que prueba que la serie

$$\sum_k \alpha_{ik}\, x_k$$

converge. Si su suma es y_i, se verifica

$$p_j(y_i) \leqslant \sum_k p_j(\alpha_{ik}\, x_k) \leqslant M_j$$

para todo $j \in \mathrm{J}$, por lo que (y_i) es una red acotada. Evidentemente, Φ es una aplicación lineal. Si

$$\{ q_j \}_{j \in J}, \{ q_j^* \}_{j \in J}$$

son las familias de seminormas que definen la topología de B (E) y B (I, E), respectivamente, según se indicó en el capítulo IV, § 1, se deduce

$$q_j^* ((y_i)) = \sup_i p_j (y_i) \leqslant M_j = \sup_n p_j (x_n) = q_j ((x_n)).$$

lo cual prueba la continuidad de Φ. La propiedad 1.3 es inmediata y la 1.4 se deduce de la relación

$$| \langle y_i, x' \rangle | \leqslant \sum_k \alpha_{ik} | \langle x_k, x' \rangle | \leqslant 1$$

válida para todo $x' \in S^0$ y todo $i \in I$. Para cada $j \in J$ y $\varepsilon > 0$ existe $m \in N$ tal que

$$p_j \left(y_i - \sum_{k=1}^{m} \alpha_{ik} x_k \right) \leqslant \varepsilon$$

y entonces cada y_i es adherente a la envoltura convexa de $S \cup \{0\}$ que es un conjunto precompacto si $(x_n) \in \tau$ B (E)) ((10), proposición 3.9.7). Entonces $\{y_i : i \in I\}$ también es precompacto por estar contenido en la clausura de un precompacto, de modo que se verifica 1.5.

2. Proposición (Toeplitz).—*En las hipótesis del teorema 1 si además se verifica:*

2.1. $\lim_i \alpha_{ik} = 0$ *para todo* $k \in N$.

entonces la aplicación lineal Φ *establecida en dicho teorema transforma sucesiones convergentes en redes convergentes con el mismo límite.*

DEMOSTRACIÓN.—Si (x_n) es una sucesión convergente y

$$x_0 = \lim_n x_n$$

para cada $j \in J$, dado $\varepsilon > 0$ existe $m \in N$ tal que

$$p_j(x_k - x_0) \leqslant \varepsilon/2$$

si $k \geqslant m$ y en virtud de 2.1 existe $i_0 \in I$ tal que si $i \geqslant i_0$ se verifica que

$$\alpha_{ik} \leqslant \frac{\varepsilon}{2\, m\, M_j}$$

para $1 \leqslant k \leqslant m$, donde

$$M_j = \sup_k p_j(x_k - x_0),$$

y entonces

$$p_j(y_i - x_0) = p_j\Big(\sum_k \alpha_{ik}(x_k - x_0)\Big) \leqslant p_j\Big(\sum_{k=1}^{m} \alpha_{ik}(x_k - x_0)\Big) +$$

$$+ p_j\Big(\sum_{k=m+1}^{\infty} \alpha_{ik}(x_k - x_0)\Big) \leqslant \sum_{k=1}^{m} \alpha_{ik}\, p_j(x_k - x_0) + \sum_{k=m+1}^{\infty} \alpha_{ik}\, p_j(x_k - x_0) \leq$$

$$\leqslant m \frac{\varepsilon}{2\, m\, M_j} M_j + \varepsilon/2 = \varepsilon$$

para $i \geqslant i_0$, y esto prueba que $x_0 = \lim_i y_i$ cuando

$$(y_i) = \Phi((x_n)).$$

3. TEOREMA. — *Sea E un espacio vectorial localmente convexo sucesionalmente completo y $A \subset \mathcal{L}(E)$ un anillo. Sea I un conjunto dirigido y $\alpha : I \times N \to \mathbb{R}$ una función con las propiedades* 1.1, 1.2, 2.1 *y*

3.1. $\alpha_{ik} \geqslant \alpha_{ik+1}$ *para cada* $i \in I$ y $k \in N$.

Si $X_1 \subset B(I, E)$ *es un subespacio vectorial* (A, ρ)*-invariante y* $X_2 \subset B(E)$ *un subespacio vectorial* (A, σ)*-invariante que contiene las sucesiones constantes y tal que* $\Phi(X_2) \subset X_1$, *donde* Φ *es la aplicación lineal establecida en el teorema 1. Entonces si LIM es un límite generalizado sobre* X_1 *respecto de A, queda definido sobre* X_2 *un límite generalizado de Banach Lim respecto de A cuando se pone:*

$$3.2.\quad \underset{n}{Lim}\, x_n = \underset{i}{LIM} \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_{ik} x_k \quad para\ cada\ (x_n) \in X_2.$$

Demostración.—Nótese que como consecuencia de la condición $\Phi(X_2) \subset X_1$ se deduce que X_1 contiene las redes constantes. Bastará probar que si se define Lim = LIM $\circ\, \Phi$, entonces Lim es un límite generalizado de Banach sobre X_2 respecto de A. Evidentemente Lim es lineal, y

$$\underset{n}{\mathrm{Lim}}\, a\, x_n = a\, \underset{n}{\mathrm{Lim}}\, x_n$$

cuando

$$a \in \mathrm{A} \quad \mathrm{y} \quad (x_n) \in \mathrm{X}_2$$

como consecuencia de 1.3. También es obvio que

$$\underset{n}{\mathrm{Lim}}\, x_n = x_0 \quad \mathrm{si} \quad x_n = x_0$$

para todo $n \in \mathrm{N}$. Teniendo en cuenta 1.4 resulta que

$$\underset{n}{\mathrm{Lim}}\, x_n = \underset{i}{LIM}\, y_i \in \mathrm{R}^{oo} \subset \mathrm{S}^{oo}.$$

donde

$$(y_i) = \Phi((x_n)),\ \mathrm{S} = \{ x_n : n \in \mathrm{N} \}.\ \mathrm{R} = \{ y_i : i \in \mathrm{I} \}.$$

Sólo queda por demostrar que

$$\underset{n}{\mathrm{Lim}}\, x_n = \underset{n}{\mathrm{Lim}}\, x_{n+1}$$

para cada $(x_n) \in X_2$. Sea, pues, $z_i = y_i' - y_i$, donde

$$y_i = \sum_k \alpha_{ik} x_k, \quad y_i' = \sum_k \alpha_{ik} x_{k+1}.$$

Será suficiente probar que

$$\operatorname*{LIM}_i z_i = 0.$$

Se tiene que

$$z_i = \lim_n S_{in},$$

donde

$$S_{in} = \sum_{k=1}^{n} \alpha_{ik} (x_{k+1} - x_k) = -\alpha_{i1} x_1 + (\alpha_{i1} - \alpha_{i2}) x_2 +$$

$$+ \dots + (\alpha_{i\,n-1} - \alpha_{in}) x_n + \alpha_{in} x_{n+1}.$$

Para cada $j \in J$ se obtiene

$$p_j (S_{in}) \leqslant \sum_{k=1}^{n-1} (\alpha_{ik} - \alpha_{i\,k+1}) p_j (x_{n+1}) + \alpha_{in} p_j (x_{n+1}) + \alpha_{i1} p_j (x_1) \leqslant$$

$$\leqslant M_j (\alpha_{i1} - \alpha_{i2} + \alpha_{i2} - \alpha_{i3} + \dots + \alpha_{i\,n-1} - \alpha_{in}) + \alpha_{in} M_j + \alpha_{i1} M_j = 2 M_j \alpha_{i1}$$

donde

$$M_j = \sup_k p_j (x_k).$$

Entonces, teniendo encuenta 2.1 resulta

$$\lim_i p_j (z_i) = 0$$

para cada $j \in J$, y esto prueba que $\lim_{i} z_i = 0$ y por tanto que

$$\mathrm{LIM}_{i}\, z_i = 0.$$

4. Corolario.—*Sea I un conjunto dirigido tal que existe una aplicación* $\alpha : I \times N \to \mathbb{R}$ *con las propiedades* 1.1, 1.2, 2.1 *y* 3.1. *Sea E un espacio vectorial localmente convexo casi completo. Si existe un límite generalizado sobre* $B(I, E)$ *respecto de* $\mathcal{L}(E)$, *entontonces E es semi-reflexivo.*

Demostración.—E es sucesionalmente completo por ser casi completo. Entonces el resultado es una consecuencia inmediata del teorema 3 y del teorema IV.27.

Observación.—En las hipótesis del teorema 3, si E es metrizable y $\|\ \|$ es una F-norma sobre E, y si se dota a B (E) y a B (I, E) de las F-normas usuales, es inmediato que la aplicación lineal Φ establecida en el teorema 1 es un A-homomorfismo de norma $\|\Phi\| \leqslant 1$ entre X_2 y X_1 cuando se consideran como A-módulos F-normados. En este caso es inmediato que si LIM es un límite (F)-generalizado sobre X_1, entonces $\mathrm{Lim} = \mathrm{LIM} \circ \Phi$ es un límite (F)-generalizado de Banach sobre X_2.

§ 2. Sumabilidad generalizada de series divergentes. Suma generalizada del producto de Cauchy de dos series

Si E es un espacio vectorial localmente convexo, usa serie de vectores de E la denotaremos por un par de sucesiones $(x_n, S_n)_{n \in N}$, donde

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} x_k.$$

Si $X \subset B(E)$ es un subespacio vectorial, designaremos por S (X) el conjunto de todas las series $(x_n, S_n)_{n \in N}$ tales que $(S_n) \in X$.

5. Definición.—Sea E un espacio vectorial localmente convexo y $A \subset \mathcal{L}(E)$ un anillo. Si $X \subset B(E)$ es un subespacio vectorial (A, σ)-invariante que contiene las sucesiones constantes, una *suma generalizada* Σ' sobre S (X) respecto de A es una aplicación

$$\Sigma' : S(X) \to E$$

que verifica:

5.1. $\Sigma'_k (a\, x_k + b\, y_k) = a\, \Sigma'_k x_k + b\, \Sigma'_k y_k$ para cada $a, b \in A$ y cada $(x_k, S^1_k), (y_k, S^2_k) \in S(X)$.

5.2. $\Sigma'_k x_k = 0$ si $x_k = 0$ para todo $k \in N$.

5.3. $\Sigma'_k x_k = x_1 + \Sigma'_k x_{k+1}$ para cada $(x_k, S_k) \in S(X)$.

5.4. $\Sigma'_k x_k \in S^{00}$, donde $S = \left\{ \sum_{k=1}^{n} x_k : n \in N \right\}$, para cada $(x_k, S_k) \in S(X)$

Para hacer más flexible la notación se ha designado por $\Sigma'_k x_k$ la suma generalizada $\Sigma'_k (x_k, S_k)$ de la serie

$$(x_k, S_k) \in S(X).$$

En el caso de que E sea metrizable y $\| \ \|$ es usa F-norma sobre E se define una suma (F)-generalizada Σ' sobre S (X) como una aplicación $\Sigma' : S(X) \to E$ que verifica 5.1, 5.2, 5.3 y

5.5. $\| \Sigma'_k x_k \| \leqslant \sup_n \left\| \sum_{k=1}^{n} x_k \right\|$ para cada $(x_k, S_k) \in S(X)$.

6. Proposición.—*En las condiciones de la definición 5, si existe un límite generalizado de Banach (resp. límite (F)-generalizado de Banach si E es metrizable) Lim sobre X respecto de A, entonces existe una suma generalizada (resp. suma (F)-generalizada) Σ' sobre S (X) respecto de A definida por*

$$\Sigma'_k x_k = \mathop{Lim}_n \sum_{k=1}^{n} x_k.$$

Demostración.—Es una comprobación inmediata.

7. Proposición.—*En las condiciones de la definición 5, si existe una suma generalizada (resp. suma (F)-generalizada cuando E es metrizable) Σ' sobre $S(X)$ respecto de A, entonces existe un límite generalizado de Banach (resp. límite (F)-generalizado de Banach) Lim sobre X respecto de A tal que*

$$\underset{n}{Lim} \sum_{k=1}^{n} x_k = \sum_k{}' x_k$$

para cada $(x_k, S_k) \in S(X)$.

Demostración.—Si $(S_n) \in X$, sea

$$x_1 = S_1,\ x_k = S_k - S_{k-1} \quad \text{si} \quad k > 1.$$

Entonces $(x_k, S_k) \in S(X)$ y se define

$$\underset{n}{\text{Lim}}\ S_n = \sum_k{}' x_k .$$

Es inmediato que Lim : $X \to E$ es una aplicación lineal que verifica:

i) $\underset{n}{\text{Lim}}\ a S_n = a \underset{n}{\text{Lim}}\ S_n$ para todo $a \in A$ y $(S_n) \in X$ como consecuencia de 5.1.

ii) $\text{Lim}\ S_n = S$ si $S_n = S$ para todo $n \in N$, pues

$$\underset{n}{\text{Lim}}\ S_n = x_1 + \sum_k{}' x_{k+1} = S_1 + 0 = S,$$

como consecuencia de 5.2 y 5.3.

iii) $\underset{n}{\text{Lim}}\ S_n \in S^{oo}$, donde $S = \{S_n : n \in N\}$, como consecuencia de 5.4.

iv) $\underset{n}{\text{Lim}}\ S_n = \underset{n}{\text{Lim}}\ S_{n+1}$ para cada $(S_n) \in X$, pues

$$\underset{n}{\text{Lim}}\ S_n = \sum_k{}' x_k = x_1 + x_2 + \sum_k{}' x_{k+2}$$

como consecuencia de 5.3. Entonces, si

$$x'_1 = x_1 + x_2 = S_2,\ x_k' = x_{k+1} = S_{k+1} - S_k$$

si $k > 1$ se obtiene

$$\operatorname*{Lim}_n S_{n+1} = \sum_k{}' x'_k = x'_1 + \Sigma' x'_{k+1} = x_1 + x_2 + \sum_k{}' x_{k+2} = \operatorname*{Lim}_n S_n.$$

Evidentemente, si E es metrizable y $\| \ \|$ una F-norma sobre E, se verifica que

$$\| \operatorname*{Lim}_n S_n \| \leqslant \sup_n \| S_n \|,$$

si Σ' es una suma (F)-generalizada para esta F-norma.

8. Teorema.—*Sea E un espacio vectorial sucesionalmente completo y $A \subset \mathcal{L}(E)$ un anillo. Sea I el intervalo $(0, 1) \subset \mathbb{R}$ dirigido con el orden usual de $\mathbb{R}$. Se supone que existe sobre $B(I, E)$ (resp. $\tau B(I, E)$) un límite generalizado LIM respecto de A. Entonces queda definida sobre $S(B(E))$ (resp. $S(\tau B(E))$) una suma generalizada Σ' respecto de A poniendo:*

8.1. $\sum_k{}' x_k = \operatorname*{LIM}_t \sum_{k=1}^{\infty} t^{k-1} x_k$ *para cada* $(x_k, S_k) \in S(B(E))$ (*resp.* $S(\tau B(E))$).

Demostración.—Basta tomar $x_{tk} = t^{k-1} - t^k$ para cada

$$(t, k) \in I \times N$$

y comprobar que se verifican las condiciones 1.1, 1.2, 2.1 y 3.1. La sucesión de sumas parciales

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} x_k$$

se transforma mediante la aplicación lineal Φ establecida en el teorema 1, en la red

$$y_t = \sum_{k=1}^{\infty} (t^{k-1} - t^k) S_k = \sum_{k=1}^{\infty} t^{k-1} x_k.$$

El resultado es consecuencia del teorema 3 (resp. y 1.5).

9. Teorema.—*En las hipótesis del teorema 8, si E es metrizable y $\| \|$ es una F-norma sobre E, si LIM es un límite (F)-generalizado sobre B (I, E) (resp. τ B (I, E)), entonces queda definida sobre S (B (E)) (resp. S (τ B (E))) una suma (F)-generalizada Σ' poniendo:*

9.1. $\sum'_k x_k = \underset{t}{LIM} \sum_{k=1}^{\infty} t^{k-1} x_k$ *para cada* $(x_k, S_k) \in S (B (E))$ *(resp.* $S (\tau B (E))$*).*

Demostración.—Análoga a la del teorema 8, teniendo en cuenta la observación que sigue al corolario 4.

Observación.—Las hipótesis del teorema 8 se cumplen si E es semi-reflexivo (resp. casi completo según el teorema IV.16) y sucesionalmente completo. En estas condiciones, si $\mathcal{U}$ es un ultrafiltro que contiene a la base de filtro asociada al conjunto dirigido I, sea LIM* el Π-límite generalizado que dicho ultrafiltro define sobre B (I, K) (corolario I.12), y sea LIM el P-límite generalizado sobre B (I, E) (resp. τ B (I, E)) definido por

$$\langle \underset{t}{\mathrm{LIM}}\, y_t, x' \rangle = \underset{t}{\mathrm{LIM}^*} \langle y_t, x' \rangle$$

para todo $x' \in E'$. Esto muestra que $\underset{t}{\mathrm{LIM}}\, y_t$ no es otra cosa que el límite débil de la red (y_t) según el ultrafiltro $\mathcal{U}$, de modo que 8.1 se puede escribir así:

$$\sum'_k x_k = \lim_{\mathcal{U}}{}^{w} \sum_{k=1}^{\infty} t^{k-1} x_k,$$

es decir, 8.1 se puede considerar como un método generalizado de Abel de sumación de series. Teniendo en cuenta el teorema IV.17 cuando

$$(x_k, S_k) \in \tau \mathrm{B} (\mathrm{E})$$

8.1 se puede poner así:

$$\sum'_k x_k = \lim_{\mathcal{U}} \sum_{k=1}^{\infty} t^{k-1} x_k,$$

donde $\lim_{\mathcal{U}}$ es el limite según un ultrafiltro conveniente en la topología de E ($\lim^w$ era el límite para la topología débil σ (E, E')).

10. Teorema.—*En las hipótesis del teorema 8, si LIM es un P-límite generalizado con $P \in \mathcal{P}_A(E)$, entonces la suma generalizada Σ' definida por* 8.1 *verifica:*

10.1. $P\left(\Sigma'_k x_k, \Sigma'_k y_k\right) = \Sigma'_k\left(\sum_{i+j=k+1} P(x_i, y_j)\right)$

para cada par de series

$$(x_k, S_k^1), (y_k, S_k^2) \in S(B(E))$$

(resp. $S(\tau(B(E)))$).

Demostración.—Sea

$$P(x, y) = \langle x, x'_0 \rangle\, a\, y \quad \text{con} \quad a \in A.$$

Se tiene

$$P\left(\Sigma'_k x_k, \Sigma'_k y_k\right) = P\left(\operatorname{LIM}_t \sum_{k=1}^{\infty} t^{k-1} x_k, \operatorname{LIM} \sum_{k=1}^{\infty} t^{k-1} y_k\right) =$$

$$= \operatorname{LIM}_t P\left(\sum_{k=1}^{\infty} t^{k-1} x_k, \sum_{k=1}^{\infty} t^{k-1} y_k\right) =$$

$$= \operatorname{LIM}_t P\left[< \sum_{k=1}^{\infty} t^{k-1} x_k, x'_0 > a \left(\sum_{k=1}^{\infty} t^{k-1} y_k\right)\right] =$$

$$= \operatorname{LIM}_t \left[\left(\sum_{k=1}^{\infty} t^{k-1} \langle x_k, x'_0 \rangle\right) \cdot a \left(\sum_{k=1}^{\infty} t^{k-1} y_k\right)\right] =$$

$$= \operatorname{LIM}_t \sum_{k=1}^{\infty} t^{k-1} \left(\sum_{i+j=k+1} \langle x_i, x'_0 \rangle\, a\, y_j\right) =$$

$$= \operatorname{LIM}_t \sum_{k=1}^{\infty} t^{k-1} \left(\sum_{i+j=k+1} P(x_i, y_j)\right) = \Sigma'_k \left(\sum_{i+j=k+1} P(x_i, y_j)\right) -$$

11. TEOREMA.—*En las hipótesis del teorema 8, si LIM* es un Π-límite generalizado sobre B (I, K) tal que*

$$\underset{t}{LIM}\,(\lambda_t\, y_t) = (\underset{t}{LIM^*}\,\lambda_t)\,(\underset{t}{LIM}\, y_t)$$

para cada $(\lambda_t) \in B\,(I, K)$ *y cada* $(y_t) \in B\,(I, E)$ *(resp.* $\tau\, B\,(I, E))$ *y si* Σ^* *es la correspondiente suma generalizada sobre* $S\,(B\,(K))$ *definida por* 8.1, *entonces*

11.1. $$(\sum_k{}^* \alpha_k)\,(\sum_k{}' x_k) = \sum_k{}' \Big(\sum_{i+j=k+1} \alpha_i\, x_j\Big)$$

para cada $(\alpha_k, S_k) \in S\,(B\,(K))$
y cada $(x_k, S'_k) \in S\,(B\,(E))$ *(resp.* $S\,(\tau\, B\,(E)))$, *donde* Σ' *es la suma generalizada definida por* 8.1.

DEMOSTRACIÓN.—Análoga a la demostración del teorema 10. Obsérvese que la condición

$$\underset{t}{\mathrm{LIM}}\,(\lambda_t\, y_t) = (\underset{t}{\mathrm{LIM}^*}\,\lambda_t)\,(\underset{t}{\mathrm{LIM}}\, y_t)$$

se verifica siempre que E es semi-reflexivo (resp. casi completo) y LIM es el límite generalizado que el Π-límite LIM* define sobre B (I, E) (resp. τ B (I, E)) cuando se pone

$$\underset{t}{\mathrm{LIM}^*}\,\langle y_t, x'\rangle = \langle \underset{t}{\mathrm{LIM}}\, y_t, x'\rangle$$

para todo $x' \in E'$.

12. TEOREMA.—*En las hipótesis del teorema 9, si LIM* es un Π-límite generalizado sobre B (I, K) tal que*

$$\underset{t}{LIM}\,(\lambda_t\, y_t) = (\underset{t}{LIM^*}\,\lambda_t)\,(\underset{t}{LIM}\, y_t)$$

para cada

$$(\lambda_t) \in B\,(I, K) \quad \text{e} \quad (y_t) \in B\,(I, E)$$

(resp. $\tau B(I, E)$) y si Σ^* es la correspondiente suma (F)-generalizada sobre $S(B(K))$ definida por 8.1, entonces

$$12.1. \quad (\Sigma^*_k \alpha_k)\,(\Sigma'_k x_k) = \Sigma' \left(\sum_{i+j=k+1} \alpha_i x_j \right)$$

para cada $(\alpha_k, S_k) \in S(B(K))$ y cada $(x_k, S'_k) \in S(B(E))$, donde Σ' es la suma generalizada definida por 9.1.

Demostración.—Análoga a la del teorema 11.

Observación.—Nótese que como consecuencia del teorema IV.33 se vio que pueden existir límites (F)-generalizados sobre B (E) que verifican la condición IV.32.1 sin ser E reflexivo. Entonces para el caso de espacios vectoriales metrizables el teorema 12 se puede aplicar en ciertos casos en los que no se verifican las hipótesis del teorema 11 que aparentemente puede parecer que incluye el teorema 12 como caso particular.

§ 3. Límites generalizados en espacios de funciones particulares

13. Teorema.—*Sea E un espacio vectorial localmente convexo casi atonelado y E′ su dual. Sea (x_i') una red de formas lineales continuas tal que su recorrido $S = \{x_i' : i \in I\}$ es acotado para la topología $\beta(E', E)$. Si Lim* es un límite generalizado sobre $B(I, K)$, entonces*

$$x'(x) = Lim^*_i\, x_i'(x)$$

define una forma lineal continua x′ sobre E. Se verifica que x′ es es $\sigma(E', E)$-adherente a la envoltura convexa de S.

Demostración.—Como E es casi atonealdo, la inclusión $i : E \to E''$ es continua cuando se dota a E″ de la topología fuerte

β (E″, E′) y entonces la aplicación traspuesta i^t : E‴ → E′ es continua para las topologías σ (E‴, E′) σ (E′, E) ((10), corolario de la proposición 3.12.3). (Nótese que i^t es la aplicación lineal continua que a cada x‴ : E″ → K le hace corresponder su restricción a E.)

Como consecuencia del teorema IV.18 aplicado a E′ dotado de su topología fuerte β (E′, E), se deduce que existe una aplicación lineal L : B (I, E′) → E‴ definida por

$$\langle x'', \underset{i}{\mathrm{L}} (x_i') \rangle = \underset{i}{\mathrm{Lim}^*} \langle x'', x_i' \rangle$$

para todo $x' \in$ E″. Si

$$x' = i^t \underset{i}{\mathrm{L}} (x_i'),$$

entonces $x' \in$ E′ y

$$x' (x) = \langle x, i^t (x''') \rangle = \langle x, x''' \rangle = \underset{i}{\mathrm{Lim}^*} \langle x, x_i' \rangle$$

para cada $x \in$ E. Por otra parte, teniendo en cuenta la proposición IV.20 se deduce que

$$x' = i^t \underset{i}{\mathrm{L}} (x_i')$$

es un punto σ (E′, E)-adherente a la envoltura convexa de S como consecuencia de la continuidad de i^t par las topologías

$$\sigma (\mathrm{E}''', \mathrm{E}'), \sigma (\mathrm{E}', \mathrm{E}).$$

Observación.—En general no se verificará que x' sea un punto σ (E′, E″)-adherente a la envoltura convexa de S, pues en este caso se deduciría que Lim $= i^t \circ$ L es un límite generalizado sobre B (I, E′) y esto implica que E′ es semi-reflexivo en el caso de que I sea el conjunto de los σ (E′, E″)-entornos simétricos de 0 dirigido por la inclusión, como consecuencia de la proposición IV.7 y de (10), proposición 3.8.2.

Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un abierto. K (Ω) es el espacio de las funciones reales continuas con soporte compacto contenido en Ω, que es un espacio vectorial localmente convexo atonelado para su topología usual (descrita en (10), ejemplo 2.12.5). El espacio dual K' (Ω) es el espacio de las medidas.

14. TEOREMA.—*Sea* (μ_i) *una red de medidas* $\mu_i \in K'(\Omega)$ *con índices en el conjunto dirigido* I, *tal que para cada* $\psi \in K(\Omega)$ *se tiene que*

$$(\mu_i(\psi)) \in B(I, \mathbb{R}).$$

Entonces para cada límite generalizado Lim^* *sobre* $B(I, \mathbb{R})$ *existe una medida* $\mu \in K'(\Omega)$ *tal que*

$$\mu(\psi) = \underset{i}{Lim^*}\, \mu_i(\psi)$$

para cada $\psi \in K(\Omega)$, *que es* $\sigma(K'(\Omega), K(\Omega))$*-adherente a la envoltura convexa de* $\{\mu_i : i \in I\}$.

DEMOSTRACIÓN.—Por hipótesis (μ_i) es una red débilmente acotada y los espacios atonelados tienen la propiedad de que un conjunto débilmente acotado de su dual también es fuertemente acotado ((10), corolario de la proposición 3.6.2). Entonces el resultado es una consecuencia inmediata del teorema 13.

15. TEOREMA.—*Sea* (x_i) *una red de funciones* $x_i \in K(\Omega)$ *con índices en el conjunto dirigido* I *tal que su recorrido* $\{x_i : i \in I\}$ *es un conjunto precompacto. Si* Lim^* *es un límite generalizado sobre* $B(I, R)$ *la función*

$$x(t) = \underset{i}{Lim^*}\, x_i(t)$$

definida sobre Ω *pertenece a* $K(\Omega)$ *y para cada medida* $\mu \in K'(\Omega)$ *se tiene:*

15.1. $\underset{i}{Lim^*} \int x_i(t)\, d\mu = \int \underset{i}{Lim^*}\, x_i(t)\, d\mu.$

DEMOSTRACIÓN.—Como K (Ω) es completo, el resultado es una consecuencia inmediata del teorema IV.16, pues si Lim es un límite generalizado sobre τ B (I, K (Ω)) definido por

$$\langle \operatorname*{Lim}_{i} x_i, x' \rangle = \operatorname*{Lim^*}_{i} \langle x_i, x' \rangle$$

para cada $x' \in$ K′ (Ω), como se vio en la demostración de dicho teorema, y si $x = \operatorname*{Lim}_{i} x_i$ entonces evidentemente se verifica que

$$x(t) = \operatorname*{Lim^*}_{i} x_i(t),$$

pues para cada $t \in \Omega$, la forma lineal $x \longmapsto x(t)$ es continua. Evidentemente, 15.1 es la relación indicada anteriormente cuando se escribe

$$\langle x, \mu \rangle = \int x(t)\, d\mu.$$

Sea $\mathcal{D}(\Omega)$ el espacio vectorial de las funciones reales indefinidamente diferenciables, con soporte compacto contenido en el abierto Ω con la topología localmente convexa usual (descrita en (10), ejemplo 2.12.6). Se sabe que $\mathcal{D}(\Omega)$ es reflexivo por ser un espacio de Montel. Su dual $\mathcal{D}'(\Omega)$ es el espacio de las distribuciones.

16. TEOREMA.—*Si* (x_i) *es una red acotada de funciones* $x_i \in \mathcal{D}(\Omega)$ *con índices en el conjunto dirigido I, y si Lim* es un límite generalizado sobre B (I,* $\mathbb{R}$*), entonces la función*

$$x(t) = \operatorname*{Lim^*}_{i} x_i(t)$$

pertenece a $\mathcal{D}(\Omega)$ *y se verifica*

$$\partial^p \left(\operatorname*{Lim^*}_{i} x_i(t)\right) = \operatorname*{Lim^*}_{i} \left(\partial^p x_i(t)\right)$$

para cada

$$p = (p_1, \ldots, p_k) \in N^k$$

Demostración.—Es una consecuencia inmediata del teorema IV.21, de la continuidad de cada forma lineal $x \longmapsto x(t)$ y de cada aplicación lineal

$$\partial^p : \mathcal{D}(\Omega) \to \mathcal{D}(\Omega).$$

Bibliografía

(1) Banach, S.: *Théorie des opérations linéaires*. Warsaw (1932).

(2) Bombal, F.: *Medidas invariantes con valores en A-módulos normados*. Memorias Instituto «Jorge Juan», núm. 27.

(3) Cartan, H.: *Théorie des filtres; filtres et ultrafiltres*. «C. R. Acad. Sc. Paris», 205, 595-598 y 777-779 (1937).

(4) Coox, Thurlow, A.: *Schauder descompositions and semi-reflexive spaces*. «Math. Ann.», 182, 232-235 (1969).

(5) Deeds, Joseph, B.: *Summability of vector sequences*. «Studia Math.», 30, 361-372 (1968).

(6) Dixmier, J.: *Les moyennes invariantes dans les semigroupes et leurs applications*. «Acta Sci. Math. Szeged», 12 Pars A, 213-227 (1950).

(7) Douglas, Sternen A.: *On a concept of summability in amenable semigroups*. «Math. Scand.», 23 (1968).

(8) Edwards, R. E.: *Functional analysis, theory and applications*. Halt New York (1965).

(9) Hewith, E. y Ross, K. A.: *Abstract Harmonic Analysis*. I. Springer-Verlag, Heidelberg (1963).

(10) Horvath, J.: *Topological vector spaces*. Addison-Wesley Reading, Massachusets (1966).

(11) James, R. C.: *Bases and reflexivity of Banach spaces*. «Ann. Math.», 52 (1950).

(12) Jürg T. Marti: *Introduction to the theory of bases*. Springer-Verlag. Heidelberg (1969).

(13) Köthe, G. *Topological vector spaces*. I. Springer-Verlag (1969).

(14) Lorentz, G. G.: *A conrtibution to the theory of divergent sequences*. «Acta Math.», 80, 167-190 (1948).

(15) Mazur, S.: *O metodach sum owalnósci, Ksiega pamiatkowa*. I. «Polskiego Zjazdu Matematycznego Lwów», 102-107 (1927).

(16) McArthur, C. W.: *The weak basis theorem*. «Colloqium Mathemathicum», XVI, 71-76 (1967).

(17) Monna, A. F.: *Analyse non-archimedienne*. Springer-Verlag. Heidelberg (1970).

(18) Nishiura, T. y Waterman, D.: *Reflexivity and summability*. I. «Studia Math.», 23, 53-57 (1963).

(19) Rodríguez-Salinas, B.: *El problema de la medida*. Cap. VII. «Rev. Mat. Hisp.-Amer.», 6 (1971).

(20) Rooig, A. C. M. van: *Invariant means with values in a non-archimedean valued field*. «Proc. Kon. Ned. Akad. v. Wetens», 70, 220-228 (1967).

(21) Saks, S.: *Theory of the Integral*. 2.ª ed. Monografic Matematyczne, Warszawa-Lwów (1937).

(22) Schaefer, P.: *Almost convergent and almost summable sequences*. «Proc. Amer. Math. Soc.», 20, 51-54 (1969).

(23) Sucheston, L.: *On existence of finite invariant measures*. «Math. Zeistchr.», 86, 327-336 (1964).

(24) — — *An ergodic application of almost convergent sequences*. «Duke Math. J.», 30, 417-422 (1963).

(25) Waterman, D.: *Reflexivity and summability*. II. «Studia Math.», 32, 61-63 (1969).