FUNCIONES VECTORIALES CASI CONVERGENTES

por

F. BOMBAL GORDON y G. VERA BOTÍ

INTRODUCCION

Lorentz [8] introdujo el concepto de casi convergencia para sucesiones acotadas de números reales o complejos en términos de límites de Banach, y caracterizó las sucesiones casi convergentes como aquellas cuyas trasladadas son uniformemente (C, 1)-sumables, es decir,

$$\lim_{p\to\infty} \frac{1}{p} (x_{n+1} + \dots + x_{n+p}) = x,$$

uniformemente en n. Esta noción se extendió también al caso de funciones reales acotadas sobre un semigrupo que posee una media invariante a la izquierda (semigrupos «amenables» en la terminología inglesa), obteniéndose caracterizaciones semejantes a la de Lorentz (véase p. ej. Day [3] y Granirer [5]). Posteriormente, algunos autores han estudiado el caso de sucesiones acotadas de vectores en espacios localmente convexos, definiendo también una noción de casi convergencia y caracterizando las sucesiones casi convergentes (véase Deeds [4], Kurtz [7] y Vera [14]).

En este trabajo se extiende el concepto de casi convergencia para funciones vectoriales sobre un semigrupo que admite una media invariante a la izquierda. Se estudia el espacio de las funciones casi convergentes y se obtienen teoremas de caracterización análogos a los conocidos en el caso de funciones reales. Como consecuencia, se demuestra la existencia de una única media invariante sobre las funciones vectoriales débilmente casi periódicas, completando alguno de los resultados obtenidos en [1].

Finalmente, se obtiene una versión bastante general de algunos teoremas de tipo Kojima-Schur y Toeplitz-Silverman, sustituyendo el semigrupo de los números naturales por un semigrupo «amenable» S. Se consideran matrices infinitas de aplicaciones lineales continuas entre dos espacios localmente convexos con índices en dos semigrupos distintos y se dan condiciones necesarias y suficientes para que dichas matrices transformen funciones convergentes o casi convergentes definidas sobre un semigrupo, en funciones convergentes o casi convergentes definidas sobre el otro. Para ello se da previamente una noción general de convergencia en un semigrupo, que incluye las nociones más usuales empleadas en la literatura.

Notaciones

Sea S un semigrupo y E un espacio localmente convexo separado. Denotaremos por $B(S, E)$ el espacio de todas las funciones acotadas de S en E; cuando $E = \mathbf{R}$, escribiremos $B(S)$ en lugar de $B(S, \mathbf{R})$. Si E está dotado de la topología localmente convexa $\mathcal{T}$, definida por la familia de seminormas (p_i), designaremos por $\mathcal{T}^*$ la topología sobre $B(S, E)$ definida por la familia de seminormas (p_i^*), donde

$$p_i^*(f) = \operatorname{Sup}\{p_i(f(s)) : s \in S\}.$$

Para cada $f \in B(S, E)$ y $s \in S$, designaremos por ${}_sf$ (resp. f_s) la aplicación de $B(S, E)$ definida por $t \to ({}_sf)(t) = f(st)$ (resp. $t \to (f_s)(t) = f(ts)$). Si X es un subespacio de $B(S, E)$, una media sobre X es una aplicación lineal μ de X en E tal que $\mu(f) \in \overline{\operatorname{co}[f(S)]}$, donde $\operatorname{co}[f(S)]$ designa la envoltura convexa de $f(S)$ (véase [1]). Si además X es invariante a la izquierda (es decir, ${}_sf \in X$ siempre que $f \in X$ y $s \in S$) y $\mu({}_sf) = \mu(f)$ para cualquier $f \in X$ y $s \in S$, se dice que μ es invariante a la izquierda. Si $\mathcal{T}$ es cualquier topología sobre E compatible con la dualidad (E, E'), entonces μ es continua respecto de $\mathcal{T}^*$ y $\mathcal{T}$.

Designaremos por $\mathcal{M}_S$ el conjunto de medias invariantes a la izquierda sobre $B(S)$, y por $\Sigma \subset B(S)'$ el conjunto de medias finitas, es decir, combinaciones convexas de medias puntuales $\delta_s : f \to \delta_s(f) = f(s)$.

En todo este trabajo, supondremos que S es un semigrupo tal que $\mathcal{M}_S \neq \phi$. Se sabe [5] que entonces existe una red (λ_i) de medias finitas tal que

$$\text{(a)} \qquad \lim_i \|L_s \lambda_i - \lambda_i\| = 0$$

para cada $s \in S$, siendo $L_s \lambda$ la media definida por $f \to \lambda(_s f)$. Supondremos en lo que sigue que (λ_i) es una red fija de medias finitas que cumple (a). Si $\lambda \in \Sigma$ está definida por

$$\lambda(\varphi) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \varphi(s_i), \qquad \varphi \in B(S),$$

designaremos por $\widehat{\lambda}$ la media vectorial definida por

$$\widehat{\lambda}(f) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i f(s_i), \qquad f \in B(S, E).$$

1. Definicion. $f: S \to E$ es *casi convergente* a $x \in E$ si $f \in B(S, E)$ y se cumple

1.1. $\mu\langle f, x'\rangle = \langle x, x'\rangle$, para todo $x' \in E'$ y $\mu \in \mathcal{M}_S$, en donde $\langle f, x'\rangle$ denota la función $s \to \langle f(s), x'\rangle$.

Escribiremos $f(s) \xrightarrow{cc} x$ y designaremos por $X_C(E)$ el conjunto de todas las funciones casi convergentes. Es inmediato comprobar que $X_C(E)$ es un subespacio vectorial invariante a la izquierda de $B(S, E)$

Las funciones reales casi convergentes están caracterizadas por el siguiente teorema:

2. Teorema. *Una función real φ sobre S es casi convergente a α si y sólo si*

$$\lim_i \, (\lambda_i(\varphi_s) - \alpha) = 0$$

uniformemente en s.

Demostracion. Véase Granirer [5], teorema 7.

Es inmediato generalizar el teorema anterior para medias vectoriales:

3. Teorema. *Una función $f: S \to E$ es casi convergente a $x \in E$ si y sólo si*

$$\lim \widehat{\lambda}_i(f_s) = x,$$

uniformemente en s, para la topología débil $\sigma(E, E')$.

Demostracion. Si f es casi convergente a x, entonces para todo $x' \in E'$ la función $\langle f, x' \rangle$ es casi convergente a $\langle x, x' \rangle$. En virtud del teorema 2, se tiene que

$$\lambda_i \langle f_s, x' \rangle = \langle \widehat{\lambda}_i (f_s), x' \rangle$$

converge a $\langle x, x' \rangle$ uniformemente en s.

Recíprocamente, si $\lim \widehat{\lambda}_i (f_s) = x$ uniformemente en s para $\sigma(E, E')$, resulta que para cada $x' \in E'$ las funciones

$$s \to \langle \widehat{\lambda}_i (f_s), x' \rangle = \lambda_i \langle f_s, x' \rangle$$

convergen a la función constante $\langle x, x' \rangle$ en $B(S)$. Por tanto, si $\mu \in \mathcal{M}_S$, resulta

$$\langle x, x' \rangle = \mu(\langle x, x' \rangle) = \lim_i \, [\mu_s (\lambda_i \langle f_s, x' \rangle)] =$$

$$\lim_i \, \mu \langle f, x' \rangle = \mu \langle f, x' \rangle,$$

y por tanto $f(s) \xrightarrow{cc} x$.

Sea $K(E)$ (resp. K) el subespacio de $B(S, E)$ (resp. $B(S)$) engendrado por las funciones $f - {}_s f$, donde $f \in B(S, E)$ (resp. $f \in B(S)$) y $s \in S$. Se sabe que $\overline{K}$ es el conjunto de las funciones casi convergentes a 0 (véase [3]), y por tanto que $X_C(\mathbf{R}) = \overline{K} \oplus \mathbf{R}$. El siguiente teorema extiende este resultado al caso de funciones vectoriales:

4. Teorema. *Sea $\overline{K(E)}$ la adherencia de $K(E)$ para la topología σ^* de $B(S, E)$, asociada a la topología débil de E. Entonces $\overline{K(E)}$ es el subespacio de $X_C(E)$ formado por las funciones casi convergentes a* 0. *Por tanto $X_C(E) = \overline{K(E)} \oplus E$.*

Demostracion. Sea f casi convergente a 0 y U un σ^*-entorno de 0 en $B(S, E)$, que podemos suponer de la forma

$$U = \{g : |\langle g(s), x_k' \rangle| < \varepsilon, \ \forall s \in S, \ k = 1, 2, \ldots, n\},$$

donde $x_k' \in E'$ son linealmente independientes. Cada función real $\langle f, x_k' \rangle$ es casi convergente a 0, y por tanto existen funciones $\varphi_k \in K$ tales que

$$|\varphi_k(s) - \langle f(s), x_k' \rangle| < \varepsilon, \ \forall s \in S.$$

Sean $x_j \in E$ $(1 \leqslant j \leqslant n)$ tales que $\langle x_j, x_k' \rangle = \delta_{jk}$. Entonces la función

$$g(s) = \sum_{k=1}^{n} \varphi_k(s)\, x_k$$

pertenece a $K(E)$ y se cumple que

$$|\langle g(s) - f(s), x_k' \rangle| < \varepsilon$$

para todo $s \in S$ y $k = 1, 2, \ldots, n$.

5. TEOREMA. *Existe una única media invariante a la izquierda sobre* $X_C(E)$.

DEMOSTRACION. Sea $f \in X_C(E)$ y $f(s) \xrightarrow{cc} x$. Si definimos $\tau(f) = x$, es inmediato que τ es lineal e invariante a la izquierda. Además, para todo $x' \in E'$ y $\mu \in \mathcal{M}_S$, se cumple

$$\langle \tau(f), x' \rangle = \mu \langle f, x' \rangle \leqslant \operatorname{Sup} \{\langle f(s), x' \rangle : s \in S\},$$

lo que prueba que $\tau(f) \in \overline{\mathrm{co}[f(S)]}$. Así pues τ es una media sobre $X_C(E)$.

Sea ϱ otra media invariante a la izquierda sobre $X_S(E)$. En virtud del teorema 3, las funciones $s \to \widehat{\lambda}_i(f_s)$ convergen a x en $B(S, E)$, para la topología σ^* asociada a la topología débil de E. Como ϱ es continua para esa topología, resulta

$$\tau(f) = x = \varrho(x) = \varrho_s[\lim_i \widehat{\lambda}_i(f_s)] = \lim_i \varrho_s[\widehat{\lambda}_i(f_s)] = \varrho(f).$$

Por tanto, $\tau = \varrho$.

6. TEOREMA. *Si E es completo, $X_C(E)$ es cerrado en $B(S, E)$ para la topología asociada a la de E.*

DEMOSTRACION. Sea

$$\tau^* : \overline{X_C(E)} \to E$$

la extensión por continuidad de la única media invariante a la izquierda, τ, sobre $X_C(E)$. Si $f \in \overline{X_C(E)}$, existe una red $(f_i) \subset X_C(E)$

que converge a f en la topología inducida por la de $B(S, E)$. Por definición de τ^*, se tiene entonces

$$\tau^*(f) = \lim_i \tau(f_i).$$

Para cada $x' \in E'$, las funciones $\langle f_i, x' \rangle$ convergen a $\langle f, x' \rangle$ en $B(S)$, luego para toda $\mu \in \mathcal{M}_S$ se tiene

$$\mu \langle f, x \rangle = \mu [\lim_i \langle f_i, x' \rangle] = \lim_i \mu \langle f_i, x' \rangle =$$
$$= \lim_i \langle \tau(f_i), x' \rangle = \langle \tau^*(f), x' \rangle.$$

Esto prueba que f es casi convergente a $\tau^*(f)$ y, por tanto, que $\overline{X_C(E)} = X_C(E)$.

Aplicación a las funciones débilmente casi periódicas.

Si G es un grupo, designaremos por $W(G, E)$ al subespacio de $B(G, E)$ formado por las funciones débilmente casi periódicas, es decir, tales que el conjunto $\{{}_s f : s \in G\}$ sea relativamente compacto en la topología débil de $B(G, E)$. Se sabe [6] que cualquiera que sea G, existe siempre una única media invariante a la izquierda ν_0 sobre $W(G) = W(G, \mathbf{R})$. En [1] hemos demostrado que si E es casi completo para la topología de Mackey, ν_0 induce sobre $W(G, E)$ una media invariante a la izquierda, ν, por la fórmula

$$\nu_0 \langle f, x' \rangle = \langle \nu(f), x' \rangle,$$

para todo $x' \in E'$ y $f \in W(G, E)$. Si además se supone que $\mathcal{M}_G \neq \phi$, la fórmula anterior prueba que f es casi convergente a $\nu(f)$, ya que ν_0 es la restricción a $W(G)$ de cualquier $\mu \in \mathcal{M}_G$. Por tanto, en este caso, $W(G, E) \subset X_C(E)$. El teorema 3 permite entonces obtener el siguiente

7. TEOREMA. *Si E es casi completo para la topología de Mackey y $\mathcal{M}_G \neq \phi$, existe una única media invariante a la izquierda sobre $W(G, E)$.*

DEMOSTRACION. De la observación precedente y del teorema 3, se deduce que si $f \in W(G, E)$, las funciones

$$s \to \widehat{\lambda}_i(f_s)$$

convergen a $\nu(f)$ en $B(G, E)$, para la topología σ^*. Es claro que estas funciones pertenecen a $W(G, E)$, ya que son combinaciones convexas de trasladadas a la izquierda de f. Por tanto, si ϱ es otra media invariante a la izquierda sobre $W(G, E)$, razonando como en el teorema 3 resulta

$$\nu(f) = \varrho[\nu(f)] = \varrho_s[\lim_i \widehat{\lambda_i}(f_s)] = \lim_i \varrho_s[\widehat{\lambda_i}(f_s)] = \varrho(f).$$

Convergencia en un semigrupo.

Las nociones usuales de convergencia en $B(S)$ tienen la propiedad de que el conjunto de funciones convergentes es un subespacio vectorial de $X_C(R)$ y el límite de una función convergente, coincide con su casi límite. A continuación se define una noción general de convergencia en $B(S, E)$ que cumple estos requisitos y que, como se ve en los ejemplos, incluye la mayoría de las nociones usuales de convergencia para el caso $E = R$.

Sea S un semigrupo tal que $\mathcal{M}_S \neq \phi$ y $\mathcal{F}$ una base de filtro contenida en el filtro de todas las partes $H \subset S$ cuya función característica χ_E es casi convergente a 1.

8. Definicion. Diremos que $f \in B(S, E)$ es *$\mathcal{F}$-convergente* a $x \in E$ si

$$\lim_{\mathcal{F}} f = x.$$

Designaremos por $\mathcal{F}X(E)$ el subespacio vectorial de $B(S, E)$ formado por las funciones $\mathcal{F}$-convergentes.

9. Ejemplos.

a) Si S es un semigrupo que no posee ideales a la izquierda finitos, entonces la función característica de cada conjunto finito es casi convergente a cero. Si $S \cup \{\infty\}$ es la compactificación de Alexandrov de S, dotado de la topología discreta, y $\mathcal{F}$ el filtro de los complementarios de las partes finitas de S, las funciones de $\mathcal{F}X(R)$ son precisamente aquellas para las que existe

$$\lim_{s \to \infty} f(s)$$

(Véase P. F. Mah [9]).

b) Sea S un semigrupo topológico localmente compacto en el que la función característica de todo compacto es casi convergente a cero (1). Sea $\mathcal{F}$ la base de filtro de los complementarios de los compactos. Entonces $\mathcal{F}X(E)$ está formado por las funciones $f \in B(S, E)$ para las que existe

$$\lim_{s \to \infty} f(s)$$

siendo $S \cup \{\infty\}$ la compactificación de Alexandrov de S.

c) Si se verifica que $uS \cap tS \neq \phi$ para todo $u, t \in S$, y se define

$$s \geqslant S_0 \quad \text{si y sólo si existe} \quad u \in S \quad \text{tal que} \quad s = s_0 u,$$

es fácil comprobar que $(S, \geqslant)$ es un conjunto dirigido y que la función característica de cada sección es casi convergente a 1. Si $\mathcal{F}$ es la base de filtro de las secciones de $(S, \geqslant)$, resulta que el concepto de $\mathcal{F}$-límite coincide con el concepto usual de límite de una red con indices en el conjunto dirigido S.

d) Cuando $\mathcal{F}$ es el filtro de todas las partes de S cuya función característica es casi convergente a 1, resulta la noción de S-convergencia utilizada por Ching Chou y P. Durán en [2] para el caso $E = R$.

10. PROPOSICION. *$\mathcal{F}X(E)$ es un subespacio vectorial de $X_c(E)$ y si $\mathcal{F}$-limite de f es x, entonces f es casi convergente a x.*

DEMOSTRACION. Es inmediato que $\mathcal{F}X(E)$ es un subespacio vectorial de $B(S, E)$. Bastará probar la segunda parte de la proposición para $E = R$, puesto que si $x' \in E'$ se tiene

$$\lim_{\mathcal{F}} \langle f, x' \rangle = \langle \lim_{\mathcal{F}} f, x' \rangle$$

para todo $f \in \mathcal{F}X(E)$. Sea entonces $\varphi \in \mathcal{F}X(R)$ y $c = \lim\limits_{\mathcal{F}} \varphi$. Dado $\varepsilon > 0$, sea $F \in \mathcal{F}$ tal que $|\varphi(s) - c| < \varepsilon$ para todo $s \in F$. Sea

$$M = \operatorname{Sup}\{|\varphi(s) - c| : s \in S\}.$$

(1) Esta hipótesis se verifica siempre que G es un grupo localmente compacto. Véase [1].

Entonces como

$$|\varphi(s) - c| < \varepsilon\,\chi_{\complement F}(s) + M\,\chi_{\complement F}(s)$$

resulta

$$|\mu(\varphi) - c| < \varepsilon,$$

para toda $\mu \in \mathcal{M}_S$, ya que $\mu(\chi_{\complement F}) = 0$. Como ε es arbitrario, resulta, que $\mu(\varphi) = c$.

11. PROPOSICION. *Si E es completo, $\mathcal{F}X(E)$ es cerrado en $B(S, E)$ para la topología $\mathcal{T}^*$ asociada a la topología $\mathcal{T}$ de E.*

DEMOSTRACION. Sea (f_i) una red en $\mathcal{F}X(E)$ que converge a f, y $x_i = \mathcal{F}$-limite de f_i. Entonces (x_i) es una red de Cauchy en E. En efecto: Si U es un entorno de 0 en E, sea V un entorno equilibrado de 0 tal que $V + V + V \subset U$. Como (f_i) converge a f, existe un j_0 tal que si $i, j \geqslant j_0$ se tiene $f_i(s) - f_j(s) \in V$, para todo $s \in S$. Entonces si $F_i, F_j \in \mathcal{F}$ son tales que

$$f_i(s) - x_i \in V, \quad \forall s \in F_i; \quad f_j(s) - x_j \in V, \quad \forall s \in F_j,$$

para un $s \in F_i \cap F_j$ se cumple

$$x_i - x_j = (x_i - f_i(s)) + (f_i(s) - f_j(s)) + (f_j(s) - x_j) \in V + V + V \subset U.$$

Sea $x = \lim_i x_i$. Si V es un entorno de 0 en E, existe j_0 tal que para $i \geqslant j_0$ se cumple

$$x_i - x \in V; \quad f_i(s) - f(s) \in V \quad \text{para todo} \quad s \in S.$$

Entonces si $F_i \in \mathcal{F}$ es tal que $f_i(s) - x_i \in V$ para todo $s \in F_i$, se tiene

$$f(s) - x = (f(s) - f_i(s)) + (f_i(s) - x_i) + (x_i - x) \in V + V + V,$$

para todo $s \in F_i$. Esto prueba que $\mathcal{F}$-limite de f es x.

12. OBSERVACION. El subconjunto de $B(S, E)$ formado por las funciones constantes y por las que tienen su soporte contenido en el complementario de algún conjunto de $\mathcal{F}$, es un conjunto total en $\mathcal{F}X(E)$. En efecto, sea $f \in \mathcal{F}X(E)$, V un entorno de 0 en E y $F \in \mathcal{F}$

tal que $f(s) - x \in V$ si $s \in F$. Entonces la función $g = \chi_{\complement F}(f - x) + x$ verifica $f(s) - g(s) \in V$ para todo $s \in S$, y $g - x$ tiene su soporte contenido en el complementario de F.

Matrices regulares de aplicaciones lineales.

Un tema importante de la teoría de sumabilidad, es el estudio de las matrices infinitas escalares que transforman sucesiones numéricas en otras, conservando la convergencia o la casi convergencia. Si en un semigrupo se da una noción de convergencia, se pueden estudiar problemas análogos. Así, en [9] Mah trata con detalle estas cuestiones para la noción de convergencia indicada en el ejemplo 9 (a). Dos teoremas básicos sobre este tema son el de Kojima-Schur, para la conservación de la convergencia, y el de Toeplitz-Silverman, para la conservación de la convergencia y límite. Algunos autores han extendido estos resultados a sucesiones en espacios de Banach [10], [12] y espacios de Fréchet [11].

A continuación, trataremos de problemas análogos para los conceptos de convergencia y casi convergencia introducidos en este trabajo.

Sean E y F dos espacios localmente convexos separados, S y T dos conjuntos y $\{A(s, t) : (s, t) \in S x T\}$ una familia de aplicaciones lineales continuas de E en F. Para cada $f \in B(S, E)$, denotaremos por $A f$ la función de T en F definida por

$$A f(t) = \sum_{s \in S} A(s, t) f(s),$$

cuando esta suma converja en F, entendida como límite de la red $R_{td}(f) = \sum_{s \in d} A(s, t) f(s)$, donde d recorre el conjunto dirigido D de las partes finitas de S.

13. Teorema. *Sea $X \subset B(S, E)$ un subespacio vectorial tonelado, casi completo que contiene las funciones con soporte finito. Una condición necesaria y suficiente para que $A f$ exista y pertenezca a $B(T, F)$ para todo $f \in X$, es que se cumplan:*

1. *Para cada $f \in X$, el conjunto de funciones*

$$\{\sum_{s \in d} A(s, t) f(s) : d \in D\}$$

sea acotado en $B(T, F)$.

2. *Para cada f de un conjunto denso de X, Af existe y pertenece a $B(T, F)$.*

En estas condiciones, la aplicación $A : X \to B(T, F)$ es continua y lineal.

DEMOSTRACION. Con las notaciones anteriores, es claro que para todo $t \in T$ y $d \in D$, la aplicación lineal $R_{td} : X \to F$ es continua.

a) Necesidad: La condición 2 es evidente.

Por hipótesis, existe $\lim\limits_{d} R_{td}(f)$ para cada $f \in X$ y $t \in T$. Es fácil ver que para cada $t \in T$, la red $(R_{td})_{d \in D}$ está puntualmente acotada, pues si q_i es una seminorma continua en F y $d_0 \in D$ es tal que $\{q_i [R_{td}(f)] : d \supset d_0\}$ es acotado, para todo $d \in D$ se tiene

$$R_{td}(f) = R_{td'}(f) - R_{td''}(f),$$

donde $d' \supset d_0$ y $d'' \subset d_{0'}$ y $\{R_{td''}(f) : d'' \subset d_0\}$ es finito.

En virtud del teorema de Banach-Steinhaus, la aplicación

$$(*) \qquad f \to R_t(f) = \lim_{d} R_{td}(f)$$

es lineal y continua para todo $t \in T$. Como por hipótesis la función $Af \in B(T, F)$, y $Af(t) = R_t(f)$, resulta que $[R_t : t \in T\}$ está puntualmente acotado, y por tanto también está acotado para la topología en $\mathcal{L}(X, F)$ de la convergencia uniforme sobre los acotados de X, puesto que X es casi completo [13]. Sea $f \in X$. Como el conjunto $\{f_d : d \in D\}$, donde $f_d(s) = \chi_d(s) f(s)$, es acotado en X, resulta que

$$\{R_E(f_d) : d \in D, \ t \in T\}$$

es acotado en F, y por tanto se cumple 1.

b) Suficiencia: Sea $f \in X$. De (1) se deduce que para cada $t \in T$ el conjunto $\{R_{td}(f) : d \in D\}$ es acotado en F. Como existe el $\lim\limits_{d} R_{td}(f)$ para todo f de un conjunto denso de X, en virtud del teorema de Banach-Steinhaus resulta que el límite anterior existe para todo $f \in X$ y que la aplicación $R_t : X \to F$ definida en (*) es lineal y continua.

Para todo $f \in X$, el conjunto $\{R_k(f) : t \in T\}$ está acotado. En efecto, si q_i es una seminorma continua en F, de la hipótesis (1) se deduce que existe $K > 0$ tal que

$$q_i(R_{td}(f)) < K, \quad \forall\, t \in T, \quad \forall\, d \in D.$$

y por tanto

$$q_i(R_t(f)) \leqslant K, \quad \text{para todo} \quad t \in T,$$

luego $Af \in B(T, F)$.

Además, $A : X \to B(T, F)$ es continuo. En efecto, el conjunto $\{R_t : t \in T\}$ es equicontinuo, por estar puntualmente acotado. Por tanto, si V es un entorno de 0 en F, existe un entorno de 0, U, en X tal que si $g \in U$, $R_t(g) \in V$ para todo $t \in T$. Entonces, si (f_i) es una red convergente a 0 en X, existe un i_0 tal que $f_i \in U$ si $i \geqslant i_0$, y en consecuencia $R_i(f_i) = Af_i(t) \in V$ para todo $t \in T$, es decir, $Af_i \to 0$ en $B(T, F)$.

14. Observacion. Nótese que en la parte a) de la demostración del teorema anterior, se ha probado una condición más fuerte que (1). En efecto, la acotación del conjunto $\{R_t : t \in T\}$ para la topología de la convergencia acotada en $\mathcal{L}(X, F)$, demuestra que si H es un conjunto acotado en X, la familia

$$\Big\{\sum_{s \in d} A(s, t) f(s) : d \in D,\ f \in H\Big\}$$

es acotada en $B(T, F)$.

Supongamos en lo que sigue que S y T son semigrupos que admiten medias invariantes a la izquierda, y sean $\mathcal{F}$ y $\mathcal{G}$ dos bases de filtro en S y T, respectivamente, formadas por conjuntos cuya función característica es casi convergente a 1. La familia $\{A(s, t) : (s, t) \in S \times T\}$ de aplicaciones lineales continuas de E en F, diremos que es $(\mathcal{F}, \mathcal{G})$-regular (resp. $\mathcal{F}$-casi regular)) si para todo $f \in \mathcal{F}X(E)$, Af está definida y pertenece a $\mathcal{G}X(F)$ (resp. $X_C(F)$). Supondremos además que S no posee ideales finitos por la izquierda, con lo cual resulta que las funciones con soporte finito son $\mathcal{F}$-convergentes a 0.

Obsérvese que si la función característica de todo punto de S es $\mathcal{F}$-convergente, pueden suceder dos cosas: O bien existe $a \in S$ tal que χ_a es $\mathcal{F}$-convergente a 1, en cuyo caso se tiene $sa = a$ para todo $s \in S$ y la única media invariante sobre S es la evaluación en a, o bien la función característica de cualquier punto de S es $\mathcal{F}$-convergente a 0, y entonces S no puede poseer ideales finitos por la izquierda (Véase Mah [9], Teorema 3.1)

15. TEOREMA. *Sean E y F completos y $\mathcal{F}X(E)$ tonelado. Una condición necesaria y suficiente para que la familia $\{A(s, t)\}$ sea $(\mathcal{F}, \mathcal{G})$-regular es que se cumpla:*

1. *Para cada $f \in \mathcal{F}X(E)$, el conjunto de funciones*

$$\{\sum_{s \in d} A(s, t) f(s) : d \in D\}$$

sea acotado en $B(T, F)$.

2. *Para cada $x \in E$, $\sum_{s \in S} A(s, t)\, x$ existe y define una función de $\mathcal{G}X(F)$.*

3. *$Af \in \mathcal{G}X(F)$ para todo $f \in \mathcal{F}N(E)$, conjunto formado por las funciones cuyo soporte está contenido en el complemento de algún conjunto de $\mathcal{F}$.*

DEMOSTRACION. Por la proposición 11, $\mathcal{F}X(E)$ es cerrado en $B(S, E)$, y por tanto completo. Por lo indicado anteriormente, $\mathcal{F}X(E)$ contiene a las funciones con soporte finito. Según se indicó en la observación 12, el conjunto formado por las funciones constantes y las de $\mathcal{F}N(E)$, es denso en $\mathcal{F}X(E)$. En virtud del teorema 13, las condiciones indicadas son necesarias y suficientes para que Af exista y pertenezca a $B(T, F)$, para todo f de $\mathcal{F}X(E)$. Si se verifican 1, 2 y 3, como $\mathcal{G}X(F)$ es cerrado por la proposición 11, A es continua y transforma un subconjunto denso de $\mathcal{F}X(E)$ en $\mathcal{G}X(F)$, resulta que para todo $f \in \mathcal{F}X(E)$, $Af \in \mathcal{G}X(F)$. La necesidad de las condiciones, es inmediata en virtud de lo dicho anteriormente.

16. TEOREMA. *Sean E y F completos y $\mathcal{F}X(E)$ tonelado. Una condición necesaria y suficiente para que la familia $\{A(s, t)\}$ sea $\mathcal{F}$-casi regular, es que se cumpla:*

1. *Para cada $f \in \mathcal{F}X(E)$, el conjunto de funciones*

$$\{\sum_{s \in d} A(s, t) f(s) : d \in D\}$$

es acotado en $B(T, F)$.

2. *Para cada* $x \in E$, $\sum_{s \in S} A(s, t)\, x$ *existe y define una función de* $X_c(F)$.

3. $A f \in X_c(F)$ *para todo* $f \in \mathcal{F} N(E)$.

DEMOSTRACION. Es análoga a la del teorema 15, utilizando el teorema 6 en lugar de la proposición 11.

En las condiciones de los teoremas anteriores, vamos a estudiar ahora cuándo la aplicación que hace corresponder al $\mathcal{F}$-limite de una aplicación de $\mathcal{F} X(E)$, el casi límite o $\mathcal{G}$-limite de su transformada. Para ello, utilizaremos el siguiente teorema

17. TEOREMA. *Sean* E *y* F *espacios localmente convexos,* E *tonelado, y* X *un subespacio vectorial cerrado de* $B(S, F)$, *sobre el que existe una media* μ.

Si $\{T_s : s \in S\}$ *es una familia de aplicaciones lineales continuas de* E *en* F, *puntutalmemte acotada y tal que para todo* x *de un subconjunto denso* $E_0 \subset E$, *la función* $s \to T_s(x)$ *pertenece a* X, *entonces se cumple:*

1. *Para todo* $y \in E$, *la función* $s \to T_s(Y)$ *pertenece a* X.
2. *La aplicación lineal* $x \to T(x) = \mu_s(T_s(x))$, *es continua.*

DEMOSTRACION. Sea $y \in E$ y U un entorno de 0 en F. De las hipótesis resulta que $\{T_s : s \in S\}$ es equicontinua, luego existe V, entorno de 0 en E, tal que $T_s(x) \in U$, para todo $s \in S$ y $x \in V$. Sea $x \in E_0 \cap (y + V)$. Entonces $T_s(y) - T_s(x) \in U$ para todo $s \in S$, lo que prueba que la función $s \to T_s(Y)$ pertenece a $\overline{X} = X$.

Por la equicontinuidad de $\{T_s : s \in S\}$, la función de E en X, definida por $x \to f_x$, con $f_x(s) = T_s(x)$, es lineal y continua. Como $T(x) = \mu(f_x)$, y μ es continua, resulta 2.

18. TEOREMA. *En las hipótesis del teorema* 15 (*resp.* 16), *si además se cumple:*

i) *Para todo* $f \in \mathcal{F} N(E)$, $\lim_{\mathcal{G}} A f = 0$ (*resp.* $\tau(A f) = 0$, *donde* τ *es la única media invariante a la izquierda sobre* $X_c(F)$).

Entonces existe una aplicación lineal continua $T : E \to F$ *tal que*

$$T(\lim_{\mathcal{F}} f) = \lim_{\mathcal{G}} A f \ (\textit{resp. } T(\lim_{\mathcal{F}} f) = \tau(A f)),$$

para todo $f \in \mathcal{F} X(E)$.

DEMOSTRACION. Con las notaciones del teorema 13, sea

$$\widehat{T}(f) = \tau_t R_t(f) = \tau(Af).$$

Por el teorema 17, $\widehat{T}$ es una aplicación lineal continua de $\mathcal{F} X(E)$ en F. Si $\lim_{\mathcal{F}} f = x$, entonces $\lim_{\mathcal{F}} (f - x) = 0$. Por tanto, existe una red (g_i) en $\mathcal{F} N(E)$ que converge a $f - x$. En consecuencia $\widehat{T}(g_i)$ converge a $\widehat{T}(f - x) = \widehat{T}(f) - \widehat{T}(x)$. Como por hipótesis $T(g_i) = 0$, resulta

$$\widehat{T}(x) = \widehat{T}(f) = \tau(Af).$$

Teniendo en cuenta la proposición 10, el teorema resulta tomando como T la restricción de $\widehat{T}$ a E.

19. OBSERVACIONES.

a) Si E y F son espacios de Frechet, entonces también lo es $\mathcal{F} X(E)$, y por tanto es tonelado. Si $S = T = N$ y $\mathcal{F}$ es el filtro de los complementarios de las partes finitas de N, $\mathcal{F} X(E)$ es el subespacio de las sucesiones convergentes, y $\mathcal{F} N(E)$ está formado por las sucesiones con un número finito de términos no nulos. Teniendo en cuenta la observación 14, los teoremas 1 y 2 de Ramanujan [11] se deducen de los teoremas 15 y 18.

b) Si $E = F = \mathbf{R}$, S es un semigrupo sin ideales finitos a la izquierda, y $\mathcal{F}$ es el filtro de los complementarios de las partes finitas de S, el teorema 4.2 de Mah [9] resulta del teorema; 16.

BIBLIOGRAFIA

[1] Bombal, F. y Vera, G. — *Medias invariantes en espacios localmente convexos y semi-reflexividad.* Coll. Math., XXIV (1973), 3-31.

[2] Ching Chou y Peter Duran, J. — *Multipliers for the space of almost-convergent functions on a semigroup.* Proc. Am. Math. Soc. *39* (1973) 125-128.

[3] Day, M. M. — *Semigroups and Amenability.* Proceedings of a Symposium on Semigroups held at Wayne State University, Editado por K. W. Folley. Academic Press, New York, 1969.

[4] Deeds, J. B. — *Summability of vector sequnces.* Studia Math. *30* (1968), 361-372.

[5] Granirer, E. E. — *Functional analytic properties of extremely amenable semigroups.* Trans. Amer. Math. Soc. *137* (1969), 53-75.

[6] Greenleaf, F. P. — *Invariant means on topological groups.* Van Nostrand Reinhold Co. New York, 1969.

[7] Kurtz, J. C. — *Almost convergent sequences.* Tohoku Math. J. *22* (1970), 493-498.

[8] Lorentz, G. G. — *A contribution to the theory of divergent sequences.* Acta Math. *80* (1948), 167-190.

[9] Mah, P. F. — *Summability in amenable semigroups.* Trans. Amer. Soc. *156* (1971), 391-403.

[10] Melvin-Melvin, H. — *Generalised k-transformation in Banach spaces.* Proc. London Math. Soc. *53* (1951), 83-108.

[11] Ramanujan, M. S. — *Generalised Kojima-Toeplitz matrices in certain linear topological spaces.* Math. Ann. *159* (1965), 365-373.

[12] Robinson, A. — *On functional transformations and summability.* Proc. London Math. Soc. *50* (1950), 132-160.

[13] Schaefer, H. H. — *Topological vector spaces.* Macmillan Co. New York, 1966.

[14] Vera, G. — *Limites generalizados en A-módulos.* Tesis. En prensa.

Universidad Complutense de Madrid
Departamento de Teoría de Funciones.