SOBRE UNA NOCION GENERAL DE SUMABILIDAD

G. Vera

Recibido 7-I-76

PRESENTADO POR EL ACADÉMICO NUMERARIO D. BALTASAR RODRÍGUEZ-SALINAS

En este trabajo consideramos aplicaciones con valores en un espacio localmente convexo definidas en un conjunto infinito S sin ninguna estructura algebraica o topológica, y para ellas damos una noción muy general de sumabilidad (la J-sumabilidad) asociada a una familia J de medias sobre S.

En la teoría clásica de la sumabilidad desempeña un papel muy notable la noción de casi convergencia introducida por Lorentz en (12). Es obvio que una función casi convergente en general no converge a través de un filtro y también es bien sabido que no existe ningún método de sumabilidad matricial que sea equivalente a la casi convergencia. Sin embargo, la noción de J-sumabilidad que hemos dado, cuando se particulariza de modo adecuado la familia J, da lugar no sólo a la noción usual de convergencia a través de un filtro, sino que también se obtienen la casi convergencia y una clase muy amplia de métodos matriciales de sumabilidad (los asociados a matrices de Toeplitz positivas), cuando estos últimos se consideran aplicados dentro del campo de las funciones cuyo recorrido es acotado o relativamente compacto.

Estos resultados bastan para mostrar la generalidad del concepto de función J-sumable, aunque queda pendiente el estudiar con más detenimiento su alcance efectivo, es decir, el investigar qué métodos clásicos de sumación quedan fuera de esta noción. No obstante, la definición 14 de función (α, J)-sumable engloba todos los métodos usuales de sumación (incluso la J-sumabilidad) y es el punto de partida de una teoría general de sumabilidad de funciones no acotadas, de la cual nos ocuparemos en la segunda parte de este trabajo.

Motivados por el teorema de Banach-Saks (2), que establece que cada sucesión acotada en L^p $[0,1]$ $(1 < p < \infty)$ posee una subsucesión que es sumable Césaro, algunos autores se han ocupado del problema recíproco.

Se verifica que si un espacio de Banach E posee esta propiedad, entonces E es reflexivo. En (14) y (19) se muestra que se verifica un resultado mucho más general: basta requerir que cada sucesión acotada en E posea una subsucesión sumable débilmente mediante algún método «almost regular*» (véase el final del párrafo V). Por otra parte, en (18) se muestra, en el caso más general de ser E localmente convexo casi completo para la topología de Mackey, que la existencia de un límite generalizado sobre todas las sucesiones acotadas implica la semi-reflexividad del espacio E. Unos y otros resultados, de naturaleza análoga, en principio parecía difícil relacionarlos entre sí. La noción general de sumabilidad que hemos introducido muestra que dichos resultados son corolarios inmediatos de un principio general de semi-reflexividad contenido en los teoremas 24 y 29. El corolario 27, que comprende el teorema 16 de (3), como caso particular muestra que en el criterio de semi-reflexividad obtenido en (3) no es esencial que S sea un semigrupo ni que la media cuya existencia se postula sea invariante, sino que lo esencial es que S esté relacionado de algún modo con la familia J a la cual se pide que pertenezca la media.

Finalmente, mostramos una de las aplicaciones más interesantes que hemos encontrado: la teoría de sucesiones bien distribuidas. La noción de sucesión J-distribuida engloba varias nociones usuales de sucesiones bien distribuidas, de modo que es posible dar un tratamiento unificado a bastantes cuestiones generales de esta teoría.

Como fruto de la teoría de sucesiones J-distribuidas, hemos obtenido de nuevo la solución del problema de la distribución del primer dígito significativo, planteado y resuelto por Bumby y Ellentuck en (5). Hemos determinado una familia de medias J para la cual la sucesión $(\log_{10} n)$ está J-distribuida; cada media $\mu \in J$ suministra una solución del problema (véase proposición 38).

I. Definiciones y notaciones. Resultados previos

Sea S un conjunto con infinitos elementos, y $\mathfrak{m}(S)$ la familia de todas las medidas positivas μ, finitamente aditivas sobre el álgebra de todas las partes de S, tales que $\mu(S) = 1$.

Dada una función $\varphi : S \longrightarrow \mathbb{C}$, y una medida $\mu \in \mathfrak{m}(S)$, para cada partición finita de S, $p = (S_1, S_2, \ldots, S_n)$, y cada sistema de puntos $\sigma = (s_1, s_2, \ldots, s_n)$, con $s_i \in S_i$, $1 \leqslant i \leqslant n$, consideremos la suma

$$\Sigma(\varphi, \pi) = \sum_{k=1}^{n} \mu(S_i)\, \varphi(s_i),$$

donde $\pi = (\sigma, p)$.

Si existe el límite de la red de sumas

$$\lim_{\pi} \Sigma(\varphi, \pi) = x$$

(cuando el conjunto de índices se ha dirigido poniendo $\pi \geqslant \pi'$ si $\pi = (\sigma, p)$, $\pi' = (\sigma', p')$, y p es una partición más fina que p'), diremos que φ es μ-*sumable*, y pondremos entonces

$$\tilde{\mu}(\varphi) = \int_{S} \varphi \, d\mu = x. \qquad [1]$$

Se prueba fácilmente que toda función acotada $\varphi : S \longrightarrow \mathbb{C}$ es μ-sumable (véase (17), pág. 402), y que la aplicación $\varphi \longmapsto \tilde{\mu}(\varphi)$ es una media sobre el espacio vectorial B (S) de todas las funciones acotadas sobre S.

La aplicación $\mu \longmapsto \tilde{\mu}$ establece una biyección entre $\mathbf{m}$ (S) y el conjunto de todas las medias sobre B (S), en la cual a la media L le corresponde la medida $\mu \in \mathbf{m}$ (S) definida por $\mu(A) = L(\chi_A)$. En lo sucesivo será conveniente identificar la medida μ con la media escalar asociada $\tilde{\mu}$.

Sea ahora E un espacio vectorial localmente convexo separado. De modo análogo se define lo que se entiende por aplicación μ-sumable con valores en E. El conjunto de las aplicaciones μ-sumables $f : S \longrightarrow E$ es un espacio vectorial que denotaremos $L_\mu(S, E)$, sobre el cual la integral

$$\tilde{\mu} : f \longmapsto \tilde{\mu}(f) = \int_{S} f \, d\mu$$

es una aplicación lineal.

Se debe hacer notar que pueden existir aplicaciones μ-sumables no acotadas. En efecto, si $H \subset S$ es un suconjunto infinito μ-nulo ($\mu(H) = 0$), entonces cualquier aplicación $f : S \longrightarrow E$ que se anule en H^c es μ-sumable y $\tilde{\mu}(f) = 0$. Resulta entonces que si $f, g : S \longrightarrow E$ son dos aplicaciones que difieren en un conjunto μ-nulo, entonces f es μ-sumable si y sólo si lo es g, y en este caso $\tilde{\mu}(f) = \tilde{\mu}(g)$.

Diremos que una aplicación $f : S \longrightarrow E$ es μ-esencialmente acotada (resp. μ-esencialmente relativamente compacta) si existe $H \subset S$ con $\mu(H) = 0$ tal que $f(S \setminus H)$ es acotado (resp. relativamente compacto).

Se prueba fácilmente que si $f : S \longrightarrow E$ es μ-sumable, entonces f es μ-esencialmente acotada.

Resulta inmediatamente de la definición, que si f es μ-sumable entonces $\tilde{\mu}(f) \in \overline{\mathrm{co}\,(f(S))}$, donde $\mathrm{co}\,(f(S))$ es la envoltura convexa de $f(S)$. Conservando las notaciones y definiciones dadas en (3), si $B(S, E)$ es el espacio vectorial de todas las aplicaciones acotadas $f : S \longrightarrow E$, resulta que sobre el subespacio

$$X_\mu = L_\mu(S, E) \cap B(S, E)$$

la aplicación $f \longmapsto \tilde{\mu}(f)$ es una media.

Diremos que una aplicación $f : S \longrightarrow E$ es *débilmente* μ*-sumable* si es μ-sumable cuando E se considera dotado de la topología débil $\sigma(E, E')$.

De la definición resulta de modo inmediato que $f : S \longrightarrow E$ es débilmente μ-sumable y $\tilde{\mu}(f) = x$, si y sólo si para todo $x' \in E'$ la función

$$s \longmapsto \langle x', f(s) \rangle$$

es μ-sumable, verificándose que

$$\langle x', x \rangle = \mu \langle x', f \rangle.$$

Resulta de la proposición 6 de (3) que si la envoltura convexa cerrada y equilibrada de $f(S)$ es débilmente compacta, entonces $f(S)$ es débilmente μ-sumable.

En particular, si E es casi completo para la topología de Mackey, y $f(S)$ es relativamente compacto (o μ-esencialmente relativamente compacto) para la topología débil, entonces f es débilmente μ-sumable.

Si E es casi completo y f (S) es relativamente compacto (o μ-esencialmente relativamente compacto), entonces f es μ-sumable. La prueba se basa en que f (S) es precompacto. Entonces se puede proceder de modo análogo a como se hace en el caso de funciones numéricas mostrando que $\Sigma(\rho, \pi)$ es una red de Cauchy acotada y por consiguiente convergente.

1. DEFINICIÓN.—*Sea* $J \subset \mathfrak{m}(S)$, $J \neq \phi$. *Dada una aplicación* $f : S \longrightarrow E$, *si existe* $x \in E$ *tal que* $\tilde{\mu}(f) = x$ *para todo* $\mu \in J$, *diremos que* f *es J-sumable o J-convergente, y en este caso escribiremos* $J\text{-}\lim_s f(s) = x$. *Designaremos por* $J(S, E)$ *el espacio vectorial de todas las aplicaciones J-sumables* $f : S \longrightarrow E$.

Evidentemente J-lim es una media sobre $J(S, E) \cap B(S, E)$. Diremos que f es débilmente J-sumable si es J-sumable cuando E se considera dotado de la topología débil.

Si J consta de un único elemento μ, a veces convendrá escribir $\mu\text{-}\lim_s f(s)$ en lugar de $\{\mu\}\text{-}\lim_s f(s)$. (Evidentemente

$$\mu - \lim_s f(s) = \tilde{\mu}(f)).$$

II. Caracterización de la convergencia según un filtro

2. DEFINICIÓN.—*Sea* $J \subset \mathfrak{m}(S)$ $J \neq \phi$. *Si existe un filtro* $\mathcal{F}$ *en* S *tal que* $J(S, E)$, *es precisamente el conjunto de las aplicaciones* $f : S \longrightarrow E$ *para las que existe el límite a través de* $\mathcal{F}$, $\lim_{\mathcal{F}} f(s)$, *verificándose además que*

$$\lim_{\mathcal{F}} f(s) = J\text{-}\lim_s f(s),$$

diremos que la J-sumabilidad es equivalente a la convergencia a través de $\mathcal{F}$.

Seguidamente nos proponemos dar condiciones necesarias y suficientes para que la J-sumabilidad sea equivalente a la convergencia a través de un filtro. Necesitamos previamente algunas definiciones y resultados previos.

3. DEFINICIÓN.—*Sea* $J \subset \mathfrak{m}(S)$, $J \neq \phi$ *y* $\mathcal{F}$ *un filtro en* S. *Se define*

$$J^{\bullet} = \{ F \subset S : \mu(F) = 1, \quad \forall \mu \in J \},$$

y de modo dual se define también

$$\mathcal{F}^{\cdot} = \{ \mu \in \mathfrak{m} : \mu(F) = 1, \quad \forall F \in \mathcal{F} \}.$$

Es fácil comprobar que $J^{\cdot}$ es un filtro en S y que si $\mathcal{U}$ es un ultrafiltro, entonces $\mathcal{U}^{\cdot}$ consta de un solo elemento, a saber: la medida $\mu \in \mathfrak{m}(S)$ definida por $\mu(F) = 1$ si $F \in \mathcal{U}$, $\mu(F) = 0$ o si $F \notin \mathcal{U}$. Recíprocamente, si $\mu \in \mathfrak{m}(S)$ es una medida que solamente toma dos valores, 0 y 1, es obvio que $\{\mu\}^{\cdot}$ es un ultrafiltro. Será conveniente denotar por $\mathcal{P}$ el subconjunto de $\mathfrak{m}(S)$ formado por estas medidas y definir entonces $\mathcal{F}^{\circ} = \mathcal{F}^{\cdot} \cap \mathcal{P}$ para cada filtro $\mathcal{F}$ en S. Es fácil ver que $\mathcal{F}^{\circ} \neq \phi$, pues si $\mathcal{U}$ es un ultrafiltro que contiene a $\mathcal{F}$, y $\mathcal{U}^{\cdot} = \{\mu\}$, entonces necesariamente $\mu \in \mathcal{F}^{\circ}$.

4. PROPOSICIÓN.—*Si* $\mathcal{F}$ *es un filtro en* S, *entonces*

$$\mathcal{F} = \mathcal{F}^{\circ\cdot} = \mathcal{F}^{\cdot\cdot}.$$

DEMOSTRACIÓN.—La inclusión $\mathcal{F}^{\cdot\cdot} \subset \mathcal{F}^{\circ\cdot}$ resulta de $\mathcal{F}^{\circ} \subset \mathcal{F}^{\cdot}$. Puesto que $\mathcal{F} \subset \mathcal{F}^{\cdot\cdot}$, bastará probar que $\mathcal{F}^{\circ\cdot} \subset \mathcal{F}$. Supongamos que existe $G \in \mathcal{F}^{\circ\cdot}$, $G \notin \mathcal{F}$. Entonces $\mathcal{B} = \{G^{c} \cap F : F \in \mathcal{F}\}$ es una base de filtro. Si $\mathcal{U}$ es un ultrafiltro que contiene a B, se deduce que también contiene a $\mathcal{F}$, por lo cual la medida μ tal que $\{\mu\} = \mathcal{U}^{\cdot}$ pertenece a $\mathcal{F}^{\circ}$. Como $G \in \mathcal{F}^{\circ\cdot}$ se ha de cumplir que $\mu(G) = 1$, lo cual está en contradicción con $G^{c} \in \mathcal{U}$. Resulta entonces que $\mathcal{F}^{\circ\cdot} \subset \mathcal{F}$.

5. OBSERVACIÓN. — Es inmediato que para cada $J \subset \mathfrak{m}(S)$ es $J \subset J^{\cdot\cdot}$, pero no es cierto en general que $J = J^{\cdot\cdot}$, como lo mostrará el ejemplo 13.5. Sin embargo, se verifica que $J^{\cdot} = J^{\cdot\cdot\cdot}$, como consecuencia de la proposición 4 aplicada al filtro $J^{\cdot}$.

6. TEOREMA.—*Una condición suficiente para que la J-sumabilidad sea equivalente a la convergencia a través de un filtro* $\mathcal{F}$ *es que* $\mathcal{F}^{\circ} \subset J \subset \mathcal{F}^{\cdot}$.

DEMOSTRACIÓN.—Observemos en primer lugar que si $\mu \in \mathcal{P}$, entonces una aplicación $f : S \longrightarrow E$ es μ-sumable si y sólo si existe el límite $\lim_{\mathcal{U}} f(S)$ a través del ultrafiltro $\mathcal{U} = \{\mu\}^{\cdot}$, verificándose entonces que

$$\mu(f) = \lim_{\mathcal{U}} f(s).$$

En efecto, cuando $\mu \in \mathcal{P}$, cada suma

$$\Sigma(f, \pi) = \sum_{k=1}^{n} \mu(S_k) f(s_k)$$

se reduce a un único sumando $\mu(S_i) f(s_i)$ correspondiente al único S_k, $1 \leqslant k \leqslant n$, con $\mu(S_k) = 1$ y se ve fácilmente que la convergencia de la red $\Sigma(f, \pi)$ equivale a la convergencia de $f(s)$ a través del filtro

$$\mathcal{U} = \{ H \subset S : \mu(H) = 1 \}.$$

Esto prueba el teorema cuando $\mathcal{F}$ es un ultrafiltro (obsérvese que $\mathcal{U}^\circ = \mathcal{U}^\bullet = \{\mu\}$).

Sea ahora $f : S \longrightarrow E$ una aplicación J-sumable, donde $\mathcal{F}^\circ \subset \subset J \subset \mathcal{F}^\bullet$. Entonces, si $\mathcal{U}$ es un ultrafiltro, $\mathcal{U} \supset \mathcal{F}$, y si $\{\mu\} = \mathcal{U}^\bullet$ se tiene que

$$\mu \in \mathcal{U}^\bullet = \mathcal{U}^\circ \subset \mathcal{F}^\circ \subset J,$$

por lo cual $\mu(f) = x$, siendo $x = \text{J-}\lim\limits_{s} f(s)$. Por lo que se acaba de probar, resulta que $\lim\limits_{\mathcal{U}} f(s) = x$ para cada ultrafiltro $\mathcal{U} \supset \mathcal{F}$, lo cual implica que existe $\lim\limits_{\mathcal{F}} f(s) = x$.

Recíprocamente, supongamos que existe el límite $\lim\limits_{\mathcal{F}} f(s) = x$. Dado un entorno de $\mathbf{0}$ convexo, $V \subset E$, sea

$$H = \{ s \in S : f(s) \in (x + V) \}.$$

Si $\mu \in J$, entonces $\mu(H) = 1$, pues $\mu \in \mathcal{F}^\bullet$ y $H \in \mathcal{F}$. Sea $\pi = = (\sigma_0, p_0)$, donde $p_0 = (H, H^c)$.

Sea $\pi \geqslant \pi_0$, $\pi = (\sigma, p)$, donde $p = (S_1, \ldots, S_n)$, $\sigma = (s_1, \ldots, s_n)$, $s_k \in S_k$, $1 \leqslant k \leqslant n$

$$\Sigma(f, \pi) = \sum_{k=1}^{n} f(s_k) \mu(S_k) = \sum_{k \in D} f(s_k) \mu(S_k),$$

donde $D \subset \{1, 2, \ldots, n\}$ es el subconjunto de índices correspondientes a los $S_k \subset H$. Como $f(s_k) \in f(H)$, si $k \in D$ y

$$\sum_{k \in D} \mu(S_k) = 1,$$

resulta que

$$\Sigma (f, \pi) \in \text{co} (f (H)) \subset (x + V).$$

Hemos probado así que

$$\lim_{\pi} \Sigma (f, \pi) = x,$$

y por consiguiente que f es μ-sumable y que se cumple $\mu (f) = x$.

7. Corolario. — *Una aplicación* f : $S \longrightarrow E$ *converge hacia* x $\in E$ *a través de un filtro* $\mathcal{F}$ *en* S *si y sólo si es* $\mathcal{F}^{\bullet}$*-sumable y*

$$\mathcal{F}^{\bullet}\text{-}lim_{s} \text{ f (s)} = \text{x}$$

(*y también si y sólo si es* $\mathcal{F}^{\circ}$*-sumable y*

$$\mathcal{F}^{\circ}\text{-}lim_{s} \text{ f (s)} = \text{x}).$$

Demostración.—Basta aplicar el teorema 6 cuando J $= \mathcal{F}^{\bullet}$ y J $= \mathcal{F}^{\circ}$.

8. Corolario.—*Una condición necesaria para que la J-sumabilidad sea equivalente a la convergencia según un filtro* $\mathcal{F}$ *es que* $J^{\bullet} = \mathcal{F}$.

Demostración.—Sea A $\in$ J$^{\bullet}$ y $x \in$ E, $x \neq 0$; entonces la función $f (s) = \chi_A (s)\, x$ es J-sumable con

$$\text{J-}\lim_{s} f (s) = x.$$

Entonces también es convergente a través de $\mathcal{F}$ y

$$x = \lim_{\mathcal{F}} f (s) = (\lim_{\mathcal{F}} \chi_A (s))\, x = (\mathcal{F}^{\bullet}\text{-}\lim_{s} \chi_A (s))\, x,$$

donde la última igualdad es consecuencia del corolario 7. De

$$\mathcal{F}^{\bullet}\text{-}\lim_{s} \chi_A (s) = 1,$$

se deduce que μ (A) = 1 para cada $\mu \in \mathcal{F}^{\bullet}$, es decir, que A $\in \mathcal{F}^{\bullet\bullet} = \mathcal{F}$ (proposición 4). Hemos establecido así que J$^{\bullet} \subset \mathcal{F}$. Basta observar ahora que el razonamiento que acabamos de efectuar se puede invertir, obteniendo entonces que $\mathcal{F} \subset J^{\cdot}$, lo cual prueba la igualdad $J^{\cdot} = \mathcal{F}$.

9. TEOREMA.—*Una condición necesaria y suficiente para que la J-sumabilidad sea equivalente a la convergencia a través de algún filtro es que $J(S, E) = J^{\cdot\cdot}(S, E)$.*

DEMOSTRACIÓN.—Supongamos que la J-sumabilidad equivale a la convergencia según un filtro $\mathcal{F}$. Entonces es $J^{\cdot} = \mathcal{F}$ en virtud del corolario 8 y por tanto $J^{\cdot\cdot} = \mathcal{F}^{\cdot}$. Se tiene entonces que

$$J^{\cdot\cdot}(S, E) = \mathcal{F}^{\cdot}(S, E) = J(S, E),$$

donde la segunda igualdad es consecuencia de la hipótesis y del corolario 7.

Recíprocamente, al ser $J \subset J^{\cdot\cdot}$ resulta que $J^{\cdot\cdot}$-lim es la restricción de J-lim a $J^{\cdot\cdot}(S, E) \subset J(S, E)$, pero al verificarse la igualdad $J^{\cdot\cdot}(S, E) = J(S, E)$ se obtiene que la J-sumabilidad es equivalente a la $J^{\cdot\cdot}$-sumabilidad, la cual, a su vez, equivale a la convergencia según el filtro $\mathcal{F} = J^{\cdot}$.

10. OBSERVACIÓN.—La condición $J(S, E) = J^{\cdot\cdot}(S, E)$ se puede verificar aunque sea $J \neq J^{\cdot\cdot}$, como lo mostrará el ejemplo 13.6.

La condición $J = J^{\cdot\cdot}$ es necesaria y suficiente para que exista un filtro $\mathcal{F}$ con $\mathcal{F}^{\cdot} = J$. En efecto, si $J = J^{\cdot\cdot}$, el filtro $\mathcal{F} = J^{\cdot}$ cumple que $\mathcal{F}^{\cdot} = J$ y recíprocamente de $\mathcal{F}^{\cdot} = J$ se deduce

$$J = \mathcal{F}^{\cdot} = (\mathcal{F}^{\cdot\cdot})^{\cdot} = J^{\cdot\cdot}.$$

III. J-sumabilidad de funciones convergentes. Ejemplos

Una cuestión de gran interés en teoría de sumabilidad consiste en caracterizar, dentro de una determinada clase de métodos de sumación, aquellos para los que cada función convergente es sumable. Seguidamente abordaremos este problema en relación con el concepto de J-sumabilidad que hemos introducido y tomando como funciones convergentes las que resultan cuando en S se considera el filtro $\mathcal{L}$ formado por los conjuntos cuyo complementario es finito. Nos limitaremos al caso $E = \mathbb{K}$, pues *a posteriori* se podrá ver que los resultados obtenidos siguen siendo válidos en general y no dependen del espacio E.

11. TEOREMA. — *Una condición necesaria y suficiente para que*

toda función convergente (a través de $\mathcal{L}$) sea J-sumable es que exista una medida numerablemente aditiva $\lambda \in \mathfrak{m}(S)$, una familia $K \subset \mathcal{L}^{\cdot}$ y dos números reales $\alpha, \beta \geqslant 0$, $\alpha + \beta = 1$ tales que

$$J = \alpha \lambda + \beta K = \{ \alpha \lambda + \beta \tau : \tau \in K \}.$$

En estas condiciones si $\varphi : S \longrightarrow \mathbb{K}$ es convergente se tiene:

11.1.

$$\text{J-}\lim_s \varphi(s) = \beta \lim_s \varphi(s) + \alpha \sum \sigma_s,$$

donde

$$\sigma_s = \text{J-}\lim_t \delta_s(t) \text{ (*)}.$$

DEMOSTRACIÓN.—Supongamos que toda función convergente es J-sumable. Entonces, cada función δ_s, $(s \in S)$ es J-sumable y si

$$\sigma_s = \text{J-}\lim_t \delta_s(t)$$

se verifica

$$\sum_s \sigma_s = \alpha \leqslant 1.$$

Si $\alpha = 0$, entonces $\sigma_s = 0$ para todo $s \in S$, lo cual implica que

$$\text{J-}\lim_s \chi_F(s) = 1,$$

cualquiera que sea $F \in \mathcal{L}$, es decir, en este caso $J \subset \mathcal{L}^{\cdot}$, por lo cual se cumple 11.1 con $\alpha = 0$, $\beta = 1$, $J = K$. Si $\alpha \neq 0$, entonces queda definida una medida numerablemente aditiva $\lambda \in \mathfrak{m}(S)$ por

$$\lambda(A) = \frac{1}{\alpha} \sum_{s \in A} \sigma_s.$$

Para cada $\mu \in J$ se verifica que $\mu(A) - \alpha \lambda(A) \geqslant 0$, y por tanto, si $\alpha = 1$, la medida positiva $\mu - \lambda$ es idénticamente nula, ya que

$$\mu(S) - \lambda(S) = 1,$$

(*) δ_s es la función definida por $\delta_s(s) = 1$, $\delta_s(t) = 0$ si $t \neq s$.

lo cual prueba 11.1 en este caso. Finalmente, si $\alpha \neq 0$ y $\alpha \neq 1$, entonces la medida positiva $\nu = \beta^{-1}(\mu - \alpha\lambda)$ pertenece a $\mathfrak{m}$ (S) y se verifica que $\nu(F) = 1$ para cada $F \in \mathcal{L}^{\cdot}$, pues al ser $F^c = A$, finito,

$$\nu(A) = \beta^{-1}(\mu(A) - \sum_{s \in A} \sigma_s) = 0.$$

Resulta así que

$$K = \{\nu = \beta^{-1}(\mu - \alpha\lambda) : \mu \in J\} \subset \mathcal{L}^{\cdot}$$

y por consiguiente que $J = \alpha\lambda + \beta K$ con $K \subset \mathcal{L}^{\cdot}$

Como consecuencia de $K \subset \mathcal{L}^{\cdot}$ se deduce que si φ es convergente entonces es K-sumable con

$$\text{K-}\lim_s \varphi(s) = \lim_s \varphi(s).$$

Pero como φ es acotada (pues es convergente según el filtro $\mathcal{L}$), se deduce que es λ-sumable y

$$\lambda(\varphi) = \sum_s \sigma_s \varphi(s),$$

y por consiguiente que se verifica 11.1.

Recíprocamente, si $J = \alpha\lambda + K$, con $K \subset \mathcal{L}^{\cdot}$ resulta que toda función convergente φ es K-sumable. Como también es λ-sumable por ser acotada, resulta de modo inmediato que φ es J-sumable.

12. Corolario.—*Una condición necesaria y suficiente para que toda función convergente φ (a través de $\mathcal{L}$) sea J-sumable, y que*

$$J\text{-}\lim_s \varphi(s) = \lim_s \varphi(s)$$

es que se cumpla $J \subset \mathcal{L}^{\cdot}$.

Demostración.—Según el teorema anterior, la condición

$$\text{J-}\lim_s \varphi(s) = \lim_s \varphi(s)$$

para toda función convergente φ equivale a que sea $\alpha = 0$ y $\beta = 1$.

13. Ejemplos:

13.1. Sea S un semigrupo para el cual existe una media invariante a la izquierda sobre B (S), y sea Γ (S) ⊂ **m** (S) el subconjunto de todas las medias invariantes a la izquierda. Las funciones acotadas Γ (S)-sumables son precisamente las funciones *casi convergentes* (12). La noción de casi convergencia se debe a Lorentz, el cual la introdujo en el caso particular de ser S el semigrupo aditivo de los números naturales, obteniendo en este caso la siguiente caracterización: una sucesión numérica acotada (α_n) es casi convergente hacia α si y sólo si

$$\lim_n \frac{\alpha_{p+1} + \dots + \alpha_{p+n}}{n} = \alpha$$

uniformemente en $p \in \mathrm{N}$ (Lorentz (12)). Este concepto ofrece gran interés dentro de la teoría de sumabilidad, por lo cual se ha extendido a situaciones más generales, en particular a funciones definidas sobre un semigrupo S (que posea alguna media invariante) con valores en un espacio localmente convexo E (véase (7), (11) y (13)). El concepto de función vectorial casi convergente dado en (4) corresponde a la noción de función acotada $f : \mathrm{S} \longrightarrow \mathrm{E}$, débilmente Γ-sumable, y se obtiene para él una caracterización análoga a la de Lorentz.

13.2. Siguiendo con las notaciones e hipótesis de 13.1, la noción de función numérica acotada $\Gamma^{\cdot\cdot}$-convergente ofrece un interés especial, pues estas funciones son precisamente los multiplicadores del espacio vectorial formado por las funciones casi convergentes (véase (7)).

Por otra parte, se muestra en (4) que la mayoría de las nociones usuales de convergencia para aplicaciones $f : \mathrm{S} \longrightarrow \mathrm{E}$ corresponden a convergencia a través de filtros $\mathcal{F} \subset \Gamma^{\cdot}$. Como entonces $\mathcal{F}^{\cdot} \supset \Gamma^{\cdot\cdot} \supset \Gamma$, resulta que la $\Gamma^{\cdot\cdot}$-convergencia es una noción de convergencia a través de un filtro ($\mathcal{F} = \Gamma^{\cdot}$) que extiende todas estas nociones usuales.

13.3. Sea ahora S un conjunto dirigido y $\mathcal{F}$ el filtro cuya base son los conjuntos $\mathrm{F}_s = \{t \in \mathrm{S} : t \geqslant s\}$. Entonces las medias $\mu \in \mathcal{F}^{\cdot}$ poseen la propiedad $\mu(\varphi) = \mu(\psi)$ si $\varphi(t) = \psi(t)$ para todo $t > s$, $(s \in \mathrm{S})$

Estas medias son las que en (18) hemos llamado límites generalizados. Los límites generalizados correspondientes a medias $\mu \in \mathcal{F}^{\circ}$

son precisamente los límites generalizados con la propiedad del producto

$$\mu(fg) = \mu(f)\,\mu(g), \qquad \forall\, f, g \in \mathrm{B}(\mathrm{S}, \mathbb{R}),$$

según hemos probado en (18).

Evidentemente, todo límite generalizado μ es una extensión del límite ordinario a través de $\mathcal{F}$, pues $\mu \in \mathcal{F}^{\cdot}$.

13.4. Sea ahora S el semigrupo aditivo de los números naturales, dirigido del modo usual. En este caso el filtro $\mathcal{F}$ que hay que considerar (según (13.3) es el filtro de Fréchet $\mathcal{L}$ formado por los conjuntos cuyo complementario es finito. Ahora $\mathcal{L}^{\cdot}$ está formado precisamente por las medidas no atómicas, y es obvio que $\Gamma \subset \mathcal{L}^{\cdot}$, siendo $\Gamma(\mathbb{N})$ la familia de las medidas invariantes. Los límites generalizados correspondientes a medidas $\mu \in \Gamma$ son los que usualmente reciben el nombre de límites generalizados de Banach.

13.5. La sucesión numérica $((-1)^n)$ es casi convergente hacia 0, pero no converge a través del filtro $\Gamma^{\cdot}$. Entonces

$$\Gamma(\mathbb{N}, \mathbb{R}) \neq \Gamma^{\cdot\cdot}(\mathbb{N}, \mathbb{R}),$$

por lo cual, en este caso se tiene $\Gamma \neq \Gamma^{\cdot\cdot}$.

13.6. Cuando $\mathrm{S} = \mathrm{N}$, se tiene $\mathcal{L}^{\circ} \neq \mathcal{L}^{\cdot}$, pues $\Gamma \subset \mathcal{L}^{\cdot}$ y $\Gamma \cap \mathcal{L}^{\circ} = \phi$, ya que ningún límite generalizado de Banach puede poseer la propiedad del producto. En general, si $\mathcal{F}$ es un filtro tal que $\mathcal{F}^{\circ} \neq \mathcal{F}^{\cdot}$ y si $\mathrm{J} = \mathcal{F}^{\circ}$, entonces $\mathcal{F}^{\cdot} = \mathrm{J}^{\cdot\cdot} \neq \mathrm{J}$, y sin embargo $\mathrm{J}(\mathrm{N}, \mathbb{R}) = \mathrm{J}^{\cdot\cdot}(\mathbb{N}, \mathbb{R})$ en virtud del teorema 6 y el corolario 8.

13.7. Sobre la extensión de las nociones de media y límite generalizado al caso de funciones con valores vectoriales, nos remitimos a (3) y (18). El modo usual de obtener medias sobre funciones $f : \mathrm{S} \longrightarrow \mathrm{E}$ es a partir de medias μ sobre funciones numéricas acotadas, tal como indicamos al principio de este trabajo, considerando las aplicaciones acotadas $f : \mathrm{S} \longrightarrow \mathrm{E}$, que son débilmente μ-sumables.

Este procedimiento es completamente general, pues como se muestra en (3), teorema 12, si L es una media sobre un subespacio $\mathrm{X} \subset \mathrm{B}(\mathrm{S}, \mathrm{E})$ que contenga todas las funciones f de la forma $f(s) = \varphi(s)\,x$ con $\varphi \in \mathrm{B}(\mathrm{S})$, $x \in \mathrm{E}$, entonces existe $\mu \in \mathfrak{m}(\mathrm{S})$ tal que toda $f \in \mathrm{X}$ es débilmente μ-sumable, verificándose además que $\mu(f) = \mathrm{L}(f)$. Resulta entonces que una condición necesaria y suficiente para que exista una media sobre X es que exista una media escalar $\mu \in \mathfrak{m}(S)$ tal que toda $f \in X$ es débilmente μ-sumable.

IV. Sumabilidad mediante métodos de Toeplitz generalizados

En este párrafo consideramos dos conjuntos S y T con infinitos elementos. En todo lo que sigue, α será una aplicación

$$\alpha : S \times T \longrightarrow \mathbb{R}$$

Si $f : T \longrightarrow E$ es una aplicación tal que para cada $s \in S$,

$$\sum_{t \in T} \alpha(s, t) f(t)$$

es convergente (en el sentido de que existe el límite de la red de sumas

$$\sigma_D(s) = \sum_{t \in D} \alpha(s, t) f(t)$$

cuando D recorre la familia de las partes finitas de T, dirigida por la inclusión conjuntista) denotaremos por $\alpha(f)$ la aplicación $g : S \longrightarrow E$ definida por

$$g(s) = \sum_{t \in T} \alpha(s, t) f(t).$$

14. Definición. — *Sea* f : *T* $\longrightarrow$ *E una aplicación tal que está definida* g = α (f) *y es J-sumable con*

$$J\text{-}lim_{s}\, g(s) = x$$

Diremos entonces que f *es* (α, *J*)*-sumable y que*

$$(\alpha, J)\text{-}lim_{t}\, f(t) = x.$$

Obsérvese que la (α, J)-sumabilidad comprende como caso particular la J-sumabilidad cuando $S = T$ y $\alpha(s, t) = 0$ si $s \neq t$, $\alpha(s, s) = 1$ para todo $s \in S$. Cuando $J = \mathcal{F}^{\cdot}$, donde $\mathcal{F}$ es un filtro en S, resulta que f es (α, J)-sumable si y sólo si

$$\sum_{t \in T} \alpha(s, t) f(t)$$

converge para todo $s \in S$ y existe el límite $\lim\limits_{\mathcal{F}} \alpha(f) = x$; en este caso

$$(\alpha, J)\text{-}\lim_t f(t) = x.$$

Resulta así que todos los métodos de sumabilidad lineales asociados a matrices infinitas son versiones particulares de la noción de (α, J)-sumabilidad que hemos dado.

Cuando α verifica determinadas condiciones en relación con la familia J (las cuales se cumplen automáticamente en la mayoría de los casos particulares), la (α, J)-sumabilidad está íntimamente relacionada con la $J(\alpha)$-sumabilidad respecto a determinada familia $J(\alpha) \subset \mathbf{m}(T)$.

Un problema central en la teoría de sumabilidad consiste en determinar condiciones suficientes (o mejor aún necesarias y suficientes) sobre una matriz infinita α para que se cumpla que $\alpha(f)$ es J-sumable siempre que f es J_0-sumable ($J \subset \mathbf{m}(S)$, J_0 $(\mathbf{m}(T))$ y también para que además se cumpla que

$$J\text{-}\lim \alpha(f) = J_0\text{-}\lim f.$$

En otras palabras, se trata de estudiar cuándo la (α, J)-sumabilidad es una extensión de la J_0-sumabilidad. En esta dirección están algunos de los resultados que veremos en este párrafo.

15. Definición.—*Sea $J \subset \mathbf{m}(S)$, $J \neq \phi$ y $\alpha : S \times T \longrightarrow \mathbb{R}$ una aplicación con las propiedades siguientes:*

15.1. $\alpha(s, t) \geqslant 0$ *para cada* $s \in S$ *y* $t \in T$.

15.2. *Para todo* $s \in S$ *es*

$$\sum_{t \in T} \alpha(s, t) = a(s) < +\infty.$$

15.3. *La función* $s \longmapsto a(s)$ *es J-sumable y*

$$J\text{-}\lim_s a(s) = 1.$$

Diremos entonces que α es una matriz de Toeplitz positiva de tipo J. Si además se verifica que la función $s \longmapsto \alpha(s, t)$ es J-sumable con

$$J\text{-}\lim_s \alpha(s, t) = 0,$$

cualquiera que sea $t \in T$, diremos que α es regular.

16. Proposición.—*Sea* $\alpha : S \times T \longrightarrow \mathbb{R}$ *una matriz de Toeplitz positiva de tipo* J, *y* E *un espacio vectorial localmente convexo, casi completo para su topología de Mackey. Entonces para cada* $\mathrm{f} \in B(T, E)$ *está definida* $\alpha(\mathrm{f}) = \mathrm{g}$, *y se cumple:*

16.1.

$$\langle x', g(s)\rangle \leqslant a(s) \sup \{ \langle x', f(t)\rangle \; ; \; t \in \mathrm{T} \}$$

para todo $x' \in E'$.

Demostración.—Para cada seminorma p sobre E, continua para la topología de Mackey, se verifica

$$\sum_{t \in \mathrm{T}} p(\alpha(s, t) f(t)) \leqslant a(s) \sup \{ p(f(t)) \; ; \; t \in \mathrm{T}\}.$$

Se deduce que para cada $s \in \mathrm{S}$ la red de sumas finitas $\sigma_{\mathrm{D}}(s)$ es de Cauchy para dicha topología. Es fácil ver que esta red es acotada y por consiguiente que es convergente para la topología de Mackey, por ser E casi completo para esta topología. Pero entonces $\sigma_{\mathrm{D}}(s)$ también converge para la topología de E, menos fina que la de Mackey

Para cada $x' \in \mathrm{E}'$ se tiene

$$\langle x', g(s)\rangle = \sum_{t \in \mathrm{T}} \alpha(s, t) \langle x', f(t)\rangle \leqslant a(s) \mathrm{M},$$

donde

$$\mathrm{M} = \sup \{ \langle x', f(t)\rangle \; : \; t \in \mathrm{T} \},$$

es decir, se cumple 16.1.

17. Proposición.—*En las condiciones de la proposición 16, si* $\mathrm{f} \in B(T, E)$ *y* $\mathrm{g} = \alpha(\mathrm{f})$ *se verifica:*

17.1. $\mathrm{g}(S)$ *es* μ*-esencialmente acotado para cada* $\mu \in J$.

17.2. *Si* $\mathrm{f}(T)$ *es relativamente compacto y* E *es casi completo, entonces* $\mathrm{g}(S)$ *es* μ*-esencialmente relativamente compacto para cada* $\mu \in J$.

17.3. *Si* $\mathrm{f}(T)$ *es relativamente compacto para la topología débil, entonces* $\mathrm{g}(S)$ *es* μ*-esencialmente relativamente compacto para esta topología para cada* $\mu \in J$.

DEMOSTRACIÓN.—Para cada $\mu \in J$ la función $a(s)$ es μ-esencialmente acotada por ser μ-sumable. Dada $\mu \in J$, sea $S_0 \subset S$ tal que $\mu(S_0) = 1$, y $a(S_0)$ es un conjunto acotado de números reales. Sea $c > 0$ tal que $a(S_0) \subset [0, c]$. De 16.1 se deduce 17.1 y también que

$$g(S_0) \subset [0, c] \cdot \overline{\mathrm{co}\,(f(T))}.$$

Si $f(T)$ es relativamente compacto para la topología débil, entonces $\overline{\mathrm{co}}\,(f(T))$ es débilmente compacto, pues E es casi completo para la topología de Mackey. Se deduce de esto que

$$[0, c] \cdot \overline{\mathrm{co}\,(f(T))}$$

es débilmente compacto y por consiguiente 17.3. La prueba de 17.2 es análoga, pero teniendo en cuenta ahora que al ser $f(T)$ precompacto, también lo es $\mathrm{co}\,(f(T))$, y entonces $\overline{\mathrm{co}\,(f(T))}$ es compacto.

18. TEOREMA. — *Sea $\alpha : S \times T \longrightarrow \mathbb{R}$ una matriz de Toeplitz positiva de tipo J. Entonces para cada $\mu \in J$ queda definida una medida $\lambda \in \mathfrak{m}(T)$ por*

$$\lambda(A) = \mu(\alpha(\chi_A)).$$

Si E es casi completo y $\mathrm{f}(T)$ *es relativamente compacto, entonces* f *es λ-sumable,* $\alpha(\mathrm{f})$ *es μ-sumable y se verifica*

$$\tilde{\lambda}(\mathrm{f}) = \tilde{\mu}(\alpha(\mathrm{f})).$$

Si E es casi completo para la topología de Mackey, y $\mathrm{f}(T)$ *es relativamente compacto para la topología débil, entonces* f *es débilbilmente λ-sumable,* $\alpha(\mathrm{f})$ *es débilmente μ-sumable y se verifica*

$$\tilde{\lambda}(\mathrm{f}) = \tilde{\mu}(\alpha(\mathrm{f})).$$

DEMOSTRACIÓN.—Si $f(T)$ es relativamente compacto para la topología débil y E es casi completo para la topología de Mackey, entonces $g = \alpha(f)$ es débilmente μ-sumable, pues $g(S)$ es μ-esencialmente relativamente compacto para la topología débil en virtud de 17.3. Entonces sobre el subespacio X de B (T, E) formado por las aplicaciones f cuya imagen $f(T)$ es relativamente compacta para la topología débil, definimos la aplicación

$$\mathrm{L}(f) = \tilde{\mu}(\alpha(f)).$$

Para cada $x' \in E'$ se tiene

$$\langle x', L(f) \rangle = \mu \langle x', g \rangle \leqslant \sup \{ \langle x', f(t) \rangle : t \in T \}$$

en virtud de 16.1, pues $\mu(a) = 1$. Se deduce así que

$$L(f) \in \overline{\text{co}(f(T))}.$$

Hemos probado que L es una media sobre X. En virtud del teorema 12 de (3) debe existir una media $\lambda \in \mathfrak{m}(T)$ tal que se cumpla

$$\lambda \langle x', f \rangle = \langle x', L(f) \rangle$$

para todo $x' \in E'$. Como f es débilmente λ-sumable, por ser $f(T)$ relativamente compacto para la topología débil se verifica que

$$\lambda \langle x', f \rangle = \langle x', \tilde{\lambda}(f) \rangle$$

para cada $x' \in E'$ y por consiguiente

$$L(f) = \tilde{\lambda}(f),$$

es decir,

$$\tilde{\mu}(\alpha(f)) = \tilde{\lambda}(f).$$

Si $f(T)$ es relativamente compacto y E es casi completo, se prueba de modo análogo, utilizando 17.2, que $g = \alpha(f)$ es μ-sumable y que

$$\tilde{\mu}(\alpha(f)) = \tilde{\lambda}(f).$$

Aplicando el resultado obtenido a la función $f = \chi_A$ se deduce que λ es la medida determinada por

$$\lambda(A) = \mu(\alpha(\chi_A)).$$

En lo sucesivo, si α es una matriz de Toeplitz positiva de tipo J y $\mu \in J$, denotaremos por $\mu \circ \alpha$ la medida $\lambda \in \mathfrak{m}(T)$ definida por

$$\lambda(A) = \mu(\alpha(\chi_A)) \quad (A \subset T),$$

y por $J(\alpha)$ la familia $\{\mu \circ \alpha : \mu \in J\}$.

Designaremos por $\mathcal{L}_T$ el filtro en T formado por los complementarios de los conjuntos finitos

19. TEOREMA. — *Sea* $\alpha : S \times T \longrightarrow \mathbb{R}$ *una matriz de Toeplitz positiva de tipo* J *regular. Entonces* $J(\alpha) \subset \mathcal{L}^{\cdot}_{T}$.

DEMOSTRACIÓN.—Consecuencia inmediata de la condición de regularidad.

20. TEOREMA.—*Sea* $\alpha : S \times \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$ *una matriz de Toeplitz positiva de tipo* J *regular que cumple:*

20.1. $\alpha_{sk} \geqslant \alpha_{s\,k+1}$ *para todo* $s \in S$ *y* $k \in \mathbb{N}$.

Entonces $J(\alpha) \subset \Gamma(\mathbb{N})$.

DEMOSTRACIÓN.—Sea (x_k) una sucesión numérica acotada arbitraria y $\lambda = \mu \circ \alpha \in J(\alpha)$ con $\mu \in J$. Consideremos las funciones

$$g(s) = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_{sk} x_k$$

$$h(s) = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_{sk} x_{k+1}.$$

Bastará probar que $\mu(g - h) = 0$. Se tiene

$$g(s) - h(s) = \lim_{n} \sigma_n(s),$$

donde

$$\sigma_n(s) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_{sk}(x_{k+1} - x_k) = \sum_{k=1}^{n-1} (\alpha_{sk} - \alpha_{s\,k+1}) x_{k+1} + \alpha_{sn} x_{n+1} - \alpha_{s1} x_1.$$

Luego

$$|\sigma_n(s)| \leqslant 2\,\alpha_{s1} \mathrm{M},$$

donde $\mathrm{M} = \sup\limits_{k} |x_k|$ y por lo tanto

$$|g(s) - h(s)| \leqslant 2\,\alpha_{s1} \mathrm{M}$$

para todo $s \in S$. Se deduce entonces que $\mu(|g - h|) = 0$ y como consecuencia $\mu(g - h) = 0$.

21. TEOREMA. *Sea* $\alpha : S \times T \longrightarrow \mathbb{R}$ *una matriz de Toeplitz po-*

sitiva de tipo J y E casi completo. Sea f : $T \longrightarrow E$ *tal que* f (T) *es relativamente compacto. Entonces* f *es* (α, J)*-sumable si y sólo si es* $J(\alpha)$*-sumable y en este caso*

$$J(\alpha)\text{-}lim_{t}\, \mathrm{f}(\mathrm{t}) = (\alpha, J)\text{-}lim_{t}\, \mathrm{f}(\mathrm{t}).$$

DEMOSTRACIÓN.—Sea $\lambda = \mu \circ \alpha \in \mathrm{J}(\alpha)$ con $\mu \in \mathrm{J}$. Entonces

$$\tilde{\lambda}(f) = \tilde{\mu}(\alpha(f))$$

en virtud del teorema 18. El resultado es consecuencia de las definiciones.

22. TEOREMA.—*Sea* $\alpha : S \times T \longrightarrow \mathbb{R}$ *una matriz de Toeplitz positiva de tipo J y E casi completo para la topología de Mackey. Una aplicación* f $\in B(T, E)$ *es débilmente* (α, J)*-sumable si y sólo si es débilmente* $J(\alpha)$*-sumable, verificándose entonces*

$$J(\alpha)\text{-}lim_{t}\, \mathrm{f}(\mathrm{t}) = (\alpha, J)\text{-}lim_{t}\, \mathrm{f}(\mathrm{t}).$$

DEMOSTRACIÓN.—Sea

$$\varphi_{x'}(t) = \langle x', f(t)\rangle, \ (x' \in \mathrm{E}');$$

f es débilmente (α, J)-sumable y

$$(\alpha, \mathrm{J})\text{-}\lim_{t} f(t) = x,$$

si y sólo si $\alpha(f)$ es débilmente J-sumable, es decir, si y sólo si

$$\mu\,\langle x', \alpha(f)\rangle = \langle x', x\rangle$$

para todo $\mu \in \mathrm{J}$ y para todo $x' \in \mathrm{E}'$. Como

$$\langle x', \alpha(f)\rangle = \alpha(\varphi_{x'}),$$

esta condición equivale a que cada $\varphi_{x'}$ sea (α, J)-sumable con

$$(\alpha, \mathrm{J})\text{-}\lim \varphi_{x'} = \langle x', x\rangle,$$

lo cual es equivalente en virtud del teorema 21 a que cada $\varphi_{x'}$ sea J (α)-sumable con

$$\mathrm{J}(\alpha)\text{-}\lim \varphi_{x'} = \langle x', x\rangle,$$

es decir, a que f sea débilmente J (α)-sumable con

$$\mathrm{J}\,(\alpha)\text{-}\lim_{t} f(t) = x.$$

23. Ejemplos:

23.1. Sea S un conjunto dirigido y $\mathcal{F}$ el filtro considerado en **13.3.** Si $\mathrm{J} \subset \mathcal{F}^{\cdot}$, entonces J-lim es una extensión del límite a través de $\mathcal{F}$, por lo cual toda matriz de Toeplitz positiva $\alpha : \mathrm{S} \times \mathrm{T} \longrightarrow \mathbb{R}$, en sentido usual, es una matriz de Toeplitz positiva de tipo J (que será regular si es regular en sentido ordinario).

Evidentemente, si $\mathcal{F}^{\circ} \subset \mathrm{J} \subset \mathcal{F}^{\cdot}$ los dos conceptos son equivalentes, pues entonces J-lim equivale al límite a través de $\mathcal{F}$.

Supongamos en lo que sigue que se cumple esta última condición, de modo que α es una matriz de Toepitz positiva en sentido ordinario. En este caso, la (α, J)-sumabilidad es precisamente la sumabilidad usual mediante la matriz α, y resulta del teorema 21 que si $f(\mathrm{T})$ es relativamente compacto, entonces la J (α)-sumabilidad de f equivale a la sumabilidad usual de f mediante la matriz Toeplitz positiva α si E es casi completo.

Análogamente, si E es casi completo para la topología de Mackey y $f(\mathrm{T})$ es acotado, en virtud del teorema 22 resulta que la sumabilidad de f mediante la matriz α en sentido débil, equivale a la J (α)-sumabilidad débil.

23.2. Sea $\mathrm{T} = \mathrm{N}$, $\mathrm{S} = (0, 1)$ dirigido por el orden $\geqslant$ de R y $\mathcal{F}$ el filtro considerado en 23.1. Se comprueba fácilmente que

$$\alpha(s, k) = s^{k-1} - s^{k}$$

define una matriz de Toeplitz positiva en sentido ordinario, regular y verificando **20.1**, por lo cual $\mathcal{F}^{\cdot}(\alpha) \subset \Gamma(\mathbb{N})$. Sea , pues,

$$\mathcal{F}^{\circ} \subset \mathrm{J} \subset \mathcal{F}^{\cdot}.$$

Si

$$\sum_{k=1}^{\infty} x_k$$

es una serie de vectores $x_k \in \mathrm{E}$, cuyas sumas parciales

$$f(n) = \sum_{k=1}^{n} x_k$$

forman un conjunto acotado en E (casi completo para la topología de Mackey), resulta de la relación

$$\sum_{n=1}^{\infty} \alpha(s, n) f(n) = \sum_{k=1}^{\infty} s^{k-1} x_k,$$

que la serie es débilmente sumable en sentido de Abel si y sólo si es J (α)-sumable, verificándose entonces que

$$J(\alpha)\text{-}\lim_n \sum_{k=1} x_k = \lim_{s \to 1} \sum_{k=1}^{\infty} s^{k-1} x_k.$$

Si se supone E casi completo y la sucesión de sumas parciales relativamente compacta, se obtiene un resultado análogo.

23.3. Sea (p_i) una sucesión de números reales $p_i \geqslant 0$ con $p_1 > 0$ y α: $N \times N \longrightarrow R$ la matriz de Toeplitz positiva definida por $\alpha(i, j) = 0$ si $i > j$,

$$\alpha(i, j) = \frac{p_i}{p_1 + \dots + p_j} \quad \text{si} \quad i \leqslant j$$

Sea $\mathcal{L}^\circ \subset J \subset \mathcal{L}^\cdot$. Si consideramos la J (α)-sumabilidad, se obtienen resultados análogos a los de 23.3 en relación con la sumabilidad en sentido de Riesz.

Si la serie $\sum_{i=1}^{\infty} p_i$ no converge, entonces α es regular y por consiguiente $J(\alpha) \subset \mathcal{L}^\cdot$. Si la serie $\sum_{i=1}^{\infty} p_i$ no converge y (p_i) es decreciente, entonces α verifica 20.1 y en este caso se deduce que $J(\alpha) \subset \Gamma(N)$.

Un caso particularmente interesante se obtiene cuando $p_i = 1$, $\forall\, i \in N$, pues entonces se obtiene la sumabilidad en sentido de Césaro. Si $J_p = J_{p-1}(\alpha)$, $p = 1, 2, \dots, m$, $J_0 = J$, y α es la matriz correspondiente a las medias de Césaro, es fácil comprobar que la H_m-sumabilidad en sentido de Hölder corresponde a la J_p-sumabilidad.

Finalmente, si la serie $\sum_{i=1}^{\infty} p_i$ es convergente, entonces

$$\operatorname{card}(J(\alpha)) = 1,$$

y la única medida $\lambda \in J(\alpha)$ es numerablemente aditiva y está definida por

$$\lambda(\{n\}) = p_n \sum_{i=1}^{\infty} p_i^{-1}$$

V. Sumabilidad y semi-reflexividad

La noción de J-sumabilidad permite dar una condición suficiente de semi-reflexividad, de la que se deducen fácilmente como corolario las obtenidas en (18), (3), (6) y (14).

24. TEOREMA.—*Sea E casi completo para la topología de Mackey con la propiedad de que toda sucesión acotada en E posee una subsucesión débilmente J-sumable para algún $J \subset \mathcal{L}^{\bullet}$. Entonces E es semi-reflexivo.*

DEMOSTRACIÓN.—Sea $M \subset E$ acotado cerrado y convexo, y

$$K_1 \supset K_2 \supset K_3 \supset \ldots$$

sucesión decreciente de subconjuntos de E cerrados y convexos tales que $K_n \cap M \neq \phi$. Sea, pues $x_n \in K_n \cap M$. Por hipótesis existe una subsucesión $x_{n_k} = y_k$, que es débilmente J-sumable. Sea

$$y = \text{J-}\lim_k y_k = \mu\text{-}\lim_k y_k,$$

donde $\mu \in J \subset \mathcal{L}^{\bullet}$.

Como μ-lim es un límite generalizado,

$$\mu\text{-}\lim_k y_k = \mu\text{-}\lim_k z_k,$$

donde

$$z_1 = z_2 = \ldots = z_p = y_p, \; z_k = y_k \quad \text{si} \quad k > p.$$

Entonces, para cada $p \in N$, $y \in \overline{\text{co}\,(H_p)}$, donde

$$H_p = \{ y_k : k \geqslant p \}.$$

Como $H_p \subset M \cap K_{n_p}$ y $M \cap K_{n_p}$ es cerrado y convexo, se deduce que $y \in M \cap K_{n_p}$ para todo $p \in N$, lo cual implica que

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} (M \cap K_n) \neq \phi.$$

Hemos probado que todo subconjunto $M \subset E$ acotado cerrado y convexo es débilmente convexo compacto y por consiguiente débilmente compacto, pues E es casi completo para la topología de Mackey [(9), 24.3 (7)]. Resulta entonces que E es semi-reflexivo.

De modo inmediato se obtiene como corolario el resultado siguiente, obtenido en (18).

25. COROLARIO.—*Sea E casi completo para la topología de Mackey. Si existe un límite generalizado sobre B (N, E), entonces E es semi-reflexivo.*

DEMOSTRACIÓN.—Según lo indicado al final de 13.3, existe un límite generalizado L sobre B ($\mathbb{N}$, E) si y sólo si existe un límite generalizado $\mu \in \mathcal{L}^{*}$ tal que toda sucesión $(x_n) \in$ B (N, E) es débilmente μ-sumable verificándose

$$\mu \langle x', x_n \rangle = \langle x', L(x_n) \rangle$$

para todo $x' \in E'$.

También resulta como corolario del teorema 24 el siguiente resultado obtenido en (6) y (14) para espacios normados:

26. COROLARIO.—*Sea E casi completo para la topología de Mackey con la propiedad de que toda sucesión acotada en E posee una subsucesión sumable Césaro débilmente. Entonces E es semi-reflexivo.*

DEMOSTRACIÓN.—Si $\mathcal{L}_0 \subset J \subset \mathcal{L}^{*}$, como la matriz α que define las medias de Césaro es regular, se verifica que $J(\alpha) \subset \mathcal{L}^{*}$, en virtud del teorema 19. Según lo indicado en 23.1, resulta que una sucesión acotada es débilmente $J(\alpha)$-sumable si y sólo si es sumable Césaro en sentido débil. Entonces el resultado es una consecuencia inmediata del teorema 24.

Si S es un conjunto con infinitos elementos, y $J \subset \mathfrak{m}(S)$, $J \neq \phi$, diremos que S posee la propiedad P (J) si existe una matriz de Toeplitz positiva de tipo J regular $\alpha : S \times N \longrightarrow R$, tal que

$$a(s) = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha(s, k)$$

es una función acotada.

27. Corolario.—*Sea S con la propiedad $P(J)$ y E casi completo para la topología de Mackey. Si para cada $g \in B(S, E)$ existe $\mu \in J$ tal que g es débilmente μ-sumable, entonces E es semi-reflexivo.*

Demostración. — *Sea* $\alpha : S \times N \longrightarrow \mathbb{R}$ una matriz de Toeplitz positiva de tipo J regular tal que

$$a(s) = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha(s, k)$$

es acotada. Dada una sucesión acotada (x_k) en E, sea

$$g(s) = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha(s, k)\, x_k .$$

Se deduce de 16.1 que $g \in B(S, E)$, y por hipótesis existe $\mu \in J$ tal que g es débilmente μ-sumable. Pero esto significa que (x_k) es débilmente $(\alpha, \{\mu\})$-sumable, lo que equivale, según el teorema 22, a que (x_k) sea débilmente $\mu \circ \alpha$ sumable. Como $\mu \circ \alpha \in \mathcal{L}^{\bullet}$ (en virtud del teorema 19), el resultado es consecuencia del teorema 24.

Si un semigrupo S posee la propiedad (A) (véase (3)), entonces posee la propiedad P (Γ) cuando Γ es la familia de las medias invariantes. Entonces, si S posee la propiedad (A), y E es casi completo para la topología de Mackey, la existencia de una media invariante sobre B (S, E) equivale la existencia de $\mu \in \Gamma$ tal que toda $g \in B(S, E)$ es débilmente μ-sumable, la cual implica que E es semi-reflexivo. Se obtiene así de nuevo el teorema 16 de (3).

28. Teorema. — *Sea E un espacio vectorial localmente convexo cuyo dual E′ es separable para la topología fuerte $\beta(E', E)$, con la propiedad de que toda sucesión acotada en E posee una subsucesión*

débilmente J-sumable para algún $J \subset \mathcal{L}^{\cdot}$. Entonces E es semi-reflexivo.

DEMOSTRACIÓN.—Dado $x'' \in E''$, razonando como en el teorema 26 del capítulo IV de (18), se deduce que existe una sucesión acotada (x_m) que converge a x'' en la topología $\sigma(E'', E')$. Por hipótesis existe una subsucesión $x_{n_k} = y_k$ que es débilmente μ-sumable para algún $\mu \in \mathcal{L}^{\cdot}$. Sea

$$y = \mu\text{-}\lim_k y_k.$$

Entonces para cada $x' \in E'$ se tiene

$$\langle x', x'' \rangle = \lim_k \langle x', y_k \rangle = \mu\text{-}\lim_k \langle x', y_k \rangle = \langle x', y \rangle$$

y por consiguiente $x'' = y \in E$, lo cual prueba que E es semi-reflexivo.

Como corolario de este último teorema se obtiene el teorema 29 del capítulo IV de (18).

Sea $\alpha : S \times \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$ y $J \subset \mathbf{m}(S)$, $J \neq \phi$ con la siguiente propiedad: C) toda sucesión numérica convergente es (α, J)-sumable y existe una sucesión

$$(\delta_0, \delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n, \ldots)$$

con $\delta_0 \neq 0$, tal que

$$(\alpha, J) - \lim_n x_n = \delta_0 \lim_n x_n + \sum_{n=1}^{\infty} \delta_n x_n$$

para cada sucesión numérica convergente (x_n).

29. TEOREMA.—*Sea E completo para la topología de Mackey, con la propiedad de que toda sucesión acotada en E posee una subsucesión que es débilmente (α, J)-sumable para algún par (α, J) con la propiedad C). Entonces E es semi-reflexivo.*

DEMOSTRACIÓN. — Probaremos que cada subconjunto acotado $M \subset E$ posee la siguiente propiedad de permutabilidad de límites:

PL) Para cada sucesión acotada (x_n) en M y para cada sucesión (x'_k) de formas lineales continuas en H, donde $H \subset E'$ es un conjunto absolutamente convexo y $\sigma(E', E)$ compacto, se verifica que los límites dobles

$$\lim_n \lim_k \langle x'_k, x_n \rangle, \qquad \lim_n \lim_k \langle x'_k, x_n \rangle,$$

si existen, son iguales.

Una vez que esté establecido PL), se seguirá, en virtud de (9) 24.6 (1), que cada subconjunto acotado $M \subset E$ es débilmente relativamente compacto y por consiguiente que E es semi-reflexivo.

Sea, pues, $H \subset E'$ absolutamente convexo, $\sigma(E', E)$-compacto y x'_0 un punto de aglomeración de una sucesión $(x'_m) \subset H$. Supongamos que $(x_n) \subset M$ es una sucesión tal que existen los límites

$$u = \lim_n \lim_m \langle x'_m, x_n \rangle, \qquad v = \lim_m \lim_n \langle x'_m, x_n \rangle \ (*).$$

Si seguimos llamando (x_n) a una subsucesión de (x_n) que sea débilmente (α, J)-sumable, se sigue verificando (*). Sea, pues,

$$x = (\alpha, J) - \lim_n x_n.$$

Se tiene

$$\langle x'_0, x \rangle = \text{J-}\lim_s \sum_{k=1}^{\infty} \alpha(s, k) \langle x'_0, x_k \rangle = \delta_0 u + \sum_{n=1} \delta_n \langle x'_0, x_n \rangle$$

pues

$$\lim_k \langle x'_0, x_k \rangle = u$$

y se verifica C). Análogamente:

$$\langle x'_m, x \rangle = \text{J-}\lim_s \sum_{k=1}^{\infty} \alpha(s, k) \langle x'_m, x_k \rangle = \delta_0 v_m + \sum_{n=1}^{\infty} \delta_n \langle x'_m, x_n \rangle,$$

donde

$$\lim_k \langle x'_m, x_k \rangle = v_m.$$

De la condición C) se deduce que

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\delta_n| < \infty,$$

lo cual implica la convergencia uniforme de la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \delta_n \langle x_m, x_n \rangle .$$

Resulta entonces

$$\langle x'_0, x \rangle = \delta_0 v + \sum_{n=1}^{\infty} \delta_n \langle x'_0, x_n \rangle$$

y por consiguiente $u = v$, pues $\delta_0 \neq 0$. Resulta entonces que se verifica PL).

La condición C) se cumple, por ejemplo, cuando

$$\alpha : \mathrm{N} \times \mathrm{N} \longrightarrow \mathrm{R}$$

es una matriz de las consideradas en (19) («almost regular*») y cuando $\mathrm{J} = \mathcal{L}^{\cdot}$. Estas matrices están caracterizadas por:

i)

$$\Sigma \mid \alpha(n, m) \mid < \mathrm{M} < +\infty .$$

ii)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \alpha(n, m) \longrightarrow c, \quad \text{si} \quad m \longrightarrow \infty .$$

iii)

$$\alpha(m, n) \longrightarrow c_n \quad \text{si} \quad m \longrightarrow \infty .$$

iv)

$$c \neq \sum_{n=1}^{\infty} c_n .$$

Por consiguiente, el resultado central de (19) (para espacios de Banach) resulta como corolario inmediato del teorema 29.

También se verifica la condición C) cuando α) es la identidad y J es una familia como la considerada en el teorema 11.

VI. Sucesiones J-distribuidas respecto a una medida. Aplicaciones

Sea X un espacio topológico compacto separado y $\mathcal{K}$ (X) el espacio vectorial de las funciones continuas sobre X (reales o complejas), dotado de la topología de la convergencia uniforme.

30. DEFINICIÓN.—*Sea* $J \subset \mathbf{m}(N)$, $J \neq \phi$. *Una sucesión* $s = (x_n)$ *de puntos* $x_n \in X$, *diremos que es J-admisible si se verifica que* (x_n) *es una sucesión numérica J-sumable para cada* $\varphi \in \mathcal{K}(X)$.

31. PROPOSICIÓN. — *Si* $s = (x_n)$ *es J-admisible, entonces existe sobre X una única medida de probabilidad* (*) μ_s *que verifica:*

$$\int_X \varphi(x)\, d\,\mu_s(x) = \text{J-}\lim_n \varphi(x_n)$$

para cada $\varphi \in \chi(X)$.

DEMOSTRACIÓN.—Sea P la forma lineal sobre $\mathcal{K}$ (X) definida por

$$P(\varphi) = \text{J-}\lim_n \varphi(x_n)$$

como

$$|P(\varphi)| = |\lambda - \lim_n \varphi(x_n)| \leqslant \sup_n |\varphi(x_n)| \leqslant \|\varphi\|, \qquad (\lambda \in J),$$

resulta que P es continua. Como $P(\varphi) \geqslant 0$ si $\varphi \geqslant 0$, por el teorema de representación de Riesz se deduce que existe una única medida de Borel positiva μ_s, regular, verificando

$$P(\varphi) = \int_X \varphi(x)\, d\,\mu_s(x).$$

Evidentemente, $\mu_s(X) = 1$.

En las condiciones de la proposición 31 diremos que μ_s es la medida de probabilidad inducida por la sucesión J-admisible s.

En lo que sigue, μ será una medida de probabilidad en X.

(*) En este trabajo llamamos medida de probabilidad a una medida de Borel positiva en X tal que $\mu(X) = 1$.

Un conjunto de Borel $M \subset X$, diremos que es μ-continuo si $\mu(\partial M) = 0$ (∂M es la frontera de M).

32. Definición.—*Una sucesión* $s = (x_n)$ *en* X *se dice que está J-distribuida respecto a* μ *si se verifica que para cada conjunto de Borel* μ*-continuo* M*, la sucesión* $\chi_M(x_n)$ *es J-sumable y*

$$J\text{-}\lim_n \chi_M(x_n) = \mu(M).$$

33. Proposición.—*Una sucesión* $s = (x_n)$ *en* X *está J-distribuida respecto a* μ *si y sólo si es J-admisible y* $\mu_s = \mu$. (μ_s es la medida inducida por s según la proposición 31.)

Demostración. — Supongamos que (x_n) está J-distribuida respecto a μ, y sea $\mathcal{H}$ el conjunto de las funciones simples

$$\sum_{i=1} \beta_i \chi_{M_i}$$

formadas con conjuntos de Borel μ-continuos. Evidentemente,

$$J\text{-}\lim_n h(x_n) = \int_X h(x)\, d\mu(x)$$

para cada $h \in \mathcal{H}$. Es fácil probar (véase (10), pág. 176) que para cada $\varphi \in \mathcal{K}(X)$ y $\varepsilon > 0$ existe $h \in \mathcal{H}$ tal que

$$|\varphi(x) - h(x)| < \epsilon$$

para todo $x \in X$. Entonces si $\lambda \in J$, se tiene:

$$\left| \int_X d\mu - (\lambda - \lim_n \varphi(x_n)) \right| \leqslant \left| \int_X (\varphi - h)\, d\mu \right| +$$

$$+ |\lambda - \lim_n (\varphi(x_n) - h(x_n))| \leqslant 2\epsilon \quad (\lambda \in J).$$

Resulta así que

$$\int \varphi\, d\mu = \lambda - \lim_n \varphi(x_n)$$

cualquiera que sea $\lambda \in J$. Esto prueba que $\varphi(x_n)$ es J-sumable y que

$$J\text{-}\lim_n \varphi(x_n) = \int_X \varphi\, d\mu,$$

por lo cual (x_n) es J-admisible y se verifica que $\mu_s = \mu$.

Recíprocamente, si $s = (x_n)$ es J-admisible y μ_s es la medida de probabilidad inducida, sea M un conjunto de Borel y μ-continuo, y sean $\varphi, \psi \in \mathcal{K}(X)$ tales que

$$0 \leqslant \varphi \leqslant \chi_{\overset{\circ}{M}}, \quad \chi_{\bar{M}} \leqslant \psi \leqslant 1.$$

De la monotonía de la media λ-lim (con $\lambda \in J$), se deduce

$$\mu_s(\varphi) \leqslant \lambda - \lim_n \chi_M(x_n) \leqslant \mu_s(\psi)$$

y de esta desigualdad resulta

$$\mu_s(\overset{\circ}{M}) \leqslant \lambda - \lim_n \chi_M(x_n) \leqslant \mu_s(\overline{M}).$$

Como

$$\mu_s(M) = \mu_s(\overline{M}) = \mu_s(\overset{\circ}{M}),$$

pues $\mu_s(\partial M) = 0$, se deduce que

$$\lambda - \lim_n \chi_M(x_n) = \mu_s(M).$$

Como esto se verifica para cada $\lambda \in J$, resulta que $\chi_M(x_n)$ es J-sumable y que

$$\mu_s(M) = \text{J-}\lim_n \chi_M(x_n),$$

lo que prueba que (x_n) está J-distribuida respecto a μ_s.

34. PROPOSICIÓN.—*Sea $\mathcal{H} \subset \mathcal{K}(X)$ un subconjunto denso. Una condición necesaria y suficiente para que la sucesión* $s = (x_n)$ *esté J-distribuida respecto a μ es que para cada* $f \in \mathcal{H}$ *la sucesión* $f(x_n)$ *sea J-sumable y*

34.1.

$$\text{J-}\lim_n f(x_n) = \int f(x)\, d\mu(x).$$

DEMOSTRACIÓN.—La necesidad de la condición es evidente después de la proposición 33. Para probar la suficiencia basta tener en cuenta que (x_n) es λ-admisible para cada $\lambda \in J$. Entonces si λ_s es la medida de probabilidad inducida por

$$\lambda_s(\varphi) = \lambda - \lim_n \varphi(x_n),$$

resulta que todas las medidas de la familia $\{\lambda_s : \lambda \in J\}$ coinciden con μ en $\mathcal{H}$ subconjunto denso de $\mathcal{K}(X)$, por lo cual $\lambda_s = \mu$ para cada $\lambda \in J$. Queda probado así que (x_n) es J-admisible y que la medida asociada $\mu_s = \mu$. Resulta de la proposición 33 que (x_n) está distribuida respecto a μ.

35. Corolario.—*Sea X un grupo compacto conmutativo y μ la medida de Haar sobre X. Una sucesión* $s = (x_n)$ *en X está J-distribuida respecto a μ si y sólo si para cada carácter no trivial χ, $(\chi \neq 1)$ se verifica que $\chi(x_n)$ es J-sumable y*

$$J\text{-}\lim_n \chi(x_n) = 0.$$

Demostración.—Consecuencia inmediata de 34, puesto que las funciones continuas $\varphi \in \mathcal{K}(X)$ se pueden aproximar uniformemente mediante combinaciones lineales de caracteres, y para éstos se cumple 34.1.

36. Ejemplos:

36.1. Sea α una matriz de Toeplitz positiva de tipo J,

$$\mathcal{L}^\circ \subset J \subset \mathcal{L}^\cdot.$$

En virtud del teorema 22 resulta que una sucesión (x_n) en X está J (α)-distribuida respecto a μ si y sólo si es una sucesión (α, μ)-uniformemente distribuida según la definición dada en (10), pág. 207.

En particular, cuando α es la matriz de las medias de Césaro, se obtiene el concepto usual de sucesión μ-uniformemente distribuida.

36.2. Si $\Gamma \subset \mathbf{m}(N)$ es la familia de las medias invariantes, resulta que el concepto de sucesión Γ-distribuida respecto a μ coincide con la noción usual de sucesión μ-bien distribuida dada en (10), página 200.

Resulta así que el corolario 35 es precisamente el criterio de Weil usual para el caso de sucesiones (α, μ)-uniformemente distribuidas cuando se toma como J la familia J (α) considerada en 36.1.

Cuando se toma $J = \Gamma$, entonces el corolario 35 da el criterio de Weil usual para sucesiones μ-bien distribuidas (véase (10), página 27).

36.3. Si $X = \mathbb{R}/Z$ es el grupo de los reales módulo 1 con la topología cociente, su medida de Haar μ es precisamente la medida inducida por la medida de Lebesgue, y los caracteres son las aplicaciones

$$e_m(\dot{x}) = e^{2\pi i m x},$$

donde $\dot{x}$ es la clase determinada por $x \in R$.

Si x_n es una sucesión de números reales tal que $(\dot{x}_n)$ es una sucesión de J-distribuida respecto a μ, diremos que (x_n) es una sucesión J-distribuida módulo 1, de acuerdo con la terminología empleada en los casos usuales 36.1 y 36.2.

Bastantes resultados generales de la teoría de sucesiones uniformemente distribuidas se extienden fácilmente al caso más general de sucesiones J-distribuidas, obteniéndose así de modo simultáneo diferentes resultados particulares, según se elija $J \subset \mathbf{m}(N)$.

Sin demostración indicamos seguidamente algunas propiedades sencillas de establecer:

a) Si (x_n) es J-distribuida respecto a μ en un grupo X, y si

$$\lim_n (x_n - y_n) = 0,$$

entonces (y_n) también es J-distribuida respecto a μ.

b) Sea $\Gamma_p \subset \mathbf{m}(N)$ la familia de todas las medias invariantes que cumplen 40.1. Si

$$(x_n^1), (x_n^2), \ldots, (x_n^p)$$

son p sucesiones J-distribuidas respecto a μ, y $J \subset \Gamma_p$, entonces la sucesión

$$(x_1^1, x_1^2, \ldots, x_1^p, x_2^1, x_2^2, \ldots, x_2^p, \ldots)$$

también es J-distribuida respecto a μ.

c) Sea (x_n) una sucesión J-distribuida respecto a μ, y sea (y_n) otra sucesión tal que

$$H = \{ n : x_n \neq y_n \}$$

es λ-nulo para todo $\lambda \in J$. Entonces (y_n) también es J-distribuida respecto a μ.

La teoría de sucesiones J-distribuidas tiene aplicaciones interesantes a la teoría de probabilidad sobre conjunto numerables, pues permite obtener fácilmente álgebras $\mathcal{H}$ de partes de N, tales que para todo A $\in \mathcal{H}$ la función χ_A es J-sumable, de modo que sobre $\mathcal{H}$ queda definida una medida finitamente aditiva d_J poniendo

$$d_J(A) = \text{J-lim}\, \chi_A$$

para cada A $\varepsilon\, \mathcal{H}$.

El modo de proceder es el siguiente: si $\mathcal{B}_0$ es la familia de todos los conjuntos de Borel μ-continuos en X, y si $s = (x_n)$ es una sucesión J-distribuida respecto a μ, es obvio que

$$\tilde{\mathcal{B}}_0 = \{ s^{-1}(M) : M \in \mathcal{B}_0 \},$$

con

$$s^{-1}(M) = \{ n : x_n \in M \},$$

es un álgebra de partes de N con la propiedad antes citada, y verificando además que

$$d_J(s^{-1}(M)) = \mu(M), \quad \forall\, M \in \mathcal{B}_0.$$

Aplicaremos estas ideas a un caso concreto. Sea P_m el conjunto de todos los números naturales cuya primera cifra significativa (en base 10) está comprendida entre 1 y m $(1 \leqslant m \leqslant 9)$. Se sabe empíricamente que en una tabla de constantes físicas experimentales la proporción de los números naturales que pertenecen a P_m es aproximadamente $\log_{10}(m+1)$. En (5), Bumby y Ellentuck han probado que existen medidas invariantes $\mu \in \Gamma$ tales que

$$\mu(P_m) = \log_{10}(m+1) \quad \text{si} \quad 1 \leqslant m \leqslant 9.$$

Seguidamente obtenemos el mismo resultado como consecuencia de la teoría de sucesiones J-distribuidas.

Sea $q \in N$ y $\Gamma_q \subset \Gamma(N)$ la familia de todas las medias invariantes $\lambda \in \Gamma$, tales que $\lambda(A) = q\,\lambda(qA)$ para todo $A \subset N$. Esta familia no es vacía, como veremos en la proposición 40.

Si (a_n) es una sucesión numérica acotada, designaremos por $(a_n^{(q)})$ la obtenida a partir de ella repitiendo cada término q veces consecutivas, es decir $a_m^{(q)} = a_n$ si

$$(n-1)\,q < m \leqslant n\,q.$$

Es fácil comprobar que si $\lambda \in \Gamma_q$, entonces

$$\lambda - \lim_n a_n^{(q)} = \lambda - \lim_n a_n.$$

37. PROPOSICIÓN.—*Sea* q $\in N$ *y* a $\in R$ *tales que* $\log_a q \notin \mathbb{Q}$. *Entonces* $x_n = \log_a n$ *es una sucesión* Γ_q*-distribuida módulo 1.*

DEMOSTRACIÓN. — *Sea* $e_m(x) = e^{2\pi i m x}$ un carácter no trivial ($m \neq 1$), y sea $z_n = e_m(x_n)$. Si $a_n = z_{nq}$ y $(a_n^{(q)})$ es la sucesión deducida de (a_n) repitiendo cada término q veces consecutivas, es fácil ver que

$$a_m^{(q)} - z_m = z_{(n+1)q} - z_{nq+k}$$

si $m = nq + k$ con $0 \leqslant k < q$.

Un cálculo sencillo permite probar que

$$\lim_n (z_{(n+1)q} - z_{nq+k}) = 0$$

para $k = 0, 1, 2, \ldots, q-1$, de donde se deduce que

$$\lim_m (a_m^{(q)} - z_m) = 0.$$

Entonces, si

$$\lambda \in \Gamma_q \quad \text{y} \quad z = \lambda - \lim_n z_n,$$

como $z_{nq} = z_q z_n$, resulta

$$z = \lambda - \lim_n a_n^{(q)} = \lambda - \lim_n a_n = \lambda - \lim_n z_{nq} = z_q\, \lambda - \lim_n z_n = z_q\, z.$$

Luego $z = 0$, pues $z_q \neq 0$, ya que $\log_a q \notin \mathbb{Q}$.

Hemos probado que

$$\Gamma_q - \lim e_m(x_n) = 0,$$

y por consiguiente que x_n es una sucesión Γ_q-distribuida módulo 1, en virtud del corolario 35.

38. PROPOSICIÓN. — *Sea* $P_m \subset N$ *el subconjunto de todos los números naturales cuya primera cifra significativa (en base 10) está*

comprendida entre 1 *y* m $(1 \leqslant m \leqslant 9)$. *Si* $log_{10}\, q \notin Q$, *entonces*

$$\lambda (P_m) = log_{10} (m + 1)$$

para todo $\lambda \in \Gamma_q$.

DEMOSTRACIÓN.—Sea

$$M = \{ e^{2\pi i \theta} : 0 \leqslant \theta < \log_{10} (m + 1) \}.$$

Es fácil ver que

$$P_m = \{ k \in N : e^{2\pi i \log_{10} k} \in M \}$$

como la sucesión $e^{2\pi i \log_{10} k} = x_k$ está Γ_q-distribuida en el círculo unidad $G = \{z \in C : |z| = 1\}$ respecto a su medida de Haar μ, resulta:

$$\log_{10} (m + 1) = \mu (M) + \lambda (P_m)$$

para cada $\lambda \in \Gamma_q$.

Finalmente, probaremos que Γ_q no es vacía, es decir, que existen medias invariantes $\lambda \in \Gamma (N)$ tales que

$$\lambda (A) = q\, \lambda (q\, A)$$

para todo $A \subset N$.

39. PROPOSICIÓN.—*Existe* $\lambda \in \mathcal{L}^*$ *con la propiedad:*

39.1.

$$\lambda - \lim_n a_{nq} = \lambda - \lim_n a_n$$

para cada sucesión numérica acotada (a_n).

DEMOSTRACIÓN.—La matriz infinita $\alpha (n, k)$ definida por

$$\alpha (n, k) = \frac{1}{n}$$

si $k = q^i$ con $1 \leqslant i \leqslant n$, $\alpha (n, k) = 0$ para los restantes valores de k, es una matriz de Toeplitz positiva regular en sentido usual.

Entonces $\mathcal{L}^* (\alpha) \subset \mathcal{L}^*$. Bastará probar que cada $\lambda \in \mathcal{L}^* (\alpha)$ verifica 39.1. En efecto, si $\lambda = \lambda_1 \circ \alpha$, entonces en virtud del teorema 18 se verifica:

$$\lambda - \lim_n a_n = \lambda_1 - \lim_n \frac{a_q + a_{q^2} + \dots + a_{qn}}{n}$$

para cada sucesión acotada (a_n). Como

$$\frac{a_q + a_q + \dots + a_{qn}}{n} - \frac{a_{q^2} + a_{q^3} + \dots + a_{qn+1}}{n} = \frac{a_q - a_{qn+1}}{n} \longrightarrow 0$$

cuando $n \longrightarrow \infty$, se deduce que

$$\lambda - \lim_n a_n - \lambda - \lim_n a_{nq} = \lambda_1 - \lim_n \left(\frac{a_q - a_{qn+1}}{n} \right) = 0,$$

pues $\lambda_1 \in \mathcal{L}^{\cdot}$.

40. Proposición.—*Sea* q $\in N$. *Existe* $\mu \in \Gamma(N)$ *tal que:*

40.1. $\mu(A) = \mathrm{q}\, \mu(\mathrm{q}\, A)$ *para todo* $A \subset N$.

Demostración.—Sea J_q la familia de las medias $\lambda \in \mathcal{L}^{\cdot}$ que verifican 39.1, y sea β la matriz que define las medias de Césaro. Cada $\mu \in J_q(\beta)$ es invariante en virtud del teorema 20. Sea $\mu = \lambda \circ \beta$ con $\lambda \in J_q$. Entonces por definición:

$$\mu(A) = \lambda(\beta_A)) = \lambda - \lim_n \frac{\chi_A(1) + \dots + \chi_A(n)}{n}$$

y si $S_n = \{1, 2, \dots, n\}$ y $|H|$ es el cardinal de H, resulta

$$\frac{\chi_A(1) + \dots + \chi_A(n)}{n} = \frac{|A \cap S_n|}{n} = q \frac{|q A \cap S_{nq}|}{n q},$$

y por consiguiente

$$\mu(A) = q \cdot \lambda - \lim_n \frac{|q A \cap S_{nq}|}{n q} = q \lambda - \lim_m \frac{|q A \cap S_m|}{m} = q \lambda (q A),$$

luego cada $\mu \in J_q(\beta) \subset \Gamma(N)$ satisface 40.1.

41. PROPOSICIÓN.—*Se verifica que*

$$\bigcap_{q=1}^{\infty} \Gamma_q \neq \phi.$$

DEMOSTRACIÓN.—Sea $p \in N$, $q \in N$, $p \neq q$. Es fácil probar que si $\lambda \in \mathcal{L}^*$ y $\mu \in \Gamma_p$, entonces queda definida una media $\mu_1 \in \Gamma(N)$ por

$$\mu_1(A) = \lambda - \lim_n \frac{\mu(A) + q\,\mu(q\,A) + \dots q^n\,\mu(q^n\,A)}{n}$$

Evidentemente, $\mu_1 \in \Gamma_p$ y un cálculo análogo al realizado al final de la demostración de la proposición 39 permite probar que $\mu_1 \in \Gamma_q$. Resulta así que $\Gamma_p \cap \Gamma_q \neq \phi$. Razonando por inducción, se prueba fácilmente que cada intersección finita

$$\Gamma_{q^1} \cap \Gamma_{q_2} \cap \cdots \cap \Gamma_{q_m}$$

no es vacía. Sea entonces (q_n) la sucesión creciente de los números primos y

$$\lambda_n \in \Gamma_{q^1} \cap \Gamma_{q^2} \cap \cdots \cap \Gamma_{q_n}$$

Entonces

$$\nu(A) = \lambda - \lim_n \lambda_n(A)$$

define una media invariante ν que pertenece a cada Γ_q. En efecto, para cada número primo q_m se verifica que

$$\lambda_n(q_m\,A) = \frac{1}{q_m}\,\lambda_n(A)$$

si $n \geqslant m$ y por lo tanto

$$\nu(q_m\,A) = \frac{1}{q_m}\,\nu(A),$$

pues $\lambda \in \mathcal{L}^*$. Esto prueba que

$$\nu \in \bigcap_{m=1}^{\infty} \Gamma_{q_m}.$$

De la relación $\Gamma_p \cap \Gamma_q \subset \Gamma_{pq}$ y de la descomposición de un número natural en factores primos se deduce que

$$v \in \bigcap_{q=1}^{\infty} \Gamma_q$$

Bibliografía

(1) A. Baernstein. 1972. On Reflexivity and summability. *Studia Math.*, **52**, 91-94.
(2) S. Banach y S. Saks. 1930. Sur la convergence forte dans les champs L^p. *Studia Math.*, **2**, 51-57.
(3) F. Bombal y G. Vera. 1973. Medias en espacios localmente convexos y semi-reflexividad. *Coll. Math.*, XXIV, 3-31.
(4) — — y — —. 1975. Funciones vectoriales casi convergentes. *Coll. Math.*, XXVI, 141-156.
(5) R. Bumby y E. Ellentuck. 1969. Finitely additive measures and the first digit problem. *Fund. Math.*, LXV, 33-42.
(6) S. D. Chatterji. 1974. On a theorem of Banach and Saks. *Linear operators and Approximation*, II, I. S. N. M., **25**, Birkhäuser Verlag.
(7) Ching Chou y J. Peter Duran. 1963. Multipliers for the space of almost convergent functions on a semigroup. *Proc. Amer. Math. Soc.*, **39**, 125-128.
(8) J. B. Deeds. 1968. Summability of vector sequences. *Studia Math.*, **30**, 361-372.
(9) J. Köthe. 1969. *Topological vector spaces*. I. Springer-Verlag.
(10) L. Kuipers y Neiderreiter. 1974. *Uniform distribution of sequences*. Wiley-Interscience.
(11) J. C. Kurtz. 1970. Almost convergent sequences. *Tohoku Math. J.*, **22**, 493-498.
(12) G. Lorentz. 1948. A contribution to the theory of divergent sequences. *Acta Math.*, **80**, 167-190.
(13) P. F. Mah. 1971. Summability in amenable semigroups. *Trans. Amer. Math. Soc.*, **156**, 391-403.
(14) T. Nishiura y D. Waterman. 1963. Reflexivity and summability. *Studia Math.*, **23**, 53-57.
(15) R. S. Pinkham. 1961. On the distribution of first significant digits. *Am. of Math. Stat.*, **32**, 1223-1230.
(16) A. Robinson. 1950. On functional transformation and summability. *Proc. London Math. Soc.*, **52**, 132-160.
(17) A. Taylor. 1964. *Introduction to functional analysis*. John Wiley.
(18) G. Vera. 1974. Límites generalizados en A-módulos. *Real Acade Ciencias Exat., Fís. y Nat.*, LXVIII, 557-759.
(19) D. Waterman. 1969. Reflexivity and summability. II. *Studia Math.*, **32**, 61-63.