MEDIDAS FINITAMENTE ADITIVAS EN ESPACIOS TOPOLOGICOS

G. Vera Botí

Recibido: 4-V-77

PRESENTADO POR EL ACADÉMICO NUMERARIO D. BALTASAR RODRÍGUEZ-SALINAS

El objeto de esta nota es resolver el siguiente problema que se plantea de modo natural al estudiar medidas finitamente aditivas en espacios topológicos:

Dada una medida positiva λ, finitamente aditiva, sobre todas las partes de un espacio topológico E, se trata de determinar un anillo $\mathcal{R}_\lambda$ de partes de E, de modo que:

a) La restricción λ_0 de λ al anillo $\mathcal{R}_\lambda$ sea numerablemente aditiva.

b) Exista una única medida topológica μ en E que sea una extensión de λ_0.

(La condición b) exige que el anillo $\mathcal{R}_\lambda$ sea suficientemente amplio desde el punto de vista de la teoría de la medida en espacios topológicos.)

El problema planteado tiene solución satisfactoria en el caso de espacios localmente compactos si λ es localmente finita. En el caso de espacios completamente regulares el problema también tiene solución si se supone que el espacio es localmente λ-compacto. Cuando se consideran espacios topológicos regulares se obtiene el mismo resultado si además se supone que todo punto posee un sistema fundamental de entornos λ-continuos.

Si el procedimiento que exponemos para obtener $\mathcal{R}_\lambda$ y la medida topológica μ se aplica en caso de que λ sea una extensión arbitraria del contenido de Peano-Jordán en $\mathbb{R}^n$, se obtendrá que $\mathcal{R}_\lambda$ es la clase de los conjuntos medibles Jordán, de modo que entonces μ es la medida de Lebesgue en $\mathbb{R}^n$.

Utilizaremos algunos resultados de B. Rodríguez-Salinas sobre medidas exteriores topológicas en espacios regulares, que exponemos brevemente a título de referencia.

Sea E un espacio topológico regular separado. Denotaremos por $\mathcal{V}_x$, $\mathcal{G}$, $\mathcal{F}$, $\mathcal{K}$, $\mathcal{B}$ las clases de los subconjuntos de E que son respectivamente, entornos de x, abiertos, cerrados, compactos y de Borel.

1. Definición.—*Una medida exterior topológica μ^* sobre E es una medida exterior, localmente finita, para la cual son medibles todos los conjuntos de Borel, que satisface:*

1.1. $\mu^*(G) = \sup_{i \in I} \mu^*(G_i)$, *si* $\{G_i : i \in I\}$ *es una familia de abiertos, filtrante creciente, y* $G = \bigcup_{i \in I} G_i$.

1.2. *Para cada* $X \subset E$ *es* $\mu^*(X) = \inf\{\mu^*(G) : X \subset G \in \mathcal{G}\}$.

Se llama medida topológica a la restricción μ de μ^* a la σ-álgebra $\mathcal{B}$ de los conjuntos borelianos (o también a la σ-álgebra $\mathcal{M}(\mu^*)$ de todos los conjuntos μ^*-medibles).

2. Definición.—*Una clase generatriz en $X \subset E$ es una clase $\mathcal{H}$ de partes de E tal que:*

2.1. $\Phi \in \mathcal{H}$.

2.2. *Si* $A, B \in \mathcal{H}$ *entonces* $A \cup B \in \mathcal{H}$.

2.3. *Para todo* $x \in X$, $\mathcal{H} \cap \mathcal{V}_x$ *es una base de entornos de* x.

3. Definición.—*Sea $\mathcal{H}$ una clase generatriz de cerrados en E y λ una medida exterior finitamente subaditiva sobre E que cumple:*

3.1. *λ es localmente finita.*

3.2. *Para cada* $A \in \mathcal{H}$ *existe una clase generatriz* $\mathcal{H}_A$ *en* A° *tal que* $\lambda(A \cup F) = \lambda(A) + \lambda(F)$ *para cada* $F \in \mathcal{H}_A$.

3.3. *Todo* $A \in \mathcal{H}$ *es λ-compacto (es decir, para cada $\varepsilon > 0$ y cada recubrimiento abierto $\mathcal{G}_0$ de A existe un número finito de abiertos* $G_k \in \mathcal{G}_0$, $k = 1, \ldots, m$, *que satisfacen*

$$\lambda\left(A - \bigcup_{k=1}^{m} G_k\right) < \varepsilon).$$

Entonces se dice que λ es un contenido respecto de $\mathcal{H}$.

4. TEOREMA.—*Sea $\mathcal{H}$ una clase generatriz de cerrados en E y λ un contenido respecto de $\mathcal{H}$. Para cada $X \subset E$ sea*

$$\mu^*(X) = \inf \{\lambda_*(G) : X \subset G \in \mathcal{G}\}$$

donde

$$\lambda_*(G) = \sup \{\lambda(A) : G \supset A \in \mathcal{H}\}$$

Entonces μ^* es una medida exterior topológica sobre E que satisface:

4.1. *$\mu^*(\mathring{A}) \leqslant \lambda(A) \leqslant \mu^*(A)$ para cada $A \in \mathcal{H}$.*

DEMOSTRACIÓN.—Véase [1].

5. TEOREMA.—*Si μ^* es una medida exterior topológica sobre E y $\mathcal{H}$ es una clase generatriz en E, se verifica:*

5.1. *$\mu^*(G) = \sup \{\mu^*(A) : G \supset A \in \mathcal{H}\}$, para todo $G \in \mathcal{G}$.*

DEMOSTRACIÓN.—La clase $\mathcal{U}_0$ de los conjuntos $A \in \mathcal{H}$ contenidos en el abierto G es una clase generatriz en G. En [1] se prueba que si $\mathcal{U}$ es una clase generatriz en el abierto G, se verifica

$$\mu^*(G) = \sup \{\mu^*(G \cap M) : M \in \mathcal{U}\}.$$

Basta aplicar este resultado a la clase generatriz $\mathcal{U}_0$ para deducir 5.1.

En lo que sigue denotaremos por Λ (E) la familia de todas las medidas finitamente aditivas λ, positivas y localmente finitas, sobre todas las partes del espacio regular E.

6. DEFINICIÓN.—*Sea $\lambda \in \Lambda(E)$. Un conjunto $H \subset E$ diremos que es λ-nulo si*

$$\inf \{\lambda(G) : H \subset G \in \mathcal{G}\} = 0$$

Un conjunto $A \subset E$ diremos que es λ-continuo si su frontera $H = \partial A$ es un conjunto λ-nulo.

En lo sucesivo, dada $\lambda \in \Lambda$ (E), denotaremos por $\mathcal{H}_\lambda$ la familia de todos los conjuntos $A \subset E$ que son λ-continuos y λ-compactos.

Es fácil probar que todo subconjunto cerrado de un conjunto λ-compacto también es λ-compacto. En lo que sigue será de interés el siguiente lema:

7. LEMA.—*Sea $B \subset E$ un conjunto λ-continuo. Entonces B es λ-compacto si y sólo si $\overline{B}$ es λ-compacto.*

DEMOSTRACIÓN. — Supongamos que $\overline{B}$ es λ-compacto, y sea $\varepsilon > 0$ y $\mathcal{G}_0$ un recubrimiento abierto de $\overline{B}$ (y por consiguiente de B). Se deduce entonces que existe un número finito de abiertos $G_1 \ldots G_m \in \mathcal{G}_0$ tales que

$$\lambda (B - G_1 \cup \ldots \cup G_m) < \varepsilon.$$

Como $\lambda (\partial B) = 0$, por ser B λ-continuo, teniendo en cuenta la inclusión

$$\overline{B} - G_1 \cup \ldots \cup G_m \subset \partial B \cup (B - G_1 \cup \ldots \cup G_m)$$

se deduce que

$$\lambda (\overline{B} - G_1 \cup \ldots \cup G_m) < \varepsilon.$$

Queda probado así que $\overline{B}$ es λ-compacto.

Recíprocamente, supongamos que $\overline{B}$ es λ-compacto. Dado un recubrimiento abierto $\mathcal{G}_0$ de B y un número $\varepsilon > 0$, como ∂B es λ-nulo existe $G \in \mathcal{G}$ tal que $G \supset \partial B$ y $\lambda (G) < \varepsilon/2$. Como $\mathcal{G}_0 \cup \{G\}$ es un recubrimiento abierto de $\overline{B}$, se deduce que existe un número finito de abiertos $G_1, \ldots, G_m \in \mathcal{G}_0$ tales que

$$\lambda (\overline{B} - G \cup G_1 \cup \ldots \cup G_m) < \varepsilon/2.$$

Teniendo en cuenta que

$$(B - G_1 \cup \ldots \cup G_m) \subset (\overline{B} - G \cup G_1 \cup \ldots \cup G_m) \cup G$$

se obtiene:

$$\lambda (B - G_1 \cup \ldots \cup G_m) < \varepsilon$$

lo cual prueba que B es λ-compacto.

8. PROPOSICIÓN.—*$\mathcal{H}_\lambda$ es un anillo de partes de E con la propiedad.*

8.1. $A \in \mathcal{H}_\lambda,\ \mathring{A} \subset B \subset \overline{A} \Longrightarrow B \in \mathcal{H}_\lambda.$

DEMOSTRACIÓN.—Si $A \in \mathcal{H}_\lambda$ y $\mathring{A} \subset B \subset \overline{A}$, teniendo en cuenta que

$$\mathring{A} \subset \mathring{B} \subset \overline{B} \subset \overline{A}$$

resulta $\partial B \subset \partial A$ y por consiguiente B es λ-continuo. Como $\overline{A}$ es λ-compacto en virtud del lema 7, y $\overline{B}$ es un cerrado contenido en $\overline{A}$, se deduce que $\overline{B}$ es λ-compacto. Aplicando nuevamente el lema 7 se obtiene que B es λ-compacto y por consiguiente que $B \in \mathcal{H}_\lambda$. Queda probada así la propiedad 8.1.

Consideremos ahora dos conjuntos arbitrarios $A, B \in \mathcal{H}_\lambda$. Es inmediato que $A \cup B \in \mathcal{H}_\lambda$. Por otra parte, como es

$$\partial(A \cap B^c) \subset \partial A \cup \partial B$$

se deduce que $A \cap B^c$ es λ-continuo. Como $\overline{A \cap B^c}$ es λ-compacto por ser un subconjunto cerrado de $\overline{A}$ que es λ-compacto, una nueva aplicación del lema 7 permite concluir que $A \cap B^c$ es λ-compacto y por lo tanto que $A \cap B^c \in \mathcal{H}_\lambda$.

9. DEFINICIÓN.—*Diremos que $\lambda \in \Lambda(E)$ está adaptada a la topología de E si se verifica:*

9.1. *Para todo $x \in E$, $\mathcal{V}_x \cap \mathcal{H}_\lambda$ es un sistema fundamental de entornos de x.*

En virtud de la proposición 8, resulta que cuando λ está adaptada a la topología de E cada punto $x \in E$ posee un sistema fundamental de entornos formado por conjuntos cerrados λ-continuos y λ-compactos.

10. LEMA.—*Si $\lambda \in \Lambda(E)$ y E es completamente regular, cada punto $x \in E$ posee un sistema fundamental de entornos λ-continuos.*

DEMOSTRACIÓN.—Si U es un entorno arbitrario de $x \in E$, como λ es localmente finita se puede asegurar la existencia de un entorno V de x, contenido en U, con $\lambda(V) < +\infty$. Sea $\alpha: E \longrightarrow \mathbb{R}$ una función continua no negativa tal que $\alpha(x) > 0$, y $\alpha(t) = 0$ si $t \notin V$. Para cada $r \geqslant 0$ sea

$$H_r = \{t \in E : \alpha(t) = r\}.$$

Probaremos que H_r es λ-nulo salvo para un conjunto numerable $D \subset [0, +\infty)$ de valores de r.

Para ello definimos

$$\bar{\lambda}(H_r) = \inf\{\lambda(G) : H_r \subset G \in \mathcal{G}\}$$

y bastará probar que para cada $n \in \mathbb{N}$ es finito el conjunto

$$D_n = \left\{r \in [0, +\infty) : \bar{\lambda}(H_r) \geq \frac{1}{n}\right\}.$$

En efecto, si para algún $n \in \mathbb{N}$ fuese infinito el conjunto D_n, sería posible elegir m puntos

$$0 < r_1 < r_2 < \ldots < r_m$$

en D_n (con m tan grande como se desee). Si

$$s_0 < r_1 < s_1 \ldots < r_{m-1} < s_{m-1} < r_m,$$

y consideramos los m abiertos disjuntos

$$G_k = \{t \in E : s_{k-1} < \alpha(t) < s_k\}, \quad k = 1, 2, \ldots m,$$

se tiene $H_{r_k} \subset G_k$ y por lo tanto

$$\frac{1}{n} \leq \bar{\lambda}(H_{r_k}) \leq \lambda(G_k)$$

Entonces

$$\frac{m}{n} \leq \sum_{k=1}^{m} \lambda(G_k) = \lambda\left(\bigcup_{k=1}^{m} G_k\right) \leq \lambda(V) < \infty,$$

lo cual es absurdo pues m es arbitrariamente grande.

Como $D = \bigcup_{n=1}^{\infty} D_n$ es numerable, es posible elegir un $r \notin D$ tal que $0 < r < \alpha(x)$. Entonces

$$V_r = \{t \in E : \alpha(t) > r\}$$

es un entorno de x cuya frontera ∂V_r está contenida en el conjunto λ-nulo H_r. Resulta así que V_r es un entorno de x, λ-continuo, contenido en V y por consiguiente en U.

11. Proposición.—*Sea E un espacio completamente regular y $\lambda \in \Lambda(E)$. Se supone que cada $x \in E$ posee un entorno λ-compacto (E es localmente λ-compacto) entonces λ está adaptada a la topología de E.*

Demostración.—Como todo subconjunto cerrado de un conjunto λ-compacto es λ-compacto, se deduce que cada $x \in E$ posee un sistema fundamental de entornos cerrados y λ-compactos. Para cada entorno U de x, cerrado y λ-compacto, existe un entorno de x λ-continuo $V \subset U$, en virtud del lema 10. Como $\overline{V} \subset U$, resulta que $\overline{V}$ es λ-compacto, y el lema 7 permite concluir que $V \in \mathcal{H}_\lambda$. Queda probado así que $\mathcal{V}_x \cap \mathcal{H}_\lambda$ es un sistema fundamental de entornos de x.

12. Proposición.—*Si E es localmente compacto y $\lambda \in \Lambda(E)$, todo punto $x \in E$ posee un sistema fundamental de entornos compactos y λ-continuos, y por consiguiente λ está adaptada a la topología de E.*

Demostración.—Basta tener en cuenta que todo compacto es λ-compacto. Si U es un entorno compacto de x, y V es un entorno cerrado λ-continuo de x, contenido en U, se obtiene que V es un entorno de x, compacto y λ-continuo, contenido en U.

13. Teorema.—*Sea E un espacio topológico regular separado y $\lambda \in \Lambda(E)$ adaptada a la topología de E. Entonces existe una única medida exterior topológica μ^* sobre E que verifica:*

13.1. *Todo $A \in \mathcal{H}_\lambda$ es μ^*-medible.*

13.2. *$\lambda(A) = \mu^*(A)$ para cada $A \in \mathcal{H}_\lambda$.*

Demostración.—La familia $\mathcal{H}$ de todos los conjuntos cerrados λ-compactos $M \subset E$ es una clase generatriz en E y es inmediato que λ es un contenido respecto de $\mathcal{H}$. Sea μ^* la medida exterior topológica inducida por λ según la proposición 4. Para cada abierto $G \subset E$ se tiene

$$\mu^*(G) = \lambda_*(G) \leq \lambda(G),$$

y por consiguiente $\mu^*(H) = 0$ para cada conjunto λ-nulo $H \subset E$.

Entonces para cada $A \in \mathcal{R}_\lambda$ es $\mu^*(\partial A) = 0$. Como $A = \mathring{A} \cup (A - \mathring{A})$ con $A - \mathring{A} \subset \partial A$, se deduce 13.1.

Por otra parte, si $M \in \mathcal{H}$ es λ-continuo, es $\mu^*(\partial M) = 0$ y por consiguiente $\mu^*(\mathring{M}) = \mu^*(M)$, lo cual implica, en virtud de 4.1, que $\mu^*(M) = \lambda(M)$.

Para probar 13.2, dado $A \in \mathcal{R}_\lambda$ consideremos el conjunto λ-continuo $\overline{A} = M \in \mathcal{H}$ que cumple $\mu^*(M) = \lambda(M)$. Como ∂A es λ-nulo se verifica que

$$\lambda(\partial A) = 0 \quad \text{y} \quad \mu^*(\partial A) = 0,$$

deduciéndose entonces la igualdad

$$\lambda(A) = \lambda(\overline{A}) = \mu(\overline{A}) = \mu(A).$$

Queda por probar la unicidad de la medida exterior μ^*. Sea pues ν^* otra medida exterior topológica sobre E que coincide con μ^* sobre $\mathcal{R}_\lambda$, y denotemos por $\mathcal{H}_0$ la clase formada por todos los conjuntos cerrados λ-compactos y λ-continuos $M \subset E$. Como λ es adaptada a la topología de E se deduce que $\mathcal{H}_0$ es una clase generatriz en E. En virtud de la proposición 5 resulta

$$\mu^*(G) = \sup \{\lambda(M) : G \supset M \in \mathcal{H}_0\} = \nu^*(G),$$

para cada $G \in \mathcal{G}$, lo cual implica (en virtud de 1.2) que $\mu^* = \nu^*$.

14. Corolario.—*En las hipótesis del teorema 13, sea λ_0 la restricción de λ al anillo $\mathcal{R}_\lambda$. Entonces λ_0 es numerablemente aditiva y se puede extender de modo único a una medida topológica μ sobre E.*

DEMOSTRACIÓN.—Basta considerar la restricción μ de μ^* a la σ-álgebra de los conjuntos μ^*-medibles, que contiene a $\mathcal{H}_\lambda$.

NOTA.—Dada $\lambda \in \Lambda$ (E) la hipótesis del teorema 13 se cumple automáticamente cuando E es completamente regular y localmente λ-compacto, y también cuando E es localmente compacto, en virtud de las proposiciones 11 y 12 aunque en este último caso se puede obtener un resultado algo más fuerte:

15. PROPOSICIÓN.—*Si E es localmente compacto cada $\lambda \in \Lambda$ (E) es numerablemente aditiva sobre el anillo $\mathcal{R}_\lambda$ formado por los conjuntos $M \subset E$ que son λ-continuos y relativamente compactos. Existe una única medida topológica μ que coincide con λ sobre $\mathcal{R}_\lambda$.*

DEMOSTRACIÓN.—Bastará probar la unicidad de μ, pues $\mathcal{R}_\lambda \subset \mathcal{H}_\lambda$. Para ello basta proceder como en la demostración del teorema 13, tomando como clase $\mathcal{H}_0$ la formada por los conjuntos λ-continuos y compactos, que es una clase generatriz en E como consecuencia de la proposición 12.

Bibliografía

[1] RODRÍGUEZ-SALINAS, B.: *Teoría de la medida sobre los espacios topológicos no localmente compactos.* «Rev. Mat. Hisp.-Amer.», **33** (1973), 257-274.

[2] SCHWARTZ, L.: *Radon measures on Arbitrary Topological Spaces and Cilindrical Measures.* Tata Inst. of fund. Research. Oxford. Univ. Press (1973).