

DESCOMPOSICION DE MEDIDAS FINITAMENTE ADITIVAS EN ESPACIOS TOPOLOGICOS (*)

G. Vera Botí

Recibido: 5-IV-78

PRESENTADO POR EL ACADÉMICO NUMERARIO D. BALTASAR
RODRÍGUEZ-SALINAS

Let S be a non-empty set and Ω its Stone-Čech compactification for the discrete topology. Given a finite and non-negative finitely additive measure μ , defined on all the subsets of S , we represent it as a Radon measure $\hat{\mu}$ on Ω . Since the elements of Ω can be identified with ultrafilters in S , when a topology τ is given on S , the subset Ω_τ of Ω formed by the ultrafilters convergent for this topology, is determined.

Thus we characterise certain topological properties of μ (relative to its behaviour over the open sets and over the bounded continuous functions) in terms of the «degree of concentration» of $\hat{\mu}$ over Ω_τ .

In particular we study σ -additive, τ -additive, purely finitely additive and purely σ -additive measures and we obtain descomposition theorems analogous to Hewitt-Yosida (1952). The method we have adopted in this paper by considering the Stone-Čech compactification of S for the discrete topology, has allowed to obtain similar results to those of Knowles (1967) and Badrikian (1970) without the added requirement that the τ -topology for S to be completely regular.

Sea S un conjunto no vacío y Ω su compactificación de Stone-Čech para la topología discreta. Dada una medida finitamente aditiva μ , finita y no negativa, definida sobre todos los subconjuntos de S , la representamos como una medida de Radon $\hat{\mu}$ sobre Ω . Puesto que los elementos de Ω se pueden identificar con ultrafiltros en S , cuando se dota a S de una topología τ , queda determinado el subconjunto Ω_τ de Ω formado por los ultrafiltros convergentes para esta topología. Entonces caracterizamos ciertas propiedades topológicas de μ (referentes a su comportamiento sobre los abiertos y sobre las funciones continuas acotadas) en términos del grado de concentración de $\hat{\mu}$ sobre Ω_τ .

En particular estudiamos las medidas σ -aditivas, τ -aditivas, puramente finita-

(*) Trabajo realizado en el Departamento de Matemáticas de la Facultad de Ciencias. Universidad de Murcia.

mente aditivas y puramente σ -aditivas y obtenemos teoremas de descomposición análogos al de Hewitt-Yosida (1952).

El método que hemos adoptado en este trabajo, considerando la compactificación de Stone-Čech de S para la topología discreta nos ha permitido obtener resultados análogos a los de Knowles (1967) y Badrikian (1970) sin exigir en varios de ellos que la topología τ de S sea completamente regular.

1. Introducción

Sea S un conjunto no vacío, $\mathcal{M}(S)$ el conjunto de todas las medidas finitas no negativas y finitamente aditivas sobre el álgebra de todas las partes de S , y $\mathcal{M}_1(S)$ el subconjunto de $\mathcal{M}(S)$ formado por las medidas μ que cumplen $\mu(S) = 1$.

Si $B(S)$ es el espacio vectorial de todas las aplicaciones acotadas $f: S \rightarrow \mathbb{R}$, dotado de la norma de la convergencia uniforme, entonces $\mathcal{M}_1(S)$ es un subconjunto convexo y débil*-compacto de la bola unidad cerrada del dual $B(S)'$.

Es sabido que el conjunto Ω formado por los puntos extremales de $\mathcal{M}_1(S)$ también es compacto para la topología débil*, y que $\alpha \in \Omega$ si y sólo si $\{A \subset S : \alpha(A) = 1\}$ es un ultrafiltro.

En lo sucesivo frecuentemente identificaremos Ω con el conjunto de todos los ultrafiltros sobre S , asociando a cada ultrafiltro \mathcal{U} la medida $\alpha \in \mathcal{M}_1(S)$, definida por $\alpha(A) = 1$ si $A \in \mathcal{U}$ y $\alpha(A) = 0$ si $A \notin \mathcal{U}$.

Para cada $x \in S$ sea $\delta_x \in \mathcal{M}_1(S)$ la evaluación en x , ($\delta_x(f) = f(x)$, para todo $f \in B(S)$). El conjunto de todas las evaluaciones $\tilde{S} = \{\delta_x : x \in S\}$ es denso en Ω y homeomorfo a S (con la topología discreta) mediante la biyección $x \rightarrow \delta_x$.

Resulta así que Ω se puede considerar como la compactificación de Stone-Čech de S para la topología discreta, y por consiguiente, después de identificar S con \tilde{S} , cada función acotada $f: S \rightarrow \mathbb{R}$ se extiende de modo único a una función continua $\hat{f}: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $\hat{f}(\alpha) = \alpha(f)$ para cada $\alpha \in \Omega$.

A cada $\mu \in \mathcal{M}_1(S)$ se le puede asociar una única medida de Radon $\hat{\mu}$ sobre el espacio compacto Ω , verificando que $\hat{\mu}(\hat{f}) = \mu(f)$ para cada $f \in B(S)$. Evidentemente $\hat{\mu}(\Omega) = 1$.

En particular, si $f = \chi_A$ es la función característica de un subconjunto $A \subset S$, se deduce que $\mu(A) = \hat{\mu}(\hat{A})$ donde

$$\hat{A} = \{\alpha \in \Omega : \alpha(A) = 1\}.$$

La familia de conjuntos $\{\hat{A}: A \subset S\}$ es una base de la topología de Ω y se verifica que un subconjunto $\theta \subset \Omega$ es abierto y cerrado si y sólo si $\theta = \hat{A}$ para algún $A \subset S$.

Nos remitimos al libro de G. Choquet ([3]) para los resultados expuestos en esta sección.

2. Descomposición de medidas finitamente aditivas

En lo que sigue \mathcal{D} designará siempre una familia no vacía de subconjuntos de S , filtrante creciente.

1. DEFINICIÓN.—Una medida finitamente aditiva $\mu \in \mathcal{M}(S)$ diremos que es débilmente \mathcal{D} -regular si $\mu(S) = \sup \{\mu(D) : D \in \mathcal{D}\}$ y diremos que es fuertemente \mathcal{D} -singular si $\mu(D) = 0$ para cada $D \in \mathcal{D}$.

2. PROPOSICIÓN.—Una medida finitamente aditiva $\mu \in \mathcal{M}_1(S)$ es débilmente \mathcal{D} -regular si y sólo si $\hat{\mu}$ está soportada por el abierto $\omega(\mathcal{D}) = \cup \{D : D \in \mathcal{D}\}$.

DEMOSTRACIÓN.—La familia de abiertos $\{\hat{D} : D \in \mathcal{D}\}$ es filtrante creciente. Entonces

$$\hat{\mu}(\omega(\mathcal{D})) = \sup \{\hat{\mu}(\hat{D}) : D \in \mathcal{D}\} = \sup \{\mu(D) : D \in \mathcal{D}\}$$

y la condición $\hat{\mu}(\omega(\mathcal{D})) = 1 = \mu(S)$ equivale a que μ sea débilmente \mathcal{D} -regular.

3. COROLARIO.—Si $\mu \in \mathcal{M}(S)$ es débilmente \mathcal{D} -regular se verifica:

$$3.1) \quad \mu(A) = \sup \{\mu(A \cap D) : D \in \mathcal{D}\} \text{ para cada } A \subset S.$$

DEMOSTRACIÓN.—Bastará probarlo cuando $\mu \in \mathcal{M}_1(S)$. Para cada $A \subset S$ la familia de abiertos $\{(A \cap D)^{\wedge} : D \in \mathcal{D}\}$ es filtrante creciente y su unión es $\hat{A} \cap \omega(\mathcal{D})$.

Como $\hat{\mu}$ está soportada por $\omega(\mathcal{D})$ se deduce 3.1.

4. PROPOSICIÓN.—Una condición necesaria y suficiente para que $\mu \in \mathcal{M}_1(S)$ sea fuertemente \mathcal{D} -singular es que $\hat{\mu}$ esté soportada por el compacto $\Omega \setminus \omega(\mathcal{D})$.

DEMOSTRACIÓN.—Si $\hat{\mu}$ está soportada por el compacto $\theta = \Omega \setminus \omega(\mathcal{D})$ y $D \in \mathcal{D}$ se obtiene que $\mu(D) = \hat{\mu}(\hat{D}) = \hat{\mu}(\hat{D} \cap \theta) = 0$, pues $\hat{D} \cap \theta = \emptyset$.

Recíprocamente, si μ es fuertemente \mathcal{D} -singular, como $\hat{\mu}(\hat{B}) = 1$ cuando $S \setminus B = B^c$ pertenece a \mathcal{D} , y $\{B^c : \hat{B}^c \in \mathcal{D}\}$ es una familia filtrante decreciente de compactos cuya intersección es θ , se obtiene que $\hat{\mu}(\theta) = 1$.

5. PROPOSICIÓN.—Sea $\mu := \lambda + \nu$ donde $\lambda \in \mathcal{M}(S)$ es fuertemente \mathcal{D} -singular y $\nu \in \mathcal{M}(S)$ es débilmente \mathcal{D} -regular. Entonces se verifica:

$$5.1) \quad \lambda(A) = \inf \{ \mu(A \cap D^c) : D \in \mathcal{D} \}.$$

$$5.2) \quad \nu(A) = \sup \{ \mu(A \cap D) : D \in \mathcal{D} \}.$$

para cada $A \in S$.

DEMOSTRACIÓN.—Como λ es fuertemente \mathcal{D} singular se deduce que μ y ν coinciden sobre los subconjuntos de cada $D \in \mathcal{D}$.

De esta observación y del corolario 3 se deduce 5.2. Como $\mu(S) < +\infty$ la fórmula 5.1 es consecuencia inmediata de 5.2.

6. TEOREMA.—Cada medida finitamente aditiva $\mu \in \mathcal{M}(S)$ se puede descomponer de modo único en la forma $\mu := \lambda + \nu$ donde $\lambda \in \mathcal{M}(S)$ es fuertemente \mathcal{D} -singular y $\nu \in \mathcal{M}(S)$ es débilmente \mathcal{D} -regular.

DEMOSTRACIÓN.—Bastará demostrarlo suponiendo que $\mu \in \mathcal{M}_1(S)$. En este caso, sea $\theta = \Omega \setminus \omega(\mathcal{D})$, y para cada $A \subset S$ definamos

$$\lambda(A) = \hat{\mu}(A \cap \theta) \quad \text{y} \quad \nu(A) = \hat{\mu}(A \cap \omega(\mathcal{D})),$$

y sea $a = \lambda(S)$. Si $a = 0$ entonces $\lambda = 0$ y $\nu = \mu$ es débilmente \mathcal{D} -regular en virtud de la proposición 2. Si $a = 1$ entonces $\nu = 0$ y $\lambda = \mu$ es fuertemente \mathcal{D} -singular en virtud de la proposición 4.

Supongamos pues que $0 < a < 1$ y sea

$$b = 1 - a, \quad \alpha = \frac{1}{a} \lambda \quad \text{y} \quad \beta = \frac{1}{b} \nu.$$

Evidentemente, $\alpha, \beta \in \mathcal{M}_1(S)$. Como

$$\{\hat{B} : B^c \in \mathcal{D}\} \quad \text{y} \quad \{\hat{B} \cap \theta : B^c \in \mathcal{D}\},$$

son sendas familias filtrantes decrecientes de compactos en Ω cuya intersección es θ se deduce:

$$\begin{aligned} \hat{\alpha}(\theta) &= \inf\{\hat{\alpha}(\hat{B}) : B^c \in \mathcal{D}\} = \inf\{\alpha(B) : B^c \in \mathcal{D}\} = \\ &= \inf\left\{\frac{1}{a} \hat{\mu}(\hat{B} \cap \theta) : B^c \in \mathcal{D}\right\} = \frac{1}{a} \hat{\mu}(\theta) = \frac{1}{a} \lambda(S) = 1 \end{aligned}$$

y por lo tanto, según la proposición 4, α es fuertemente \mathcal{D} -singular, y λ también lo es. Un razonamiento análogo permite probar que $\hat{\beta}(\omega(\mathcal{D})) = 1$, de donde se sigue que $\nu = b\beta$ es débilmente \mathcal{D} -regular. La unicidad de la descomposición es consecuencia de la proposición 5.

En lo sucesivo designaremos siempre por \mathcal{H} una familia no vacía de partes de S , estable por uniones e intersecciones finitas, tal que $S = \cup \mathcal{D}$ para alguna familia filtrante creciente $\mathcal{D} \subset \mathcal{H}$.

7. DEFINICIÓN.—Una medida finitamente aditiva $\mu \in \mathcal{M}(S)$ diremos que es \mathcal{H} -regular si para cada familia filtrante creciente $\mathcal{D} \subset \mathcal{H}$ que cumpla $\cup \mathcal{D} = S$, se verifica $\mu(S) = \sup\{\mu(D) : D \in \mathcal{D}\}$.

Diremos que $\mu \in \mathcal{M}(S)$ es \mathcal{H} -singular si para cada $\varepsilon > 0$ existe una familia filtrante creciente $\mathcal{D} \subset \mathcal{H}$ tal que $\cup \mathcal{D} = S$ y $\mu(D) \leq \varepsilon$ para todo $D \in \mathcal{D}$.

Con el fin de caracterizar las medidas finitamente aditivas \mathcal{H} -regulares y \mathcal{H} -singulares conviene introducir la siguiente terminología: Llamaremos $L(\mathcal{H})$ a la familia de subconjuntos abiertos de Ω formada por el conjunto vacío y por los subconjuntos $M = \omega(\mathcal{E})$, donde $\omega(\mathcal{E}) = \cup \{\hat{E} : E \in \mathcal{E}\}$, con $\mathcal{E} \subset \mathcal{H}$ y $\cup \mathcal{E} = S$.

Es inmediato que $L(\mathcal{H})$ es estable frente a uniones arbitrarias e intersecciones finitas. También es evidente que cada $M \in L(\mathcal{H})$ se puede poner en la forma $M = \omega(\mathcal{D})$, donde $\mathcal{D} \subset \mathcal{H}$ es filtrante creciente y $\cup \mathcal{D} = S$. (Basta llamar \mathcal{D} a la familia de las uniones de un número finito de conjuntos de \mathcal{E} .)

8. TEOREMA.—Una condición necesaria y suficiente para que

$\mu \in \mathcal{M}_1(S)$ sea \mathcal{H} -regular es que para todo $M \in L(\mathcal{H})$ sea $\hat{\mu}(M) = 1$.

Una condición necesaria y suficiente para que $\mu \in \mathcal{M}_1(S)$ sea \mathcal{H} -singular es que

$$\inf \{ \hat{\mu}(M) : M \in L(\mathcal{H}) \} = 0.$$

DEMOSTRACIÓN.—La primera parte se deduce de la proposición 2, teniendo en cuenta que μ es \mathcal{H} -regular si y sólo si es débilmente \mathcal{D} -regular para cada familia filtrante creciente $\mathcal{D} \subset \mathcal{H}$ con $\cup \mathcal{D} = S$. La segunda parte del teorema es consecuencia inmediata de la definición de medida \mathcal{H} -singular.

9. OBSERVACIÓN.—Si para cada $\theta \subset \Omega$ se define

$$\mu^*(\theta) = \inf \{ \hat{\mu}(M) : \theta \subset M \in L(\mathcal{H}) \}$$

es fácil probar que μ^* es una medida exterior sobre Ω . El conjunto $\mathcal{H}^* = \cap L(\mathcal{H})$ no es vacío pues contiene todas las evaluaciones δ_x , ($x \in S$). Entonces el teorema 8 se puede reformular diciendo que μ es \mathcal{H} -regular si y sólo si $\mu^*(\mathcal{H}^*) = 1$, y que μ es \mathcal{H} -singular si y sólo si $\mu^*(\mathcal{H}^*) = 0$.

10. TEOREMA.—Cada medida finitamente aditiva $\mu \in \mathcal{M}(S)$ se puede descomponer de modo único en la forma $\mu = \lambda + \nu$, donde λ es \mathcal{H} -singular y ν es \mathcal{H} -regular.

DEMOSTRACIÓN.—Bastará probarlo cuando $\mu \in \mathcal{M}_1(S)$. Utilizaremos las notaciones introducidas en la observación 9. Sea $a = \mu^*(\mathcal{H}^*)$. Si $a = 0$ basta tomar $\lambda = \mu$ y $\nu = 0$, para tener una descomposición del tipo indicado. Supongamos entonces que $a > 0$.

Como la familia $L(\mathcal{H})$ es estable por intersecciones finitas se deduce la existencia de una sucesión decreciente $M_n \in L(\mathcal{H})$ tal que

$$\text{para cada } n \in \mathbb{N} \text{ se verifica } \hat{\mu}(M_n) \leq a + \frac{1}{n}.$$

El conjunto de Borel $\theta = \bigcap_{n=0}^{\infty} M_n$ contiene a \mathcal{H}^* y verifica $\hat{\mu}(\theta) = a$. Si $M \in L(\mathcal{H})$ se tiene $M \cap M_n \in L(\mathcal{H})$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y, por lo tanto, $\hat{\mu}(M \cap \theta) = \lim_n \hat{\mu}(M \cap M_n) \geq a$.

Sea β la medida de Radon en el espacio compacto Ω que en cada conjunto de Borel $A \subset \Omega$ toma el valor $\beta(A) = \hat{\mu}(A \cap \theta)$.

La única medida $\gamma \in \mathcal{M}_1(S)$ que cumple $\hat{\gamma} = \frac{1}{a} \beta$ verifica

$$\hat{\gamma}(M) = \frac{1}{a} \beta(M) = \frac{1}{a} \hat{\mu}(M \cap \theta) \cong 1$$

para cada $M \in L(\mathcal{H})$.

El teorema 8 permite asegurar que γ es \mathcal{H} -regular. Entonces la medida $\nu = a\gamma$ también es \mathcal{H} -regular.

Como $0 \leq a\hat{\gamma} \leq \hat{\mu}$, se deduce que $0 \leq \nu \leq \mu$ y por lo tanto la medida $\lambda = \mu - \nu$ es positiva. Si $a = 1$ es evidente que $\lambda = 0$ es \mathcal{H} -singular. Supongamos entonces que $a \neq 1$, y sea $b = 1 - a$.

Entonces $\mu = a\gamma + b\delta$ donde $\delta = \frac{1}{b}\lambda$, y se tiene

$$a = \inf \{ a\hat{\gamma}(M) + b\hat{\delta}(M) : M \in L(\mathcal{H}) \} \cong a\gamma^*(\mathcal{H}^*) + b\delta^*(\mathcal{H}^*) = a + b\delta^*(\mathcal{H}^*)$$

pues γ es \mathcal{H} -regular y $\gamma^*(\mathcal{H}^*) = 1$ en virtud de la observación 9. Se deduce entonces que $\delta^*(\mathcal{H}^*) = 0$, lo cual implica, nuevamente por la observación 9, que δ es \mathcal{H} -singular. Entonces $\lambda = b\delta$ también es \mathcal{H} -singular.

Finalmente probaremos la unicidad de la descomposición. Sea $\mu = \lambda_1 + \nu_1 = \lambda_2 + \nu_2$, donde λ_1, λ_2 son \mathcal{H} -singulares y ν_1, ν_2 son \mathcal{H} -regulares.

Dado $\varepsilon > 0$ existen dos familias filtrantes crecientes $\mathcal{D}' \subset \mathcal{H}$, $\mathcal{D}'' \subset \mathcal{H}$, tales que $\cup \mathcal{D}' = S$, $\cup \mathcal{D}'' = S$, $\lambda_1(D') < \varepsilon/6$ para cada $D' \in \mathcal{D}'$ y $\lambda_2(D'') < \varepsilon/6$ para cada $D'' \in \mathcal{D}''$.

La familia $\mathcal{D} = \{D' \cap D'' : D' \in \mathcal{D}', D'' \in \mathcal{D}''\}$ es filtrante creciente y $\cup \mathcal{D} = S$. Para cada $D \in \mathcal{D}$ se verifica $\lambda_1(D) < \varepsilon/6$ y $\lambda_2(D) < \varepsilon/6$, y por tanto

$$\begin{aligned} |\mu(D \cap A) - \nu_1(D \cap A)| &= \lambda_1(D \cap A) < \varepsilon/6 \\ |\mu(D \cap A) - \nu_2(D \cap A)| &= \lambda_2(D \cap A) < \varepsilon/6 \end{aligned}$$

cualquiera que sea $A \subset S$. De aquí se deduce que para cada $A \subset S$ y cada $D \in \mathcal{D}$ es $|\nu_1(D \cap A) - \nu_2(D \cap A)| < \varepsilon/3$.

Como ν_i es débilmente \mathcal{D} -regular, aplicando el corolario 3 se deduce que existe $D \in \mathcal{D}$ tal que $\nu_1(A) - \nu_1(D \cap A) < \varepsilon/3$ y $\nu_2(A) - \nu_2(D \cap A) < \varepsilon/3$. Entonces $|\nu_1(A) - \nu_2(A)| < \varepsilon$ para cada $A \subset S$, luego $\nu_1 = \nu_2$ y $\lambda_1 = \lambda_2$.

Sea ahora \mathcal{N} una familia no vacía de partes de S , estable frente a uniones e intersecciones finitas, tal que existe en \mathcal{N} una sucesión creciente $\{D_n : n \in \mathbb{N}\} = \mathcal{D}$ que cumple $\cup \mathcal{D} = S$.

11. DEFINICIÓN.—Una medida finitamente aditiva $\mu \in \mathcal{M}(S)$ diremos que es secuencialmente \mathcal{N} -regular si para cada sucesión creciente en \mathcal{N} , $\mathcal{D} = \{D_n : n \in \mathbb{N}\}$ que cumpla $S = \cup \mathcal{D}$, se verifica

$$\mu(S) = \sup \{ \mu(D_n) : n \in \mathbb{N} \}.$$

Diremos que $\mu \in \mathcal{M}(S)$ es secuencialmente \mathcal{N} -singular si para cada $\varepsilon > 0$ existe una sucesión creciente en \mathcal{N} , $\mathcal{D} = \{D_n : n \in \mathbb{N}\}$ tal que $\cup \mathcal{D} = S$ y $\mu(D_n) < \varepsilon$ para cada $n \in \mathbb{N}$.

Con el fin de obtener una caracterización análoga a la obtenida en el teorema 8 es conveniente introducir la familia $L_\sigma(\mathcal{N})$ formada por el conjunto vacío y todos los conjuntos abiertos $M \subset \Omega$ que son de la forma $M = \omega(\mathcal{E})$ donde $\mathcal{E} \subset \mathcal{N}$ es numerable y $\cup \mathcal{E} = S$.

Es inmediato que $L_\sigma(\mathcal{N})$ es estable por intersecciones finitas y uniones numerables. Cada $M \in L_\sigma(\mathcal{N})$ se puede poner en la forma $M = \omega(\mathcal{D})$ donde $\mathcal{D} \subset \mathcal{N}$ es una sucesión creciente con $\cup \mathcal{D} = S$.

12. TEOREMA.—Una condición necesaria y suficiente para que $\mu \in \mathcal{M}_1(S)$ sea secuencialmente \mathcal{N} -regular es que para todo $M \in L_\sigma(\mathcal{N})$ sea $\hat{\mu}(M) = 1$.

Una condición necesaria y suficiente para que $\mu \in \mathcal{M}_1(S)$ sea secuencialmente \mathcal{N} -singular es que se cumpla

$$\inf \{ \hat{\mu}(M) : M \in L_\sigma(\mathcal{N}) \} = 0.$$

DEMOSTRACIÓN.—Es análoga a la del teorema 8.

13. OBSERVACIÓN.—Si para cada $\theta \subset \Omega$ se define

$$\mu^*(\theta) = \inf \{ \hat{\mu}(M) : \theta \subset M \in L_\sigma(\mathcal{N}) \}$$

es fácil probar que μ^* es una medida exterior sobre Ω . El conjunto $\mathcal{N}^* = L_\sigma(\mathcal{N})$ no es vacío, pues contiene a \tilde{S} . Entonces el teorema 12 se puede enunciar diciendo que μ es secuencialmente \mathcal{N} -regular si y sólo si $\mu^*(\mathcal{N}^*) = 1$ y que μ es secuencialmente \mathcal{N} -singular si y sólo si $\mu^*(\mathcal{N}^*) = 0$.

14. TEOREMA.—Cada medida finitamente aditiva $\mu \in \mathcal{M}(S)$ se puede descomponer de modo único en la forma $\mu = \lambda + \nu$, donde $\nu \in \mathcal{M}(S)$ es secuencialmente \mathcal{N} -regular y $\lambda \in \mathcal{M}(S)$ es secuencialmente \mathcal{N} -singular.

DEMOSTRACIÓN.—Es análoga a la del teorema 10, aplicando ahora el teorema 12 en vez del teorema 8 y razonando con la medida exterior μ^* en lugar de μ^* .

3. Medidas finitamente aditivas en espacios topológicos

En este apartado supondremos siempre que S está dotado de una topología separada τ . Denotaremos por Ω_τ el subconjunto de Ω formado por todas las medidas $\alpha \in \Omega$ tales que el ultrafiltro asociado es convergente para la topología τ .

Como es habitual, \mathcal{V}_x , \mathcal{G} , \mathcal{F} , \mathcal{K} y \mathcal{B} designarán las clases de los subconjuntos de S que son, respectivamente, entornos de x , abiertos, cerrados, compactos y de Borel.

Finalmente, $C(S)$ será el espacio vectorial de todas las aplicaciones continuas acotadas $f: S \rightarrow \mathbb{R}$.

15. DEFINICIÓN.—Diremos que $\mu \in \mathcal{M}(S)$ es σ -aditiva si para cada sucesión decreciente $f_n \in C(S)$ que verifique $\lim_n f_n(x) = 0$ para todo $x \in S$, se cumple que $\lim_n \mu(f_n) = 0$. Diremos que $\mu \in \mathcal{M}(S)$ es puramente finitamente aditiva si cada medida σ -aditiva $\gamma \in \mathcal{M}(S)$ que verifique $0 \leq \gamma \leq \mu$ es idénticamente nula.

Con el fin de caracterizar las medidas σ -aditivas y puramente finitamente aditivas conviene considerar la familia $\mathcal{P} \subset \mathcal{G}$ formada por todos los abiertos $P \subset S$ que son de la forma

$$P = \{x \in S : f(x) > 0\}$$

donde $f \in C(S)$ y $f \geq 0$. Es evidente que \mathcal{P} es estable frente a intersecciones y uniones finitas y que existe en \mathcal{P} una sucesión creciente $\{P_n : n \in \mathbb{N}\}$ con $S = \bigcup_{n=1}^{\infty} P_n$ (basta tomar $P_n = S$ para todo $n \in \mathbb{N}$).

Conviene introducir también la familia $\mathcal{P}(\Omega)$ formada por todos los subconjuntos abiertos $B \subset \Omega$ que son de la forma

$$B = \{ \alpha \in \Omega : \alpha(f) > 0 \}$$

donde $f \in C(S)$ y $f \geq 0$. Designaremos por $\mathcal{P}_0(\Omega)$ la subfamilia de $\mathcal{P}(\Omega)$ formada por los conjuntos abiertos $B = \{ \alpha \in \Omega : \alpha(f) > 0 \}$ tales que $f \in C(S)$, y $f > 0$.

16. LEMA.—Sea $\{P_n : n \in N\}$ una sucesión creciente en \mathcal{P} con $\bigcup_{n=1}^{\infty} P_n = S$. Entonces existe $f \in C(S)$, $f > 0$ tal que

$$\left\{ x \in S : f(x) > \frac{1}{2^n} \right\} \subset P_n$$

para cada $n \in N$.

DEMOSTRACIÓN.—Sea $P_n = \{x \in S : f_n(x) > 0\}$, donde $f_n \in C(S)$ y $f_n \geq 0$. Si $g_n = \max(f_1, f_2, \dots, f_n)$ entonces también es $g_n \in C(S)$ y $g_n \geq 0$, verificándose que $P_n = \{x \in S : g_n(x) > 0\}$. La función

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \min \left\{ g_n(x), \frac{1}{2^n} \right\}$$

es continua acotada y $f(x) > 0$ para todo $x \in S$.

Si se supone que $x \notin P_n$ entonces $g_n(x) = 0$, lo cual implica, por ser g_n creciente, que

$$g_{n-1}(x) = g_{n-2}(x) = \dots = g_1(x) = 0.$$

Se deduce entonces que

$$f(x) \leq \frac{1}{2^{n+1}} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots \right) = \frac{1}{2^n}.$$

17. PROPOSICIÓN.—Con las notaciones introducidas anteriormente se verifica:

17.1) $\mathcal{P}_0(\Omega) \subset L_\sigma(\mathcal{P})$.

17.2) Para cada $M \in L_\sigma(\mathcal{P})$ existe $B \in \mathcal{P}_0(\Omega)$ tal que $B \subset M$.

DEMOSTRACIÓN.—Sea $B \in \mathcal{P}_0(\Omega)$, $B = \{\alpha \in \Omega : \alpha(f) > 0\}$, donde $f \in C(S)$ y $f > 0$. Entonces

$$D_n = \left\{ x \in S : f(x) > \frac{1}{2^n} \right\}$$

es una sucesión creciente en \mathcal{P} con $\bigcup_{n=1}^{\infty} D_n = S$. Si

$$B_n = \left\{ \alpha \in \Omega : \alpha(f) > \frac{1}{2^n} \right\}$$

se deduce fácilmente que $B_n \subset \hat{D}_n \subset B_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Por consiguiente

$$B = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} \hat{D}_n,$$

luego $B \in L_\sigma(\mathcal{P})$, y queda probado 17.1.

Dado $M \in L_\sigma(\mathcal{P})$ puede suponerse que $M = \bigcup_{n=1}^{\infty} \hat{P}_n$, donde $\{P_n : n \in \mathbb{N}\}$ es una sucesión creciente en \mathcal{P} con $\bigcup_{n=1}^{\infty} P_n = S$. El lema 16 asegura la existencia de una función $f \in C(S)$ y $f > 0$, tal que

$$D_n = \left\{ x \in S : f(x) > \frac{1}{2^n} \right\}$$

está contenido en P_n para cada $n \in \mathbb{N}$. Si $B = \{\alpha \in \Omega : \alpha(f) > 0\}$ se verifica que $B \subset M$, pues $B = \bigcup_{n=1}^{\infty} \hat{D}_n$ y $\hat{D}_n \subset \hat{P}_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$.

18. LEMA.—Sea $\mu \in \mathcal{M}_1(S)$. Si para cada $\theta \subset \Omega$ se define

$$\hat{\mu}^*(\theta) = \inf \{ \hat{\mu}(B) : \theta \subset B \in \mathcal{P}(\Omega) \},$$

entonces $\hat{\mu}^*$ es una medida exterior sobre Ω , con la propiedad de que cada $B \in \mathcal{P}(\Omega)$ es $\hat{\mu}^*$ -medible.

DEMOSTRACIÓN.—Bastará probar que $\hat{\mu}^*$ es numerablemente sub-

aditiva, pues las restantes propiedades de la medida exterior son evidentes. Sea pues $\theta = \bigcup_{n=1}^{\infty} \theta_n$, donde $\theta_n \subset \Omega$. Dado $\varepsilon > 0$, para cada $n \in \mathbb{N}$ existe $f_n \in C(S)$, $0 \leq f_n \leq 1$, tal que el conjunto $B_n = \{\alpha \in \Omega : \alpha(f_n) > 0\}$ verifica $\hat{\mu}(B_n) \leq \hat{\mu}^*(\theta_n) + \frac{\varepsilon}{2^n}$ y $B_n \supset \theta_n$.

Sea $f \in C(S)$ la función definida por

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} f_n(x).$$

Evidentemente $\theta \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n = B$, donde $B = \{\alpha \in \Omega : \alpha(f) > 0\}$.

Como

$$\hat{\mu}(B) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \hat{\mu}(B_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \hat{\mu}^*(\theta_n) + \varepsilon$$

se deduce que

$$\hat{\mu}^*(\theta) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \hat{\mu}^*(\theta_n) + \varepsilon$$

cualquiera que sea $\varepsilon > 0$.

Sea $M \in \mathcal{P}(\Omega)$, $M = \{\alpha \in \Omega : \alpha(\psi) > 0\}$ donde $\psi \in C(S)$, $\psi \geq 0$.

La sucesión $M_n = \{\alpha \in \Omega : \alpha(\psi) \geq 1/n\}$ es creciente y $M = \bigcup_{n=1}^{\infty} M_n$.

Si $A \in \mathcal{P}(\Omega)$ se verifica que

$$\hat{\mu}(A \cap M^c) = \lim_n \hat{\mu}(A \cap M_n^c)$$

luego dado $\varepsilon > 0$ existe $n \in \mathbb{N}$ tal que

$$\hat{\mu}(A \cap M_n^c) \leq \hat{\mu}(A \cap M^c) + \varepsilon.$$

Como $A \cap M$ y $A \cap M_n^c$ pertenecen a $\mathcal{P}(\Omega)$ resulta

$$\begin{aligned} \hat{\mu}(A) &= \hat{\mu}(A \cap M) + \hat{\mu}(A \cap M^c) \geq \hat{\mu}(A \cap M) + \hat{\mu}(A \cap M_n^c) - \varepsilon = \\ &= \hat{\mu}^*(A \cap M) + \hat{\mu}^*(A \cap M_n^c) - \varepsilon \geq \hat{\mu}^*(A \cap M) + \hat{\mu}^*(A \cap M^c) - \varepsilon. \end{aligned}$$

Si $T \subset \Omega$, para cada $A \in \mathcal{P}(\Omega)$, $A \supset T$, se verifica

$$\hat{\mu}(A) \cong \hat{\mu}^*(T \cap M) + \hat{\mu}^*(T \cap M^c)$$

de donde se deduce

$$\hat{\mu}^*(T) = \hat{\mu}^*(T \cap M) + \hat{\mu}^*(T \cap M^c)$$

cualquiera que sea $T \subset \Omega$, con lo que queda probado que M es $\hat{\mu}^*$ -medible.

19. TEOREMA.—Sea $\mu \in \mathcal{M}_1(S)$. Las tres propiedades siguientes son equivalentes:

19.1) μ es secuencialmente \mathcal{P} -regular.

19.2) μ es σ -aditiva.

19.3) $\hat{\mu}^*(\Omega_\tau) = 1$.

DEMOSTRACIÓN.—Es fácil comprobar que $B \in \mathcal{P}_0(\Omega)$ si y sólo si $B \in \mathcal{P}(\Omega)$ y $B \supset \Omega_\tau$. Se deduce entonces que

$$\hat{\mu}^*(\Omega_\tau) = \inf \{ \hat{\mu}(B) : B \in \mathcal{P}_0(\Omega) \}.$$

Teniendo en cuenta la proposición 17 resulta

$$\hat{\mu}^*(\Omega_\tau) = \inf \{ \hat{\mu}(B) : B \in L_\sigma(\mathcal{P}) \}.$$

Del teorema 12 se deduce que 19.1 y 19.3 son equivalentes.

Supongamos que se cumple 19.1 y sea $f_n \in C(S)$ una sucesión decreciente, $0 \leq f_n \leq 1$, tal que $\lim_n f_n(x) = 0$ para todo $x \in S$.

Dado $\varepsilon > 0$, sea

$$P_n = \{ x \in S : f_n(x) < \varepsilon \} = \{ x \in S : \psi_n(x) > 0 \}$$

donde $\psi_n(x) = \max \{ \varepsilon - f_n(x), 0 \}$. Es evidente que P_n es una sucesión creciente en \mathcal{P} que cumple $\bigcup_{n=1}^{\infty} P_n = S$. Si $F_n = S - P_n$ se verifica $\lim_n \mu(F_n) = 0$ y por lo tanto

$$0 \leq \mu(F_n) = \mu(f_n \chi_{P_n}) + \mu(f_n \chi_{F_n}) \leq \mu(\varepsilon \chi_{P_n}) + \mu(F_n) \leq 2\varepsilon$$

si n es suficientemente grande, con lo que queda probado 19.3.

Finalmente probaremos que si se cumple 19.2 entonces $\hat{\mu}(B) = 1$ para todo $B \in \mathcal{P}(\Omega)$ que verifique $\Omega_\tau \subset B$ (lo cual equivale a 19.3).

En efecto, en estas condiciones sabemos que $B \in \mathcal{P}_0(\Omega)$ y por lo tanto $B = \{x \in \Omega : \alpha(f) > 0\}$ con $f \in C(S)$ y $f > 0$.

La sucesión $f_n \in C(S)$ definida por $f_n(x) = \max\{1 - n f(x), 0\}$ es decreciente y verifica que $\lim_n f_n(x) = 0$ para cada $x \in S$.

Como $\hat{f}_n(x) = \max\{1 - n \hat{f}(x), 0\}$, se deduce que \hat{f}_n es una sucesión decreciente que converge puntualmente hacia la función característica del compacto $Z = \Omega - B$.

Puesto que μ es σ -aditiva resulta que

$$\mu(Z) = \lim_n \hat{\mu}(\hat{f}_n) = \lim_n \mu(f_n) = 0,$$

y por lo tanto $\hat{\mu}(B) = 1$ como se quería probar.

20. TEOREMA.—Sea $\mu \in \mathcal{M}_1(S)$. Las tres propiedades siguientes son equivalentes:

20.1) μ es secuencialmente \mathcal{P} -singular.

20.2) μ es puramente finitamente aditiva.

20.3) $\hat{\mu}(\Omega_\tau) = 0$.

DEMOSTRACIÓN.—Del teorema 12 se deduce que 20.1 y 20.3 son equivalentes, pues $\hat{\mu}(\Omega_\tau) = \inf\{\hat{\mu}(B) : B \in L_\sigma(\mathcal{P})\}$.

Si μ es secuencialmente \mathcal{P} -singular y $\gamma \in \mathcal{M}(S)$ es σ -aditiva verificando $0 \leq \gamma \leq \mu$, se deduce de la definición que γ también es secuencialmente \mathcal{P} -singular. Pero γ es secuencialmente \mathcal{P} -regular en virtud del teorema 19 y por consiguiente debe ser $\gamma = 0$. Queda así probado que 20.1 implica 20.2.

Recíprocamente, supongamos que se verifica 20.2 y sea $\mu = \lambda + \nu$ donde λ es secuencialmente \mathcal{P} -singular y ν es secuencialmente \mathcal{P} -regular. Como $0 \leq \nu \leq \mu$ y ν es σ -aditiva por el teorema 19, se deduce que $\nu = 0$ y por lo tanto $\mu = \lambda$ es secuencialmente \mathcal{P} -singular.

21. COROLARIO.—Cada medida finitamente aditiva $\mu \in \mathcal{M}(S)$ se puede descomponer de modo único en la forma $\mu = \lambda + \nu$, donde $\lambda \in \mathcal{M}(S)$ es puramente finitamente aditiva y $\nu \in \mathcal{M}(S)$ es σ -aditiva.

DEMOSTRACIÓN.—Consecuencia inmediata de los teoremas 14, 19 y 20.

22. PROPOSICIÓN.—Sea $\mu \in \mathcal{M}(S)$. Son equivalentes:

22.1) μ es σ -aditiva.

22.2) $\mu(S) = \lim_n \mu \left\{ x \in S : f(x) > \frac{1}{2^n} \right\}$, para cada $f > 0$, $f \in C(S)$.

DEMOSTRACIÓN.—Es inmediato que 22.1 implica 22.2. Recíprocamente, aplicando el lema 16 se deduce de 22.2 que μ es secuencialmente \mathcal{P} -regular y por tanto σ -aditiva.

23. PROPOSICIÓN.—Sea $\mu \in \mathcal{M}(S)$. Son equivalentes:

23.1) μ es puramente finitamente aditiva.

23.2) Para cada $\varepsilon > 0$, existe $f \in C(S)$, $f > 0$, tal que

$$\mu \left\{ x \in S : f(x) > \frac{1}{2^n} \right\} < \varepsilon$$

para todo $n \in N$.

DEMOSTRACIÓN.—Si se cumple 23.2 entonces μ es secuencialmente \mathcal{P} -singular y por lo tanto se verifica 23.1. El recíproco es consecuencia inmediata del lema 16.

24. COROLARIO.—Sea $\mu \in \mathcal{M}(S)$. Si existe $f \in C(S)$, $f > 0$, tal que $\mu(f) = 0$, entonces μ es puramente finitamente aditiva.

DEMOSTRACIÓN.—Para cada número $c > 0$ se verifica

$$\mu \{ x \in S : f(x) > c \} = 0,$$

y se cumple 23.2.

25. OBSERVACIÓN.—Es inmediato que las proposiciones 22 y 23 siguen siendo ciertas si se sustituye la sucesión $\frac{1}{2^n}$ por cualquier otra sucesión decreciente ε_n con $\lim_n \varepsilon_n = 0$.

26. COROLARIO.—Sea S un grupo topológico localmente compacto, σ -compacto y no compacto. Toda medida invariante a la izquierda $\mu \in \mathcal{M}_1(S)$ es puramente finitamente aditiva.

DEMOSTRACIÓN.—Es fácil probar que $\mu(K) = 0$ para cada compacto $K \subset S$ (véase en [1] la demostración del corolario 21).

Sea (K_n) una sucesión expansiva de compactos en S tal que $\bigcup_{n=1}^{\infty} K_n = S$. Para cada $n \in \mathbb{N}$ sea $f_n \in C(S)$ tal que $0 \leq f_n \leq 1$, $M_n = \text{sup}(f_n)$ es compacto, y $f_n(x) = 1$ para cada $x \in K_n$.

La función

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} f_n(x)$$

pertenece a $C(S)$, $f(x) > 0$ para cada $x \in S$ y $\mu(f) = 0$, pues $0 \leq \mu(f_n) \leq \mu(M_n) = 0$.

Se deduce del corolario 24 que μ es puramente finitamente aditiva.

27. DEFINICIÓN.—Diremos que $\mu \in \mathcal{M}(S)$ es τ -aditiva si para cada red decreciente $f_j \in C(S)$ que verifique $\lim_j f_j(x) = 0$ para todo $x \in S$, se cumple que $\lim_j \mu(f_j) = 0$.

Diremos que $\mu \in \mathcal{M}(S)$ es puramente σ -aditiva si es σ -aditiva y cada medida τ -aditiva $\gamma \in \mathcal{M}(S)$ que verifique $0 \leq \gamma \leq \mu$ es idénticamente nula.

28. LEMA.—Para cada abierto $A \subset \Omega$ que verifique $\Omega_\tau \subset A$ existe $M \in L(\mathcal{G})$ tal que $\Omega_\tau \subset M \subset A$.

DEMOSTRACIÓN.—Como $\{\hat{H} : H \subset S\}$ es una base de la topología de Ω , se tendrá $A = \bigcup_{i \in I} \hat{H}_i$, donde $\{H_i : i \in I\}$ es una familia de partes de S que no es restrictivo suponer filtrante creciente. Para cada $x \in S$ consideremos el compacto

$$\theta_x = \{\alpha \in \Omega : \alpha(V) = 1 \text{ si } V \in \mathcal{D}_x\}.$$

Como $\theta_x \subset \Omega_\tau \subset A$ se deduce que $\theta_x \subset \hat{H}_i$ para algún $i \in I$.

Evidentemente $x \in H_i$ pues $\delta_x \in \theta_x$. Si x no fuese interior a H_i el filtro $\{V \cap H_i^c : V \in \mathcal{P}_x\}$ estaría contenido en un ultrafiltro \mathcal{U} , necesariamente convergente hacia x . Si $\alpha \in \Omega$ es la medida asociada a este ultrafiltro, se verificaría $\alpha \in \theta_x$ y $\alpha \notin \hat{H}_i$ en contradicción con la inclusión $\theta_x \subset \hat{H}_i$. Hemos probado que $\{\hat{H}_i : i \in I\}$ es un recubrimiento abierto de S .

El conjunto $M = \bigcup_{i \in I} \hat{G}_i$, donde $\hat{G}_i = H_i$, pertenece a $L(\mathcal{G})$ y es fácil comprobar que $\Omega_\tau \subset M \subset A$.

En lo que sigue designaremos por $\hat{\mu}^*$ la medida exterior sobre Ω asociada a la medida de Radon $\hat{\mu}$, definida para cada $\theta \subset \Omega$ por

$$\hat{\mu}^*(\theta) = \inf \{ \hat{\mu}(A) : \theta \subset A, A \text{ abierto en } \Omega \}.$$

29. TEOREMA.—Dada $\mu \in \mathcal{M}_1(S)$, consideremos las tres propiedades siguientes:

29.1) μ es \mathcal{G} -regular.

29.2) $\hat{\mu}^*(\Omega_\tau) = 1$.

29.3) μ es τ -aditiva.

Entonces 29.1 y 29.2 son equivalentes y 29.2 implica 29.3.

Si S es completamente regular las tres propiedades anteriores son equivalentes.

DEMOSTRACIÓN.—Es inmediato que $M \supset \Omega_\tau$ para cada $M \in L(\mathcal{G})$. Se deduce del lema 28 que $\hat{\mu}^*(\Omega_\tau) = \inf \{ \hat{\mu}(M) : M \in L(\mathcal{G}) \}$. Entonces 29.1 y 29.2 son equivalentes en virtud del teorema 8. A continuación probaremos que 29.2 implica 29.3. Sea pues $(f_j)_{j \in J}$ una red decreciente en $C(S)$ tal que $0 \leq f_j \leq 1$ para cada $j \in J$ y $\lim_j f_j(x) = 0$ para cada $x \in S$. Fijado $\varepsilon > 0$ sea $F = \bigcap_{j \in J} F_j$ donde

$$F_j = \{ \alpha \in \Omega : \alpha(f_j) \geq \varepsilon \}.$$

El conjunto $A = \Omega - F$ es abierto en Ω . Se verifica que $A \supset \Omega_\tau$, pues si $\alpha \in \Omega_\tau$ y x es el límite del ultrafiltro asociado a α se cumple que $\alpha(f_j) = f_j(x) < \varepsilon$ para algún $j \in J$ y por lo tanto $\alpha \notin F$.

Si suponemos que se cumple 29.2 se deduce que $\hat{\mu}(A) = 1$ y en consecuencia $0 = \hat{\mu}(F) = \lim_j \hat{\mu}(F_j)$, pues $\{F_j : j \in J\}$ es una red decreciente de compactos en Ω .

Si $A_j = \Omega - F_j$ se tiene:

$$\mu(f_j) = \hat{\mu}(\hat{f}_j) = \hat{\mu}(f_j \chi_{F_j}) + \hat{\mu}(f_j \chi_{A_j}) \leq \hat{\mu}(F_j) + \hat{\mu}(\varepsilon \chi_{A_j}) \leq \mu(F_j) + \varepsilon$$

y se deduce que existe $j_0 \in J$ tal que $\mu(f_j) < 2\varepsilon$ si $j \geq j_0$.

Finalmente, supongamos que S es un espacio topológico completamente regular. Probaremos que en este caso 29.3 implica 29.1.

Sea \mathcal{D} una familia filtrante creciente de abiertos que recubre S . Le asociamos a \mathcal{D} la familia Ψ de todas las funciones $f \in C(S)$, $0 \leq f \leq 1$, para las que existe $D \in \mathcal{D}$ tal que $f(x) = 0$ si $x \notin D$.

Es fácil comprobar que si $f_1, f_2 \in \Psi$ y $f = \min\{f_1, f_2\}$ entonces $f \in \Psi$. Por consiguiente se puede formar una red $(f_j)_{j \in J}$ donde $J = \Psi$ está dirigido en la forma natural: $i \leq j$ si $f_i \geq f_j$, siendo $f_j = j$.

Para cada $a \in S$ sea $D \in \mathcal{D}$ tal que $a \in D$. Como S es completamente regular, se puede asegurar la existencia de una función $f \in C(S)$ tal que $0 \leq f \leq 1$, $f(a) = 0$ y $f(x) = 1$ si $x \notin D$. De aquí se deduce que $\lim_j f_j(a) = 0$ para cada $a \in S$. Si suponemos que μ es τ -aditiva se deduce que $\lim_j \mu(f_j) = 0$, luego dado $\varepsilon > 0$ existe $j \in J$ tal que $\mu(f_j) < \varepsilon$.

Según la definición de la familia Ψ existe $D \in \mathcal{D}$ tal que $f_j(x) = 1$ siempre que $x \notin D$. Evidentemente $\chi_{D^c} \leq f_j$, de donde resulta que $\mu(S - D) \leq \mu(f_j) < \varepsilon$ y por lo tanto se tiene

$$\mu(D) = 1 - \mu(S - D) \geq 1 - \varepsilon$$

con lo cual queda probado que μ es \mathcal{G} -regular.

30. TEOREMA.—Dada $\mu \in \mathcal{M}_1(S)$, consideremos las tres propiedades siguientes:

30.1) μ es \mathcal{G} -singular.

30.2) $\hat{\mu}^*(\Omega_\tau) = 0$.

30.3) μ es puramente σ -aditiva.

Entonces 30.1 y 30.2 son equivalentes, y 30.3 implica 30.1.

Si S es completamente regular y μ es σ -aditiva, las tres propiedades anteriores son equivalentes.

DEMOSTRACIÓN.—Del teorema 8 se deduce que 30.1 y 30.2 son

equivalentes, pues $\hat{\mu}^*(\Omega_\tau) = \inf \{\hat{\mu}(M) : M \in L(\mathcal{G})\}$. Probaremos que 30.3 implica 30.1.

Según el teorema 10 existe una única descomposición $\mu = \lambda + \nu$, donde λ es \mathcal{G} -singular y ν es \mathcal{G} -regular. Como $0 \leq \nu \leq \mu$ y ν es τ -aditiva en virtud del teorema 29, la hipótesis de que μ es puramente σ -aditiva implica que $\nu = 0$ y por lo tanto $\mu = \lambda$ es \mathcal{G} -singular.

Supongamos ahora que S es completamente regular y que μ es σ -aditiva. Si μ es \mathcal{G} -singular y $\gamma \in \mathcal{M}(S)$ verifica $0 \leq \gamma \leq \mu$ entonces γ es \mathcal{G} -singular. Si se supone además que γ es τ -aditivo resulta del teorema 29 que γ también es \mathcal{G} -regular y por lo tanto $\gamma = 0$. Queda probado así que 30.1 implica 30.3.

31. COROLARIO.—Sea S un espacio topológico completamente regular. Entonces cada medida σ -aditiva $\mu \in \mathcal{M}(S)$ se puede descomponer de modo único en la forma $\mu = \lambda + \nu$, donde λ es puramente σ -aditiva y ν es τ -aditiva.

DEMOSTRACIÓN.—Es consecuencia inmediata de los teoremas 10, 29 y 30.

Bibliografía

- [1] BOMBAL, F. y VERA, G. 1973. *Medias invariantes en espacios localmente convexos y semi-reflexividad*. «Coll. Math.», XXIV, 3-31.
- [2] BADRIKIAN, A. 1970. *Séminaire sur les Fonctions. Aléatoires Linéaires et les Mesures Cylindriques. Lectures Notes*. Springer-Verlag.
- [3] CHOQUET, G. 1969. *Lectures on Analysis*. Benjamin. New York.
- [4] KELLEY, J. L. 1955. *General Topology*. Van Nostrand. New York.
- [5] KNOWLES, J. D. 1967. *Measures on topological spaces*. «Proc. London Math. Soc.», 17, 139-156.
- [6] RODRÍGUEZ-SALINAS, B. 1973. *Teoría de la medida sobre los espacios topológicos no localmente compactos*. «Rev. Mat. Hisp. Amer.», XXXIII.
- [7] SCHWARTZ, L. 1973. *Radon measures on arbitrary topological spaces and cylindrical measures*. Tata Inst. of fund. research. Oxford Univ. Press.

- [8] VARADARAJAN, V. S. 1965. *Measures on topological spaces.* «Amer. Math. Soc. Transl.», **48**, 161-228.
- [9] VERA, G. 1979. *Medidas finitamente aditivas en espacios topológicos.* «Rev. de la Real Acad. de Ciencias Exact., Fís. y Nat.», LXXII, 3.º, 427-435.
- [10] YOSIDA, K. y HEWITT, E. 1952. *Finitely additive measures.* «Trans. Amer. Math. Soc.», **72**, 46-66.