MEDIDAS TOPOLOGICAS ASOCIADAS A MEDIDAS FINITAMENTE ADITIVAS (*)

G. Vera Botí

Recibido: 26 abril 1978

PRESENTADO POR EL ACADÉMICO NUMERARIO D. BALTASAR RODRÍGUEZ-SALINAS

Dada una medida finita y no negativa μ, finitamente aditiva, definida sobre todos los subconjuntos de un conjunto no vacío S, es sabido que μ se puede representar como una medida de Radon $\hat{\mu}$ sobre un espacio compacto Ω (la compactificación de Stone-Čech de S para la topología discreta). Si τ es una topología separada en S, sea Ω_τ el subconjunto de Ω formado por los ultrafiltros en S que convergen para esta topología. En este artículo continuamos con la línea de trabajo iniciada en [9] consistente en caracterizar propiedades topológicas de μ en términos del tipo de concentración de $\hat{\mu}$ sobre Ω_τ.

Cuando la topología τ es regular, obtenemos caracterizaciones de las medidas finitamente aditivas compactas y también de las que hemos llamado difusas. Como aplicación probamos un teorema de descomposición del tipo Hewitt-Yosida, análogo a otros obtenidos en [9]. Estos teoremas de descomposición permiten asociar a la medida finitamente aditiva μ una medida topológica $\bar{\mu}$ sobre S y entonces estudiamos la clase de los subconjuntos $M \subset S$ para los que $\mu(M) = \bar{\mu}(M)$, así como las condiciones bajo las cuales la medida topológica asociada $\bar{\mu}$ es única. Cuando μ es compacta se obtiene que la medida asociada $\bar{\mu}$ es una medida de Radon.

1. Introducción

Sea S un conjunto no vacío, $\mathcal{M}(S)$ el conjunto de todas las medidas finitas, no negativas y finitamente aditivas sobre el álgebra de todas las partes de S, y $\mathcal{M}_1(S)$ el subconjunto de $\mathcal{M}(S)$ formado por todas las medidas μ que cumplen $\mu(S) = 1$.

(*) Trabajo realizado en el Departamento de Matemáticas de la Facultad de Ciencias, Universidad de Murcía.

Designaremos por B (S) el espacio vectorial de todas las aplicaciones acotadas $f\colon S \longrightarrow \mathbb{R}$ dotado de la norma de la convergencia uniforme. Entonces $\mathcal{M}_1$ (S) es un conjunto convexo y débil*-compacto de la bola unidad cerrada del dual B (S)'. El conjunto Ω de sus puntos extremales también es compacto para la topología débil* y se verifica que $\alpha \in \Omega$ si y sólo si $\{A \subset S : \alpha(A) = 1\}$ es un ultrafiltro en S.

Para cada $A \subset S$ sea $\hat{A} = \{\alpha \in \Omega : \alpha(A) = 1\}$. Se verifica que $\{\hat{A} : A \subset S\}$ es una base de la topología de Ω y que un subconjunto $\theta \subset \Omega$ es abierto y cerrado si y sólo si $\theta = \hat{A}$ para algún $A \subset S$.

Si para cada $x \in S$ designamos por δ_x la evaluación en x, $\delta_x(f) = f(x)$ para cada $f \in B(S)$, entonces $\tilde{S} = \{\delta_x : x \in S\}$ está contenido en Ω y es homeomorfo a S, dotado con la topología discreta, mediante la biyección $x \longmapsto \delta_x$.

Resulta así que Ω se puede considerar como la compactificación de Stone-Čech de S para la topología discreta. Por consiguiente, si identificamos S y $\tilde{S}$, cada función acotada $f \in B(S)$ se extiende de modo único a una función continua $\hat{f}\colon \Omega \longrightarrow R$ definida por $\hat{f}(\alpha) = \alpha(f)$ para cada $\alpha \in \Omega$. Entonces a cada medida finitamente aditiva $\mu \in \mathcal{M}_1(S)$ se le puede asociar una única medida de Radon $\hat{\mu}$ sobre el espacio compacto Ω, verificando $\hat{\mu}(\Omega) = 1$ y $\hat{\mu}(\hat{f}) = \mu(f)$ para cada $f \in B(S)$. En particular, si $f = \chi_A$ es la función característica de un subconjunto $A \subset S$ resulta $\hat{\mu}(\hat{A}) = \mu(A)$. Los resultados que acabamos de exponer se pueden ver en el libro de G. Choquet [2].

En lo que sigue supondremos que S está dotado de una topología separada τ. Queda determinado entonces el subconjunto Ω_τ de Ω formado por los elementos $\alpha \in \Omega$ tales que el ultrafiltro asociado es convergente para esta topología.

Designaremos por C (S) subespacio vectorial de B (S) formado por las funciones acotadas continuas $f\colon S \longrightarrow \mathbb{R}$. Como es habitual, designaremos por $\mathcal{V}_x$, $\mathcal{G}$, $\mathcal{F}$, $\mathcal{K}$ y $\mathcal{B}$ las clases de subconjuntos de S que son respectivamente entornos de x, abiertos, cerrados, compactos y de Borel. Finalmente, sea $\mathcal{P}$ la familia de los coceros de funciones $f \in C(S)$.

1. Definición.—*Una medida finitamente aditiva* $\mu \in \mathcal{M}(S)$ *diremos que es* $\mathcal{G}$*-regular (resp. secuencialmente* $\mathcal{P}$*-regular) si para*

cada familia $\mathcal{D} \subset \mathcal{G}$ *(resp. sucesión* $\mathcal{D} \subset \mathcal{P}$*) filtrante creciente que cumple* $\bigcup \mathcal{D} = S$ *se verifica que* $\mu(S) = \sup\{\mu(D) : D \in \mathcal{D}\}$.

Diremos que $\mu \in \mathcal{M}(S)$ *es* $\mathcal{G}$*-singular (resp. secuencialmente* $\mathcal{P}$*-singular) si para cada* $\varepsilon > 0$ *existe una familia* $\mathcal{D} \subset \mathcal{G}$ *(resp. sucesión* $\mathcal{D} \subset \mathcal{P}$*) filtrante creciente tal que* $\bigcup \mathcal{D} = S$ *y* $\mu(D) \leqq \varepsilon$ *para cada* $D \in \mathcal{D}$.

Sea $\hat{\mu}^*$ la medida exterior asociada a la medida de Radon $\hat{\mu}$, definida para cada $\theta \subset \Omega$ por:

1.1) $\hat{\mu}^*(\theta) = \inf\{\hat{\mu}(A) : \theta \subset A,\ A \text{ abierto en } \Omega\}$.

Entonces es bien conocido que cada conjunto de Borel $B \subset \Omega$ es $\hat{\mu}^*$-medible.

2. Proposición.—*Una condición necesaria y suficiente para que* $\mu \in \mathcal{M}_1(S)$ *sea* $\mathcal{G}$*-regular (resp.* $\mathcal{G}$*-singular) es que* $\hat{\mu}^*(\Omega_\tau) = 1$ *(resp.* $\hat{\mu}^*(\Omega_\tau) = 0$*).*

Demostración.—Véase [9].

Sea $\mathcal{P}(\Omega)$ la familia formada por los subconjuntos abiertos $A \subset \Omega$ que son de la forma $A = \{\alpha \in \Omega : \alpha(f) > 0\}$, donde $f \in C(S)$ y $f \geqq 0$. Si $\mu \in \mathcal{M}_1(S)$, en [9] se prueba que la función de conjunto $\hat{\mu}^{\cdot}$ definida para cada $\theta \subset \Omega$ por $\hat{\mu}^{\cdot}(\theta) = \inf\{\hat{\mu}(A) : \theta \subset A \in \mathcal{P}(\Omega)\}$, es una medida exterior sobre Ω con la propiedad de que cada $A \in \mathcal{P}(\Omega)$ es $\hat{\mu}^{\cdot}$-medible.

3. Proposición.—*Una condición necesaria y suficiente para que* $\mu \in \mathcal{M}_1(S)$ *sea secuencialmente* $\mathcal{P}$*-regular (resp. secuencialmente* $\mathcal{P}$*-singular) es que* $\hat{\mu}^{\cdot}(\Omega_\tau) = 1$, *(resp.* $\hat{\mu}^{\cdot}(\Omega_\tau) = 0$*).*

Demostración.—Véase [9].

2. Medidas compactas y difusas. Teoremas de descomposición

Nos proponemos caracterizar las medidas $\mathcal{G}$-regulares $\mu \in \mathcal{M}_1(S)$ para las que Ω_τ es un subconjunto $\hat{\mu}^*$-medible de Ω.

4. Definición.—*Dada* $\mu \in \mathcal{M}(S)$, *sea* $\tilde{\mu}$ *la función de conjunto definida para cada* $M \subset S$ *por* $\tilde{\mu}(M) = \inf\{\mu(G) : M \subset G \in \mathcal{G}\}$.

Diremos que μ *es compacta si* $\mu(S) = \sup\{\tilde{\mu}(K) : K \in \mathcal{K}\}$, *y diremos que* μ *es difusa si* $\tilde{\mu}(K) = 0$ *para cada* $K \in \mathcal{K}$.

Es fácil comprobar que toda medida compacta es $\mathcal{G}$-regular y que toda medida $\mathcal{G}$-singular es difusa.

5. Lema.—*Sea* h: $\Omega_\tau \longrightarrow S$ *la aplicación que a cada* $\alpha \in \Omega_\tau$ *le hace corresponder el límite del ultrafiltro asociado*

$$\mathcal{U} = \{ A \subset S : \alpha(A) = 1 \}.$$

Para cada $K \in \mathcal{K}$ *se verifica:*

5.1) $h^{-1}(K) = \bigcap \{\hat{G} : K \subset G \in \mathcal{G}\}$.

Si S es un espacio topológico regular entonces h *es continua.*

Demostración.—Es inmediato que $h^{-1}(K) \subset \hat{G}$ para cada abierto $G \supset K$. Si $\alpha \notin h^{-1}(K)$ entonces cada $x \in K$ posee un entorno abierto V_x que verifica $\alpha(V_x) = 0$. Como un número finito de estos entornos recubre K se deduce que existe un abierto $G \supset K$ tal que $\alpha \notin \hat{G}$, y por lo tanto se verifica 5.1.

Si la topología τ de S es completamente regular, dado $\alpha \in \Omega_\tau$ sea $a = h(\alpha)$ y V un entorno cerrado de a. Entonces $\hat{V} \cap \Omega_\tau$ es un entorno abierto de α en Ω_τ. Dado $\beta \in \hat{V} \cap \Omega_\tau$, el conjunto V pertenece al ultrafiltro asociado a β. Como $b = h(\beta)$ es el límite de este ultrafiltro se deduce que $b \in \overline{V} = V$ y queda probado que h es continua.

6. Observación.—Del lema 5 se deduce que, para cada $K \in \mathcal{K}$, el conjunto $h^{-1}(K)$ es compacto en Ω, y que si $\mu \in \mathcal{M}_1(S)$ entonces $\tilde{\mu}(K) = \hat{\mu}(h^{-1}(K))$.

7. Proposición.—*Una condición necesaria para que* $\mu \in \mathcal{M}_1(S)$ *sea compacta es que* $\hat{\mu}^*(\Omega \setminus \Omega_\tau) = 0$.

Si S es un espacio topológico regular, esta condición también es suficiente.

Demostración.—Si μ es compacta, dado $\varepsilon > 0$ existe $K \in \mathcal{K}$ tal que $\tilde{\mu}(K) \geqq 1 - \varepsilon$. Entonces $\theta = h^{-1}(K)$ es un subconjunto compacto de Ω contenido en Ω_τ que cumple $\hat{\mu}(\theta) = \tilde{\mu}(K) \geqq 1 - \varepsilon$, y por consiguiente $\hat{\mu}^*(\Omega \setminus \Omega_\tau) = 0$.

Recíprocamente, si S es un espacio topológico regular y $\hat{\mu}^*(\Omega \setminus \Omega_\tau) = 0$, dado $\varepsilon > 0$ existe un compacto $\theta \subset \Omega_\tau$ tal que

$\hat{\mu}(\theta) \geqq 1 - \varepsilon$. Como h es continua en virtud del lema 5, resulta que $K = h(\theta)$ es un subconjunto compacto de S que cumple $\tilde{\mu}(K) = \hat{\mu}(h^{-1}(K)) \geqq \hat{\mu}(\theta) \geqq 1 - \varepsilon$, y de aquí se sigue que μ es compacta.

8. Observación.—Si $\mu \in \mathcal{M}_1(S)$, la condición $\hat{\mu}^*(\Omega \backslash \Omega_\tau) = 0$ equivale a que Ω_τ sea un subconjunto $\hat{\mu}^*$-medible de Ω, verificando $\hat{\mu}^*(\Omega_\tau) = 1$. Resulta de las proposiciones 2 y 7 que, cuando S es un espacio topológico regular, las medidas compactas $\mu \in \mathcal{M}_1(S)$ son precisamente las medidas $\mathcal{G}$-regulares tales que Ω_τ es un subconjunto $\hat{\mu}^*$-medible de Ω.

9. Proposición.—*Una condición suficiente para que* $\mu \in \mathcal{M}_1(S)$ *sea difusa es que* $\hat{\mu}^*(\Omega \backslash \Omega_\tau) = 1$.

Si S es un espacio topológico regular esta condición también es necesaria.

Demostración.—Supongamos que $\hat{\mu}^*(\Omega \backslash \Omega_\tau) = 1$. Entonces para cada compacto $\theta \subset \Omega_\tau$ es $\hat{\mu}(\theta) = 0$. En particular si $\theta = h^{-1}(K)$ donde $K \in \mathcal{K}$, se cumple $\tilde{\mu}(K) = \hat{\mu}(h^{-1}(K)) = 0$ y por lo tanto μ es difusa.

Si μ es difusa y el espacio topológico S es regular, dado un compacto $\theta \subset \Omega_\tau$, entonces $K = h(\theta)$ es un subconjunto compacto de S, pues h es continua. Por consiguiente

$$0 \leqq \hat{\mu}(\theta) \leqq \hat{\mu}(h^{-1}(K)) = \tilde{\mu}(K) = 0,$$

para cada compacto $\theta \subset \Omega_\tau$ y por lo tanto $\hat{\mu}^*(\Omega \backslash \Omega_\tau) = 1$.

10. Teorema.—*Si S es un espacio topológico regular, cada medida finitamente aditiva* $\mu \in \mathcal{M}(S)$ *se puede descomponer de modo único en la forma* $\mu = \lambda + \nu$, *donde* $\nu \in \mathcal{M}(S)$ *es compacta y* $\lambda \in \mathcal{M}(S)$ *es difusa.*

Demostración.—Bastará hacer la demostración en el caso $\mu \in \mathcal{M}_1(S)$. Sea $a = \sup \{\tilde{\mu}(K) : K \in \mathcal{K}\}$. Si $a = 0$ (resp. $a = 1$) se obtiene una descomposición del tipo indicado tomando $\lambda = \mu$ y $\nu = 0$ (resp. $\nu = \mu$ y $\lambda = 0$). Supongamos $0 < a < 1$, y sea $K_n \subset S$ una sucesión expansiva de compactos tal que $\tilde{\mu}(K_n) \geqq a - \dfrac{1}{n}$ para cada $n \in N$. Sea $W = \bigcup_{n=1}^{\infty} \theta_n$ donde $\theta_n = h^{-1}(K_n)$. Como cada θ_n es un compacto contenido en Ω_τ, resulta que W es un conjunto de Borel en Ω que verifica $W \subset \Omega_\tau$ y $\hat{\mu}(W) = a$.

Existe una única medida $\alpha \in \mathcal{M}_1(S)$ tal que

$$\hat{\alpha}(B) = \frac{1}{a}\hat{\mu}(B \cap W)$$

para cada conjunto de Borel $B \subset \Omega$.

Como $\tilde{\alpha}(K_n) = \hat{\alpha}(\theta_n) = \frac{1}{a}\hat{\mu}(\theta_n) = \frac{1}{a}\tilde{\mu}(K_n) \geqq \frac{1}{a}\left(a - \frac{1}{n}\right)$ se deduce que α es compacta.

Análogamente, existe una única medida $\beta \in \mathcal{M}_1(S)$ tal que, para cada conjunto de Borel $B \subset \Omega$, se verifica

$$\hat{\beta}(B) = \frac{1}{b}\hat{\mu}(B \cap W^c),$$

siendo $b = 1 - a$.

Probaremos que β es difusa por reducción al absurdo. Supongamos que existe $K \in \mathcal{K}$ tal que $\tilde{\beta}(K) = c > 0$, y sea $n \in N$ tal que $\frac{1}{n} < c\, b$. Si $\theta = h^{-1}(K)$, se verifica

$$\begin{aligned}\tilde{\mu}(K \cup K_n) = \hat{\mu}(\theta \cup \theta_n) = \hat{\mu}((\theta \cup \theta_n) \cap W) + \hat{\mu}((\theta \cup \theta_n) \cap W^c) \geqq \\ \geqq \hat{\mu}(\theta_n) + \hat{\mu}(\theta \cap W^c) = \hat{\mu}(\theta_n) + b\,\hat{\beta}(\theta) \geqq \\ \geqq a - \frac{1}{n} + b\,\tilde{\beta}(K) = a + b\,c - \frac{1}{n} > a\end{aligned}$$

lo cual contradice la definición de a.

Evidentemente $\hat{\mu} = a\,\hat{\alpha} + b\,\hat{\beta}$ y por lo tanto $\mu = a\,\alpha + b\,\beta$ donde $a\,\alpha$ es compacta y $b\,\beta$ es difusa.

Finalmente probaremos la unicidad de la descomposición. Sea pues $\mu = \lambda + \nu$ donde ν es compacta y λ es difusa. Sea como antes

$$a = \sup \{ \tilde{\mu}(K) : K \in \mathcal{K} \}.$$

Dado $K \in \mathcal{K}$, existe un abierto $G \supset K$ tal que

$$\lambda(G) < \varepsilon/2 \quad \text{y} \quad \nu(G) \leqq \tilde{\nu}(K) + \varepsilon/2$$

y por lo tanto

$$\tilde{\mu}(K) \leqq \mu(G) = \nu(G) + \lambda(G) \leqq \tilde{\nu}(K) + \varepsilon.$$

Por otra parte, es evidente que $\tilde{\nu} \leqq \tilde{\mu}$, y por consiguiente $\tilde{\mu}(K) = \tilde{\nu}(K)$ para cada $K \in \mathcal{K}$.

Por lo que se acaba de probar $a = \sup\{\tilde{\nu}(K) : K \in \mathcal{K}\}$. Si $a = 0$ entonces ν es compacta y difusa lo que implica que $\nu = 0$ y $\mu = \lambda$, quedando probada la unicidad en este caso. Si $a = 1$, como ν es compacta, resulta $\nu(S) = 1$ y por lo tanto $\lambda = 0$ y $\mu = \nu$, y también queda probada la unicidad en este caso.

Finalmente, si $0 < a < 1$, y $b = 1 - a$, sea

$$\alpha_1 = \frac{1}{a}\nu \quad \text{y} \quad \beta_1 = \frac{1}{b}\lambda.$$

Es obvio que $\alpha_1, \beta_1 \in \mathcal{M}_1(S)$ y bastará probar que $\alpha = \alpha_1$ y $\beta = \beta_1$.

Se verifica:

$$\hat{\alpha}_1(W) = \sup\{\hat{\alpha}_1(\theta_n) : n \in N\} = \sup\{\tilde{\alpha}_1(K_m) : n \in N\} = \frac{1}{a}\sup\{\tilde{\nu}(K_n) : n \in N\} = $$
$$= \frac{1}{a}\sup\{\tilde{\mu}(K_m) : n \in N\} = 1.$$

$$\hat{\beta}_1(W) = \sup\{\hat{\beta}_1(\theta_m) : n \in N\} = \sup\{\tilde{\beta}_1(K_n) : n \in N\} = 0.$$

Por consiguiente, como $\hat{\mu} = a\,\hat{\alpha}_1 + b\,\hat{\beta}_1$, para cada conjunto de Borel $B \subset \Omega$ se cumple:

$$\hat{\alpha}(B) = \frac{1}{a}\hat{\mu}(B \cap W) = \frac{1}{a}(a\,\hat{\alpha}_1(B \cap W) + b\,\hat{\beta}_1(B \cap W)) = \hat{\alpha}_1(B \cap W) = \hat{\alpha}_1(B),$$

luego $\alpha = \alpha_1$ y $\beta = \beta_1$, como se quería probar.

En [9] se prueba que toda medida finitamente aditiva $\mu \in \mathcal{M}(S)$ se puede descomponer de modo único en la forma $\mu = \lambda + \nu$ donde $\nu \in \mathcal{M}(S)$ es $\mathcal{G}$-regular (resp. secuencialmente $\mathcal{P}$-regular) y $\lambda \in \mathcal{M}(S)$

es $\mathcal{G}$-singular (resp. secuencialmente $\mathcal{P}$-singular). Como consecuencia de estos resultados y del teorema 10 se obtiene el siguiente corolario:

11. COROLARIO.—*Si S es un espacio topológico regular, cada medida finitamente aditiva $\mu \in \mathcal{M}(S)$ se puede descomponer de modo único en la forma $\mu = \lambda + \sigma + \tau + \nu$, donde ν es compacta, τ es difusa y $\mathcal{G}$-regular, σ es $\mathcal{G}$-singular y secuencialmente $\mathcal{P}$-regular y λ es secuencialmente $\mathcal{P}$-singular ($\lambda, \sigma, \tau, \nu \in \mathcal{M}(S)$).*

DEMOSTRACIÓN.—Según el teorema 10, $\mu = \lambda' + \nu$ donde ν es compacta y λ' es difusa. Por los resultados citados anteriormente $\lambda' = \lambda'' + \tau$ donde τ es $\mathcal{G}$-regular, y λ'' es $\mathcal{G}$-singular, y $\lambda'' = \lambda + \sigma$ donde σ es secuencialmente $\mathcal{P}$-regular y λ secuencialmente $\mathcal{P}$-singular. Como $0 \leqq \tau \leqq \lambda'$ y λ' es difusa se deduce que τ es difusa. Análogamente, como λ'' es $\mathcal{G}$-singular y $0 \leqq \sigma \leqq \lambda''$ resulta que σ es $\mathcal{G}$-singular. Si $\mu = \lambda_1 + \sigma_1 + \tau_1 + \nu_1$ es otra descomposición análoga, como $\lambda_1 + \sigma_1 + \tau_1$ es difusa y ν_1 es compacta, basta tener en cuenta la unicidad asegurada por el teorema 10 para deducir que $\nu = \nu_1$ y $\lambda + \sigma + \tau = \lambda_1 + \sigma_1 + \tau_1$. Un razonamiento análogo permite probar que $\tau = \tau_1$ y $\lambda + \sigma = \lambda_1 + \sigma_1$, y finalmente se obtiene que $\lambda = \lambda_1$ y $\sigma = \sigma_1$.

12. DEFINICIÓN.—*Una medida $\mu \in \mathcal{M}(S)$ se dice que es* t-*aditiva si para cada red* (f_j) *en* $C(S)$, $0 \leqq f_j \leqq 1$, *que converge hacia* 0 *uniformemente sobre compactos se verifica* $\lim_j \mu(f_j) = 0$.

Se dice que $\mu \in \mathcal{M}(S)$ es τ-aditiva (resp. σ-aditiva) si $\lim_j \mu(f_j) = 0$ para cada red (resp. sucesión) decreciente (f_j) en $C(S)$ que verifique $\lim_j f_j(x) = 0$ para todo $x \in S$.

Si $\mu \in \mathcal{M}(S)$ es τ-aditiva (resp. σ-aditiva) y cada medida t-*aditiva (resp. τ-aditiva) $\gamma \in \mathcal{M}(S)$ que verifique $0 \leqq \gamma \leqq \mu$, es idénticamente nula, entonces se dice que μ es puramente τ-aditiva (resp. puramente σ-aditiva).*

Finalmente, si $\mu \in \mathcal{M}(S)$ y toda medida σ-aditiva $\gamma \in \mathcal{M}(S)$ que verifique $0 \leqq \gamma \leqq \mu$ es idénticamente nula, entonces se dice que μ es puramente finitamente aditiva.

Del teorema de Dini se deduce que toda medida *t*-aditiva, es τ-aditiva.

13. TEOREMA.—*Toda medida compacta $\mu \in \mathcal{M}(S)$ es* t*-aditiva. Recíprocamente, si S es un espacio topológico completamente regular, toda medida* t*-aditiva $\mu \in \mathcal{M}(S)$ es compacta.*

DEMOSTRACIÓN. — Bastará hacer la demostración en el caso $\mu \in \mathcal{M}_1(\mathrm{S})$.

Supongamos que μ es compacta y sea $(f_j)_{j \in J}$ una red en C (S) que converge hacia 0 uniformemente sobre compactos y verifica $0 \leqq f_j \leqq 1$, para todo $j \in \mathrm{J}$. Dado $\varepsilon > 0$ existe $\mathrm{K} \in \mathcal{K}$ tal que $\tilde{\mu}(\mathrm{K}) \geqq 1 - \varepsilon$.

Sea $j_0 \in \mathrm{J}$ tal que $f_j(x) < \varepsilon$ para todo $x \in \mathrm{K}$ y $j \geqq j_0$. Si $\theta = h^{-1}(\mathrm{K})$, entonces $\hat{\mu}(\Omega \backslash \theta) = 1 - \hat{\mu}(\theta) = 1 - \tilde{\mu}(\mathrm{K}) \leqq \varepsilon$. Dado $\alpha \in \theta$, si $a = h(\alpha)$ se cumple:

$$\hat{f_j}(\alpha) = \alpha(f_j) = f_j(a) \leqq \varepsilon$$

siempre que $j \geqq j_0$. Por otra parte, $\hat{\mu}(\theta) = \tilde{\mu}(\mathrm{K}) \geqq 1 - \varepsilon$.

Por consiguiente, para todo $j \geqq j_0$ se verifica:

$$\mu(f_j) = \hat{\mu}(\hat{f_j}) = \hat{\mu}(\hat{f_j}\chi_\theta) + \hat{\mu}(\hat{f_j}\chi_{\Omega\backslash\theta}) \leqq \hat{\mu}(\varepsilon\chi_\theta) + \hat{\mu}(\Omega\backslash\theta) \leqq 2\varepsilon$$

luego μ es t-aditiva.

Recíprocamente, supongamos que S es completamente regular y $\mu \in \mathcal{M}(\mathrm{S})$ una medida t-aditiva. Se deduce fácilmente de la definición de medida t-aditiva que dado $\varepsilon > 0$ existe $\mathrm{K} \in \mathcal{K}$ tal que si $f \in \mathrm{C}(\mathrm{S})$, $0 \leqq f \leqq 1$, y $f(x) = 0$ para todo $x \in \mathrm{K}$, entonces se cumple $\mu(f) \leqq \varepsilon$.

Como S es completamente regular, para cada abierto $\mathrm{G} \supset \mathrm{K}$ se puede asegurar la existencia de una función $f \in \mathrm{C}(\mathrm{S})$, tal que $0 \leqq f \leqq 1$, $f(x) = 0$ si $x \in \mathrm{K}$ y $f(x) = 1$ si $x \notin \mathrm{G}$. Evidentemente $\chi_{\mathrm{S}\backslash\mathrm{G}} \leqq f$ y por lo tanto $\mu(\mathrm{S}\backslash\mathrm{G}) \leqq \mu(f) \leqq \varepsilon$, de donde se deduce que $\mu(\mathrm{G}) \geqq 1 - \varepsilon$.

Entonces resulta que $\tilde{\mu}(\mathrm{K}) \geqq 1 - \varepsilon$ y queda probado que μ es compacta.

14. TEOREMA.—*Toda medida puramente τ-aditiva $\mu \in \mathcal{M}(S)$ es difusa.*

Recíprocamente, si S es un espacio topológico completamente regular, toda medida difusa y τ-aditiva es puramente τ-aditiva.

DEMOSTRACIÓN.—Probaremos en primer lugar que si μ no es difusa no puede ser puramente τ-aditiva. Supongamos que existe $K_0 \in \mathcal{K}$ tal que $\tilde{\mu}(K_0) = c > 0$. Sea $\{G_i : i \in I\}$ la familia de los abiertos que contienen a K_0, donde el conjunto de índices I se ha dirigido poniendo $i \geqq k$ si $G_i \subset G_k$. Para cada $i \in I$ sea $\mu_i \in \mathcal{M}(S)$ definida por $\mu_i(f) = \mu(f \chi_{G_i})$ para cada $f \in B(S)$. Evidentemente $(\mu_i(f))_{i \in I}$ es una red decreciente, y por lo tanto existe el límite $\lim\limits_i \mu_i(f) = \gamma(f)$ para cada $f \in B(S)$. Queda definida así una medida $\gamma \in \mathcal{M}(S)$ que cumple $\gamma(S) = \lim\limits_i \mu(G_i) = c > 0$.

Evidentemente $0 \leqq \gamma \leqq \mu$. Bastará probar que γ es t-aditiva para concluir que μ no es puramente τ-aditiva. Sea entonces $(f_j)_{j \in J}$ una red en C (S) que converge hacia 0 uniformemente sobre compactos y verifica $0 \leqq f_j \leqq 1$ para cada $j \in J$. Dado $\varepsilon > 0$, existe $j_0 \in J$ tal que si $j \geqq j_0$ entonces $f_j(x) < \varepsilon$ para todo $x \in K_0$. Fijado $j \geqq j_0$, sea

$$G = \{x \in S : f_j(x) < \varepsilon\}.$$

Evidentemente $G \supset K_0$ y por lo tanto se verifica $\gamma(S \backslash G) = 0$. Se deduce entonces:

$$\gamma(f_j) = \gamma(\chi_G f_j) + \gamma(\chi_{S \setminus G} f_j) \leqq \gamma(\varepsilon \chi_G) + \gamma(S \setminus G) = \varepsilon \gamma(G) \leqq \varepsilon$$

luego γ es t-aditiva, como se quería probar.

Recíprocamente, supongamos que S es completamente regular y que la medida τ-aditiva $\mu \in \mathcal{M}(S)$ es difusa. Sea $\gamma \in \mathcal{M}(S)$ una medida t-aditiva tal que $0 \leqq \gamma \leqq \mu$. Evidentemente, γ es difusa pues $\tilde{\gamma} \leqq \tilde{\mu}$. Como γ también es compacta en virtud del teorema 13 se concluye que $\gamma = 0$, y queda probado que μ es puramente τ-aditiva.

En [9] se prueba que si $\mu \in \mathcal{M}(S)$ es $\mathcal{G}$-regular (resp. puramente σ-aditiva) entonces es τ-aditiva (resp. $\mathcal{G}$-singular). En el caso de que S sea un espacio topológico completamente regular se prueban resultados recíprocos de los anteriores: Toda medida τ-aditiva $\mu \in \mathcal{M}(S)$ es $\mathcal{G}$-regular, y toda medida $\mathcal{G}$-singular y σ-aditiva es puramente σ-aditiva.

También se prueba en [9] (sin suponer que S es completamente regular) que una condición necesaria y suficiente para que $\mu \in \mathcal{M}(S)$ sea σ-aditiva (resp. puramente finitamente aditiva) es que μ sea secuencialmente $\mathcal{P}$-regular (resp. secuencialmente $\mathcal{P}$-singular).

15. COROLARIO.—*Si S es un espacio topológico completamente regular cada medida finitamente aditiva $\mu \in \mathcal{M}(S)$ se puede descomponer de modo único en la forma $\mu = \lambda + \sigma + \tau + \nu$, donde λ es puramente finitamente aditiva, σ es puramente σ-aditiva, τ es puramente τ-aditiva y ν es* t*-aditiva ($\lambda, \sigma, \tau, \nu \in \mathcal{M}(S)$).*

DEMOSTRACIÓN.—Es consecuencia del corolario 11, de los teoremas 13 y 14 y de los resultados indicados anteriormente. (τ es difusa y $\mathcal{G}$-regular si y sólo si es puramente τ-aditiva, y σ es $\mathcal{G}$-singular y secuencialmente $\mathcal{P}$-regular si y sólo si es puramente σ-aditiva.)

El resultado del corolario 15 ha sido obtenido anteriormente por Knowles (1967). Con el corolario 11 hemos obtenido una generalización de este resultado al caso de espacios topológicos regulares.

3. Medidas topológicas asociadas

16. DEFINICIÓN.—*Si $\mu \in \mathcal{M}(S)$, sea $\tilde{\mu}$ la función de conjunto considerada en la definición 4. Un subconjunto $H \subset S$ diremos que es μ-nulo si $\tilde{\mu}(H) = 0$. Llamaremos μ-continuos a los subconjuntos $M \subset S$ cuya frontera $\partial M = H$ es un conjunto μ-nulo.*

Sea $h\colon \Omega_\tau \longrightarrow S$ la aplicación considerada en el lema 5 y $\hat{\mu}^*$ la medida exterior sobre Ω asociada a la medida de Radon $\hat{\mu}$, y considerada en la proposición 2.

17. TEOREMA.—*Dada una medida finitamente aditiva $\mathcal{G}$-regular $\mu \in \mathcal{M}_1(S)$, sea μ^* la función de conjunto definida para cada $M \subset S$ por $\mu^*(M) = \hat{\mu}^*(h^{-1}(M))$. Si S es un espacio topológico regular, μ^* es una medida exterior sobre S con las siguientes propiedades:*

17.1) $\mu^*(M) = \inf\{\mu^*(G) : M \subset G \in \mathcal{G}\}$.

17.2) $\mu^*(G) = \sup\{\mu^*(G_i) : i \in I\}$ *si* $\{G_i : i \in I\}$ *es una familia filtrante creciente de abiertos y* $G = \bigcup\{G_i : i \in I\}$.

17.3) *Los conjuntos de Borel y los μ-continuos son μ^*-medibles.*

17.4) $\mu^*(M) = \mu(M)$ *si M es μ-continuo.*

DEMOSTRACIÓN.—Es inmediato que μ^* es una medida exterior. Empezaremos probando 17.1. Dado $M \subset S$, para cada $\varepsilon > 0$ existe en Ω un abierto $A \supset h^{-1}(M)$ tal que $\hat{\mu}(A) \leqq \mu^*(M) + \varepsilon$. Este abierto es de la forma $A = \{\hat{H}_j : j \in J\}$, donde no es restrictivo suponer que $\{H_j : j \in J\}$ es una familia filtrante creciente.

Para cada $x \in M$ sea $\theta_x = \{\alpha \in \Omega : \alpha(V) = 1$ si $V \in \mathcal{V}_x\}$. Evidentemente θ_x es compacto y $\theta_x \subset h^{-1}(M) \subset A$.

Entonces $\theta_x \subset \hat{H}_j$ para algún $j \in J$. Si x no fuese interior a H_j el filtro $\{V \cap H^c{}_j : V \in \mathcal{V}_x\}$ estaría contenido en un ultrafiltro $\mathcal{U}$ necesariamente convergente hacia x. Si $\alpha \in \Omega$ es la medida asociada a este ultrafiltro se verificaría $\alpha \in \theta_x$ y $\alpha \notin \hat{H}_j$ en contradicción con la inclusión $\theta_x \subset \hat{H}_j$. Se deduce entonces que $x \in \mathring{H}_j$ para algún $j \in J$; y por lo tanto que $M \subset G$ donde $G = \cup\{\mathring{H}_j : j \in J\}$. Evidentemente $A \supset h^{-1}(G)$ y se verifica $\mu^*(G) \leqq \hat{\mu}(A) \leqq \mu^*(M) + \varepsilon$, de donde se deduce 17.1.

A continuación probaremos 17.2. Sea $G = \cup\{G_j : j \in J\}$ donde $\{G_j : j \in J\}$ es una familia filtrante creciente de abiertos en S. Como h es continua en virtud del lema 5, se deduce que para cada $j \in J$ existe un abierto $A_j \subset \Omega$ tal que $h^{-1}(G_j) = \Omega_\tau \cap A_j$. Si

$$A = \cup\{A_j : j \in J\}$$

dado $\varepsilon > 0$ existe un conjunto finito de índices $L \subset J$ tal que el abierto $U = \cup\{A_j : j \in L\}$ cumple $\hat{\mu}(U) \geqq \hat{\mu}(A) - \varepsilon$. Entonces

$$\hat{\mu}^*(\Omega_\tau \backslash U) \leqq \hat{\mu}(\Omega \backslash U) = 1 - \hat{\mu}(U) \leqq 1 - \hat{\mu}(A) + \varepsilon.$$

Por otra parte, como μ es $\mathcal{G}$-regular se verifica que $\hat{\mu}^*(\Omega_\tau) = 1$, en virtud de la proposición 2. Teniendo en cuenta que U es $\hat{\mu}^*$-medible se deduce:

$$\hat{\mu}^*(\Omega_\tau \cap U) = 1 - \hat{\mu}^*(\Omega_\tau \backslash U) \geqq \hat{\mu}(A) - \varepsilon \geqq \hat{\mu}^*(\Omega_\tau \cap A) - \varepsilon.$$

Como $\{G_j : j \in J\}$ es una familia filtrante creciente, existe $i \in J$ tal que $G_j \subset G_i$ para todo $j \in L$. Se tiene entonces

$$\Omega_\tau \cap U = \cup\}\Omega_\tau \cap A_j : j \in L\{ = \cup\}h^{-1}(G_j) : j \in L\{ \subset h^{-1}(G_i)$$
$$\Omega_\tau \cap A = \cup\}\Omega_\tau \cap A_j : j \in J\{ = \cup\}h^{-1}(G_j) : j \in J = h^{-1}(G)$$

y por lo tanto

$$\mu^*(G_i) \geqq \hat{\mu}^*(\Omega_\tau \cap U) \geqq \hat{\mu}^*(\Omega_\tau \cap A) - \varepsilon = \mu^*(G) - \varepsilon$$

queda probado así que se cumple 17.2.

Seguidamente probaremos 17.3 y 17.4. Es fácil comprobar que la restricción de $\hat{\mu}^*$ a los subconjuntos de Ω_τ es una medida exterior sobre Ω_τ para la cual son medibles todos los abiertos (para la topología inducida en Ω_τ). Teniendo en cuenta la continuidad de la aplicación $h: \Omega_\tau \longrightarrow S$ se deduce fácilmente que cada abierto $G \subset S$ es μ^*-medible.

Si $G \subset S$ es abierto, $h^{-1}(G) \subset \hat{G}$ y por lo tanto $\mu^*(G) \leqq \mu(G)$ lo cual implica, en virtud de 17.1, que $\mu^*(H) = 0$ siempre que H es μ-nulo.

Si $M \subset S$ es μ-continuo, el conjunto $M - \mathring{M} = H$ es μ-nulo, luego $\mu^*(H) = 0$ y por lo tanto H es μ^*-medible. Entonces $M = \mathring{M} \cup H$ también es μ^*-medible y queda probado 17.3.

Por otra parte, si F es cerrado y $G = S \setminus F$, se verifica:

$$\mu(F) = 1 - \mu(G) \leqq 1 - \mu^*(G) = \mu^*(F)$$

donde la última igualdad se deduce teniendo en cuenta que F es μ^*-medible y que $\mu^*(S) = \hat{\mu}^*(\Omega_\tau) = 1$.

Entonces si $M \subset S$ es μ-continuo, como $\mu^*(\partial M) = 0$, resulta:

$$\mu(M) \leqq \mu(\overline{M}) \leqq \mu^*(\overline{M}) = \mu^*(M) = \mu^*(\mathring{M}) \leqq \mu(\mathring{M}) \leqq \mu(M).$$

y queda probada la propiedad 17.4.

18. Observación.—Si además de las hipótesis del teorema 17 se supone que $\mu(G) = \sup\{\mu(G_j) : j \in J\}$ para cada familia filtrante creciente de abiertos $\{G_j : j \in J\}$, con $\cup\{G_j : j \in J\} = G$, entonces la medida exterior μ^* dada por este teorema verifica que $\mu(M) \leqq \mu^*(M)$ para cada $M \subset S$, y en consecuencia $\mu(M) = \mu^*(M)$ siempre que M es abierto o cerrado. En efecto, dado $M \subset S$ y $\varepsilon > 0$, sea $A = \cup\{\hat{H}_j : j \in J\}$ el abierto considerado en la demostración de 17.1, y $G = \cup\{G_j : j \in J\}$ donde $G_j = \hat{H}_j$. Como $M \subset G$ y $\{\hat{G}_j : j \in J\}$ es una familia filtrante creciente de abiertos en Ω cuya unión está contenida en A resulta:

$$\mu(M) \leqq \mu(G) = \sup\{\mu(G_j) : j \in J\} = \sup\{\hat{\mu}(\hat{G}_j) : j \in J\} \leqq \hat{\mu}(A) \leqq \mu^*(M) + \varepsilon$$

y se deduce que $\mu(M) \leqq \mu^*(M)$. Si M es abierto, se ha visto en la demostración de 17.3 que $\mu^*(M) \leqq \mu(M)$ y se deduce que μ y μ^*

coinciden sobre los abiertos, lo cual implica que coinciden también sobre los cerrados.

Si la siguiente proposición se aplica al caso de un espacio topológico S completamente regular, se obtiene un resultado recíproco del dado por el teorema 17.

19. Proposición.—*Si* $\mu \in \mathcal{M}(S)$ *y existe una medida exterior* μ^* *sobre* S *verificando 17.2 y 17.4, entonces* μ *es* τ*-aditiva.*

Demostración.—Sea f_j una red decreciente en C (S), tal que $0 \leqq f_j \leqq 1$. Dado $\varepsilon > 0$, sea

$$F_j = \{x \in S : f_j(x) \geqq \varepsilon\}, \quad \text{y} \quad Z_j = \{x \in S : f_j(x) \geqq 2\varepsilon\}.$$

Razonando como en la demostración del lema 10 de [8] se prueba que es numerable el conjunto de los números reales $c \in [\varepsilon, 2\varepsilon]$ tales que

$$H_c = \{x \in S : f_j(x) = c\}$$

no es μ-nulo. Entonces para cada j existe una constante $c_j \in [\varepsilon, 2\varepsilon]$ tal que H_{c_j} es μ-nulo. El conjunto

$$M_j = \{x \in S : f_j(x) \geqq c_j\}$$

es μ-continuo y $Z_j \subset M_j \subset F_j$.

Como Z_j y M_j son sendas redes decrecientes de cerrados cuya intersección es vacía, aplicando 17.2 se deduce que

$$\lim_j \mu^*(Z_j) = 0 = \lim_j \mu^*(F_j).$$

Teniendo en cuenta 17.4 se obtiene que

$$\lim_j \mu(M_j) = \lim_j \mu^*(M_j) = 0.$$

Evidentemente:

$$\mu(f_j) = \mu(f_j \chi_{S \setminus M_j}) + \mu(f_j \chi_{M_j}) \leqq \mu(M_j) + 2\varepsilon$$

y por lo tanto

$$0 \leq \overline{\lim_j} \mu(f_j) \leq 2\varepsilon$$

para cada $\varepsilon > 0$, lo cual implica que

$$\lim_j \mu(f_j) = 0$$

20. DEFINICIÓN.—*Si μ^* es una medida exterior localmente finita sobre el espacio topológico S, verificando 17.1 y 17.2, y con la propiedad de que cada conjunto de Borel $B \subset S$ es μ^*-medible, diremos (siguiendo a Rodríguez-Salinas) que μ^* es una medida exterior topológica sobre S. Llamaremos medida topológica en S a la restricción $\bar{\mu}$ de una medida exterior topológica μ^* a la σ-álgebra de los conjuntos de Borel (o de los conjuntos μ^*-medibles).*

Si S es un espacio topológico regular, a cada medida finitamente aditiva $\mathcal{G}$-regular $\mu \in \mathcal{M}$ (S) se le puede asociar, en virtud del teorema 17, una medida exterior topológica μ^* (y por consiguiente una medida topológica $\bar{\mu}$) sobre S con la propiedad de que cada conjunto μ-continuo $M \subset S$ es μ^*-medible y $\mu(M) = \mu^*(M)$, $(= \bar{\mu}(M))$.

21. PROPOSICIÓN.—*Sea S un espacio topológico regular. Si $\mu \in \mathcal{M}_1(S)$ es compacta (y por lo tanto $\mathcal{G}$-regular), la medida topológica asociada $\bar{\mu}$ es una medida de Radon.*

DEMOSTRACIÓN.—Según el lema 5, para cada compacto $K \subset S$ el conjunto $h^{-1}(K)$ es un compacto en Ω, y es la intersección de la familia filtrante decreciente de compactos $\{\hat{G} : K \subset G \in \mathcal{G}\}$.

Entonces:

$$\bar{\mu}(K) = \mu^*(K) = \hat{\mu}(h^{-1}(K)) = \inf\{\hat{\mu}(\hat{G}) : K \subset G \in \mathcal{G}\} =$$
$$= \inf\{\mu(G) : K \subset G \in \mathcal{G}\} = \tilde{\mu}(K)$$

y por consiguiente:

$$\bar{\mu}(S) = \mu(S) = \sup\{\tilde{\mu}(K) : K \in \mathcal{K}\} = \sup\{\bar{\mu}(K) : K \in \mathcal{K}\}.$$

Para cada conjunto de Borel $B \in \mathcal{B}$ y $\varepsilon > 0$, sea $K \in \mathcal{K}$ tal que $\bar{\mu}(S \backslash K) \leqq \varepsilon/2$. Existe $G \in \mathcal{G}$ que verifica

$$G \supset S \backslash B \quad \text{y} \quad \bar{\mu}(G \backslash (S \backslash B)) = \bar{\mu}(G \cap B) \leqq \varepsilon/2.$$

Entonces $H = K \backslash G$ es compacto, $H \subset B$ y se verifica

$$\bar{\mu}(B \backslash H) \leqq \bar{\mu}(B \backslash K) + \bar{\mu}(B \cap G) \leqq \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon.$$

Hemos probado que

$$\bar{\mu}(B) = \sup \{ \bar{\mu}(H) : B \supset H \in \mathcal{K} \}$$

para cada conjunto de Borel $B \subset S$, y por lo tanto $\bar{\mu}$ es una medida de Radon sobre S según la definición dada por Schwartz en [6].

Puesto que cada medida finitamente aditiva $\mu \in \mathcal{M}(S)$ se descompone de modo único en la forma $\mu = \lambda + \nu$ donde $\lambda \in \mathcal{M}(S)$ es $\mathcal{G}$-singular y $\nu \in \mathcal{M}(S)$ es $\mathcal{G}$-regular, podemos considerar la medida topológica $\bar{\nu}$ asociada a ν (en el caso de que S sea un espacio topológico regular). En el estudio de los subconjuntos $M \subset S$ para los que $\bar{\nu}(M) = \mu(M)$ desempeña un papel importante la noción de conjunto μ-compacto (introducida por B. Rodríguez-Salinas en [5] cuando μ es una medida exterior finitamente subaditiva sobre un espacio topológico).

22. DEFINICIÓN.—*Dada una medida finitamente aditiva $\mu \in \mathcal{M}(S)$ un subconjunto $M \subset S$ se dice que es μ-compacto si para todo $\varepsilon > 0$ y cada recubrimiento abierto $\mathcal{G}_0$ de M existe un número finito de abiertos*

$$G_k \in \mathcal{G}_0, \quad k = 1, 2, \ldots m,$$

tales que

$$\mu\left(M \diagdown \bigcup_{k=1}^{m} G_k\right) < \varepsilon.$$

23. PROPOSICIÓN.—*Una condición necesaria y suficiente para que $\mu \in \mathcal{M}(S)$ sea $\mathcal{G}$-regular es que S sea μ-compacto.*

DEMOSTRACIÓN.—Es consecuencia inmediata de las definiciones.

Se deduce fácilmente de la definición que todo subconjunto cerrado de un conjunto μ-compacto es μ-compacto.

Los conjuntos cerrados μ-compactos se caracterizan mediante la siguiente proposición:

24. PROPOSICIÓN.—*Dada* $\mu \in \mathcal{M}(S)$ *sea* $\mu = \lambda + \nu$ *la descomposición única tal que* λ *es* $\mathcal{G}$*-singular y* ν *es* $\mathcal{G}$*-regular.*

Si $M \subset S$ *es* μ*-compacto, se verifica* $\lambda(M) = 0$. *Recíprocamente, si* $\lambda(M) = 0$ *y* M *es cerrado, entonces* M *es* μ*-compacto.*

DEMOSTRACIÓN.—Como λ es $\mathcal{G}$-singular, dado $\varepsilon > 0$ existe una familia filtrante creciente de abiertos $\{G_j : j \in J\}$ que recubre S y cumple $\lambda(G_j) < \varepsilon$ para todo $j \in J$.

Si $M \subset S$ es μ-compacto se deduce que existe $j \in J$ tal que $\mu(M \setminus G_j) < \varepsilon$. Entonces $\lambda(M \setminus G_j) < \varepsilon$, lo cual implica que

$$\lambda(M) \leqq \lambda(M \setminus G_j) + \lambda(G_j) \leqq 2\varepsilon,$$

y por lo tanto $\lambda(M) = 0$.

Recíprocamente, S es ν-compacto en virtud de la proposición 23 y se deduce que todo cerrado $M \subset S$ es ν-compacto.

Si M es ν-compacto y $\lambda(M) = 0$, se deduce inmediatamente de la definición que M también es μ-compacto.

25. DEFINICIÓN.—*Si* $\mu \in \mathcal{M}(S)$ *es tal que cada punto* $x \in S$ *posee un sistema fundamental de entornos* μ*-compactos, se dice que* S *es localmente* μ*-compacto.*

Si S es un espacio topológico regular y cada punto $x \in S$ posee un entorno μ-compacto, es inmediato que S es localmente μ-compacto.

26. PROPOSICIÓN.—*Dada* $\mu \in \mathcal{M}(S)$, *sea* $\mu = \lambda + \nu$ *la descomposición única tal que* λ *es* $\mathcal{G}$*-singular y* ν *es* $\mathcal{G}$*-regular.*

Si S *es un espacio topológico regular, son equivalentes:*

26.1) *S es localmetne* μ*-compacto.*

26.2) *Existe un recubrimiento abierto* $\{G_j : j \in J\}$ *de* S *tal que* $\lambda(G_j) = 0$ *para cada* $j \in J$.

DEMOSTRACIÓN.—Si S es localmente μ-compacto, para cada $x \in S$ sea V_x un entorno μ-compacto de x. $\{\mathring{V}_x : x \in S\}$ es un recubrimiento abierto de S que cumple 26.2 en virtud de la proposición 24. Recíprocamente, supongamos que se cumple 26.2 y para cada $x \in S$ sea V_x un entorno cerrado de x contenido en algún abierto G_j del recubrimiento considerado en 26.2. Como $\lambda(V_x) = 0$, se deduce, por la proposición 24, que V_x es μ-compacto para todo $x \in S$. Por lo indicado después de la definición 25, S es localmente μ-compacto.

Dada $\mu \in \mathcal{M}(S)$, denotaremos por $\mathcal{K}_\mu$ la familia de los subconjuntos de S que son μ-compactos y μ-continuos. En [8] se prueba que $\mathcal{K}_\mu$ es un anillo de conjuntos con la propiedad de que $B \in \mathcal{K}_\mu$ siempre que $\mathring{A} \subset B \subset \bar{A}$, y $A \in \mathcal{K}_\mu$.

También se prueba en [8] que si S es un espacio topológico completamente regular localmente μ-compacto, entonces cada punto $x \in S$ posee una base de entornos $\mathcal{B}_x \subset \mathcal{K}_\mu$.

27. Teorema.—*Si S es un espacio topológico regular, para cada $\mu \in \mathcal{M}(S)$ existe una medida exterior topológica ν^* sobre S tal que todo $M \in \mathcal{K}_\mu$ es ν^*-medible y $\nu^*(M) = \mu(M)$.*

Demostración.—Consideremos la única descomposición $\mu = \lambda + \nu$ donde λ es $\mathcal{G}$-singular y ν es $\mathcal{G}$-regular. Del teorema 17 se deduce que existe una medida exterior topológica ν^* sobre S para la cual cada $M \in \mathcal{K}_\nu$ es ν^*-medible, verificándose que $\nu(M) = \nu^*(M)$.

Como $0 \leqq \nu \leqq \mu$, se deduce que $\mathcal{K}_\mu \subset \mathcal{K}_\nu$ y por lo tanto cada $M \in \mathcal{K}_\mu$ es ν^*-medible, verificando además que

$$\nu^*(M) = \nu(M) = \mu(M),$$

pues $\lambda(M) = 0$ en virtud de la proposición 24.

28. Teorema.—*Si S es un espacio topológico completamente regular, para cada $\mu \in \mathcal{M}(S)$ existe una única medida exterior topológica ν^* sobre S que cumple:*

28.1) *Todo $M \in \mathcal{K}_\mu$ es ν^*-medible y $\nu^*(M) = \mu(M)$.*

28.2) $\nu^*(G) = \sup\{\nu^*(D) : G \supset D \in \mathcal{K}_\mu\}$ *para cada* $G \in \mathcal{G}$.

Demostración.—Sea $\mu = \lambda + \nu$ donde λ es $\mathcal{G}$-singular y ν es $\mathcal{G}$-regular. En la demostración del teorema 27 se ha probado que la medida exterior topológica ν^* asociada a ν cumple 28.1.

Sea $\mathcal{H}_\mu$ la familia de los subconjuntos $M \subset S$ que son cerrados y μ-continuos. Como S es completamente regular, cada punto $x \in S$ posee una base de entornos $\mathcal{B}_x \subset \mathcal{H}_\mu$. Puesto que $\mathcal{H}_\mu$ es estable frente a uniones finitas resulta que $\mathcal{H}_\mu$ es una clase generatriz en S, según la definición 2 de [8]. Aplicando el teorema 5 de [8] se deduce que

$$\nu^*(G) = \sup \{\nu^*(M) : G \supset M \in \mathcal{H}_\mu\}$$

para cada $G \in \mathcal{G}$.

Por otra parte, como ν es $\mathcal{G}$-regular y $\mathcal{K}_\mu \cap \mathcal{G}$ es una familia filtrante creciente de abiertos que recubre S, se deduce, en virtud del corolario 3 de [9] que

$$\nu(M) = \sup \{\nu(M \cap H) : H \in \mathcal{K}_\mu \cap \mathcal{G}\}$$

para cada $M \subset S$.

Por consiguiente, dado $G \in \mathcal{G}$ y $\varepsilon > 0$ existe $M \in \mathcal{H}_\mu$, $M \subset G$ tal que

$$\nu^*(G) - \nu^*(M) < \varepsilon/2,$$

y para este conjunto $M \in \mathcal{H}_\mu$ se puede encontrar $H \in \mathcal{K}_\mu \cap \mathcal{G}$ tal que

$$\nu(M) - \nu(M \cap H) < \varepsilon/2.$$

El conjunto $M \cap \overline{H} = D$ está contenido en G, es μ-continuo (pues M y H son μ-continuos) y μ-compacto (por ser un subconjunto cerrado de $\overline{H}$ que es μ-compacto) y verifica

$$\nu(M) - \nu(D) < \varepsilon/2.$$

Como M es μ-continuo y $0 \leqq \nu \leqq \mu$ se deduce que M también es ν-continuo. Pero M es un subconjunto cerrado de S que es ν-compacto (proposición 27) y por lo tanto $M \in \mathcal{K}_\nu$. Puesto que $\mathcal{K}_\mu \subset \mathcal{K}_\nu$ se deduce también que $D \in \mathcal{K}_\nu$, y aplicando 17.4 se obtiene que

$$\nu(M) = \nu^*(M) \quad \text{y} \quad \nu(D) = \nu^*(D).$$

Resulta entonces

$$\nu^*(G) - \nu^*(D) = (\nu^*(G) - \nu^*(M)) + (\nu(M) - \nu(D)) \leqq \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon,$$

y queda probado así que ν^* cumple 28.2.

Es inmediato que sólo puede existir una única medida exterior topológica ν^* sobre S que cumple 28.1 y 28.2.

Del teorema 28 se deduce el siguiente resultado obtenido anteriormente en [8].

29. COROLARIO.—*Sea* $\mu \in \mathcal{M}(S)$ *y S un espacio topológico completamente regular localmente* μ*-compacto. Entonces existe sobre S una única medida exterior topológica* ν^* *que verifique 28.1.*

DEMOSTRACIÓN.—Si S es completamente regular localmente μ-compacto, $\mathcal{K}_\mu$ es una clase generatriz en S. Del teorema 5 de [8] se deduce que cualquier medida exterior topológica ν^* sobre S cumple necesariamente 28.2.

Bibliografía

[1] BADRIKIAN. 1970. *Séminaire sur les Functions Aléatoires Linéaires et les Mesures Cylindriques.* Lectures Notes. Springer-Verlag.

[2] CHOQUET, G. 1969. *Lectures on Analysis.* Benjamin. New York.

[3] KELLEY. 1955. *General Topology.* Van Nostrand. New York.

[4] KKOWLES, J. D. 1967. *Measures on topological spaces.* «Proc. London Math. Soc.», **17**, 139-156.

[5] RODRÍGUEZ-SALINAS, B. 1973. *Teoría de la medida sobre los espacios topológicos no localmente compactos.* «Rev. Mat. Hisp. Amer.», XXXIII.

[6] SCHWARTZ, L. 1973. *Radon measures on arbitrary topological spaces and cylindrical measures.* Tata Inst. of fund. research. Oxford Univ. Press.

[7] VARADARAJAN, V. S. 1965. *Measures on topological spaces.* «Amer. Math. Soc. Transl.», **48**, 161-228.

[8] VERA, G. 1979. *Medidas finitamente aditivas en espacios topológicos.* «Rev. Real Acad. de Ciencias Exact., Fís. y Nat.», LXXIII.

[9] — — 1980. *Descomposición de medidas finitamente aditivas en espacios topológicos.* «Rev. Real Acad. de Ciencias Exact., Fís. y Nat.», LXXIV.

[10] YOSIDA, K. y HEWITT, E. 1952. *Finitely additive measures.* «Trans. Amer. Math. Soc.», **72**, 46-66.