Actas VIII Jornadas
Luso Espanholas Matemática, Vol. III
Universidade Coimbra, 1981

SUMABILIDAD EN ESPACIOS TOPOLOGICOS. TEOREMA DE KOJIMA-SCHUR GENERALIZADO

F. Balibrea

G. Vera

Departamento de Análisis Matemático - Universidad de Murcia

Abstract: *In this paper and using kernels on topological spaces we generalize the classical theorem of Kojima-Schur on sequences in two different ways, establishing it in the context of topological spaces and enlarging the notion of convergence.*

1. DEFINICIONES, NOTACIONES Y RESULTADOS PREVIOS

Sea T un espacio topológico separado completamente regular y C(T) el espacio vectorial de las funciones reales continuas definidas sobre T. Denotaremos por $\mathcal{Z}$ el retículo formado por los subconjuntos de T que son ceros de funciones $f \in C(T)$ y por $\mathcal{P}$ la familia de los complementarios de los conjuntos de $\mathcal{Z}$. El álgebra de partes de T engendrada por $\mathcal{Z}$ (álgebra de Baire en T) la designaremos por $\mathcal{A}$.

Si $C_b(T)$ es el subespacio de $C(T)$ formado por las funciones acotadas, dotado de la norma del supremo, en virtud del teorema de Alexandrov [1], su dual $(C_b(T), \|\ \|_\infty)'$ se puede identificar isométricamente (y como espacio vectorial reticulado) con el espacio vectorial $\mathcal{M}(T)$ formado por las medidas finitamente aditivas acotadas y $\mathcal{Z}$-regulares $\mu: \mathcal{A} \longrightarrow \mathbb{R}$, dotado de la norma: $\|\mu\| = |\mu|(T)$. En lo que sigue supondremos siempre realizada esta identificación entre medidas y funcionales. Designaremos por $\mathcal{M}(T)^+$ el cono positivo de $\mathcal{M}(T)$ y por $\mathcal{M}_1(T)^+ = \{\mu \in \mathcal{M}(T)^+ : \mu(T) = 1\}$.

Para cada $f \in C_b(T)$ denotaremos por $\hat{f}$ su única extensión continua al compactificado de Stone-Čech βT. Para cada $\mu \in \mathcal{M}(T)$ designaremos por $\hat{\mu}$ la medida de Radon sobre el espacio compacto βT que verifica $\hat{\mu}(\hat{f}) = \mu(f)$ para cada $f \in C_b(T)$. Dado $Z \in \mathcal{Z}$ y una medida positiva $\mu \in \mathcal{M}(T)^+$, es fácil comprobar que $\mu(Z) = \hat{\mu}(\hat{Z})$ donde $\hat{Z} = \{\lambda \in \beta T : \lambda(Z) = 1\}$ (consideramos βT modelado como el espacio de medidas $\{0,1\}$-valoradas $\mu \in \mathcal{M}(T)$ tal como se expone en [10] .

Dada una base de filtro $\mathcal{V}$ en T, sea $C\mathcal{V}(T)$ (resp. $C\mathcal{V}_0(T)$) el subespacio cerrado de $C_b(T)$ formado por las funciones convergentes (resp. convergentes hacia 0) según $\mathcal{V}$. Estos subespacios los consideraremos siempre dotados de la norma $\|\ \|_\infty$. El subespacio de $\mathcal{M}(T)$ ortogonal a $C\mathcal{V}_0(T)$ lo denotaremos por $L_\mathcal{V}(T)$. La base de su cono positivo $L_\mathcal{V}(T)^+$ la representaremos por $\mathcal{V}^\bullet = \{\mu \in L_\mathcal{V}(T)^+ : \mu(T) = 1\}$ y esta formada por los funcionales lineales positivos $\mu : C_b(T) \longrightarrow \mathbb{R}$ cuya restricción a $C\mathcal{V}(T)$ coincide con el límite según $\mathcal{V}$. No es difícil probar que $\mathcal{V}^\bullet$ es el conjunto de las $\mu \in \mathcal{M}_1(T)^+$ tales que $\mu(V) = 1$ para cada $V \in \mathcal{Z} \cap \mathcal{V}$. El subconjunto de $\mathcal{V}^\bullet$ formado por las medidas $\{0,1\}$-valoradas lo denotaremos por $\mathcal{V}^0$, es decir, $\mathcal{V}^0 = \mathcal{V}^\bullet \cap \beta T$.

Finalmente, denotaremos por $\mathcal{H}$ el retículo de subconjuntos de T que son de la forma $H = f^{-1}([1, \infty))$ con $f \in C\mathcal{V}_0(T)$ y por $\mathcal{M}_\mathcal{V}(T)$ el subespacio normado de $\mathcal{M}(T)$ formado por las medidas $\mu \in \mathcal{M}(T)$ que son $\mathcal{H}$-regulares, es decir, tales que $\|\mu\| = |\mu|(T) = \sup\{|\mu|(H) : H \in \mathcal{H}\}$. Se puede probar que el retículo $\mathcal{H}$ tiene la propiedad de que $Z \cap H \in \mathcal{H}$ para cada $Z \in \mathcal{Z}$ y $H \in \mathcal{H}$. Tambien es fácil ver que para cada $H \in \mathcal{H}$ existe $f \in C\mathcal{V}_0(T)$ con $\chi_H \leq f \leq 1$.

Es inmediato que $\mathcal{M}_\mathcal{V}(T)$ y $L_\mathcal{V}(T)$ son subespacios vectoriales reticulados de $\mathcal{M}(T)$.

1. <u>Proposición.- Dada $\mu \in \mathcal{M}_1(T)^+$ se cumple:</u>

1.1) $\mu \in L_\mathcal{V}(T)$ si y solo si $\hat{\mu}(\mathcal{V}^0) = 1$

1.2) $\mu \in \mathcal{M}_\mathcal{V}(T)$ <u>si y solo si</u> $\hat{\mu}(\mathcal{V}^0) = 0$

Demostración.- Es fácil comprobar que $\{\hat{V}: V\in \Upsilon\cap\mathcal{Z}\}$ es una familia filtrante de-creciente de compactos en βT cuya interseccion es Υ^{o}. Por consiguiente $\hat{\mu}(\Upsilon^{o})=\inf\{\hat{\mu}(\hat{V}): V\in\Upsilon\cap\mathcal{Z}\}$. De aquí se deduce 1.1 de modo inmediato. Tambien se obtiene que $\hat{\mu}(\Upsilon^{o})=0$ implica que $\inf\{\mu(V): V\in\Upsilon\cap\mathcal{Z}\}=0$. Por lo tanto, dado $\varepsilon>0$ existe $V\in\Upsilon\cap\mathcal{Z}$ con $\mu(V)<\frac{\varepsilon}{2}$
Sea $Z\in\mathcal{Z}, Z\subset V^{c}$ tal que $\mu(V^{c}\setminus Z)<\frac{\varepsilon}{2}$. Como existe $f\in C_b(T)$ $0\leq f\leq 1$ con $V=\{x: f(x)=0\}$ y $Z=\{x: f(x)=1\}$, se obtiene que $f\in C\Upsilon_0(T)$ y en consecuencia $Z\in\mathcal{H}$. Evidentemente se verifica $\mu(T\setminus Z)<\varepsilon$ y así $\mu\in\mathcal{M}_{\Upsilon}(T)$.
Recíprocamente, si $\mu\in\mathcal{M}_{\Upsilon}(T)$, dado $\varepsilon>0$ sea $H\in\mathcal{H}$ con $\mu(T\setminus H)<\varepsilon$
Existe $f\in C\Upsilon_0(T)$ verificando $1\geq f\geq\chi_H$. Puesto que $\lambda(f)=0$ si $\lambda\in\Upsilon^{o}$ (ya que λ es un límite generalizado) resulta $\hat{f}(\Upsilon^{o})=\{0\}$. Si $g=1-f$ es $\hat{g}\geq\chi_{\Upsilon^{o}}$, luego $\hat{\mu}(\Upsilon^{o})\leq\hat{\mu}(\hat{g})\leq\mu(T\setminus H)<\varepsilon$ y queda probado que $\hat{\mu}(\Upsilon^{o})=0$.

2. Teorema.- Cada $\mu\in\mathcal{M}(T)$ se puede descomponer de modo único en la forma $\mu=\mu_0+\mu_1$ donde $\mu_0\in\mathcal{M}_{\Upsilon}(T)$ y $\mu_1\in L_{\Upsilon}(T)$.

Se verifica que $\|\mu\|=\|\mu_0\|+\|\mu_1\|$ y en consecuencia la suma directa $\mathcal{M}(T)=\mathcal{M}_{\Upsilon}(T)\oplus L_{\Upsilon}(T)$ es topológica.

Demostración.- Dada $\mu\in\mathcal{M}(T)^{+}$ definimos las medidas $\mu_0,\mu_1\in\mathcal{M}(T)^{+}$ en términos de las correspondientes medidas de Radon $\hat{\mu}_0, \hat{\mu}_1$ por las fórmulas:

$$\hat{\mu}_0(B)=\hat{\mu}(B\cap(\Upsilon^{o})^{c}) \qquad \hat{\mu}_1(B)=\hat{\mu}(B\cap\Upsilon^{o}) \qquad (B\subset\beta T \text{ de Borel}).$$

Si $\hat{\mu}_0\neq 0$ (resp. $\hat{\mu}_1\neq 0$), la proposición 1 asegura que $\mu_0\in\mathcal{M}_{\Upsilon}(T)^{+}$ (resp. $\mu_1\in L_{\Upsilon}(T)^{+}$). Puesto que $\hat{\mu}=\hat{\mu}_0+\hat{\mu}_1$ se obtiene $\mu=\mu_0+\mu_1$. Si $\hat{\mu}_0=0$ (resp. $\hat{\mu}_1=0$) entonces es obvio que $\mu=\mu_1\in L_{\Upsilon}(T)^{+}$ (resp. $\mu_0\in\mathcal{M}_{\Upsilon}(T)^{+}$).
Lo que se acaba de probar se extiende sin dificultad al caso signado $\mu\in\mathcal{M}(T)$. Aplicando la proposición 1 se obtiene que $\mathcal{M}_{\Upsilon}(T)^{+}\cap L_{\Upsilon}(T)^{+}=\{0\}$ y por tanto $\mathcal{M}_{\Upsilon}(T)\cap L_{\Upsilon}(T)=\{0\}$ con lo que se obtiene la descomposición en suma directa algebraica $\mathcal{M}(T)=\mathcal{M}_{\Upsilon}(T)\oplus L_{\Upsilon}(T)$.

Para $\mu\in\mathcal{M}(T)^{+}$ es evidente que $\|\mu\|=\|\mu_0\|+\|\mu_1\|$. En el caso general, $\mu=\mu^{+}-\mu^{-}$ y por la linealidad de las proyecciones es $\mu_0=(\mu^{+})_0-(\mu^{-})_0$ y $\mu_1=(\mu^{+})_1-(\mu^{-})_1$, deduciendose fácilmente que $\|\mu\|=\|\mu_0\|+\|\mu_1\|$

3. Lema.- Sea $(E,\|\ \|)$ un espacio de Banach, F un subespacio de E' y M un subespacio cerrado de E tales que $E'=F\oplus M^{\perp}$.

Si la proyección $p: E'\longrightarrow F$ es de norma $\|p\|\leq 1$ entonces F se puede identificar isométricamente con M' mediante la aplicación restricción:

$$\pi: F\longrightarrow M' \qquad \pi(f)=f|_M$$

Demostración.- De comprobación inmediata.

4. Corolario.- La aplicación $\pi:\mathcal{M}_{\Upsilon}(T)\longrightarrow C\Upsilon_0(T)'$ que a cada $\mu\in\mathcal{M}_{\Upsilon}(T)$ le hace corresponder su restricción $\pi(\mu)=\phi$ al subespacio $C\Upsilon_0(T)$ es una isometría lineal.

Demostración.- Es consecuencia del teorema 2 y el lema 3 aplicado al caso $E=C_b(T)$, $F=\mathcal{M}_{\Upsilon}(T)$ y $M=C\Upsilon_0(T)$.

En lo que sigue supondremos siempre realizada la identificación del dual de $C\Upsilon_0(T)$ con el espacio de medidas $\mathcal{M}_{\Upsilon}(T)$.

5. Nota.- Cuanto T es localmente compacto y Υ la base de filtro de los complementarios de los compactos, se puede probar que $\mathcal{M}_{\Upsilon}(T)$ es el espacio que Varadarajan [10] designa con $\mathcal{M}_t(T)$. Es

bien sabido que $\mathcal{M}_t(T)$ se identifica isométricamente con el espacio de las medidas de Radon finitas y signadas sobre T. Así pues, el Corolario 4 proporciona una generalización de este resultado clásico y en particular de la caracterización de l^1 como dual de c_o.

2.- UNA VERSION DEL TEOREMA DE KOJIMA-SCHUR PARA FUNCIONES CONTINUAS.

En lo sucesivo consideraremos un par de espacios topológicos T y S y supondremos dada una base de filtro $\mathcal{Y}$ en T.
siendo T completamente regular

Dada una familia de medidas $\mathcal{J} \subset \mathcal{M}_1(S)^+$ y una función $f \in C_b(S)$, si existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que $\mu(f) = \alpha$ para cada $\mu \in \mathcal{J}$ diremos que f es $\mathcal{J}$-convergente hacia α y escribiremos $\mathcal{J}\text{-}\lim_s f(s) = \alpha$.

Si $\mathcal{U}$ es una base de filtro en S y $\mathcal{J} = \mathcal{U}^\bullet$, razonando de modo análogo a como se hace en [11], se puede probar que $f \in C_b(S)$ es $\mathcal{J}$-convergente hacia α si y solo si existe $\lim_{\mathcal{U}} f = \alpha$.

Como se pone de manifiesto en [11], la noción de $\mathcal{J}$-convergencia no solo incluye como caso especial la noción usual de convergencia según una base de filtro, sino que extiende otras nociones de interes en teoría de sumabilidad. Así por ejemplo, si $\mathcal{J}$ es la familia de las medidas $\mu \in \mathcal{M}_1(S)^+$ invariantes respecto a un semigrupo $\mathcal{G}$ de operadores lineales continuos $G: C_b(S) \longrightarrow C_b(S)$, la noción de función continua $\mathcal{J}$-convergente incluye el concepto de función acotada casi-convergente definida sobre un semigrupo "amenable" [6] y en particular el de sucesiones casi convergentes [4], noción de gran interés en la teoría clásica de sumabilidad de sucesiones y que esta extensamente estudiada en la literatura [3], [4], [6], [7].

6. Definición.- Sea $k : S \longrightarrow \mathcal{M}_\gamma(T)$ una aplicación continua para la topología $\sigma(\mathcal{M}_\gamma(T), C_b(T))$ y verificando la condición:

6.1) $\forall Z \in \mathcal{Z}$ y $\forall \varepsilon > 0$ existe $P \in \mathcal{P}$ tal que $P \supset Z$ y para cada $s \in S$ se cumple $|k_s|(P \setminus Z) < \varepsilon$

Diremos entonces que k es un núcleo de sumabilidad para $\mathcal{Y}$ con índices en S.

Si k es un núcleo de sumabilidad para $\mathcal{Y}$ con índices en S, denotaremos tambien por k el operador lineal asociado $k : C_b(T) \longrightarrow C(S)$ definido por $k(f) = \dot{g}$ donde $g(s) = k_s(f)$ para cada $s \in S$. Si $\sup_s \|k_s\| < +\infty$ entonces el operador asociado toma valores en $C_b(S)$ y es lineal continuo, de norma $\|k\| = \sup_s \|k_s\|$. En este caso, aplicando 6.1 es fácil probar que la función $s \longmapsto k_s(Z)$ está en $C_b(S)$ para cada $Z \in \mathcal{Z}$.

7. Ejemplos

7.1) Si $S = T = \mathbb{N}$ y $\{(a_{nk}) : (n,k) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}\}$ es una matriz infinita tal que $\sum_k |a_{nk}| < +\infty$ para cada $n \in \mathbb{N}$ y definimos $k_n(M) = \sum_{k \in M} |a_{nk}|$ $(M \subset \mathbb{N})$, entonces se obtiene un núcleo de sumabilidad, con índices en $\mathbb{N}$, para el filtro de Fréchet $\mathcal{Y}$ de $\mathbb{N}$.

7.2) Si $\nu\in\mathcal{M}_\gamma(T)$ y $k : S\times T\longrightarrow\mathbb{R}$ es uniformemente continua y acotada, para cada $s\in S$ sea $k_s\in C_b(T)'$ definido por $k_s(f)=\int_T k(s,t)\,f(t)\,d\nu(t)$

Se puede probar que la aplicación $s\longrightarrow k_s$ es un núcleo de sumabilidad para γ y que para cada $Z\in\mathcal{Z}$ y $s\in S$ se verifica: $k_s(Z)=\int_Z k(s,t)\,f(t)\,d\nu(t)$

8. Teorema.- Sea $k : S\longrightarrow\mathcal{M}_\gamma(T)$ un núcleo de sumabilidad para γ con índices en el espacio topológico S y $\mathcal{J}\in\mathcal{M}_1(S)^+$. Una condición necesaria y suficiente para que el operador asociado transforme funciones continuas convergentes según γ en funciones continuas $\mathcal{J}$-convergentes es que se cumpla:

8.1) $\sup_s \|k_s\| < +\infty$

8.2) Existe $\mathcal{J}\text{-}\lim_s k_s(H)=\delta(H)$ para cada $H\in\mathcal{H}$

8.3) Existe $\mathcal{J}\text{-}\lim_s k_s(T)=\alpha$

En este caso, existe una única $\mu_0\in\mathcal{M}_\gamma(T)$ tal que

8.4) $\mathcal{J}\text{-}\lim_s k_s(f)=\mu_0(f)+(\alpha-\mu_0(T))\lim_\gamma f$ para cada $f\in C\gamma(T)$

Demostración.- Necesidad. Puesto que $k_s(f)=g(s)$ es acotada para cada $s\in S$ y cada $f\in C\gamma_0(T)$, aplicando el teorema de Banach-Steinhaus a la familia $\{k_s: s\in S\}\subset\mathcal{M}_\gamma(T)=C\gamma_0(T)'$ y teniendo en cuenta el Corolario 4 se deduce 8.1.

Dado $H\in\mathcal{H}$, aplicando la condición 6.1) se puede probar la existencia de $f\in C\gamma_0(T)$ tal que $|k_s(H)-k_s(f)|<\varepsilon$ para todo $s\in S$. Puesto que $g(s)=K_s(f)$ es $\mathcal{J}$-convergente y $g_H(s)=K_s(H)$ es continua; resulta, resulta que g_H es adherente al subespacio de $C_b(S)$ formado por las funciones $\mathcal{J}$-convergentes. Puesto que este subespacio es cerrado, deducimos que g_H es $\mathcal{J}$-convergente.

Suficiencia. De 8.1) se deduce que el operador asociado al núcleo toma valores en $C_b(S)$ y es lineal continuo de norma $\|k\|=\sup_s\|k_s\|$. Si consideramos el operador adjunto $k^*:\mathcal{M}(S)\longrightarrow\mathcal{M}(T)$, dada $\lambda\in\mathcal{J}$, la medida $\nu=k^*(\lambda)$ verifica $\nu(Z)=\{\lambda\}\text{-}\lim k_s(Z)$ cualquiera que sea $Z\in\mathcal{Z}$.

Efectivamente, utilizando 6.1) y la $\mathcal{Z}$-regularidad de ν se deduce que para cada $\varepsilon>0$ existe $f\in C_b(T)$, $\chi_Z\leq f$ verificando:

$$|\lambda\text{-}\lim_s k_s(Z)-\lambda\text{-}\lim_s k_s(f)|\leq\lambda\text{-}\lim|k_s(Z)-k_s(f)|\leq\sup_s|k_s|(f\backslash\chi_Z)\leq\frac{\varepsilon}{2}$$

$$|\lambda\text{-}\lim_s k_s(f)-\nu(Z)|=|\nu(f)-\nu(Z)|\leq|\nu|(f\backslash\chi_Z)\leq\varepsilon/2$$

luego $|\lambda\text{-}\lim_s k_s(Z)-\nu(Z)|\leq\varepsilon$ para cada $\varepsilon>0$.

Aplicando el Teorema 2 deducimos que $\nu=k^*(\lambda)=\mu_0^\lambda+\mu_1^\lambda$ donde $\mu_0^\lambda\in\mathcal{M}_\gamma(T)$ y $\mu_1^\lambda\in L_\gamma(T)$. Para cada $H\in\mathcal{H}$ existe $f\in C\gamma_0(T)$ con $\chi_H\leq f$ y en consecuencia $|\mu_1^\lambda(H)|\leq|\mu_1^\lambda|(f)=0$. Entonces para cada $H\in\mathcal{H}$ se verifica que $\mu_0^\lambda(H)=k^*(\lambda)(H)=\nu(H)=\lambda\text{-}\lim_s k_s(H)=\delta(H)$.

Hemos probado que todas las medidas de la familia $\{\mu_0^\lambda:\lambda\in\mathcal{J}\}$ coinciden sobre $\mathcal{H}$. Puesto que se trata de una familia de medidas $\mathcal{H}$-regulares, todas ellas coinciden sobre $\mathcal{A}$, es decir, existe $\mu_0\in\mathcal{M}_\gamma(T)$ tal que $\mu_0^\lambda=\mu_0$ para cada $\lambda\in\mathcal{J}$. Entonces, si $f\in C\gamma_0(T)$ y $\lambda\in\mathcal{J}$ se obtiene: $\lambda\text{-}\lim_s k_s(f)=k^*(f)=\mu_0^\lambda(f)=\mu_0(f)$, o sea, f resulta ser $\mathcal{J}$-convergente hacia $\mu_0(f)$. Finalmente aplicando lo que se acaba de probar y 8.3) se deduce que para cada $f\in C\gamma(T)$ existe $\mathcal{J}\text{-}\lim_s k_s(f)=\mu_0(f)+(\alpha-\mu_0(T))\lim_\gamma f$.

9. Corolario.- En las hipótesis del Teorema 8, una condición

necesaria y suficiente para que el operador asociado al núcleo k transforme cada función continua convergente $f \in C^{\Upsilon}(T)$ en una función continua $\mathcal{J}$-convergente hacia $\lim_{\Upsilon} f$ es que se cumplan 8.1) y 8.2) con $\delta \equiv 0$ y 8.3) con $\alpha=1$.

Demostración.- Inmediata.

Como pone de manifiesto el Ejemplo 7.1) y los comentarios realizados en relación a la noción de función $\mathcal{J}$-convergente, el teorema 8 generaliza no solo el clásico teorema de Kojima-Schur, correspondiente al caso $S=T=\mathbb{N}$ y al filtro de Fréchet en $\mathbb{N}$, sino que aun dentro de esta situación particular, unifica y extiende distintos resultados dispersos en la literatura sobre el tema correspondientes a elecciones particulares de la familia $\mathcal{J}$ ([2], [3], [6] y [7]).

Por otra parte, fuera del caso discreto, se pueden aplicar los resultados obtenidos cuando S es localmente compacto, Υ la base de filtro de los complementarios de los compactos, $\mathcal{M}_{\Upsilon}(T)=\mathcal{M}_t(T)$ el espacio de las medidas de Radon signadas finitas y k un núcleo del tipo indicado en 7.2). Se obtiene así un corolario al teorema 8, que no enunciamos explícitamente y que generaliza un resultado de F. Terpe [9].

BIBLIOGRAFIA

[1].- ALEXANDROV A. D., "Additive set-functions in abstract spaces".-Mat. Sb. (N.S.)8(50)(1940), p.p. 307-348.

[2].- DAY M.M., "Amenable semigroups".-Illinois J. Math (1957),p.p. 509-544.

[3].- DURAN J.P., "Almost convergence, summability and ergodicity".-Can. J. Math. 2(1974), p.p. 372-387.

[4].- KING J.P., "Almost summable sequences".-Proc.Amer. Math. Soc. 17(1966), p.p. 1219-1225.

[5].- LORENTZ G.G., "A contribution to the theory of divergent sequences".- Acta Math. 80(1948), p.p. 167-190.

[6].- MAH P.F., "Summability in amenable semigroups".- Tran. Amer. Math. Soc. 156(1971), p.p. 391-403.

[7].- SCHAEFFER P., "Infinite Matrices and Invariant Means". Proc. Amer. Math. Soc. 36, 1(1972),p.p. 104-110.

[8].- SENTILLES F.D., "Kernel Representations of operators and their adjoints".- Pacific. J. Math. 23(1967) p.p. 153-162.

[9].- TERPE F. y FLAKSMAIER J., "On an aspect of compactification theory and measure theory in questions of summability".- Dokl. Akad. Nauk. SSSR 227(1976), p.p. 407-411.

[10].- VARADARAJAN V.S., "Measures on Topological Spaces". Mat. Sb.(N.S.) 55(97)(1961), p.p. 33-100.

[11].- VERA G., "Sobre una noción general de Sumabilidad". Real Academia de Ciencias Exact. Fís. y Nat., LXX 2º(1976), p.p.297-335.

[12].- WILANSKY A., "Modern Methods in Topological Vector Spaces".- Mc. Graw. Hill(1980).

[13].- WLODARSKI L., "Sur les métodes continues de limitation".-Studia Mat. XIV(1953), p.p. 161-187.