UNIVERSIDAD DE MURCIA

Facultad de Ciencias Químicas y Matemáticas

Departamento de Teoría de Funciones

LA INTEGRAL DE PETTIS EN ESPACIOS LOCALMENTE CONVEXOS CON APLICACIONES A LAS MEDIDAS DE BAIRE

Memoria presentada para
optar al grado de Doctor
en Ciencias Matemáticas
por

ANTONIO JOSE PALLARES RUIZ

GABRIEL VERA BOTI, Catedratico de Análisis IV y V
de la Universidad de Murcia

CERTIFICO

que la memeoria "La integral de Pettis en espacios localmente convexos, con aplicaciones a las medidas de Baire" presentada por Antonio José Pallarés Ruiz, ha sido realizada bajo mi dirección.

Murcia 14 de diciembre de 1984

Fdo. Gabriel Vera Botí

Deseo expresar mi agradecimiento más sincero al Profesor Dr. Gabriel Vera Botí por la atenta dirección y el constante apoyo que me ha prestado durante la realización de esta memoria.

INTRODUCCION

En el año 1938 B.J. Pettis introdujo la noción de función vectorial escalarmente medible y el concepto de integral débil que lleva su nombre, estableciendo sus propiedades básicas. Desde ese año y hasta finales de los 70, no hubieron aportaciones significativas que profundizasen en el conocimiento de estos conceptos. Aunque la integral de Pettis carece de alguna de las buenas propiedades que son de esperar para una noción útil de integral, desde sus origenes empezó a ponerse de manifiesto que alguna de sus propiedades eran un tanto inesperadas si se atendía a la simplicidad de su definición. Entre estas está el que mediante la correspondiente integral indefinida se generan medidas vectoriales numerablemente aditivas, absolutamente continuas y de variación σ-finita.

Hasta el año 1976 poco más se sabía sobre la integral de Pettis, y una de las dificultades que presentaba esta integral era el carecer de criterios útiles para decidir la integrabilidad de una función, aparte del caso casi trivial de las que son acotadas, definidas sobre espacios de medida finitos y escalarmente equivalentes a funciones medibles Bochner.

Otro inconveniente de esta noción débil de integral es el que se pueden presentar ciertas situaciones patológicas, como por ejemplo el hecho de que la medida vectorial asociada no tenga recorrido relativamente compacto, lo que impide que en estos casos haya buenos resultados relativos a la aproximación de las funciones integrables mediante funciones simples análogos a los que existen para la integral de Bochner.

En los ultimos años la situación a cambiado sustancialmente. Recientemente y para el caso de espacios de Banach, se han obtenido criterios potentes de integrabilidad. Entre estos cabe señalar el teorema de Talagrand (cf.Sentilles--Wheeler [1983]) que caracteriza la integrabilidad de una función en terminos de su "core", y un teorema de Riddle-Saab-Uhl [1983] sobre la integrabilidad con respecto a medidas de Radon, de funciones acotadas y valoradas en espacios duales de Banach separables. Por otra parte, el desarrollo reciente de esta teoría empieza a poner en evidencia que alguno de los inconvenientes de la integral de Pettis desaparecen cuando se consideran espacios de medida no demasiado patológicos (por ejemplo, espacios de medida perfectos) o bien si se restringe la teoría a ciertas clases bastante amplias de espacios de Banach.

Estos resultados comienzan a desvelar que la estructura de la funciones integrables Pettis y del espacio que forman, es bastante más compleja que lo que cabría esperar a partir de unas definiciones tan sencillas. Esta afirmación se pone en evidencia al considerar funciones escalarmente medibles $f : [0,1] \to l^{\infty}$, considerando en $[0,1]$ la σ-álgebra completa de todos los subconjuntos medibles Lebesque. La no integrabilidad de f depende del comportamiento de la función sobre los subconjuntos de medida nula, pues en el caso de que f sea una función escalarmente medible con respecto a la σ-álgebra de los universalmente medibles (subconjuntos medibles con respecto a todas las medidas de Radon definidas sobre $[0,1]$)y acotada, el teorema de Riddle-Saab-Uhl garantiza la integrabilidad de f.

Todos los progresos recientes en esta teoría de integración se apoyan esencialmente en resultados profundos sobre la estructura de los conjuntos puntualmente compactos de funciones medibles debidos a Rosenthal [1974],[1977] y Fremlin [1975] , y a los posteriores refinamientos de Bourgain-Fremlin--Talagrand [1978]. Se puede decir que estos progresos han comenzado a raiz de los trabajos de Edgar [1977] [1979] quien fue uno de los primeros en advertir que las propiedades que conciernen a la integrabilidad de una función f se pueden análizar en terminos de la familia de funciones medibles $\{ \langle x^*, f \rangle : \|x^*\| \leq 1 \}$.

Otra contribución notable de Edgar ha sido la de poner en evidencia que las funciones escalarmente medibles son las funciones medibles con respecto a la σ-álgebra de los subconjuntos de Baire del espacio de llegada dotado de la topología débil, y en consecuencía que había una estrecha relación entre la teoría de la integral de Pettis y la teoría de las medidas de Baire sobre los espacios de Banach dotados de la topología débil. Así se inició una sugestiva clasificación de los espacios de Banach no separables, desde el punto de vista de la integración vectorial, y más concretamente en terminos de los diferentes espacios de medidas de Baire definidos sobre ellos, que aún no está enteramente concluida.

Aunque el desarrollo reciente de la integral de Pettis se ha venido efectuando casi exclusivamente dentro del ámbito de los espacios de Banach y los espacios de medidas finitos, es claro que la teoría de esta integral es una teoría localmente convexa dependiente de la topología débil, y pensamos que es en este contexto donde de modo natural se debe exponer. Si bién es verdad que la extensión de una parte de la teoría al caso de los espacios localmente convexos es casi inmediata, con tal de considerarlos como subespacios de productos de espacios de Banach, no sucede así con otras partes de la misma donde resultados especiales de los Banach entran en acción de manera contundente. Por ejemplo, las diversas caracterizaciones de los espacios de Banach que no contienen a l^1 , debidas a Rosenthal [1974], Odell-Rosenthal [1975] y Haydon [1976] son esenciales a la hora de estudiar la propiedad de

Radon-Nikodým para la integral de Pettis (propiedad débil de Radon-Nikodym, PDRN), ya que los espacios de Banach de esta clase son precisamente aquellos cuyo dual posee la PDRN.

En otras ocasiones, cuando la teoría de la integral de Pettis se apoya en la de la integral de Bochner, los resultados obtenidos en el caso de los espacios de Banach no son suceptibles de una traducción directa al caso localmente convexo, pues en este contexto se carece de una noción de integral con propiedades tan agradables como tiene la integral de Bochner. El siguiente resultado ilustra esta situación : Si la topología débil de un espacio de Banach X es Lindeloff entonces cada función escalarmente medible y acotada con valores en X es integrable Pettis con respecto a cualquier espacio de medida finito, y la integral indefinida asociada tiene recorrido relativamente compacto. Lo que ocurre cuando la topología débil es Lindeloff es que la función es escalarmente equivalente a una función integrable Bochner, de donde se sigue el resultado. Aunque este argumento no se traslada al caso localmente convexo, el resultado se puede extender a este caso acudiendo a un potente teorema de Ionescu-Tulcea[1974] relativo a la metrizabilidad de subconjuntos puntualmente compactos de funciones medibles,(vease 5.20)

Otras ventajas que presentan los espacios de Banach frente a los localmente convexos a la hora de desarrollar la integral de Pettis son las siguientes : En primer lugar, la topología débil de un espacio de Banach X goza de ciertas propiedades especiales muy útiles desde el punto de vista de la integración vectorial, y que no son comunes a todos los espacios localmente convexos (X es universalmente medible en (X^{**},débil*), toda medida τ-aditiva (τ-suave) sobre la σ-álgebra de Baire de (X,débil) es t-aditiva y está soportada por un subespacio separable, la realcompactificación de (X,débil) se puede representar como un subespacio de X^{**}, etc...).

En segundo lugar, en los espacios de Banach el manejo de las funciones escalarmente medibles es mucho más flexible, pues aunque dichas funciones no se pueden descomponer como suma de una cantidad numerable de funciones escalarmente medibles acotadas (pues las bolas no son elementos de la σ-álgebra de Baire débil) sin embargo se pueden descomponer como suma de funciones, que escalarmente estan esencialmente acotadas de modo uniforme con respecto a la bola unidad del dual.

El interes que tiene el profundizar en la teoría de la integral de Pettis en espacios localmente convexos está sobradamente justificado por el hecho de que, en los diversos intentos que se han realizado para desarrollar una teoria aceptable de integración vectorial para funciones valoradas en estos espacios generales, parece comunmente aceptado el que la noción de integral que se debe manejar es la de Pettis, aplicada a clases de funciones que satisfagan ciertas condiciones de medibilidad, proporcionando criterios útiles de integrabilidad, y con las que desaparezcan algunas de las patologías de la integral de Pettis. Así, por ejemplo Thomas [1974] considera el caso de funciones medibles Lusin con respecto a medidas de Radon sobre espacios topológicos generales, y Thomas [1975] y Labuda [1978] abordan el caso de funciones valoradas en espacios de Suslin. Como se puede apreciar en los trabajos de Thomas lo esencial para obtener buenos resultados en estos casos es que, al transportar la medida, mediante la función, desde el espacio base al espacio localmente convexo, la medida resultante goce de buenas propiedades topológicas, que es lo que ocurre en las dos situaciones que se han señalado.

La medibilidad de Lusin y otras nociones , como la medibilidad por seminormas (Blondia [1981]), si bién proporcionan criterios útiles de integrabilidad, presentan el inconveniente de carecer de criterios flexibles que aseguren la medibilidad, similares al dado por Pettis para la medibilidad Bochner. Por ello, uno de los motivos de atención preferente en los primeros capitulos de la memoria es el de proporcionar una amplia gama de criterios útiles de integrabilidad de Pettis, en el contexto más general posible, de las funciones escalarmente medibles valoradas en espacios localmente convexos, con la intención de ir eliminando uno de los inconvenientes que venía presentando esta teoría de integración vectorial.

Por otra parte, el interés de la integral de Pettis es indudable si se tiene en cuenta que los avances que se consigan en la integración débil repercutiran en las demás teorías de integración localmente convexas que se apoyan en ella. En el ultimo epígrafe se ilustra este hecho viendo como se pueden obtener resultados relativos a la propiedad de Radon-Nikodým para la integral por seminormas, tomando como base los correspondientes resultados para la integral de Pettis.

Antes de pasar a indicar un poco más detalladamente los contenidos de esta memoria, señalaremos los dos objetivos primordiales que han impulsado la misma:

El primero de ellos ya ampliamente justificado, fue el de profundizar en la integración de Pettis en el ámbito localmente convexo, tomando como base el desarrollo reciente de la teoría en el marco de los espacios de Banach, y establecer todos aquellos resultados que, a nuestro parecer, no se extienden de manera trivial al caso localmente convexo.

El segundo , que nos ha conducido a resultados originales incluso en el caso de los espacios de Banach, ha sido el de análizar los aspectos particulares de la integral de Pettis de funciones definidas sobre un espacio topológico completamente regular, con respecto a los diferentes tipos de medidas de Baire, tales como la integrabilidad universal de las funciones continuas y débilmente continuas valoradas en un Banach.

Los resultados obtenidos en esta última dirección resuelven algunos de los problemas planteados en el contexto de las medidas de Baire, y constituyen unas de las pocas aplicaciones que por el momento se conocen de la integral de Pettis.

DESARROLLO DE LA MEMORIA

En el primer epígrafe se introduce la notación y la terminología básica relativas a los distintos espacios de medidas de Baire y a la integral de Pettis. Y en el segundo se exponen algunos de los resultados fundamentales para esta integral que seran utilizados en la exposición de la memoria.

El tercer epígrafe está dedicado al estudio de las diferentes nociones de medibilidad consideradas por los autores que han realizado extensiones de la integral de Bochner al caso localmente convexo. Comprobamos las relaciones existentes entre estas, y las comparamos con la noción de medibilidad dada por las funciones medibles Borel que transforman la medida del espacio base en una medida t-aditiva o τ-aditiva. Observamos el buen comportamiento de la integral de Pettis para esta clase de funciones, dando un teorema que localiza los valores de una función en terminos del recorrido de su integral indefinida. También, en el caso de considerar funciones definidas sobre espacios topológicos, relacionamos las distintas nociones de medibilidad con la de medibilidad-Lusin (casi-continuidad).

Al examinar los distintos criterios de integrabilidad de Pettis se fue poniendo de manifiesto que en la mayor parte de los casos obteniamos funciones integrables Pettis cuyas integrales indefinidas tienen recorrido relativamente compacto (decimos que estas funciones son fuertemente integrables). Cuando esto ocurre, al igual que en el caso de los espacios de Banach, desaparecen algunos de los inconvenientes de la integral de Pettis. Esta situación nos condujo a aislar la propiedad que tienen las

las funciones escalarmente medibles para las que la integrabilidad de Pettis equivale a integrabilidad fuerte. Esta propiedad que hemos denotado por P-medibilidad (4.1),por tener caracteristicas análogas a las del concepto usual de función medible, está definida por una condición muy poco restrictiva (las funciones que son medibles según alguna de las nociones expuestas en el tercer epígrafe, son P-medibles), y se cumple de modo automático para clases amplias de espacios localmente convexos y de espacios de medidas.

En el epígrafe cuarto estudiamos estas funciones. Se dan condicones para que una función escalarmente medible sea P-medible : en terminos del espacio de llegada (por ejemplo si es un Banach cuyo dual tiene bola unidad débil*-secuencialmente compacta, o si es un espacio localmente convexo débilmente Lindeloff); en terminos del espacio de medida (por ejemplo si es perfecto); y en terminos de la medida imagen asociada.

En el epígrafe 5 estudiamos condiciones para que una función sea fuertemente integrable Pettis. Destaca la caracterización de las funciones fuertemente integrables Pettis como las que son P-medibles e integrables Pettis, lo que nos da una extensión del teorema de Stegall al caso localmente convexo, asegurando que para espacios de medida perfectos toda función integrable Pettis lo es fuertemente. Se analiza la integrabilidad fuerte de una función en terminos de la medida imagen asociada, en particular se obtiene integrabilidad fuerte cuando la medida imagen está en el espacio $M_z(X)$ introducido por Wheeler [1981] respondiendo negativamente a una conjetura por él planteada. También se estudia la integrabilidad de las funciones casi-continuas y se extiende el resultado de Riddle-Saab-Uhl , citado antes, al caso de funciones valoradas en duales de espacios casi--tonelados separables. Como aplicación de los resultados de este epígrafe se completa una caracterización de Haydon [1976] de los espacios de Banach que no contienen a l^1 (5.31),y se da una prueba de que todo espacio localmente convexo casi-completo es un μ-espacio para la topología débil (5.32) (Valdivia [1977]).

Dedicamos el epigrafe 6 a los espacios formados por las funciones fuertemente integrables Pettis. Estudiamos condiciones para la convergencia de sucesiones, entre las que cabe destacar el teorema 6.7 que para el caso de funciones valoradas en espacios de Frechet, extiende y completa un resultado de Geitz [1981] relativo a la aproximación de las funciones fuertemente integrables Pettis, escalarmente y en casi todo punto, por sucesiones de funciones simples. También se prueba que en el caso general estas funciones se pueden aproximar por funciones simples, lo que permite identificar el completado de estos espacios con productos tensoriales, y en base a resultados conocidos para estos productos, estudiar la compacidad débil y la convergencia débil de sucesiones de funciones fuertemente integrables Pettis.

El epígrafe 7 analiza detalladamente el "lifting" de funciones escalarmente medibles valoradas en un espacio localmente convexo X. La razón de este análisis está por una parte en que permite regularizar funciones aunque sus tranformadas mediante el lifting tomen valores fuera de X, y por otra parte, en que al estudiar la PDRN la manera usual de obtener las derivadas es utilizando un lifting. Algunos de los resultados expuestos en esta sección son análogos a otros obtenidos por Sentilles-Wheeler[1983] utilizando la trasformada de Stone, La ventaja que tiene el uso del lifting sobre el de la transformada de Stone está en que las transformadas mediante el lifting estan definidas sobre el mismo espacio base que las funciones, lo que se adapta mejor para su uso en los dos epígrafes restantes.

En esta sección estudiamos propiedades de una función en terminos de como está localizada la imagen de su transformada con respecto a X, y aqui juega un papel importante la real compactificación de (X,débil).

Trasladamos al caso localmente convexo el teorema del "core" de Talagrand, aunque utilizando el lifting en lugar de la transformada de Stone. Si bién las tecnicas expuestas en este epígrafe estan orientadas a su aplicación posterior, como aplicación de las mismas obtenemos algunos resultados como es una extensión para funciones valoradas en LF-estrictos del teorema de Edgar que caracteriza a las funciones que son escalarmente equivalentes a medibles Bochner, como aquellas cuyas medidas imagenes son t-aditivas.

Al estudiar la integrabilidad de Pettis de funciones definidas en espacios topológicos con respecto a medidas de Baire, surgen de manera natural las preguntas de conocer bajo qué condiciones las funciones que son débilmente continuas (resp. continuas) son integrables Pettis, y saber como es el espacio de las medidas con respecto las cuales cualquier función débilmente continua (resp. continua) y acotada valorada en un espacio de Banach arbitrario es integrable Pettis. En el epígrafe 8 probamos que este espacio de medidas es el espacio de las medidas de Grothendiek M_g introducido por Wheeler [1983] (resp. el espacio de las medidas separables Dudley M_∞). Gracias a este resultado, utilizando tecnicas propias de la integral de Pettis, se comprueban algunas propiedades de estos espacios de medidas como son su completitud secuencial con respecto a la topología débil asociada al par dual definido por las funciones reales continuas y la caracterización de sus medidas en terminos del compactificado de Stone-Cech. Con lo que se resuelven algunos de los problemas planteados por Wheeler para el espacio M_g, y se completan los resultados ya existentes para el espacio M_∞.

Para obtener la citada caracterización se extiende de forma natural cada función débilmente continua y acotada f valorada en el espacio X, a una función f_β definida sobre la compactificación de Stone-Cech y valorada en X^{**}. Relacionando esta extensión con el lifting dado en 7, se caracteriza la integrabilidad de f en terminos de los valores de f_β.

Se describen las medidas de Baire para las que las funciones débilmente continuas y acotadas son escalarmente equivalentes a funciones medibles Bochner (resp. integrables Bochner). Quedando abierto el problema de separar los espacios formados por estas medidas del espacio M_g. También se presenta el problema de estudiar si es posible caracterizar el resto de los espacios de medidas de Baire en terminos de la integral de Pettis, dando algunos resultados parciales en este sentido.

Completamos el epígrafe estudiando la integrabilidad de Pettis de funciones débilmente continuas no necesariamente acotadas, obteniendo como aplicación una breve demostración de un resultado de Ptack [1955] relativo al espacio de las medidas de Riesz.

Aunque gran parte de estos resultados aparecen en la memoria en terminos de espacios de Banach, muchos de ellos siguen teniendo validez en el caso localmente convexo, y la razón por la que los describimos en el marco de los Banach es por exponerlos de la forma más elegante posible.

En el ultimo epígrafe estudiamos la propiedad débil de Radon-Nikodým (principalmente para espacios localmente convexos duales). En este caso las extensiones de los resultados conocidos para espacios de Banach duales no se pueden hacer de uma forma directa, pues estos están basados en la estructura de los Banach. Para abordar este problema estudiamos la PDRN localizada en subconjuntos débil*-compactos convexos, por lo que nos restrimos a duales de espacio casi-tonelados al estudiar la PDRN global.

El principal resultado de esta sección es el teorema 9.9 que en el caso de los Banach fue establecido por Saab-Saab[1983] y Riddle-Saab-Uhl [1983] . La demostración de este teorema se ha obtenido abordandola directamente con tecnicas genuinas de espacios localmente convexos, y para ello ha sido preciso acudir a los resultados centrales de los trabajos de Rosenthal y Haydon. Además de estos, la proposición 9.3 y el lema 9.8

(que reduce parte de la prueba al caso separable) han sido la clave que nos permitio encontrar la demostración. Esta demostración vista en el marco de los espacios de Banach es más sencilla que la que aparece descrita en la literatura.

El teorema 9.9 ha abierto el camino para trasladar al caso localmente convexo el resto de las caracterizaciones conocidas hasta este momento, de los subconjuntos débil*-compactos convexos de espacios de Banach duales,con la PDRN. También permite trasladar el estudio de la PDRN, e incluso de la propiedad de Radon-Nikodym para la integral por seminormas, sobre subconjuntos de espacios localmente convexos duales, al estudio de la misma propiedad sobre subconjuntos de espacios de Banach (duales).

Entre los distintos resultados expuestos en este epígrafe, señalamos la caracterización de los espacios de Frechet separables cuyo dual posee la PDRN (9.21) y el corolario 9.26 que reduce el estudio de la PDRN sobre duales de espacios tonelados, al estudio de la PDRN relativa a la medida de Lebesgue del intervalo unidad (este resultado también es una consecuencia inmediata de (9.18))

Finalizamos la memoria exponiendo en un anexo los enunciados de los teoremas que más se han utilizado en la exposición de la misma, junto con una descripcion explicita de la real-compactificación de un espacio localmente convexo (X,débil),en terminos análogos a los utilizados por Corson para espacios de Banach, siguiendo la idea del trabajo de Valdivia [1982] ,(la razón de esta ultima descripción está en que no la hemos encon- de forma explicita en la literatura).

INDICE

1 NOTACIONES Y TERMINOLOGIA

Iniciamos esta memoria exponiendo la notación y la terminologia basica empleada en su desarrollo. En toda la memoria S denotará a un espacio topológico completamente regular. $C_b(S)$ (resp. $C(S)$) será el espacio de las funciones reales continuas y acotadas (resp. continuas) definidas sobre S, dotado de la norma de la convergencia uniforme. A veces consideraremos sobre subconjuntos H de $C(S)$ la topología de la convergencia puntual, que denotaremos por t_p.

Por $\mathcal{Z}(S)$ representaremos al retículo de los subconjuntos de S que son ceros de funciones reales continuas, $\mathcal{U}(S)$ será la familia de los complementarios de ceros, y $\mathcal{G}(S)$, $\mathcal{F}(S)$, $\mathcal{K}(S)$ serán las familias de los subconjuntos de S que son abiertos, cerrados,y compactos,respectivamente. Por $B_a(S)$ denotaremos a la σ-álgebra de los subconjuntos de Baire de S, es decir, la σ-álgebra engendrada por $\mathcal{Z}(S)$. Y por $B_o(S)$ denotaremos a la σ álgebra de los subconjuntos de Borel de S.

A la luz del Teorema de Representación de Alexandroff, las medidas finitamente aditivas de variación acotada μ , definidas sobre el álgebra generada por $\mathcal{Z}(S)$, que son regulares interiormente con respecto a $\mathcal{Z}(S)$, constituyen un espacio vectorial denotado por $\mathcal{M}(S)$, que con la norma de la variación total $\|\mu\| = |\mu|(S)$ se puede identificar isometricamente con el espacio dual $C_b(S)^*$. La identificación se realiza asociando a cada medida μ la forma lineal I_μ definida por $I_\mu(f) = \int f \, d\mu$. A veces, por simplicidad, denotaremos tambien por μ a dicha forma lineal.

Varadarajan [1965] considera tres subespacios de $\mathcal{M}(S)$, denotados por $\mathcal{M}_\sigma(S)$, $\mathcal{M}_\tau(S)$ y $\mathcal{M}_t(S)$, cuyos elementos son medidas que se pueden considerar definidas sobre la σ-álgebra $B_a(S)$ y que son respectivamente las medidas llamadas σ-aditivas, τ-aditivas y t-aditivas.

Las medidas μ de $\mathcal{M}_\sigma(S)$ por definición, son aquellas para las que toda sucesión de funciones f_n en $C_b(S)$ decreciente puntualmente hacia cero, cumple $\mu(f_n) \to 0$, y están caracterizadas porque para toda sucesión Z_n en $\mathcal{Z}(S)$ decreciente al vacio se tiene $\mu(Z_n) \to 0$. Tambien se sabe que $\mathcal{M}_\sigma(S)$ coincide con el espacio de las medidas numerablemente aditivas definidas sobre $B_a(S)$.

Las medidas μ de $\mathcal{M}_\tau(S)$ por definición, son aquellas para las que toda red f_j en $C_b(S)$ decreciente puntualmente hacia cero, cumple $\mu(f_j) \to 0$, y también están caracterizadas porque para toda red Z_j en $\mathcal{Z}(S)$ decreciente al vacio se cumple $\mu(Z_j) \to 0$. Las medidas μ de $\mathcal{M}_\tau(S)$ se pueden extender de modo unico a medidas $\overline{\mu}$ definidas sobre $B_o(S)$ que son regulares interiormente con respecto a cerrados y cumplen que para toda red decreciente al vacio F_j en $\mathcal{F}(S)$, $\overline{\mu}(F_j) \to 0$. También tienen la propiedad de que si f_j es una red de funciones semicontinuas inferiormente decreciente hacia 0, $\int f_j \, d\overline{\mu} \to 0$. Denotaremos por $M_\tau(S)$ al espacio formado por tales extensiones $\overline{\mu}$. Si $\mu \in \mathcal{M}_\tau(S)$, y $\overline{\mu} \in M_\tau(S)$ es su extensión a $B_o(S)$, se define el soporte de μ por

$$\operatorname{sop}(\mu) = \bigcap \{ F \in \mathcal{F}(S) : |\overline{\mu}|(F) = |\overline{\mu}|(S) \} .$$

Es bien sabido que entonces $\operatorname{sop}(\mu) \neq \emptyset$ y que $\mu(S) = \overline{\mu}(\operatorname{sop}(\mu))$.

Una medida μ en $\mathcal{M}(S)$ es t-aditiva, si para cada $\varepsilon > 0$ existe un compacto $K \in \mathcal{K}(S)$ tal que $|\mu|^*(K) \geqslant |\mu|(S)-\varepsilon$ (donde $|\mu|^*$ es la medida exterior asociada a μ). Estas medidas están caracterizadas porque toda red f_j en $C_b(S)$, uniformemente acotada y que converge a cero uniformemente sobre compactos, cumple $\mu(f_j) \to 0$. Las medidas t-aditivas son τ-aditivas y se pueden extender de modo unico a medidas definidas sobre $B_o(S)$ que son regulares con respecto a compactos. Denotaremos por $M_t(S)$ al espacio de las correspondientes extensiones, es decir, al espacio de las medidas finitas de Radon segun Schwartz .

Se tienen las inclusiones $\mathcal{M}_t(S) \subset \mathcal{M}_\tau(S) \subset \mathcal{M}_\sigma(S)$. Si $\mathcal{M}_\sigma(S) = \mathcal{M}_\tau(S)$ se dice que S es compacto en medida, y si $\mathcal{M}_\sigma(S) = \mathcal{M}_t(S)$ se dice que S es fuertemente compacto en medida. En particular, si S es Lindeloff entonces es compacto en medida, y si además es completamente metrizable es fuertemente compacto en medida.

Por $\mathcal{M}_\infty(S)$ denotamos al espacio de las medidas separables introducido por Dudley [1966] . $\mathcal{M}_\infty(S)$ es el subespacio lineal de $\mathcal{M}_\sigma(S)$ formado por las medidas $\mu \in \mathcal{M}_\sigma(S)$ tales que para cada pseudometrica continua y acotada d definida sobre S, existe un subconjunto $Z \subset S$ que es d-cerrado y d-separable con $|\mu|(Z) = |\mu|(S)$. Sea $\mathcal{E}_o$(resp. $\mathcal{E}$) la colección de todos los subconjuntos de $C_b(S)$ que son equicontinuos y uniformemente acotados (resp. equicontinuos, absolutamente convexos y compactos para la topología t_p), como consecuencia del teorema de Banach-Mackey se tiene que $\mathcal{E} \subset \mathcal{E}_o$. Una medida $\mu \in \mathcal{M}_\sigma(S)$ está en $\mathcal{M}_\infty(S)$ si y sólo si su integral I_μ es continua sobre cada $H \in \mathcal{E}_o$ (resp. $H \in \mathcal{E}$) dotado de la topología t_p,(vease Wheeler [1983]).

Sea $\mathcal{H}$ la familia de todos los subconjuntos absolutamente convexos t_p- compactos de $C_b(S)$. Por $\mathcal{M}_g(S)$ denotamos al espacio de las medidas de Grothendieck introducido por Wheeler [1983] . $\mathcal{M}_g(S)$ está formado por las medidas $\mu \in \mathcal{M}_\sigma(S)$ tales que su integral I_μ es continua sobre cada $H \in \mathcal{H}$ dotado de la topología t_p. Evidentemente $\mathcal{M}_g(S) \subset \mathcal{M}_\infty(S)$ pues $\mathcal{E} \subset \mathcal{H}$, también se cumple que $\mathcal{M}_\tau(S) \subset \mathcal{M}_g(S)$, y ambas inclusiones pueden ser estrictas (vease el ejemplo 8.10). $\mathcal{M}_g(S)$ es la complección del espacio L(S) dotado de la topología de Mackey $\sigma(L(S),C_b(S))$, donde L(S) es la envoltura lineal de todas las evaluaciones δ_s determinadas por S ($\delta_s(f) = f(s)$), esto puede verse en Wheeler [1983] .

Por $\mathcal{M}_\alpha(S)^+$ (resp $\mathcal{M}_\alpha(S)_1^+$) denotaremos al conjunto de las medidas positivas (resp. las medidas de probabilidad) en $\mathcal{M}_\alpha(S)$, donde $\alpha = \sigma,\tau,t,\infty,g$.

Por βS denotaremos a la compactificación de Stone-Cech de S. βS admite como modelo al espacio formado por las medidas $\{0,1\}$ valuadas de $\mathcal{M}(S)$ con la topología inducida por $\sigma(\mathcal{M}(S),C_b(S))$, considerando la inmersión $i: S \to \beta S$ definida por $i(s) = \delta_s$,(Varadarajan [1965]). Para cada $f \in C_b(S)$, la función $f_\beta(\alpha) = \int f \, d\alpha$ es continua sobre βS, y es una extensión de f a βS. Para cada medida $\mu \in \mathcal{M}(S)$, el funcional lineal $\hat{\mu}$ definido sobre $C(\beta S)$ por $\hat{\mu}(f_\beta) = \mu(f)$, via el teorema de representación de Riesz, proporciona una medida de Borel regular sobre el espacio compacto βS, que seguimos denotando por $\hat{\mu}$. Cuando $\mu \in \mathcal{M}_\sigma(S)$, la restricción de $\hat{\mu}$ a $B_a(\beta S)$ es precisamente la medida imagen de μ a través de la inclusión $i: S \to \beta S$. Por lo tanto si $A \in B_a(\beta S)$, se cumple que $A \cap S \in B_a(S)$ y $\hat{\mu}(A) = \mu(A \cap S)$.

El subespacio de βS definido por $\upsilon S = \beta S \cap \mathcal{M}_\sigma(S)$, es un modelo para la real compactificación de Hewitt de S. Una propiedad notable de las medidas $\{0,1\}$ valuadas que componen βS, es la de hacer integrables todas las funciones de $C(S)$. Si para cada $f \in C(S)$ y cada $\alpha \in \upsilon S$ escribimos $f^\upsilon(\alpha) = \int f \, d\alpha$, $f^\upsilon \in C(\upsilon S)$ y f^υ es la extensión continua de f a υS. Si además $f \in C_b(S)$, es obvio que f^υ es la restricción de f_β a υS.

El subespacio de υS dado por $\theta S = \beta S \cap \mathcal{M}_\infty(S)$ es un modelo de la complección universal (Dieudoné complección) de S, (vease Buchwalter-Pupier [1969]).

El par (X, γ) denotará a un espacio vectorial real, localmente convexo Hausdorff (e.l.c.) y X^* será su dual topológico. Por X_w denotaremos al espacio X dotado de su topología débil $\sigma(X,X^*)$, reservando la notación X para denotar al espacio dotado de la topología original γ. Las notaciones $B_a(X_w)$, etc.. corresponden a la terminología introducida anteriormente. Edgard [1977] ha probado que $B_a(X_w)$ coincide con la σ-álgebra generada por las formas lineales continuas $x^* \in X^*$. Por $P(X)$ denotaremos al conjunto de las seminormas γ-continuas definidas sobre X. Para cada $p \in P(X)$, sea $V_p = \{x \in X : p(x) \leq 1\}$, V_p° será su polar absoluta con respecto a la dualidad $\langle X, X^* \rangle$.

Sea $K \subset X$ un subconjunto dotado de la topología inducida por X_w, y sea $\lambda \in \mathcal{M}_\sigma(K)_1^+$, se dice que el elemento $x \in X$ es el baricentro de la medida λ ($x = ba(\lambda)$) si para cada $x^* \in X^*$ se cumple $\langle x^*, x \rangle = \int x^* \, d\lambda = \lambda(x^*)$.

(Ω, Σ, μ) será un espacio de medida positivo (finito ó no). Denotaremos por $\Sigma^* = \{E \in \Sigma : \mu(E) < +\infty\}$. $\mathcal{L}^1(\mu)$ será el espacio de las funciones reales μ-integrables dotado de la seminorma $\|f\|_1 = \int |f| \, d\mu$, y $L^1(\mu)$

será el espacio de Banach asociado. $\mathcal{L}^{\infty}(\mu)$ será el espacio de las funciones reales μ-esencialmente acotadas, dotado de la seminorma dada por el supremo esencial, y $L^{\infty}(\mu)$ será el espacio de Banach asociado. Se dice que una función $f : \Omega \to X$ es X^*- escalarmente medible (o simplemente, escalarmente medible, si no hay posibilidad de confusión con respecto a la topología considerada en X) si para cada $x^* \in X^*$ la función escalar $\langle x^*,f\rangle = \langle x^*,f(.)\rangle$ es medible. Edgard [1977] ha probado que una función $f : \Omega \to X$ es escalarmente medible si y sólo si es medible con respecto a las σ-álgebras Σ y $B_a(X_w)$, es decir, si $f^{-1}(A) \in \Sigma$ para cada $A \in B_a(X_w)$. Por consiguiente, si f es escalarmente medible, podemos considerar la medida imagen $\lambda = \mu f^{-1}$ definida sobre $B_a(X_w)$ por $\lambda(A) = \mu(f^{-1}(A))$.

Dos funciones $f, g : \Omega \to X$ escalarmente medibles, se dicen escalarmente equivalentes si para cada $x^* \in X^*$ las funciones $\langle x^*,f\rangle$ y $\langle x^*,g\rangle$ son iguales en casi todo punto (μ). De la caracterización dada por Edgard de $B_a(X_w)$ se deduce que las funciones escalarmente equivalentes definen la misma medida imagen sobre $B_a(X_w)$.

Una función $f : \Omega \to X$ escalarmente medible se dice que es escalarmente integrable si para cada $x^* \in X^*$ se cumple $\langle x^*,f\rangle \in \mathcal{L}^1(\mu)$. En este caso, para cada conjunto $E \in \Sigma$ la aplicación $x^* \to \int_E \langle x^*,f\rangle \, d\mu$ define un elemento de $(X^*)'$, dual algebraico de X^*, que denotaremos por $x_E^{**} = (D)\text{-}\int_E f \, d\mu$ y se denomina como la integral de Dunford de f sobre E. Es bien sabido que si X es un espacio de Banach, o más generalmente si X^* es un e.l.c. que posee la propiedad de la Grafica Secuencialmente Cerrada (G.D.F.), entonces para cada $E \in \Sigma$ se cumple que $x_E^{**} \in X^{**}$, bidual topologico de X. (vease Diestel-Uhl [1977] ,II.2.1). En general, si X es un e.l.c. arbitrario es facil obtener la misma conclusión cuando f es acotada y μ es finita.

Dada una familia no vacia $\Sigma_o \subset \Sigma$, diremos que f es debilmente μ-integrable sobre Σ_o si $x_E^{**} \in X$ para cada $E \in \Sigma_o$. Cuando $\Sigma_o = \{\Omega\}$ diremos que f es debilmente μ-integrable y si $\Sigma_o = \Sigma$ se dice que f es μ-integrable Pettis, denotando $(P)\int_E f\ d\mu = (D)\int_E f\ d\mu$. Puesto que en la memoria esta será, esencialmente, la noción de integral considerada, frecuentemente omitiremos la (P) delante de la integral. Cuando quede claro en el contexto la medida μ se omitirá al designar los conceptos definidos anteriormente.

Cuando $\mu(\Omega)=1$, es facil comprobar que la integrabilidad debil de f equivale a que la medida imagen $\lambda = \mu f^{-1}$ tenga baricentro y en este caso $ba(\lambda) = \int_\Omega f\ d\mu$.

Si $f:\Omega \to X$ es una función integrable Pettis, denotaremos por m_f a su integral indefinida, $m_f(E) = \int_E f\ d\mu$. La versión del teorema de Orlicz-Pettis para e.l.c. (que puede obtenerse de la original para espacios de Banach surmergiendo el e.l.c. en un producto de Banach) asegura que m_f es una medida vectorial numerablemente aditiva definida sobre Σ . Por consiguiente, si X es un e.l.c. casi-completo, el conjunto $m_f(\Sigma)$ es débilmente compacto en X (vease Tweddle [1968]).

Thomas [1975] ha probado que si $f:\Omega \to X$ es una función escalarmente integrable, para cada seminorma $p \in P(X)$ se cumple :

$$\overline{p}(f) = \sup\left\{ \int_\Omega |\langle x^*,f\rangle|\ d\mu \ :\ x^* \in V_p^\circ \right\} < +\infty$$

Es facil probar que la familia $\{\overline{p} : p \in P(X)\}$ constituye un sistema de seminormas sobre el espacio $P(\mu,X)$ de las funciones $f:\Omega \to X$ que son μ-integrables Pettis, dotandolo de una topología localmente convexa . Identificando las funciones que son X^*-escalarmente equivalentes, se separa este espacio, obteniendo un espacio que denotaremos por $\mathcal{P}(\mu,X)$ y que dotado de las seminormas $\overline{p}$ tiene estructura de e.l.c.

Además se tiene que $\overline{p}(f)$ coincide con la p-semivariación de la medida vectorial m_f , $\|m_f\|_p = \sup\{ |x^* \circ m_f|(\Omega) : x^* \in V_p^\circ \}$.

Utilizando los teoremas de separación de subconjuntos convexos en e.l.c. se tiene que si $f \in P(\mu,X)$ y $B \in \Sigma^*$ con $\mu(B) > 0$, entonces $\dfrac{m_f(B)}{\mu(B)} \in \overline{co}\,(f(B))$.

Para cada $E \in \Sigma^*$, Geitz [1982] define el siguiente conjunto :

$$\text{core}\,(f,E) = \bigcap\left\{ \overline{co}\,(f(E-N)) \ :\ \mu(N) = 0 \right\}$$

y comprueba que si $f \in P(\mu,X)$ se tiene la igualdad

$$\text{core}\ (f,E) = \overline{\text{co}} \left\{ \frac{m_f(B)}{\mu(B)} \ : \ E \supset B \in \Sigma \ , \ \mu(B) > 0 \right\}$$

y por lo tanto se tiene que core $(f,E) \neq \emptyset$ para cada $E \in \Sigma^*$ con $\mu(E) > 0$. Talagrand (vease Edgard [1982] ó Sentilles-Wheeler [1983]) ha probado, en el contexto de los espacios de Banach, que el reciproco de esta propiedad también es cierto cuando f es acotada .

2 RESULTADOS PRELIMINARES SOBRE LA INTEGRAL DE PETTIS

En este epígrafe se recogen algunos resultados básicos sobre la integral de Pettis que aparecen dispersos en la literatura. Buena parte de ellos aparece en el marco de los espacios de Banach y de las medidas finitas o σ-finitas. Damos sin demostración aquellos cuya prueba se traduce directamente al caso localmente convexo. Se exponen las pruebas que aportan alguna mejora de interés y aquellas que no aparecen explicitamente en la literatura.

2.1 TEOREMA (Edgard) *Sea* $f : \Omega \to X$ *una función escalarmente integrable, y sea* $T_f : X^* \to \mathcal{L}^1(\mu)$ *definido por* $T_f(x^*)=\langle x^*,f\rangle$. *Consideremos las proposiciones : (a) f es integrable Pettis, y (b) Para cada* $p \in P(X)$, *la restricción de* T_f *a* V_p° *es* $\sigma(X^*,X)-\sigma(\mathcal{L}^1(\mu)),\mathcal{L}^\infty(\mu))$ *continuo . Entonces (a) implica (b), y si X es completo también es cierto el reciproco. Si f es acotada y* μ *es finita, basta suponer que X es casi-completo para que se cumpla el reciproco.*

Demostración .- Vease Edgard [1979] (pag.569). Para ver que (b) implica (a), si $\hat{X}$ es la compleción de X y se cumple (b), (D) $\int_E f\, d\mu \in \hat{X}$ en virtud del clasico teorema de Grothendieck que caracteriza a $\hat{X}$. Entonces si X es completo se cumple (a). Por otra parte, si μ es finita (D)$\int_E f\, d\mu$ está en $\mu(E).M$, donde M es la envoltura convexa cerrada de f(E) en $\hat{X}$, que está contenida en X si f es acotada y X es casi-completo. Asi pues, también se cumple (a) en este caso . #

2.2 TEOREMA (Thomas) *Sea* $f \in P(\mu,X)$. *Entonces se cumplen :*

(a) Para cada $p \in P(X)$, $\lim_{\mu(E)\to 0} \sup \{ \int_E |\langle x^*,f\rangle|\, d\mu \ : x^* \in V_p^\circ \} = 0$.

(b) Para cada $p \in P(X)$, *existe un* $A \in \Sigma^*$ *tal que para cada* $B \in \Sigma^*$ *con* $A \cap B = \emptyset$ *se cumple* $m_f(B) \in V_p$.

(c) Si $T: X \to Y$ *es un operador lineal continuo entre e.l.c.* $T \circ f \in P(\mu, Y)$

Si además el espacio X *es secuencialmente completo, se cumplen :*

(d) Para cada función escalar medible α *con* $|\alpha| \leqslant 1$, $\alpha . f \in P(\mu, X)$.

(e) Para cada $p \in P(X)$ *y cada* $E \in \Sigma$ *se verifica*

$$p(m_f(E)) \leqslant \sup \{ p(m_{\alpha f}(E)) : |\alpha| \leqslant 1 \} \leqslant \sup \{ \int_E |\langle x^*, f \rangle| \, d\mu : x^* \in V_p^\circ \} < +\infty$$

(f) $\lim_{\mu(E) \to 0} m_{\alpha f}(E) = 0$ *uniformemente en* $|\alpha| \leqslant 1$.

(g) Para cada $p \in P(X)$ *existe* $A \in \Sigma^*$ *tal que si* $B \in \Sigma^*$, $B \cap A = \emptyset$ *entonces* $m_{\alpha f}(B) \in V_p$ *para cada* α *con* $|\alpha| \leqslant 1$.

Si la medida μ *es* σ*-finita, no es necesario pedir que* $B \in \Sigma^*$ *ni en (b) ni en (g).*

Demostración .- Vease Thomas [1975] (pag.64 y 65). #

Como consecuencia de las propiedades (f) y (g) del teorema anterior,y reduciendo el caso a que la medida sea σ-finita, se obtiene facilmente el

2.3 COROLARIO *Sea* X *un e.l.c. casi-completo, y* $f \in P(\mu, X)$ *una función nula fuera de un conjunto* σ*-finito. Si* α_n *es una sucesión de funciones escalares medibles, uniformemente acotada, que converge en casi todo punto hacia* α, *entonces para cada* $E \in \Sigma$ *la sucesión* $\int_E \alpha_n . f \, d\mu$ *converge hacia* $\int_E \alpha f \, d\mu$ *en la topología del espacio.*

Si X es un espacio de Suslin no hace falta pedir que f se anule fuera de un conjunto σ-finito, esto se deduce de que X es de Suslin.(Vease Labuda [1978] pag. 213).

Para espacios de Suslin y medidas finitas se tiene el siguiente Lema de localización, cuya prueba puede encontrarse en Thomas [1975] (pag.69).

2.4 LEMA de Localización (Thomas) *Sea* K *un subconjunto cerrado y convexo del e.l.c. Suslin* X , *y sea* $f: \Omega \to X$ *una función escalarmente medible tal que para cada semiespacio cerrado* D *conteniendo a* K , $f(t) \in D$ *para casi todo punto. Entonces* $f(t) \in K$ *para casi todo punto.*

2.5 TEOREMA *Sea* $f_n \in P(\mu,X)$ *una sucesión que converge escalarmente en medida hacia la función escalarmente medible* $f : \Omega \to X$. *Se supone que la sucesión* $\int_E f_n \, d\mu$ *es* $\sigma(X,X^*)$*-convergente para cada* $E \in \Sigma$. *Entonces* $f \in P(\mu,X)$ *y* $\int_E f_n \, d\mu$ *es* $\sigma(X,X^*)$*-convergente hacia* $\int_E f \, d\mu$.

Demostración .- Para cada $x^* \in X^*$, sea $h_n = \langle x^*,f_n\rangle \in \mathcal{L}^1(\mu)$. La sucesión h_n tiene la propiedad de que para cada $E \in \Sigma$ existe el limite de las integrales $\int_E h_n \, d\mu$. El teorema de acotación de Nikodym (Diestel-Uhl [1977]) asegura que la sucesión h_n esta acotada en la norma de $\mathcal{L}^1(\mu)$. Entonces h_n puede considerarse como una sucesión acotada en $L^1(\mu)$, con la propiedad de que para cada $E \in \Sigma$, existe el $\lim_n \int_E h_n \, d\mu$. En virtud del teorema 7 de Dunford--Schwartz [1958] (pag.291) obtenemos que h_n es una sucesión débilmente de Cauchy en $L^1(\mu)$, y como este espacio es débilmente secuencialmente completo, existe $h \in L^1(\mu)$ tal que $\int_E h_n \, d\mu$ converge a $\int_E h \, d\mu$ para cada $E \in \Sigma$.

Por otra parte, la famila de medidas escalares $\nu_n = m_{h_n}$ es uniformemente σ-aditiva en virtud del teorema de Vitali-Hahn-Saks-Nikodym (vease Diestel-Uhl), por lo que existe una medida σ-aditiva finita λ definida sobre Σ verificando $0 \leqslant \lambda(E) \leqslant \sup_n |\nu_n| (E) = \sup \int_E |h_n| d\mu$, y tal que el $\lim_{\lambda(E)\to 0} (\sup_n |\nu_n| (E)) = 0$. Como $\mu(E) = 0$ implica que $\lambda(E) = 0$, se tiene que $\mu(E) \to 0$ implica $\lambda(E) \to 0$, luego $\lim_{\mu(E)\to 0} \int_E |h_n| \, d\mu = 0$ uniformemente en $n \in \mathbb{N}$.

Teniendo en cuenta esto, es fácil probar que para cada $A \in \Sigma^*$ se cumple $\lim_n \int_A | h_n - \langle x^*,f\rangle | \, d\mu = 0$. resultando que $\langle x^*,f\rangle_{|A}$ y $h_{|A}$ coinciden en casi todo punto del conjunto $A \in \Sigma^*$.

Sea $S_o \in \Sigma$ un conjunto de medida σ-finita, fuera del cual se anulan h y cada h_n . Entonces $\langle x^*,f\rangle$, por ser limite en casi todo punto de una subsucesión de h_n, es esencialmente nula fuera de S_o, y esto implica que las funciones $\langle x^*,f\rangle$ y h coinciden en casi todo punto. Por lo tanto se cumple $\lim_n \int_E \langle x^*,f_n\rangle \, d\mu = \int_E \langle x^*,f\rangle \, d\mu$. De la convergencia débil de $\int_E f_n \, d\mu$ se tiene la integrabilidad de Pettis de f y que $\int_E f \, d\mu$ es el limite debil de $\int_E f_n \, d\mu$ para cada $E \in \Sigma$. #

Los siguientes resultados se refieren al problema de determinar cuando la integrabilidad débil de una función f sobre una familia $\Lambda \subset \Sigma$ implican la integrabilidad de Pettis de f.

Recordemos, en primer lugar, que la p-semivariavión $\|m\|_p$ de una medida vectorial $m : \Sigma \to X$, respecto a $p \in P(X)$, se define para cada $E \in \Sigma$, por

$$\|m\|_p(E) = \sup \left\{ |x^* \circ m| (E) \ : x^* \in V_p^\circ \right\}$$

2.6 <u>DEFINICION</u> Sea $m : \Sigma \to X$ una medida vectorial σ-aditiva, y sea $\Lambda \subset \Sigma$ un retículo de conjuntos (es decir, una familia cerrada para uniones e intersecciones finitas conteniendo al vacio). Si para cada $p \in P(X)$, cada $\varepsilon > 0$ y cada $E \in \Sigma$, existe un $H \in \Lambda$, $H \subset E$ con $\|m\|_p(E-H) < \varepsilon$, se dice que m es Λ-regular.

Es inmediato, en este caso, que $m(E)$ es el limite en la topología de X, de la red $\{m(H) : E \supset H \in \Lambda\}$.

2.7 <u>LEMA</u> *Sea* $m : \Sigma \to X$ *una medida vectorial* σ*-aditiva tal que* $x^* \circ m$ *es* Λ*-regular para cada* $x^* \in X^*$. *Entonces* m *es* Λ*-regular.*

<u>Demostración</u> .- Se obtiene de forma similar a la del teorema I.2.4 de Diestel-Uhl [1977] . Razonaremos por reducción al absurdo. Supongamos que existen $\varepsilon > 0$, $E \in \Sigma$ y $p \in P(X)$ tales que $\|m\|_p(E-H) > \varepsilon$ para cada $H \in \Lambda$ $H \subset E$. Se deduce entonces la existencia de una sucesión disjunta H_n en Λ y una sucesión x_n^* en V_p° tales que $|x_n^* \circ m|(E-K_n) > \varepsilon$ y $|x_n^* \circ m|(E-K_{n+1}) < \varepsilon/2$, donde $K_n = H_1 \cup H_2 \cup \ldots \cup H_n$. Como los H_n son disjuntos, y la σ-aditividad de m implica que la familia $\{|x_o^* m| : x^* \in V_p^\circ\}$ es uniformemente σ-aditiva, se obtiene que $\lim_n |x^* \circ m|(H_n) = 0$ uniformemente en $x^* \in V_p^\circ$, es decir $\lim_n \|m\|_p(H_n) = 0$. Entonces

$$|x_n^* \circ m|(E-K_n) < |x_n^* \circ m|(E-K_{n+1}) + |x_n^* \circ m|(H_{n+1}) < \varepsilon/2 + \|m\|_p(H_{n+1}) < \varepsilon$$

para n suficentemente grande, llegando a una contradicción. #

Este lema nos proporciona las siguientes propiedades de la integral indefinida m_f asociada a $f \in P(\mu,X)$.

2.8 <u>COROLARIO</u> *Sea* $f \in P(\mu,X)$. *(a) Si* μ *es* Λ*-regular, entonces* m_f *es* Λ*-regular, y así* $m_f(E) = \lim \{ m_f(H) : E \supset H \in \Lambda \}$ *para cada* $E \in \Sigma$ *; (b)* m_f *es siempre* Σ^**-regular* .

<u>Demostración</u> .- (a) Resulta del lema anterior, pues si μ es Λ-regular las medidas $x^* \circ m_f(.) = \int_{(.)} \langle x^*,f\rangle \, d\mu$, también son Λ-regulares, por ser continuas con respecto a μ . (b) Resulta del mismo lema, observando que $x^* \circ m_f$ es Σ^*-regular para cada $x^* \in X^*$. #

2.9 <u>DEFINICION</u> Diremos que una función escalarmente medible $f:\Omega \to X$ está μ-dominada, si para cada $p \in P(X)$ existe una función $g_p \in \mathcal{L}^1(\mu)$ tal que, si $x^* \in V_p^\circ$ entonces $|\langle x^*,f\rangle| \leqslant g_p$ en casi todo punto de Ω , respecto de μ (el eventual conjunto nulo depende de x^*).

Evidentemente toda función μ-dominada es escalarmente integrable . Utilizando el hecho de que $L^1(\mu)$ con el orden natural ($f \leqslant g$ si y sólo si $f(s) \leqslant g(s)$ en casi todo punto) tiene estructura de espacio vectorial reticulado completo (Schaefer [1971]), resulta que si f está μ-dominada, para cada $p \in P(X)$ existe una función $f_p \in \mathcal{L}^1(\mu)$ tal que : (a) para cada $x^* \in V_p^\circ$ $|\langle x^*,f\rangle| \leqslant f_p$ en casi todo punto; (b) $f_p(s) \leqslant p(f(s))$ en casi todo punto ; y (c) si $g_p \in \mathcal{L}^1(\mu)$ cumple (a) y (b) entonces $f_p \leqslant g_p$ en casi todo punto .

Si $\Sigma_o \subset \Sigma$ es una sub-σ-álgebra y f es escalarmente medible con respecto a Σ_o y μ-dominada, se obtiene que $f_p \in \mathcal{L}^1(\mu_o)$,donde μ_o es la restricción de μ a Σ_o, y por lo tanto f es μ_o-dominada.

Un caso particular de funciones μ-dominadas son las funciones X^*-esencialmente acotadas. Una función escalarmente medible $f:\Omega \to X$ se dice X^*-esencialmente acotada si existe un subconjunto acotado $B \subset X$, tal que para cada $x^* \in B^\circ$ $|\langle x^*,f(s)\rangle| \leqslant 1$ para casi todo s. Estas funciones son μ -dominadas para cualquier topología sobre X que sea compatible con el par dual $\langle X,X^*\rangle$. Estas funciones seran untilizadas especialmente en el epigrafe dedicado al estudio del "lifting" de funciones vector-valuadas. La introducción de este concepto se debe a que si $f:\Omega \to X$ es una función escalarmente medible y acotada, y $\lambda = \mu f^{-1}$, entonces la identidad $i: X \to X$ esta X^*-esencialmente acotada con respecto de λ.

2.10 TEOREMA *Sea* X *un e.l.c. completo, y* (Ω,Σ,μ) *un espacio de medida* Λ*-regular. Si* $f:\Omega \to X$ *es una función escalarmente medible* μ*-dominada, debilmente integrable sobre* Λ *, entonces* f *es integrable Pettis y* $m_f(\Sigma) \subset \overline{m_f(\Lambda)}$.

De la noción de Λ-regularidad de μ sólo emplearemos el que $\mu(A) = \sup\{\mu(H) : A \supset H \in \Lambda\}$ para cada $A \in \Sigma^*$. Como veremos en la demostración, si μ es finita es suficente suponer que X es secuencial.-completo. También hay que destacar el hecho de que si f es X^*-esencialmente acotada, las hipotesis de completitud basta pedirlas para la topología de Mackey de X, pues f es μ-dominada para esta topología.

Demostración .- Supongamos en primer lugar que μ es finita y X es secuencialmente completo. Si $B \in \Sigma$, se elige una sucesión $H_n \in \Lambda$ tales que $H_n \subset B$ y $\mu(B-H_n) < 1/n$. Se considera la sucesión $x_n = m_f(H_n)$.

Observando que para cada $p \in P(X)$ se cumple :

$$p(x_n - x_m) = \sup\{|\langle x^*, x_n - x_m\rangle| : x^* \in V_p^\circ\} < \sup\{|\int_{H_n \Delta H_m} \langle x^*, f\rangle d\mu| : x^* \in V_p^\circ\} <$$
$$< \int_{H_n \Delta H_m} f_p \, d\mu \quad ,$$

donde $f_p \in \mathcal{L}^1(\mu)$ es la función dada por la condición de dominación de f . Se obtiene que x_n es una sucesión de Cauchy en X. Si x_B es el limite de esta sucesión, como para cada $x^* \in X^*$ se cumple

$$|\langle x^*, x_n\rangle - \int_B \langle x^*, f\rangle d\mu| \leqslant \int_{B-H_n} |\langle x^*, f\rangle| d\mu \to 0 \ ,$$

se tiene que $x_B = \int_B f \, d\mu$.

Supongamos ahora que μ es infinita. Dado $B \in \Sigma$, el conjunto Λ_B formado por los $H \in \Lambda$ contenidos en B está dirigido por inclusión . Consideremos la red $x_H = m_f(H)$ $H \in \Lambda_B$. Vamos a ver que esta red es de Cauchy, y por el mismo razonamiento que arriba tendremos que su limite $x_B = \int_B f \, d\mu$.

Sea $p \in P(X)$ y f_p la función dada por la dominación de f. Dado $\varepsilon > 0$, existe un $A \in \Sigma^*$ tal que $\int_{\Omega - A} f_p \, d\mu < \varepsilon/2$. Por la Λ-regularidad de μ y la continuidad absoluta de la integral indefinida, existe $H_\varepsilon \in \Lambda_B$ tal que $H_\varepsilon \subset B \cap A$ y si $C = (B \cap A) - H_\varepsilon$ $\int_C f_p \, d\mu < \varepsilon/2$. Si H_1 y H_2 son elementos de Λ_B tales que $H_\varepsilon \subset H_1$ y $H_\varepsilon \subset H_2$, se tiene

$$p(x_{H_1} - x_{H_2}) < \int_{H_1 \Delta H_2} f_p \, d\mu < \int_{B - H_\varepsilon} f_p \, d\mu < \int_{\Omega - A} f_p \, d\mu + \int_C f_p \, d\mu .$$

Con lo que queda probado que la red x_H, $H \in \Lambda_B$, es de Cauchy en X . #

La siguiente proposición completa un resultado de Fremlin que puede verse en Musial [1980] , extendiendolo al caso de e.l.c. y medidas infinitas. Este resultado nos permitirá estudiar la integrabilidad de una función $f: \Omega \to X$, observando la integrabilidad de la identidad $i: X \to X$ con respecto a la medida imagen .

2.11 <u>PROPOSICION</u> *Sea X un e.l.c. casi-completo,* (Ω, Σ, μ) *un espacio de medida y* $\Sigma_o \subset \Sigma$ *una sub-σ-álgebra. Si* $f: \Omega \to X$ *es una función escalarmente* Σ_o*-medible integrable Pettis sobre* Σ_o*, entonces f es integrable Pettis sobre* Σ *y se cumple* $m_f(\Sigma) \subset \overline{co}\,(m_f(\Sigma_o))$.

<u>Demostración</u> .- Supongamos en primer lugar que $\mu(\Omega) < +\infty$, y sea μ_o la restricción de μ a Σ_o . Dado $F \in \Sigma$ definimos sobre Σ_o la medida finita y μ_o-continua $\mu_F(A) = \mu(A \cap F)$. Aplicando el teorema de Radon-Nikodym encontramos una función $0 \leq g_F \leq 1$ μ_o-integrable, tal que $\mu_F(A) = \int_A g_F \, d\mu_o = \int_A g_F \, d\mu$ para cada $A \in \Sigma_o$.

Sea s_n una sucesión de funciones Σ_o-simples $0 \leq s_n \leq g_F$ que converge uniformemente hacia g_F, y sea m_f la integral indefinida de f sobre Σ_o. Sea $x_n = \int_\Omega s_n \, d\, m_f$. Un razonamiento análogo al que se hace en la demostración de teorema VI.1.1 de Diestel-Uhl [1977] permite probar que $x_n \in co(m_f(\Sigma_o))$

Dada $p \in P(X)$, se cumple :

$$p(x_n - x_m) \leq \sup \left\{ \int_\Omega | s_n - s_m | \, d\, |\langle x^*, m_f \rangle| \; : \; x^* \in V_p^\circ \right\} \leq$$

$$\leq \| s_n - s_m \|_\infty \sup \left\{ \int_\Omega |\langle x^*, f \rangle| \, d\mu_o : x^* \in V_p^\circ \right\} .$$

Teniendo en cuenta el teorema 2.2 (a), se tiene que $p(x_n - x_m)$ tiende a cero cuando n y m tienden a infinito. Por consiguiente, x_n es una sucesión de Cauchy en un espacio casi-completo. Sea x_F el limite de esta sucesión, $x_F \in \overline{co}\,(m_f(\Sigma_o))$. Aplicando el teorema de la convergencia dominada se tiene

$$<x^*,x_F> = \lim_n <x^*,x_n> = \lim_n \int_\Omega s_n \,.<x^*, f> \, d\mu_o =$$
$$= \int_\Omega g_F \,.<x^*,f> d\mu_o = \int_\Omega <x^*,f> d\mu_F = \int_F <x^*,f> d\mu$$

y por lo tanto $x_F = \int_F f\, d\mu$.

Supongamos ahora que $\mu(\Omega) = +\infty$. Para cada $E \in \Sigma_o$ con $\mu(E) < +\infty$ definimos μ_E sobre Σ por $\mu_E(A) = \mu(E \cap A)$. Si f es μ -integrable Pettis sobre Σ_o, también es μ_E-integrable Pettis sobre Σ_o y por lo que se acaba de probar es μ_E-integrable Pettis sobre Σ , cumpliendo que para cada $A \in \Sigma$ $\int_A f\, d\mu_E = \int_{A\cap E} f\, d\mu \in \overline{co}\,(m_f(\Sigma_o))$.

Sea $A \in \Sigma$, y $x_{A\cap E} = \int_{A\cap E} f\, d\mu$ la red obtenida cuando E recorre la familia Σ_o^* . Esta red es débilmente de Cauchy, pues para cada $x^* \in X^*$ $<x^*,f>$ se anula fuera de un conjunto de medida σ-finita, lo que implica que $<x^*,x_{A\cap E}>$ converge hacia $\int_A <x^*,f> d\mu$. Como $m_f(\Sigma_o)$ es un conjunto débilmente relativamente compacto, también lo es $\overline{co}\,(m_f(\Sigma_o))$. Por lo tanto la red $x_{A\cap E}$ converge débilmente hacia un elemento $x_A \in \overline{co}\,(m_f(\Sigma_o))$, y evidentemente $x_A = \int_A f\, d\mu$. #

Si en el teorema anterior el espacio de medida es finito, entonces basta pedir que X sea secuencialmente completo.

Como consecuencia de estos dos ultimos resultados se tiene la siguiente

2.12 PROPOSICION *Sea* S *un espacio topológico,* (S, Σ, μ) *un espacio de medida finito con* $B_a(S) \subset \Sigma$ *, y* X *un e.l.c. secuencialmente completo . Si* $f: S \to X$ *es una función escalarmente medible con respecto a* $B_a(S)$ μ*-dominada, entonces son equivalentes : (a)* $f \in P(\mu,X)$ *; (b)* $\alpha\,.\,f$ *es débilmente integrable para cada* $\alpha \in C_b(S)$*; y (c)* f *es débilmente integrable sobre* $Z(S)$

Demostración .- (a) $\Longrightarrow$ (b) Es una consecuencia del teorema 2.2 (d).

(b) $\Longrightarrow$ (c) Dado $Z \in \mathcal{Z}(S)$ existe una función $g \in C_b(S)$, $0 \leqslant g \leqslant 1$ tal que $Z = \{ s \in S : g(s) = 1 \}$. Evidentemente la sucesión g^n es decreciente y converge hacia la función caracteristica de Z. Si $x_n = \int_S g^n \, d\mu$, esta sucesión es de Cauchy en X, pues si $p \in P(X)$ es facil comprobar que para $n \geqslant m$ se cumple

$$p(x_n - x_m) \leqslant \int_S | g^m - g^n | \, f_p \, d\mu \leqslant \int_S | g^m - \chi_Z | \, f_p \, d\mu + \int_S | g^n - \chi_Z | \, f_p \, d\mu ,$$

este ultimo termino tiende a cero cuando n y m tienden a infinito, en virtud del teorema de la convergencía dominada. Aplicando otra vez este teorema se obtiene que si $x_Z = \lim_n x_n$, entonces $x_Z = \int_Z f \, d\mu$.

(c) $\Longrightarrow$ (a) Como la medida μ restringida a $B_a(S)$ es σ-aditiva, también es $\mathcal{Z}(S)$-regular. Por el teorema 2.10 sabemos que f es integrable Pettis sobre $B_a(S)$, y por la proposición 2.11 tenemos que f es integrable Pettis sobre Σ . #

Si la medida μ se puede extender a una medida $\bar{\mu}$ definida sobre $B_o(S)$, en las condiciones de la proposición (a), (b) y (c) equivalen a que $f \in P(\bar{\mu}, X)$.

Con las condiciones iniciales de la proposición anterior se tienen los siguientes

2.13 <u>COROLARIO</u> *Sea* X *un e.l.c. secuencialmente completo y* (S, Σ, μ) *un espacio de medida finito como en 2.12. Son equivalentes : (a) toda función* $f : S \to X$ *débilmente continua* μ*-dominada es débilmente integrable ; y (b) toda función* $f : S \to X$ *débilmente continua* μ*-dominada es integrable Pettis.* #

Si en el corolario anterior se sustituye el que las funciones f sean μ-dominadas por que sean acotadas, entonces es suficiente pedir que el espacio X sea secuencialmente completo para la topología de Mackey $\tau(X,X^*)$.

3 DISTINTAS NOCIONES DE MEDIBILIDAD

Para evitar los inconvenientes que presenta la integral de Pettis, y con la intención de obtener, en el caso localmente convexo, una noción de integral que desempeñe un papel análogo al de la integral de Bochner en el caso de los espacios de Banach, diversos autores (Sion [1973] ,Thomas [1975], Delange-Blondia [1978], Labuda[1978],Rodriguez-Salinas [1979]) consideran distintas clases de funciones vectoriales medibles. A continuación hacemos un breve repaso a algunas de estas nociones de medibilidad, y de la relación entre ellas. Nuestro proposito es el de conocer el caracter de medibilidad que poseen en algunos casos las derivadas débiles de Radon-Nikodým de algunas medidas vectoriales valoradas en determinados tipos de e.l.c. que estudiaremos en el ultimo epígrafe.

Sobre el e.l.c. X hay cuatro σ-álgebras de particular interés, a saber $B_a(X_w)$, $B_o(X_w)$, $B_a(X)$ y $B_o(X)$. (evidentemente $B_a(X_w) \subset B_o(X)$ y las otras dos σ-álgebras estan comprendidas entre ambas). Por lo tanto, cabe distinguir cuatro nociones de medibilidad, en terminos de antimagenes para funciones $f : \Omega \to X$. Para distinguirlas usaremos la siguiente terminología, si $\mathcal{A}$ es una de las cuatro σ-álgebras mencionadas, diremos que f es $\mathcal{A}$-medible cuando $f^{-1}(A) \in \mathcal{A}$ para cada $A \in \Sigma$. La $B_a(X_w)$-medibilidad equivale a la medibilidad escalar, segun se indico en el primer epigrafe.

Salvo mención expresa de lo contrario, en este epigrafe (Ω,Σ,μ) será siempre un espacio de medida finito y completo.

3.1 <u>DEFINICION</u> Una función $f : \Omega \to X$ se dice fuertemente medible, si existe una sucesión de funciones simples $s_n : \Omega \to X$ tal que $f(s) = \lim_n s_n(s)$ para casi todo $s \in \Omega$. Si X es un Banach, estas son las funciones medibles Bochner.

Una función $f: \Omega \to X$ se dice medible por seminormas (Delange--Blondia) si para cada seminorma continua $p \in P(X)$ existe una sucesión de funciones simples $s_n^p : \Omega \to X$ tal que $\lim_n p(f(s) - s_n^p(s)) = 0$ para casi todo $s \in \Omega$. Equivalentemente, si para cada entorno absolutamente convexo y cerrado U de cero en X, la función $\pi_U \circ f$ es fuertemente medible, donde π_U es la proyección canonica de X en el espacio de Banach asociado a U, X_U .

Una función $f:\Omega \to X$ se dice descomponible, si para cada entorno de cero U en X, existe un conjunto $N \in \Sigma$ con $(N) = 0$ y una sucesión $A_n \in \Sigma$ tal que $\Omega = N \cup (\bigcup_n A_n)$ y $f(s_1) - f(s_2) \in U$ para cada par $s_1, s_2 \in A_n$, y cada $n \in \mathbb{N}$.

Delange-Blondia [1978] han probado que las nociones de medibilidad por seminormas y descomponibilidad son equivalentes. También han probado que las funciones $B_o(X)$-medibles y esencialmente valoradas en un subespacio separable son descomponibles, y por lo tanto medibles por seminormas. Otro resultado que han probado es que si X es un limite inductivo estricto de espacios de Frechet (LF-estricto) entonces las nociones de medibilidad por seminormas y medibilidad fuerte también son equivalentes.

Una función $f : \Omega \to X$ se dice μ -medible (Rodriguez-Salinas[1979]) si para cada $\varepsilon > 0$ existe un $K_\varepsilon \in \Sigma$ con $\mu(\Omega - K_\varepsilon) < \varepsilon$ tal que $f.\chi_K$ es el limite uniforme de una red de funciones simples. Y se dice que f es $\bar{\mu}$-medible si es el limite uniforme de una red de funciones μ-medibles.

Rodriguez-Salinas [1979] (prop.33) prueba que una función es $\bar{\mu}$-medible si y sólo si es medible por seminormas. Y en el caso en el que X sea un LF-estricto, J.L. de Maria [1981] ha probado que los conceptos de μ-medibilidad y $\bar{\mu}$-medibilidad son equivalentes. También ha probado que si X es un espacio polar-semireflexivo, en particular si X es casi-completo, entonces se cumple la siguiente cadena de implicaciones:

$$f \ \mu\text{-medible} \Rightarrow f \text{ es } B_a(X)\text{-medible y } \mu f^{-1} \in \mathcal{M}_t(X) \Rightarrow f \text{ es } \bar{\mu}\text{-medible}$$

La segunda implicación nos induce a dar la siguiente definición

Diremos que una función $f : \Omega \to X$ es α-medible (con $\alpha = \tau$, t), si f es $B_o(X)$-medible y μf^{-1} definida sobre $B_o(X)$, está en $M_\alpha(X)$.

Si se considera X dotado de su topología débil obtenemos la noción de función debilmente τ-medible.

Si X_w es hereditariamente Lindeloff entonces $B_o(X_w) = B_a(X_w)$. En efecto, si $G \in \mathcal{G}(X_w)$, $G = \bigcup\{ G_\alpha : \alpha \in A\}$, donde cada G_α es de la forma $G_\alpha = \bigcap \{ x_i^{*-1}(A_i) : i \in I_\alpha \}$ con I_α finito, A_i abierto en $\mathbb{R}$ y $x_i^* \in X^*$. Así, cada $G_\alpha \in B_a(X_w)$. Como G es Lindeloff, existe un $B \subset A$ numerable, tal que $G = \bigcup\{ G_\alpha : \alpha \in B\}$, de donde $G \in B_a(X_w)$. Teniendo en cuenta que los espacios Lindeloff son compactos en medida, resulta que si X_w es hereditariamente Lindeloff, cada función $f : \Omega \to X$ escalarmente medible es débilmente τ-medible.

3.2 <u>TEOREMA</u> *Dada* $f: \Omega \to X$, *consideremos las siguientes propiedades :* *(a)* f *es* τ*-medible ; (b)* f *es* $B_a(X)$*-medible y* $\mu f^{-1} \in \mathcal{M}_\tau(X)$ *;* *(c)* f *es débilmente* τ*-medible ; y (d)* f *es medible por seminormas .* *Entonces se cumple (a)* $\Rightarrow$ *(b)* $\Rightarrow$ *(d) y (a)* $\Rightarrow$ *(c)* $\Rightarrow$ *(d) . Si además* X *es un LF-estricto, entonces las cuatro condiciones son equivalentes, pudiendo sustituir* τ*-medibilidad por t-medibilidad.*

<u>Demostración</u> .- Las implicaciones (a) $\to$ (b) y (a) $\to$ (c) son inmediatas.

(b) $\to$ (d). Para cada entorno absolutamente convexo de cero U en X , la función $f_U = \pi_U \circ f$ es $B_a(X_U)$-medible, y $\mu f_U^{-1} \in \mathcal{M}_\tau(X_U)$. Como X_U es metrizable, un resultado de Varadarajan [1965] prueba que el soporte T de μf_U^{-1} es separable y $\mu f_U^{-1}(X_U - T) = 0$, de donde se obtiene facilmente que f_U está esencialmente valorada en un subespacio separable. Por el teorema de medibilidad de Pettis (Diestel-Uhl [1977] II.1.2) se tiene que f_U es fuertemente medible.

(c) $\Rightarrow$ (d). Si f es $B_o(X_w)$-medible y $\mu f^{-1} \in M_\tau(X_w)$ entonces $f_U = \pi_U \circ f$ es $B_o((X_U)_w)$-medible y $\mu f_U^{-1} \in M_\tau((X_U)_w)$. Un teorema de Tortrat (vease Wheeler[1983]) asegura que μf_U^{-1} está soportada por un subespacio cerrado y separable $Y \subset X_U$, y que en consecuencia $M_\tau((X_U)_w) = M_t((X_U)_w)$. Sea $S_o = f_U^{-1}(Y)$ $S_o \in \Sigma$. Como $\mu(S_o) = \mu(\Omega)$ y $f_U(S_o) \subset Y$, resulta que f_U esta esencialmente valorada en un subespacio separable, y consecuentemente es fuertemente medible.

Si X es un LF-estricto, y f es medible por seminormas, los resultados de Delange-Blondia [1978] aseguran que f es $B_o(X)$-medible y está esencialmente valorada en un subespacio cerrado y separable $Y \subset X$. Sea X_n la sucesión de espacios de Frechet de la que es limite inductivo el espacio X. La medida de Borel μf^{-1} induce en cada X_n una medida de Borel ν_n soportada por el subespacio separable $Y \cap X_n$. Estas medidas son t-aditivas, pues los espacios $Y \cap X_n$ son espacios Polacos (metrizables, completos y separables), y en estos espacios toda medida de Borel regular con respecto a cerrados es t-aditiva, (en otros terminos, estos son espacios de Radon (vease Schwartz [1973])). Por lo tanto, aproximando la medida de cada conjunto de Borel en X por la de sus intersecciones con los espacios X_n, y estas por las medidas de sus subconjuntos compactos, se concluye que $\mu f^{-1} \in M_t(X)$. Con lo que tenemos probado que (d) implica (a). #

Es muy facil observar que el conjunto de las funciones medibles por seminormas valoradas en X, es un espacio vectorial. Así, el teorema anterior asegura que si X es un LF-estricto, el conjunto de las funciones τ-medibles también tiene estructura de espacio vectorial, en general, si X no es un LF, no está claro que la suma de dos funciones τ-medibles sea una función τ-medible.

Seguidamente estudiamos la noción de función casi-continua, desarrollada por Fremlin [1981] , y su relación con las nociones de medibilidad expuestas hasta este momento. (S, Σ, μ) será un espacio de medida completo, no necesariamente finito, donde Σ contiene a los subconjuntos de Borel del espacio topológico S.

3.3 DEFINICION Una función $f: S \to X$ se dice que es casi continua, si es escalarmente medible y verifica que para cada $E \in \Sigma$ y cada $\alpha < \mu(E)$ existe

$F \in \Sigma$, $F \subset E$, tal que $\mu(F) > \alpha$ y la restricción de f a F, $f_{|F}$, es continua. Si se considera en X la topología débil, se tiene la noción de función débilmente casi continua.

Cuando el espacio de medida completo (S , Σ, μ) es localmente determinado (vease Fremlin [1981]), en particular si μ es finita, toda función casi continua es $B_o(X)$-medible. Schwartz [1973] prueba que si μ es una medida regular con respecto a cerrados de medida finita, y X es un espacio de Suslin (la imagen continua de un espacio metrizable separable y completo), entonces toda función $B_o(X)$-medible es casi continua. Fremlin [1981] prueba que si X es metrizable y (S, Σ , μ) es un espacio de medida de Radon, una función $f: S \to X$ es $B_o(X)$-medible si y sólo si es casi continua.

3.4 <u>LEMA</u> *Sea* (S, Σ, μ) *el espacio de medida obtenido al completar una medida de Borel* τ*-aditiva, y* $f: S \to X$ *una función casi continua (resp. débilmente casi continua. Entonces* f *es* τ*-medible (resp. débilmente* τ*-medible).*

<u>Demostración</u> .- Como $\mu(S) < + \infty$, las funciones casi continuas son $B_o(X)$--medibles. Veamos que $\mu f^{-1} \in M_\tau(X)$. Sea $F_j \in \mathcal{F}(X)$ una familia de cerrados filtrante decreciente hacia el vacio, tenemos que probar que $\mu(f^{-1}(F_j)) \to 0$. En efecto, dado $\varepsilon > 0$ podemos elegir un cerrado F, $F \subset S$, tal que $\mu(S-F) < \varepsilon/2$ y $f_{|F}$ es continua. Así, $f^{-1}(F_j) \cap F$ es una familia de cerrados en S, filtrante decreciente hacia el vacio. Por ser μ la compleción de una medida τ-aditiva, $\mu(f^{-1}(F_j) \cap F) \to 0$. Por lo tanto, existe un j_o tal que si $j \geq j_o$, entonces $\mu(f^{-1}(F_j) \cap F) < \varepsilon/2$, y en consecuencia $\mu(f^{-1}(F_j)) < \varepsilon$. Con lo que se tiene probado que $\mu(f^{-1}(F_j)) \to 0$. #

El límite uniforme (ó casi uniforme) de una sucesión de funciones casi continuas es casi continuo. Por tanto, en las condiciones del lema anterior, toda función $f: S \to X$ μ-medible es casi continua . El lema 3.4 y el teorema 3.2 prueban que cada función casi continua es medible por seminormas. Así, en este caso, la noción de función casi continua es intermedia entre la de función μ-medible y la de función $\bar{\mu}$-medible dadas por Rodriguez-Salinas. Si además X es un LF-estricto, obtenemos la siguiente relación de equivalencias :

3.5 <u>TEOREMA</u> *Sea* X *un espacio* *LF-estricto,* (S, Σ, μ) *el espacio de medida obtenido al completar una medida de Borel* τ*-aditiva, y* $f:S \to X$ *. Son equivalentes : (a)* f *es casi continua ; (b)* f *es dèbilmente casi continua ; (c)* f *es* α*-medible (con* $\alpha = t, \tau$*) ; (d)* f *es dèbilmente* α*-medible* ($\alpha = t, \tau$) *; y (e)* f *es fuertemente medible.*

Si (S, Σ, μ) *es la compleción de una medida de Borel t-aditiva, las condicones anteriores equivalen a (f)* f *es* $B_o(X)$*-medible.*

<u>Demostración</u> .- (a) $\Rightarrow$ (b) es trivial. (b) $\Rightarrow$ (d) es el lema 3.4 . En el teorema 3.2 están expuestas (c) $\Leftrightarrow$ (d) $\Leftrightarrow$ (e).

(e) $\Rightarrow$ (a) Si $f:S \to X$ es fuertemente medible, toma casi todos sus valores en un subespacio cerrado y separable Y de X. Sea X_n la sucesión de espacios de Frechet que define a X como LF-estricto. Para cada $\varepsilon > 0$ existe un conjunto $B \in \Sigma$ tal que $\mu(S-B) < \varepsilon/2$ y $f(B) \subset Y \cap X_n$ para algun X_n. La función $f_{|B}$ es $B_o(Y \cap X_n)$-medible con respecto a la σ-álagebra traza $\Sigma_B = \{ A \cap B : A \in \Sigma \}$, y está valorada en $Y \cap X_n$, que es un espacio metrizable, separable y completo. Commo la restricción de μ a Σ_B es regular con respecto a cerrados, el resultado de Schwartz citado anteriormente, nos garantiza que $f_{|B}$ es casi continua. Por lo tanto existe $B_1 \subset B$, tal que $\mu(B-B_1) < \varepsilon/2$ y $f_{|B_1}$ es continua. Observando que $\mu(S-B_1) < \varepsilon$ se obtiene la casi continuidad de f.

Es evidente que cualquiera de las condiciones (a)...(e) implica la medibilidad de Borel de f. Suponiendo que μ es la compleción de una medida de Borel t-aditiva, se tiene que μ es una medida de Radon, y el teorema antes citado de Fremlin, nos asegura que las funciones $f_n = f.\ \chi_{f^{-1}(X_n)}$ son casi-continuas si f es $B_o(X)$-medible. Como $\mu(S-f^{-1}(X_n)) \to 0$, es muy fácil comprobar al casi continuidad de f. Con lo que se tiene (f) $\Rightarrow$ (a). #

Nuestro interés por la noción de función casi continua reside en que las funciones casi continuas forman un espacio vectorial, y en que vamos a obtener condiciones que garanticen la integrabilidad de Pettis de estas funciones.

Para terminar este epígrafe damos algunos resultados de localización referidos a funciones debilmente τ-medibles y debilmente casi continuas.

3.6 TEOREMA *Sea* (Ω, Σ, μ) *un espacio de medida finito, y* $f : \Omega \to X$ *una función debilmente* τ*-medible. Si* $B \subset X$ *es un subconjunto cerrado convexo tal que para cada semiespacio* $H = \{x : \langle x, x^* \rangle \leq \alpha\}$ $(x^* \in X^*)$ *que contienes a* B *se cumple que* f *toma casi todos sus valores en* H, *entonces* f *toma casi todos sus valores en* B.

Demostración .- Sea $\lambda = \mu f^{-1} \in M_\tau(X_w)$. De la hipótesis se deduce que si $B \subset H$, entonces $sop(\lambda) \subset H$. Asi se tiene que $sop(\lambda) \subset \bigcap\{H : B \subset H\}$, B coincide con esta intersección, y como es debilmente cerrado y f se supone $B_o(X_w)$-medible $\Omega_o = f^{-1}(B) \in \Sigma$ y $\mu(\Omega_o) = \mu f^{-1}(sop(\lambda)) = \mu(\Omega)$. Con lo que tenemos probado que f toma casi todos sus valores en B. #

En virtud del lema 3.4 tenemos que este teorema de localización se puede aplicar a funciones casi continuas con respecto a medidas τ-aditivas.

Del teorema anterior resulta que si f y g son dos funciones escalarmente equivalentes, tales que $f-g$ es debilmente τ-medible, entonces f y g coinciden en casi todo punto. Esto ocurre en el caso particular de que f y g sean funciones casi continuas respecto de medidas τ-aditivas.

3.7 TEOREMA *Sea* (Ω, Σ, μ) *un espacio de medida finito, y* $f : \Omega \to X$ *una función debilmente* τ*-medible e integrable Pettis. Sea* $B \subset X$ *un subconjunto cerrado y convexo. Entonces se tiene que (a)* f *toma casi todos sus valores en* B *si y sólo si* $\overline{co}\left\{\frac{m_f(E)}{\mu(E)} : \mu(E) > 0\right\} = core(f, \Omega) \subset B$.
(b) Si además B *es un cono,* f *toma casi todos sus valores en* B *si y sólo si* $m_f(\Sigma) \subset B$.

Demostración .- (a) Sea $N \in \Sigma$ con $\mu(N)=0$ tal que $f(\Omega - N) \subset B$, entonces es facil observar que $\dfrac{m_f(E)}{\mu(E)} \in \overline{co}\ f(\Omega - N) \subset B$.

Reciprocamente, si B es tal que $(m_f(E) / \mu(E)) \in B$ para cada $E \in \Sigma$ con $\mu(E)>0$ y si $B \subset H$, con $H = \{ x : \langle x^*, x\rangle \leqslant \alpha \}$, se tiene que $\langle x^*, m_f(E)\rangle \leqslant \alpha.\mu(E)$, y $(1/\mu(E)) \int_E \langle x^*, f\rangle \, d\mu \leqslant \alpha$ para cada $E \in \Sigma$ con $\mu(E) > 0$. De donde resulta que $\langle x^*, f\rangle \leqslant \alpha$ para casi todo punto, o lo que es lo mismo, f toma casi todos sus valores en H . Aplicando el teorema 3.6 se obtiene que f toma casi todos sus valores en B.

(b) es una consecuencia inmediata de (a). #

En las condicones de este teorema 3.7 se tiene que si $X_o \subset X$ es un subespacio cerrado tal que $m_f(\Sigma) \subset X_o$, entonces f toma casi todos sus valores en X_o.

La prueba del teorema anterior se basa en el teorema de localización 3.6, por consiguiente también se cumple un teorema similar en las condiciones del lema de localización de Thomas (2.4).

3.8 PROPOSICION *Sea* (S, Σ, μ) *un espacio de medida obtenido al completar una medida de Borel* τ*-aditiva, y* $f \in P(\mu, X)$. *Si* f *es debilmente casi continua, entonces para cada* $p \in P(X)$ *se cumple*

$$|m_f|_p(E) = \int_E p \circ f \; d\mu \qquad \text{para cada} \quad E \in \Sigma$$

donde $|m_f|_p(E)$ *es la* p*-variación de la media* m_f *definida por* $|m_f|_p(E) = \sup\{ \sum_i p(m_f(A_i)) : (A_i)$ *varia en las particiones finitas de* E $\}$.

Demostración .- Teniendo en cuenta que en virtud del lema 3.4 y del teorema 3.2 f es medible por seminormas, para estas funciones el resultado está probado en Rodriguez-Salinas [1979] . Se puede dar otra prueba siguiendo la demostración de la proposición 6.5 de Thomas [1974]. En efecto, es facil comprobar que cada $p \in P(X)$, es una función semicontinua inferiormente sobre X_w, por lo tanto es $B_o(X_w)$-medible, y en consecuencia $p \circ f$ es medible .

Como $p(m_f(A)) = \sup \{ |\langle x^*, m_f(A)\rangle| : x^* \in V_p^\circ \} = \sup \{ |\int_A \langle x^*, f\rangle \, d\mu | : x^* \in V_p^\circ \}$

Se tiene que $p(m_f(A)) \leq \int_A p_\circ f \; d\mu$, y por la definición de la p-variación se tiene que $|m_f|_p(E) \leq \int_E p_\circ f \; d\mu$.

La prueba de la desigualdad reciproca basta hacerla en el cado $|m_f|_p(E) < +\infty$ Al igual que en Diestel-Uhl [1977] I.1.9, se comprueba que $|m_f|_p$ es una medida σ-aditiva, y como $|m_f|_p(A) = 0$ para cada conjunto μ-nulo A, es facil ver que la prueba se puede reducir al caso de que f sea una función debilmente continua.

Para conjunto finito $J \subset V_p^\circ$ sea $|x_J|\,(f) = \sup\{\, |<x^*, f>| : x^* \in V_p^\circ\}$. Ordenando los conjuntos finitos por inclusión, se obtiene una red de funciones continuas, creciente, que converge hacia $p_\circ f$. Como μ es τ-aditiva y $p_\circ f$ es semicontinua inferiormente, se tiene que

$$\int_E p_\circ f \; d\mu = \sup\{ \int_E |x_J|(f) \; d\mu \; : J \subset V_p^\circ \}$$

(vease Wheeler [1983] 6.3). Ahora es facil comprobar que $\int_E |x_J|(f) \; d\mu \leq |m_f|_p(E)$ para cada J finito contenido en V_p°, tomando supremos se concluye la prueba. #

En el estudio de integración de funciones valoradas en espacios de Suslin, Thomas [1975] y Labuda [1978] han observado que los conceptos de medibilidad fuerte, medibilidad Borel, y medibilidad escalar coinciden para medidas σ-finitas, y que en el caso de que μ sea una medida de Radon, las nociones anteriores coinciden con la casi continuidad y la casi continuidad debil.

Además de las condiciones expuestas para que medibilidad Borel implique casi continuidad, Fremlin [1981] da otras condiones suficientes supuesto que el espacio X es metrizable. Este es el caso si (S, Σ, μ) es un espacio de medida perfecto, regular con respecto a crrados de medida finita, y el cardinal de S es menor que el minimo cardinal real compacto. También ocurre si (S, Σ, μ) es un espacio de medida quasi-Radon (Fremlin [1974]) y S satisface el segundo axioma de numerabilidad. Si μ es la compleción de una medida τ-aditiva, entonces es quasi-Radon. Por consiguiente en cualquiera de los casos anteriores se cumple la equivalencia entre todos los estamentos de 3.5.

4 FUNCIONES P-MEDIBLES

Introducimos la noción de función P-medible para caracterizar las funciones integrables Pettis cuya integral indefinida tiene recorrido relativamente compacto. En general esto no ocurre, Fremlin-Talagrand [1979] construyen un espacio de medida patológico para el que dan un ejemplo de una función acotada, valorada en l^{∞} e integrable Pettis, tal que el recorrido de su integral indefinida no es relativamente compacto.

Un teorema de Stegall (vease Fremlin-Talagrand [1979] 3J) asegura que si (Ω,Σ,μ) es un espacio de medida perfecto y finito, toda función μ-integrable Pettis valorada en un espacio de Banach, tiene integral indefinida con recorrido relativamente compacto. Trabajando con la función identidad y con la medida imagen μf^{-1} resulta que si esta es perfecta y f es integrable Pettis, también se obtiene que el recorrido de su integral indefinida es relativamente compacto.

Es bién sabido que esta propiedad también la poseen las funciones que son escalarmente equivalentes a medibles Bochner. En particular, si X es un Banach Lindeloff para la topología débil,(por ejemplo si X está generado por un subconjunto debilmente compacto), entonces la integral indefinida de cada $f \in P(\mu,X)$ tiene recorrido relativamente compacto, ya que en este caso, toda función escalarmente medible es escalarmente equivalente a una función medible Bochner (vease 7.9).

Los resultados que siguen sobre funciones P-medibles no sólo permitirán extender los resultados anteriores al caso localmente convexo sino que en el de los Banach, se podran completar los ya citados.

En este epígrafe, salvo indicación expresa de lo contrario, las medidas no se suponen finitas.

4.1 DEFINICION Diremos que una función $f:\Omega \to X$ es P-medible si es escalarmente medible y para cada $p \in P(X)$ y cada sucesión $x_n^* \in V_p^\circ$, existe una subsucesión $x_{n(k)}^*$ tal que $<x_{n(k)}^*, f>$ converge en casi todo punto (μ) de Ω.

Si X es separable, todas las funciones escalarmente medibles son P-medibles, pues para cada $p \in P(X)$ V_p° es un conjunto debil* compacto metrizable.

4.2 PROPOSICION *Si* X *es un espacio de Banach tal que la bola unidad de su dual* $B_{X^*} = \{ x^* : \|x^*\| \leq 1 \}$ *es debil* secuencialmente compacta, entonces toda función* $f: \Omega \to X$ *escalarmente medible es P-medible.*

Demostración .- Es consecuencia inmediata de la definición. #

Si X es un espacio de Banach débilmente compactamente generado, entonces B_{X^*} es débil* secuencialmente compacta (es un resultado de Amir-Lindestrauss que puede encontrase en Diestel [1984]). Los espacios de Banach que son débil--Asplund (vease Diestel [1984] ó Bourgin [1983] para la definición) constituyen una clase de espacios que contine a los debilmente compactamente generados (Asplund [1968]), y que tienen la propiedad de que la bola unidad de su dual es débil* secuencialmente compacta (Stegall [1981]). Esta clase de espacios contiene a los espacios de Asplund y a los Banach con dual estrictamente convexo (Asplund [1968]). Otra clase de Banach cuyo dual tiene bola unidad débil* secuencialmente compacta , son los espacios con una norma suave ("smooth") (Hagler-Sullivan[1980]).

Diremos que la medida μf^{-1}, definida sobre $B_a(X_w)$, está soportada por un conjunto $M \subset X$, si para cada conjunto $A \in B_a(X_w)$ disjunto de M $\mu f^{-1}(A) = 0$.

Si X es un espacio de Banach y $f:\Omega \to X$ es una función escalarmente medible tal que μf^{-1} está soportada por un conjunto acotado $D \subset X$ con la propiedad GSP (Vease Stegall [1981]) entonces f es P-medible. En efecto, por el teorema 1.15 del trabajo de Stegall, existe un espacio de Asplund Z y un operador $T: Z \to X$, con $T(B_Z) \supset D$. Como la bola unidad del dual de un espacio de Asplund es débil* secuencialmente compacta, si x_n^* es una sucesión en B_{X^*}, la sucesión $z_n^* = T^*(x_n^*)$ posee una subsucesión $z_{n(k)}^*$ puntualmente convergente sobre Z. Entonces, la subsucesión $x_{n(k)}^*$ converge puntualmente sobre D. Como el conjunto $H \subset B_a(X_w)$ de los puntos donde la sucesión $x_{n(k)}^*$ no es convergente es disjunto con D, $\mu f^{-1}(H) = 0$, de donde resulta la P-medibilidad de f.

4.3 PROPOSICION *Si* X *es un espacio de Banach tal que su dual* X* *no contiene ningun subespacio isomorfo a* l^1 *entonces toda función escalarmente medible* $f : \Omega \to X$ *es P-medible.*

Demostración .- Es una consecuencia inmediata del teorema de Rosenthal [1974] que caracteriza a los espacios de Banach que no contienen a l^1 . Pues en este caso toda sucesión acotada $x_n^* \in X^*$ posee una subsucesión puntualmente convergente (débil* de Cauchy). #

Volviendo al caso general de que X sea un e.l.c., se comprueba facilmente que el conjunto de las funciones P-medibles valoradas en X es un espacio vectorial que contiene a las funciones simples. También es inmediato que dos funciones escalarmente equivalentes tienen el mismo caracter de P-medibilidad.

4.4 PROPOSICION *Si* $f_n : \Omega \to X$ *es una sucesión de funciones P-medibles que converge en casi todo punto* (μ) *hacia una función* $f: \Omega \to X$ *entonces* f *es P-medible.*

Demostración .- Dada una sucesión $x_m^* \in V_p^\circ$, es posible extraer mediante un proceso diagonal una subsucesión $x_{m(k)}^*$, y un conjunto μ-nulo H_o, tal que para cada $n \in \mathbb{N}$, la sucesión $\langle x_{m(k)}^*, f(s)\rangle$ converge cuando $t \notin H_o$. Fuera de otro conjunto μ-nulo H_1, la sucesión f_n converge puntualmente hacia f. Luego si $s \notin H_1$, $\langle x^*, f_n(s)\rangle$ converge hacia $\langle x^*, f(s)\rangle$ uniformemente en $x^* \in V_p^\circ$.
De donde resulta facilmente que $\langle x_{m(k)}^*, f(s)\rangle$ converge en cada $s \notin H = H_o \cap H_1$. #

De esta proposición se deduce que toda función fuertemente medible es P-medible, asi como toda función escalarmente equivalente a una fuertemente medible. El reciproco de esta conclusión no es cierto, pues existen funciones P-medibles valoradas en Banach que no son escalarmente equivalentes a funciones medibles Bochner, (vease ejemplo 8.10) por ejemplo la función identidad en $X = C([0,\omega_1])$, donde ω_1 es el primer ordinal no numerable, es P-medible con respecto a la probabilidad δ_{ω_1}, que es una medida perfecta (4.7), pero no es escalarmente equivalente a una función medible Bochner pues $\delta_{\omega_1} \notin \mathcal{M}_\tau(X_w)$ (vease 7.9).

4.5 PROPOSICION *Toda función* $f: \Omega \to X$ *medible por seminormas es P-medible.*

Demostración .- Razonaremos como en la proposición 4.4. Sea $p \in P(X)$. Por la definicón de función medible por seminormas existe una sucesión s_n^p de funciones simples tales que $p(f(s) - s_n^p(s)) \to 0$ para cada $s \notin A_o$, para algun conjunto μ-nulo A_o. Como cada s_n^p es P-medible, si $x_m^* \in V_p^\circ$, es posible encontrar una subsucesión $x_{m(k)}^*$, y un conjunto μ-nulo A_1, tal que $\langle x_{m(k)}^*, s_n^p(s)\rangle$ converge para cada $s \notin A_1$ y cada $n \in \mathbb{N}$. Se comprueba facilmente que la sucesión $\langle x_{m(k)}^*, f(s)\rangle$ es convergente para cada $s \notin A = A_o \cup A_1$. Con lo que se ha probado que f es P-medible. #

Si $f_j: \Omega \to X$ es una red de funciones P-medibles que converge uniformemente hacia $f: \Omega \to X$, entonces f tabién es P-medible. Basta observar que para cada $p \in P(X)$, es posible extraer una subsucesión $f_{j(n)}$ tal que $\langle x^*, f_{j(n)}(s)\rangle$ converge hacia $\langle x^*, f\ (s)\rangle$ uniformemente en $x^* \in V_p^\circ$ y en $s \in \Omega$, y razonar como en las pruebas de los teoremas anteriores. Como consecuencia de este resultado se obtiene otra prueba en el caso μ finita, de que las funciones μ-medibles y $\bar{\mu}$-medibles son P-medibles.

Si la medida μ es finita, y X es un LF-estricto con un conjunto denso de cardinal no real-medible (con peso de medida cero), el teorema III.10 de la tesis de J.L. de Maria [1981] asegura que toda función medible Borel es el limite es casi todo punto de una sucesión de funciones $\bar{\mu}$-medibles y por lo tanto es P-medible.

A continuación damos condiciones suficientes para que una función $f:\Omega \to X$ sea P-medible, en terminos de la medida imagen μf^{-1}.

Recordemos que una medida ν no necesariamente finita, definida sobre una σ-álgebra $\mathcal{A}$ se dice que es perfecta (Fremlin [1975]), si para cada función real g ν-medible, cada $F \subset \mathbb{R}$ con $g^{-1}(F) \in \mathcal{A}$ y cada $A \in \mathcal{A}^*$, existe un conjunto de Borel $E \subset \mathbb{R}$ tal que $\nu(A \cap g^{-1}(F)) = \nu(A \cap g^{-1}(E))$.

Fremlin [1975] (teorema 2F) ha probado que si $(T, \mathcal{A}, \nu)$ es un espacio de medida finito y perfecto, y $g_n : T \to \mathbb{R}$ es una sucesión de funciones medibles, entonces ocurre una de las condiciones siguientes : ó (g_n) posee una subsucesión convergente en casi todo punto; ó (g_n)posee una subsucesión con puntos de aglomeración (para la topología de la convergencia puntual t_p) que son funciones no medibles.

4.6 <u>PROPOSICION</u> *Sea* (Ω, Σ, μ) *un espacio de medida finito y* $f : \Omega \to X$ *una función escalarmente medible. Si la medida imagen* μf^{-1} *es una medida perfecta sobre* $B_a(X_w)$, *entonces f es P-medible.*

<u>Demostración</u> .- Es una consecuencia del teorema 2F de Fremlin [1975] . Como todos los puntos de aglomeración, en la topología de la convergencia puntual, de una sucesión $x_n^* \in V_p^\circ$ son medibles (pertenecen a V_p°), se puede asegurar que existe una subsucesión $x_{n(k)}^*$ que converge en casi todo punto con respecto a la medida μf^{-1}. Evidentemente $\langle x_{n(k)}^*, f \rangle$ converge en casi todo punto de Ω . Obteniendo la P-medibilidad de f. #

Si (Ω, Σ, μ) es un espacio de medida perfecto y $f:\Omega \to X$ es una función escalarmente medible, y por lo tanto $B_a(X_w)$-medible, la medida imagen μf^{-1} definida sobre $B_a(X_w)$ también es perfecta (Sazanov [1965]).Por lo que resulta:

4.7 <u>COROLARIO</u> *Si* (Ω, Σ, μ) *es un espacio de medida perfecto y finito, toda función* $f:\Omega \to X$ *escalarmente medible es P-medible.* #

4.8 PROPOSICION *Sea* X *un e.l.c. casicompleto. Si* $f: \Omega \to X$ *es una función escalarmente medible tal que* μf^{-1} *está soportada por un subespacio cerrado* $Y \subset X$ *que está generado por un subconjunto debilmente* σ*-compacto, entonces* f *es P-medible.*

Demostración .- Si Y es un subespacio cerrado de X generado por un subconjunto debilmente σ-compacto, es facil observar que Y es la adherencia de un conjunto debilmente σ-compacto. Un teorema de Pryce [1971] (pag.543) establece que $C(Y_w)$ es angélico para la topología t_p. Así, si x_n^* es una sucesión en V_p°, existirá una subsucesión $x_{n(k)}^*$ puntualmente convergente sobre Y, hacia algún $x^* \in V_p^*$. El conjunto E de los puntos donde $x_{n(k)}^*$ converge hacia x^*, es un conjunto de $B_a(X_w)$ que contiene a Y. Si suponemos que μf^{-1} está soportada por Y, se tiene que $\mu f^{-1}(X-E) = 0$ .Por lo tanto $x_{n(k)}^*$ converge hacia x^* en casi todo punto de X. De donde resulta la P-medibilidad de f . #

4.9 COROLARIO *Si* X *es un e.l.c. casi completo generado por un subconjunto debilmente* σ*-compacto, en particular si es debilmente compactamente generado, toda función* $f: \Omega \to X$ *escalarmente medible es P-medible.* #

Un espacio topológico se dice que es K-analítico, si es la imagen mediante una aplicación continua de un subconjunto $K_{\sigma\delta}$ de un espacio compacto. Esta clase de espacios fue definida por Choquet [1959]y viene a extender la de los espacios compactos. Si X es un espacio de Banach debilmente compactamente generado, Talagrand [1979] ha probado que dotado de su topología débil es K-analítico.

4.10 PROPOSICION *Si* $f: \Omega \to X$ *es una función escalarmente medible tal que* μf^{-1} *está soportada por un subespacio* $E \subset X$ *que es K-analítico para la topología débil, entonces* f *es P-medible* .

Demostración .- Sea $A = \{ x^*|_E : x^* \in V_p^\circ \}$, A es un conjunto de funciones medibles para la σ-álgebra traza $\Sigma \cap B_a(X_w) \subset B_a(E)$. Como E es completamente regular, A es un conjunto de funciones K-analíticas (vease Bourgain--Fremlin-Talagrand [1978] pag.862), y por el corolario 4F de este articulo A es relativamente secuencialmente compacto para la topología t_p. Por lo tanto, cada sucesión $x_n^* \in V_p^\circ$ posee una subsucesión puntualmente convergente sobre E. Razonando como en la prueba de 4.8 se concluye la demostración. #

Como consecuencia de esta proposición se tiene que toda función escalarmente medible valorada en un espacio K-analítico para la topología débil es P-medible. En el caso de que el espacio de medida sea finito, esto también es consecuencia del corolario 4.12 que sigue, pues todo espacio K-analítico es Lindeloff.

4.11 PROPOSICION *Si* (Ω,Σ,μ) *es un espacio de medida finito y* $f:\Omega \to X$ *es una función escalarmente medible tal que* $\mu f^{-1} \in \mathcal{M}_\tau(X_w)$ *, entonces* f *es P-medible* .

Demostración .- Sea T el soporte de la medida τ-aditiva μf^{-1} definida sobre $B_a(X_w)$, y sea λ la extensión de la medida μf^{-1} a $B_o(X_w)$. Entonces, si G es un abierto en X_w tal que $G \cap T \neq \emptyset$, se tiene que $\lambda(G) > 0$.

$H_p = \{ x^*_{|T} : x^* \in V_p^\circ \}$ es un conjunto convexo y compacto para la topología de la convergencia puntual sobre T. Como T es el soporte de la medida λ se deduce que si $x^*_{|T}$ e $y^*_{|T}$ que coinciden en casi todo punto respecto de λ_T, la medida de Borel inducida por λ en T, entonces $x^*_{|T} = y^*_{|T}$. Aplicando el teorema de metrizabilidad de A.Ionescu-Tulcea [1974] se obtiene que H_p es metrizable para la topología t_p. Por lo tanto, cada sucesión $x_n^* \in V_p^\circ$ posee una subsucesión puntualmente convergente sobre T. Razonando de forma similar a la prueba de 4.8 se termina la demostración. #

Si X es un Banach (o un LF-estricto) este último resultado se puede obtener aplicando un teorema de Edgard (o su generalización 7.9) que prueba que toda función escalarmente medible $f:\Omega \to X$ tal que $\mu f^{-1} \in \mathcal{M}_\tau(X_w) = \mathcal{M}_t(X_w)$

es escalarmente equivalente a una función medible por seminormas, y por lo tanto es P-medible.

4.12 <u>COROLARIO</u> *Si* X *es un e.l.c. que es Lindeloff para su topología débil y* μ *es una medida finita, toda función* $f:\Omega \to X$ *escalarmente medible es P-medible.*

<u>Demostración</u> .- Es una consecuencia inmediata de que en este caso X_w es compacto en medida, es decir $\mathcal{M}_\sigma(X_w) = \mathcal{M}_\tau(X_w)$. #

Hemos visto en el corolario 4.7 que para ciertos espacios de medida, se cumple que cada función escalarmente medible es P-medible. El siguiente resultado aporta una conclusión similar bajo el axioma de Martin.

4.13 <u>PROPOSICION</u> *Sea* (Ω, Σ, μ) *un espacio de medida donde* Σ *es la compleción de una* σ*-álgebra numerablemente generada, y* μ *es* σ*-finita. Entonces, bajo el axioma de Martin, toda función* $f:\Omega \to X$ *escalarmente medible es P-medible.*

<u>Demostración</u> .- Es una consecuencia del teorema 34 de Talagrand[1980], pues en este caso todo conjunto puntualmente compacto de funciones Σ-medibles (en particular $\{<x^*, f> : x^* \in V_p^\circ\}$) es secuencialmente compacto para la topología de la convergencia en medida, y de cada sucesión se puede extraer una subsucesión convergente en casi todo punto. #

Es fácil comprobar que si X es un subespacio cerrado de un e.l.c. Y , y $f: \Omega \to X \hookrightarrow Y$ es una función P-medible considerada con valores en Y, también lo es considerada con valores en X, basta aplicar el teorema de Hahn-Banach. Asi se tiene que la familia de los espacios con la propiedad de que cada función escalarmente medible es P-medible es cerrada para subespacios. Observando la relación entre los correspondientes duales, es facil comprobar que esta clase de espacios es cerrada para productos arbitrarios y sumas directas numerables. La estrecha relación existente entre la compacidad del recorrido de la integral de Pettis y la P-medibilidad, que comprobaremos en el siguiente epígrafe, pone de manifiesto como l^{∞} no pertenece a la clase anterior. Talagrand [1980-a] da un ejemplo, bajo el axioma de Martin, de un espacio que tiene a l^{∞} como cociente y tiene la propiedad de que toda función integrable Pettis tiene integral indefinida con recorrido relativamente compacto. Esto nos hace pensar que la familia anterior no va a ser cerrada por paso al cociente.

5 FUNCIONES FUERTEMENTE INTEGRABLES PETTIS

Este epígrafe está dedicado esencialmente al estudio de cuando el recorrido de la integral indefinida de una función integrable Pettis es relativamente compacto. Para simplificar la exposición es comodo introducir la siguiente

5.1 <u>DEFINICION</u> Diremos que una función integrable Pettis $f \in P(\mu,X)$ es fuertemente integrable Pettis, si el recorrido de su integral indefinida m_f es relativamente compacto en X . Por $P_o(\mu,X)$ denotaremos al espacio de las funciones fuertemente integrables Pettis .

La noción de función P-medible nos va a permitir caracterizar las funciones de $P(\mu,X)$ que estan en $P_o(\mu,X)$ (teorema 5.8). Como consecuencia, los resultados del epígrafe anterior pondran de manifiesto que si una función particular $f \in P(\mu,X)$ goza de buenas propiedades de medibilidad (por ejemplo, si es medible por seminormas) entonces automáticamente $f \in P_o(\mu,X)$, hecho que, hasta ahora, no ha sido señalado por los distintos autores que han estudiado la integración vectorial en el caso de e.l.c.

También se pone en evidencia que la mayoria de los criterios que dan condiciones suficientes de integrabilidad de Pettis, lo que proporcionan realmente es la integrabilidad de Pettis fuerte. Buena parte de estos criterios los presentamos en terminos de la medida imagen μf^{-1} que la función escalarmente medible f proporciona sobre $B_a(X_w)$. Uno de ellos (teorema 5.11) permite responder negativamente a una conjetura de Wheeler [1981].

Particularmente interesantes son las condiciones estudiadas en el epígrafe anterior (relativas a μ o al espacio X) que hacen que cada función escalarmente medible sea automaticamente P-medible, pues en estos casos se puede asegurar que $P(\mu,X) = P_o(\mu,X)$. Veremos en el epígrafe siguiente que cuando esto ocurre, desaparecen algunos de los inconvenientes de la integral de Pettis. Por ejemplo, se pueden extender los resultados Geitz [1981] sobre aproximación de funciones integrables Pettis mediante funciones simples, aún en el caso de que la medida μ no sea perfecta.

En todo el epígrafe, salvo mención expresa de lo contrario, las medidas consideradas no se suponen finitas.

Empezaremos con una simple observación que se sigue de la proposición 2.11, y que será util al establecer algunos resultados de este epígrafe. Cuando X es casi completo, dada una sub-σ-álgebra $\Sigma_o \subset \Sigma$ y una función $f:\Omega \to X$ escalarmente medible con respecto a Σ_o, si f es fuertemente integrable Pettis sobre Σ_o, entonces también es fuertemente integrable Pettis sobre Σ cumpliendo $m_f(\Sigma) \subset \overline{co}\ m_f(\Sigma_o)$. Este resultado permite deducir que una función escalarmente medible $f:\Omega \to X$ va a ser (fuertemente) integrable Pettis si y sólo si la identidad $i: X \to X$ lo es con respecto a la medida imagen μf^{-1} definida sobre $B_a(X_w)$. Para ello basta considerar la σ-álgebra $\Sigma_o = \{ f^{-1}(B):\ B \in B_a(X_w) \}$.

El siguiente teorema extiende al caso localmente convexo el teorema 4.1 de Edgard [1979] , y es básico en el estudio de la compacidad relativa del recorrido de la integral indefinida.

5.2 <u>TEOREMA</u> *Sea* $f: \Omega \to X$ *una función escalarmente medible verificando*

(a) Para cada $p \in P(X)$, *la restricción a* V_p° *del operador* $T_f : X^* \to L^1(\mu)$ *definido por* $T_f(x^*) = \langle x^*,f \rangle$ *es continuo para la topología* $\sigma(X^*,X)$ *en* V_p° *y la topologia de la norma* $\| \ \|_1$ *en* $L^1(\mu)$.

Entonces f *es fuertemente integrable Pettis en cada uno de los casos:* *(i)* X *completo ; (ii)* X *casi completo y* $f \in P(\mu,X)$ *; y (iii)* X *casi completo,* f X^**-esencialmente acotada y* $\mu(\Omega) < +\infty$.

Reciprocamente, sin ninguna hipotesis de completitud, si f *es fuertemente integrable Pettis entonces se cumple (a).*

Para la demostración utilizaremos el siguiente lema:

5.3 <u>LEMA</u> *Sea* X *un e.l.c. casi completo y* $M \subset X$ *un subconjunto acotado tal que toda red equicontinua en* X^* *que converge en la topología* $\sigma(X^*,X)$ *es uniformemente convergente sobre* M. *Entonces* M *es relativamente compacto en* X.

<u>Demostración</u> .- Es un corolario del teorema § 21.7 de Köthe [1979]. En efecto, sea $\mathcal{B}_o$ la familia formada por los conjuntos $M \subset X$ que cumplen las hipotesis del lema, y $\mathcal{E}$ la familia de los subconjuntos equicontinuos de X^*. La hipótesis del lema implica que sobre cada $N \in \mathcal{E}$ coinciden la topología $\sigma(X^*,X)$ y la topología de la convergencia uniforme sobre los conjuntos de $\mathcal{B}_o$. Aplicando el citado teorema de Köthe, se obtiene que cada $M \in \mathcal{B}_o$ es precompacto para la topología de la convergencia uniforme sobre los equicontinuos, es decir, la topología de X. Como X es casi completo se tiene que M es relativamente compacto en X. #

<u>Demostración de 5.2</u> .- Supongamos que se cumple (i). Para cada $E \in \Sigma$ consideramos su función carasteristica χ_E como un elemento del dual de $L^1(\mu)$. La forma lineal $\phi_E(x^*) = \int_E \langle x^*,f\rangle \; d\mu = \langle \chi_E, T_f(x^*)\rangle$ es continua sobre V_p° para cada $p \in P(X)$. Del teorema de completitud de Grothendieck se deduce que $\phi_E \in X$. Entonces $\phi_E = \int_E f \; d\mu$ y f es integrable Pettis.

Para probar que $m_f(\Sigma)$ es relativamente compacto, se utiliza el lema 5.3 . Si x_j^* es una red equicontinua que converge a x^* en la topología débil*, esta red esta contenida en algun V_p° . Como el operador T_f es continuo sobre V_p° considerando en $L^1(\mu)$ la norma $\|\ \|_1$, $\langle g,T_f(x_j^*)\rangle$ converge hacia $\langle g,T_f(x^*)\rangle$ uniformemente en la bola unidad $B_{L^\infty(\mu)}$. Tomando $g=\chi_E$, con $E \in \Sigma$, se tiene que $\langle x_j^*,m_f(E)\rangle = \langle \chi_E,T_f(x_j^*)\rangle$ converge a $\langle x^*,m_f(E)\rangle$ uniformemente en $E \in \Sigma$. Por consiguiente se cumplen las condiciones del lema 5.3 y $m_f(\Sigma)$ es relativamente compacto en X.

La hipotesis de completitud sólo se ha usado para la demostración de la integrabilidad de f. Así , si se cumple (ii) es suficiente suponer que

X es casi completo para obtener la demostración de que $f \in P_o(\mu,X)$.

Si se supone (iii) existe un acotado $B < X$ tal que si $x^* \in B^\circ$, entonces $|<x^*,f>| \leqslant 1$ para casi todo punto . Como para cada $x^* \in B^\circ$ se cumple $|\phi_E(x^*)| \leqslant \int_E |<x^*,f>| \, d\mu \leqslant \mu(\Omega)$, $\phi_E \in \mu(\Omega).B^{\circ\bullet}$, donde $B^{\circ\bullet}$ es la polar de B° en X^{**}, y como además ϕ_E está en la complección de X que es casi completo, se tiene que $\phi_E \in X$.

Vamos a probar el reciproco. Supongamos que $f \in P_o(\mu,X)$, entonces el conjunto $P = m_f(\Sigma) - m_f(\Sigma)$ es relativamente compacto. Dada $p \in P(X)$, si $x_j^* \in V_p^\circ$ es una red débil*-convergente hacia $x^* \in V_p^\circ$, por el teorema de Ascoli se tiene que $<x_j^*,x>$ converge a $<x^*,x>$ uniformemente sobre P. Así,dado $\varepsilon > 0$ existe un j_o tal que $j \geqslant j_o$ implica que para todo $x \in P$ $| <x_j^*,x> - <x^*,x>| < \varepsilon$. Sea $A_j = \{ t \in \Omega : <x^*,f(t)> \geqslant 0 \}$ y $B_j = \Omega - A_j$. Entonces, si $j \geqslant j_o$ se tiene

$$\begin{aligned} \| T_f(x_j^*) - T_f(x^*) \|_1 &= \int_\Omega |<x_j^*-x^*,f>| \, d\mu = \\ &= \int_{A_j} <x_j^*-x^*,f> \, d\mu - \int_{B_j} <x_j^*-x^*,f> \, d\mu = \\ &= <x_j^* - x^* , m_f(A_j) - m_f(B_j) > < \varepsilon \end{aligned}$$

Con lo que queda probado que T_f restringido a V_p° es continuo para la topología débil* en V_p° y la topología de la norma $\| \|_1$ en $L^1(\mu)$. #

Si en el teorema anterior se supone que f es escalarmente integrable con $(D) \int_E f \, d\mu \in X^{**}$ para cada $E \in \Sigma$, se obtiene que el recorrido de la integral de Dunford indefinida es precompacto en X^{**} dotado de la topología natural $\varepsilon(X^{**},X^*)$. Para ello se observa que este conjunto es acotado en la topología natural, pues para cada $p \in P(X)$ si p^{**} es la seminorma asociada a V_p° en X^{**}, segun se indico en el primer epígrafe

$$p^{**}((D)\int_E f \, d\mu) \leqslant \sup \{ \int_\Omega |<x^*,f>| \, d\mu \; : \; x^* \; V_p^\circ \} < + \infty \; .$$

Una vez obtenida la acotación, Basta tener en cuenta la prueba del lema 5.3.

Dado un espacio de medida (Ω, Σ, μ) y $A \in \Sigma$, denotamos por μ_A a la medida definida sobre Σ por $\mu_A(E) = \mu(A \cap E)$ para cada $E \in \Sigma$.

5.4 LEMA *Sea* X *un e.l.c. casi completo y* $f \in P(\mu,X)$ *tal que* m_f *es* Λ *-regular. Si para cada* $H \in \Lambda$ *es* $f \in P_o(\mu_H,X)$ *entonces* $f \in P_o(\mu,X)$.

Demostración .- En virtud de 5.2 sabemos que si $H \in \Lambda$ los operadores $T_f^H : X^* \to L^1(\mu_H)$ definidos por $T_f^H(x^*) = \langle x^*,f\rangle$, cuando se restringen a V_p° son $\sigma(X^*,X)$- $\|\ \|_1$ continuos. Dado $\varepsilon > 0$ y $p \in P(X)$, existe $H \in \Lambda$ tal que $\| m_f \|_p (\Omega - H) < \varepsilon$. Para obtener la continuidad de T_f restringido a V_p° establecemos la sigiente desigualdad

$$\text{(A)} \qquad \| T_f(x^*) - T_f(y^*) \|_1 = \int_\Omega |\langle x^*-y^*,f\rangle| \, d\mu \leq$$

$$\leq \int_H |\langle x^*-y^*,f\rangle| \, d\mu + 2 \| m_f \|_p (\Omega - H) =$$

$$= \| T_f^H(x^*) - T_f^H(y^*) \|_1 + 2\varepsilon ,$$

valida para cada par $x^*, y^* \in V_p^\circ$. De (A) y de la continuidad de T_f^H restringido a V_p° , se obtiene fácilmente que T_f es $\sigma(X^*,X)$- $\|\ \|_1$ continuo sobre V_p°, y por el teorema 2 se tiene que $f \in P_o(\mu,X)$. #

5.5 COROLARIO *Sea* X *un e.l.c. casi completo y* $f \in P(\mu,X)$ *tal que para cada* $A \in \Sigma^*$ *es* $f \in P_o(\mu_A,X)$. *Entonces* $f \in P_o(\mu,X)$.

Demostración .- Es consecuencia inmediata del lema 5.4, pues por el corolario 2.8 m_f es siempre Σ^*-regular . #

5.6 COROLARIO *Sea* X *un e.l.c. completo y* $f : \Omega \to X$ *una función* μ*-dominada tal que para cada* $A \in \Sigma^*$ *es* $f \in P_o(\mu_A,X)$. *Entonces* $f \in P_o(\mu,X)$.

Demostración .- Sea $p \in P(X)$ y $f_p \in \mathcal{L}^1(\mu)$ una función que domina a $\{ |\langle x^*,f\rangle| : x^* \in V_p^\circ \}$. Para cada $\varepsilon > 0$ existe un $H \in \Sigma^*$ tal que $\int_{\Omega-H} f_p \, d\mu < \varepsilon$. Siguiendo con la notación de 5.4, la desigualdad (A) sigue siendo cierta si se sustituye $\|m_f\|_p(\Omega-H)$ por $\int_{\Omega-H} f_p \, d\mu$. De donde resulta la continuidad de T_f restringido a V_p° , y por 5.2 se tiene que $f \in P_o(\mu,X)$. #

5.7 TEOREMA *Sea* X *un e.l.c. casi completo y* $f \in P(\mu,X)$ *tal que para cada* $A \in \Sigma^*$ *y cada* $p \in P(X)$ *el conjunto* $\{ <x^*,f> \; : x^* \in V_p^\circ \}$ *es relativamente compacto en* $L^1(\mu_A)$. *Entonces* $f \in P_o(\mu,X)$.

Demostración .- Sea $p \in P(X)$ y $x_j^* \in V_p^\circ$ una red débil*-convergente hacia $x^* \in V_p^\circ$. Si $A \in \Sigma^*$, de la hipótesis del teorema se obtiene la existencia de un punto de aglomeración $\phi \in L^1(\mu_A)$ de la red $<x_j^*,f>$. Por lo tanto existe una subred y_i^* de x_j^* que cumple

$$\int_E \phi \, d\mu_A = \lim_i \int_E <y_i^*,f> \, d\mu_A = \lim_i <y_i^*, \int_E f \, d\mu_A> =$$
$$= <x^*, \int_E f \, d\mu_A> = \int_E <x^*,f> d\mu_A$$

para cada $E \in \Sigma$. Entonces $\phi = <x^*,f>$ en $L^1(\mu_A)$. Por lo tanto la red $<x_j^*,f>$ converge hacia $<x^*,f>$ en $L^1(\mu_A)$, pues esta contenida en un compacto y $<x^*,f>$ es su unico punto de aglomeración. Entonces, por el teorema 5.2, $f \in P_o(\mu_A,X)$, y por el corolario 5.5 se tiene que $f \in P_o(\mu,X)$. #

Tras estos primeros resultados que dan condiciones para que una función integrable Pettis lo sea fuertemente, vamos a caracterizar las funciones fuertemente integrables Pettis como las funciones integrables Pettis que son P-medibles.

5.8 TEOREMA *Sea* X *un e.l.c. casi completo, y* $f \in P(\mu,X)$. *Entonces son equivalentes : (a)* f *es fuertemente integrable Pettis ; y (b)* f *es P-medible.*

Demostración .- (a) $\rightarrow$ (b) . En virtud del teorema 5.2, para cada $p \in P(X)$ el conjunto $T_f(V_p^\circ)$ es relativamente compacto en $L^1(\mu)$, pues es la imagen continua de un débil*-compacto. Así, de cada sucesión x_n^* en V_p° se puede extraer una subsucesión $x_{n(k)}^*$ tal que $T_f(x_{n(k)}^*) = <x_{n(k)}^*,f>$ converge en $L^1(\mu)$. Es bien sabido que de toda sucesión convergente en $L^1(\mu)$ se puede extraer una subsucesión convergente en casi todo punto . Por lo tanto f es P-medible.

(b) $\rightarrow$ (a). Por el teorema 5.7, bastará probar que para cada $A \in \Sigma^*$

y cada $p \in P(X)$ la familia de funciones $\{<x^*,f> \; : x^* \in V_p^\circ\}$ es relativamente compacta en $L^1(\mu_A)$. Si f es P-medible, para cualquier sucesión $x_n^* \in V_p^\circ$ existe una subsucesión $x_{n(k)}^*$ tal que $<x_{n(k)}^*,f>$ converge en casi todo punto. La sucesión $<x_{n(k)}^*,f>$ es uniformemente integrable en $L^1(\mu_A)$ en virtud del teorema 2.2. Aplicando el teorema de convergencia de Vitali se tiene que dicha sucesión es convergente en la norma de $L^1(\mu_A)$, de donde resulta la compacidad relativa de $T_f^A(V_p^\circ)$. #

Antes de estudiar las propiedades de $P_o(\mu,X)$, vamos a ver como para las medidas perfectas (sean finitas ó no) se tiene que $P(\mu,X) = P_o(\mu,X)$. También presentaremos algunas condiciones suficientes para que una función escalarmente medible sea fuertemente integrable Pettis.

5.9 <u>TEOREMA</u> *Si* (Ω, Σ, μ) *es un espacio de medida perfecto y* X *es un e.l.c. casi completo, entonces* $P(\mu,X) = P_o(\mu,X)$.

<u>Demostración</u> En virtud del corolario 5.5 bastará probar que para cada $A \in \Sigma^*$ se cumple $P(\mu_A,X) = P_o(\mu_A,X)$. Si (Ω,Σ,μ) es un espacio de medida perfecto entonces el espacio de medida finito (Ω,Σ,μ_A) tambien es perfecto (Sazanov [1965]). Por el corolario 4.7 sabemos que toda función escalarmente medible es P-medible con respecto a μ_A. Aplicando el teorema 5.8 se tiene la igualdad $P(\mu_A,X) = P_o(\mu_A,X)$. #

De 2.11 se deduce (tal y como señalamos al inicio de este epígrafe) de manera inmediata el siguiente

5.10 <u>COROLARIO</u> *Sea* X *un e.l.c. casi completo y* $f \in P(\mu,X)$. *Si* μf^{-1} *es una medida perfecta sobre* $B_a(X_w)$ *, entonces* $f \in P_o(\mu,X)$. #

Dado un espacio de topológico S separado y completamente regular, una medida de Baire finita $\mu \in \mathcal{M}_\sigma(S)$ se dice que es z-aditiva $(\mu \in \mathcal{M}_z(S))$ si su integral I_μ es un operador continuo sobre cada subconjunto relativamente compacto para t_p, uniformemente acotado $H \subset C_b(S)$ dotado de la topología de la converegencia puntual t_p. Este espacio de medidas ha sido introducido por Wheeler [1981], en donde prueba que bajo el axioma de Martin $\mathcal{M}_\tau(S) \subset \mathcal{M}_z(S)$.

5.11 TEOREMA *Sea* (Ω, Σ, μ) *un espacio de medida finito y* X *un e.l.c. completo (resp. casi completo). Si* $f: \Omega \to X$ *es una función escalarmente medible* μ*-dominada (resp.* X*-esencialmente acotada) tal que* $\mu f^{-1} \in \mathcal{M}_z(X_w)$ *entonces* $f \in P_o(\mu, X)$.

Demostración .- Dado $p \in P(X)$ sea f_p una función de dominación del conjunto $\{\langle x^*, f\rangle : x^* \in V_p^\circ\}$. Para cada $\varepsilon > 0$ existe un conjunto $A \in \Sigma$ tal que f_p está acotada en A por una constante N y $\int_{\Omega-A} f_p \, d\mu < \varepsilon/4$.

Sea $t_N(x^*)$ la función continua y acotada sobre X_w que coincide con x^* sobre el conjunto $\{x : |\langle x^*,x\rangle| \leq N\}$ y que vale N (resp. -N) sobre el conjunto $\{x : \langle x^*,x\rangle > N\}$ (resp. $\{x : \langle x^*,x\rangle < -N\}$). Consideremos el conjunto $H = \{ \, | t_N(x^*) - t_N(y^*) | : x^*, y^* \in V_p^\circ \}$, obviamente H es un subconjunto de $C_b(X_w)$ uniformemente compacto y t_p-compacto. Como $\mu f^{-1} \in \mathcal{M}_z(X_w)$ si $x_j^* \in V_p^\circ$ es una red débil*-convergente hacia $x^* \in V_p^\circ$, la red $h_j = | t_N(x_j^*) - t_N(x^*) | \in H$ es t_p-convergente hacia 0, y por consiguiente $\int_X h_j \, d\mu f^{-1} \to 0$.

Como para cada $y^* \in V_p^\circ$ se verifica la desigualdad $|\langle y^*, f\rangle| \leq f_p \leq N$ en casi todo punto de A, se deduce que $\langle y^*, f\rangle = t_N(y^*)\circ f$ en casi todo punto de A. Teniendo asi la desigualdad:

$$\begin{aligned} b_j &= \| T_f(x_j^*) - T_f(x^*) \|_1 = \int_\Omega |\langle x_j^* - x^*, f\rangle| \, d\mu = \\ &= \int_{\Omega-A} | x_j^* - x^*, f | \, d\mu + \int_A | t_N(x_j^*) - t_N(x^*) |\circ f \, d\mu \leq \\ &\leq 2 \int_{\Omega-A} f_p \, d\mu + \int_A h_j \circ f \, d\mu < \varepsilon/2 + \int_X h_j \, d\mu , \end{aligned}$$

de donde se sigue que $b_j \to 0$. Así queda probada la condición (a) de 5.2 , y aplicando dicho teorema resulta que $f \in P_o(\mu, X)$. #

Wheeler [1981] conjetura que una función acotada escalarmente medible con valores en un espacio de Banach es integrable Pettis si y sólo si su medida imagen es z-aditiva. El ejemplo de Fremlin-Talagrand [1979] de una función acotada valorada en l^∞ que es integrable Pettis pero no fuertemente, junto con el teorema anterior pone de manifiesto que la conjetura de Wheeler no es ciera en general. También proporciona la desigualdad $\mathcal{M}_\sigma(l^\infty{}_w) \neq \mathcal{M}_z(l^\infty{}_w)$.

Es facil comprobar que si $f:S \to X$ es una función débilmente continua y $\mu \in \mathcal{M}_z(S)$, entonces la medida imagen $\mu f^{-1} \in \mathcal{M}_z(X_w)$. Así resulta evidente el

5.12 <u>COROLARIO</u> *Sea* X *un e.l.c. completo (resp. casi completo) y* $\mu \in \mathcal{M}_z(S)^+$. *Entonces toda función* $f:S \to X$ *débilmente continua* μ*-dominada (resp.* X^**-esencialmente acotada) es fuertemente integrable Pettis.* #

También como corolario de 5.11 obtenemos la siguiente condición suficiente para que una función sea fuertemente integrable Pettis, aún en el caso de que μ sea una medida infinita.

5.13 <u>COROLARIO</u> *Sea* X *un e.l.c. completo que posee un conjunto debilmente* σ*-compacto denso (p.e. si* X *es separable) y* $f:\Omega \to X$ *una función escalarmente medible* μ*-dominada. Entonces* $f \in P_o(\mu,X)$.

<u>Demostración</u> .- Por el corolario 3.4 de Wheeler [1981] se tiene que $\mathcal{M}_z(X_w) = \mathcal{M}_\sigma(X_w)$. Entonces por el teorema 5.11 se tiene que para cada $A \in \Sigma^*$ $f \in P_o(\mu_A,X)$. Aplicando ahora el corolario 5.6 se tiene que $f \in P_o(\mu,X)$. #

5.14 <u>COROLARIO</u> *Se supone que el espacio topológico* S *posee un subconjunto* σ*-compacto denso (p.e.* S *separable) y* μ *es una medida definida sobre* $B_a(S)$ *(resp.* $B_o(S)$*). Si* X *es un e.l.c. completo y* $f:S \to X$ *es una función debilmente continua* μ*-dominada , entonces* $f \in P_o(\mu,X)$.

<u>Demostración</u> Si μ está definida sobre $B_a(S)$ se hace un razonamiento similar al anterior, pues para cada $A \in B_a(S)^*$ se tiene que $\mu_A \in \mathcal{M}_\sigma(S) = \mathcal{M}_z(S)$. Cuando μ está definida sobre $B_o(S)$ se considera su restricción a $B_a(S)$. Entonces se aplica 2.11 tal y como anotamos en la observación precedente al teorema 5.2. #

Volviendo al caso en que μ es finita, obtenemos el siguiente resultado

5.15 <u>TEOREMA</u> *Sea* X *un e.l.c. completo y* $f : \Omega \to X$ *una función escalarmente integrable. Se supone que* $\mu f^{-1} \in \mathcal{M}_\tau(X_w)$ *. Entonces son equivalentes: (a) Para cada* $p \in P(X)$ *el conjunto* $\{ <x^*,f> \ : \ x^* \in V_p^\circ \}$ *es uniformemente integrable ; (b)* f *es integrable Pettis ; y (c)* f *es fuertemente integrable Pettis.*

<u>Demostración</u> .- (c) $\longrightarrow$ (b) Es inmediato ; (b) $\to$ (a) está en el teorema 2.2.

(a) $\longrightarrow$ (c). Sea λ la medida de Borel que se obtiene al extender la medida μf^{-1} a $B_o(X_w)$, y sea T el soporte de λ . Para cada $p \in P(X)$ consideremos el conjunto $H_p = \{ x^*|_T : x^* \in V_p^\circ \}$ donde $x^*|_T$ es la restricción de x^* a T. H_p es un conjunto t_p-compacto y absolutamente convexo . Si λ_T es la medida de Borel inducida por λ en T, y $x^*|_T = y^*|_T$ en casi todo punto (λ_T) de T, entonces $x^*|_T = y^*|_T$, pues T es el soporte de la medida λ . Aplicando el teorema de metrizabilidad de Ionescu-Tulcea [1974] se obtiene que H_p es metrizable para la topología de la convergencia puntual.

Sea $\overline{T}_f : H_p \to L^1(\mu)$ definida por $\overline{T}_f(x^*|_T) = <x^*,f>$. Esta aplicación está bien definida pues si $x^*|_T = y^*|_T$ entonces $\{ x : <x^*,x> = <y^*,x> \}$ es un conjunto de $B_a(X_w)$ que contiene a T, lo que implica que $<x^*,f>$ e $<y^*,f>$ coinciden en casi todo punto, y por lo tanto representan a la misma función en $L^1(\mu)$. Si consideramos en H_p la topología metrizable t_p, la aplicación $\overline{T}_f$ es continua cuando en $L^1(\mu)$ tomamos la topología de la norma. En efecto, si $x_n^*|_T$ es t_p-convergente hacia $x^*|_T$, el conjunto $\{ x : <x_n^*,x> \to <x^*,x> \}$ es un conjunto de $B_a(X_w)$ que contiene a T, por lo que $<x_n^*,f>$ converge hacia $<x^*,f>$ en casi todo punto . Como $\{ <x^*,f> : x^* \in V_p^\circ \}$ es acotado en $L^1(\mu)$ y uniformemente integrable, aplicando el teorema de convergencia de Vitali se tiene que $<x_n^*, f>$ converge hacia $<x^*,f>$ en la norma de $L^1(\mu)$

Como $T_f : V_p^\circ \to L^1(\mu)$ se puede factorizar mediante la composición de $\overline{T}_f$ con la aplicación $i : V_p^\circ \to H_p$ dada por $i(x^*) = x^*|_T$, y esta ultima es $\sigma(X^*,X)$- t_p continua, resulta que T_f es una aplicación $\sigma(X^*,X)$- $\| \ \|_1$ continua. Aplicando el teorema 5.2 se obtiene que $f \in P_o(\mu,X)$. #

5.16 COROLARIO *Si* X *es un e.l.c. completo (resp. casi completo) y* $f:\Omega \to X$ *es una función escalarmente medible* μ*-dominada (resp.* X^**-esencialmente acotada) tal que* $\mu f^{-1} \in \mathcal{M}_\tau(X_w)$*, entonces* $f \in P_o(\mu,X)$.

Demostración .- Resulta facilmente de observar que con cualquiera de las hipotesis se cumple la condición (a) del teorema anterior. #

Si S es un espacio topológico, $\mu \in \mathcal{M}_\tau(S)$ y $f:S \to X$ es una función debilmente continua, resulta inmediato que la medida imagen μf^{-1} está en $\mathcal{M}_\tau(X_w)$. Por consiguiente, teniendo en cuenta la observación que antecede al teorema 5.2, obtenemos el siguiente

5.17 COROLARIO *Sea* X *un e.l.c. completo (resp. casi completo),* $\mu \in \mathcal{M}_\tau(S)^+$ *y* $f: S \to X$ *una función debilmente continua* μ*-dominada (resp.* X^**-esencialmente acotada). Entonces* $f \in P_o(\mu,X)$ *. Más aún, si* $\bar{\mu}$ *es la extensión canonica de* μ *a* $B_o(S)$*, entonces* $f \in P_o(\bar{\mu},X)$. #

Bajo el axioma de Martin, este ultimo corolario está comprendido en el corolario 5.12, pues $\mathcal{M}_\tau(S) \subset \mathcal{M}_z(S)$. Si $f: S \to X$ es una función débilmente continua, $\mu \in \mathcal{M}_\tau(S)$ y $\bar{\mu}$ es su extensión a $B_o(S)$, la condición de que f es μ-dominada implica que $p\circ f \in \mathcal{L}^1(\bar{\mu})$ para cada $p \in P(X)$ (vease 3.8, observando que con la notación allí empleada, si f es μ-dominada se cumple $\int p\circ f \, d\bar{\mu} = \sup \int |x_J|\circ f \, d\mu \leq \int f_p \, d\mu < +\infty$) .

En el caso anterior la medibilidad de $p\circ f$ está garantizada porque f es $B_o(X_w)$ medible y p es medible con respecto a $B_o(X_w)$ por ser semicontinua. Cuando f no es $B_o(X_w)$-medible, la medibilidad de $p\circ f$ no está asegurada. En este caso, si la medida μf^{-1} se puede extender a una medida $\bar{\lambda}$ sobre $B_o(X_w)$, una alternativa a la condición $p\circ f \in \mathcal{L}^1(\bar{\mu})$ es que $p \in \mathcal{L}^1(\bar{\lambda})$. Así hacemos en el siguiente

5.18 COROLARIO *Sea* X *un e.l.c. completo, y* $f:\Omega \to X$ *una función escalarmente medible tal que* $\mu f^{-1} \notin \mathcal{M}_\tau(X_w)$*. Sea* $\bar{\lambda}$ *la extensión de* μf^{-1} *a* $B_o(X_w)$ *. Si* $P(X) \subset \mathcal{L}^1(\bar{\lambda})$ *entonces* $f \in P_o(\mu,X)$.

<u>Demostración</u> .- Probaremos que la condición $P(X) \subset \mathcal{L}^1(\overline{\lambda})$ implica que f está μ-dominada, y aplicando el corolario 5.16 tendremos que $f \in P_o(\mu, X)$.

Sea $p \in P(X)$. Para cada conjunto finito $J \subset V_p^{\circ}$ sea $|x_J| = \sup \{ |x^*| : x^* \in J \}$ Denotamos por $\tilde{g} \in L^1(\mu f^{-1})$ a la clase de $g \in \mathcal{L}^1(\mu f^{-1})$. Para cada conjunto finito $J \subset V_p^{\circ}$ se cumple $\int |x_J| \, d\, \mu f^{-1} = \int |\tilde{x}_J| \, d\mu f^{-1} \leq \int p \, d\, \overline{\lambda} < +\infty$.

Ordenando los subconjuntos finitos de V_p° por inclusión se tiene que la red $|\tilde{x}_J|$ es de Cauchy en $L^1(\mu f^{-1})$. El limite $\tilde{g}_p$ de esta red cumple que $|\tilde{x}_J| \leq \tilde{g}_p$ para cada subconjunto finito $J \subset V_p^{\circ}$.

Como $|x_J| \leq g_p$ en casi todo punto con respecto a μf^{-1} , se tiene que para cada $x^* \in V_p^{\circ}$, $| x^*, f | \leq g_p \circ f$ en casi todo punto (μ). De donde resulta la μ-dominación de f. #

Sea $f: \Omega \to X$ una función escalarmente integrable. La condición (a) en el teorema 5.15 de que para cada $p \in P(X)$ $\{\langle x^*, f\rangle : x^* \in V_p^{\circ} \}$ sea uniformemente integrable, equivale a que la medida vectorial $m_f(E) = (D)- \int_E f \, d\mu$ que toma valores en $(X^*)'$, dual algebraico de X^*, sea μ-continua cuando en $(X^*)'$ se considera la topología de la convergencia uniforme sobre los equicontinuos de X^*. Esto ultimo también es equivalente a que m_f sea σ-aditiva para dicha topología. En efecto, si m_f es σ-aditiva, el conjunto de medidas $\{x^* \circ m_f : x^* \in V_p^{\circ} \}$ es uniformemente σ-aditivo, por el corolario I.2.5 de Diestel-Uhl [1977] existe una medida σ-aditiva $\lambda : \Sigma \to [0, +\infty)$ tal que

(B) $$0 \leq \lambda(E) \leq \sup \{ |x^* \circ m_f| \, (E) : x^* \in V_p^{\circ} \}$$

y tal que $\lambda(E) \to 0$ implica que $|x^* \circ m_f| \, (E) = \int_E |\langle x^*, f\rangle| \, d\, \mu \to 0$ uniformente en $x^* \in V_p^{\circ}$. De (B) se deduce que $\lambda(E) = 0$ cuando $\mu(E) = 0$, de donde resulta que λ es μ-continua (I.2.1 de Diestel-Uhl [1977]). Así se tiene que $\{ \langle x^*, f\rangle : x^* \in V_p^{\circ} \}$ es uniformemente integrable en $L^1(\mu)$.

Esta exposición extiende el siguiente resultado de Pettis (II.3.5 y II.3.6 de Diestel-Uhl) " Sea X un espacio de Banach y $f: \Omega \to X$ una función escalarmente integrable y medible Bochner (y por consiguiente con $\mu f^{-1} \mathcal{M}_T(X_w)$) Entonces son equivalentes: (a) f es integrable Pettis ; (b) m_f es σ-aditiva en la norma de X^{**}; y (c) m_f es μ-continua en la norma de X^{**} ".

5.19 COROLARIO *Sea* X *un e.l.c. completo,* μ *una medida finita y* $f:\Omega \to X$ *una función escalarmente medible tal que* $\mu f^{-1} \in \mathcal{M}_\tau(X_w)$ *y existe* $r>1$ *de modo que* $\langle x^*,f\rangle \in \mathcal{L}^r(\mu)$ *para cada* $x^* \in X^*$ *. Entonces* $f \in P_o(\mu,X)$.

Demostración .- Dada $p \in P(X)$, consideramos el espacio de Banach $X^*_{V_p^\circ}$ asociado a V_p°, y el operador lineal $T : X^*_{V_p^\circ} \to L^r(\mu)$ definido por $T(x^*)=\langle x^*,f\rangle$. Al igual que en el caso $r=1$, el teorema de la grafica cerrada prueba que T es un operador acotado, por lo que existe una constante C tal que

$$\sup \{ \| \langle x^*,f\rangle \|_{L^r(\mu)} : x^* \in V_p^\circ \} \leq C < +\infty$$

De la desigualdad de Hölder se tiene que $(1/q + 1/r = 1)$

$$\int_E |\langle x^*,f\rangle| \, d\mu = \int | \chi_E \cdot \langle x^*,f\rangle| \, d\mu \leq \| \langle x^*,f\rangle\|_{L^r(\mu)} \cdot \|\chi_E\|_{L^q(\mu)} \leq C\,\mu(E)^{1/q}$$

para cada $x^* \in V_p^\circ$ y cada $E \in \Sigma$. Con esta ultima expresión probamos que $\{\langle x^*,f\rangle : x^* \in V_p^\circ\}$ es uniformemente integrable en $L^1(\mu)$. Por el teorema 5.15 se concluye que $f \in P_o(\mu,X)$. #

La versión de este corolario cuando X es un espacio de Banach y f es una función medible Bochner se debe a Pettis ([1938] 5.31).

5.20 COROLARIO *Sea* X *un e.l.c. completo que es Lindeloff para la topología débil, y* $f:\Omega \to X$ *una función escalarmente medible. Entonces* $f \in P_o(\mu,X)$ *en cada uno de los casos : (a)* μ *es finita y* $\langle x^*,f\rangle \in \mathcal{L}^r(\mu)$ *para cada* $x^* \in X^*$ *con* $r>1$ *; y (b)* f *es* μ*-dominada.*

Demostración .- (a) es consecuencia inmediata del corolario anterior. Y (b) es similar al corolario 5.13. #

De modo similar a 5.14 se tiene el siguiente

5.21 COROLARIO *Sea* S *un espacio topologico compacto en medida (p.e. si es Lindeloff),* μ *una medida definida sobre* $B_a(S)$ *(resp.* $B_o(S)$*) no necesariamente finita, y* X *un e.l.c. completo. Si* $f: S \to X$ *es una función debilmente continua* μ*-dominada entonces* $f \in P_o(\mu,X)$. #

A continuación presentamos condiciones suficientes para la integrabilidad fuerte de funciones casi-continuas.

5.22 <u>DEFINICION</u> Sea $\mathcal{H}$ un retículo de cerrados del espacio topológico S. Una medida de Borel $\mu : B_o(S) \to [0,+\infty]$ se dice que es una medida de Radon de tipo $\mathcal{H}$ si se cumplen :

(i) Cada $H \in \mathcal{H}$ es μ-compacto (e.d. para cada $\varepsilon > 0$ y cada recubrimiento abierto $\{ G_j : j \in A \}$ de H, existe un subconjunto finito $L \subset A$ tal que $\mu(H - \cup_{j \in L} G_j) < \varepsilon$)

(ii) $\mu(H) < +\infty$ para cada $H \in \mathcal{H}$.

(iii) $\mu(B) = \sup \{ \mu(H) : B \supset H \in \mathcal{H} \}$ para cada $B \in B_o(S)$.

Estas medidas han sido introducidas por Rodriguez-Salinas y Jimenez Guerra [1979] y tienen la particularidad de que para cada $H \in \mathcal{H}$ la restricción μ^H de μ a la σ-álgebra $B_o(H)$ es una medida τ-aditiva. Ejemplos de medidas de esta clase son las medidas de Radon sobre espacios topológicos estudiadas por Schwartz [1973] donde $\mathcal{K}(S) = \mathcal{H}$, y las medidas quasi-Radon introducidas por Fremlin [1974] donde $\mathcal{H}$ es el retículo formado por los cerrados de medida finita.

5.23 <u>TEOREMA</u> *Sea X un e.l.c. completo y μ una medida de Radon de tipo $\mathcal{H}$ Si $f : S \to X$ es una función débilmente casi continua μ-dominada , entonces f es fuertemente integrable Pettis.*

<u>Demostración</u> .- Sea $\mathcal{H}_f = \{ H \in \mathcal{H} : f_{|H}$ es débilmente continua $\}$. Como f es debilmente casi continua y μ es $\mathcal{H}$-regular se deduce fácilmente que μ es $\mathcal{H}_f$-regular. Para cada $H \in \mathcal{H}_f$ la medida μ^H es τ-aditiva, entonces por 5.17 se tiene que $f_{|H} \in P_o(\mu^H,X)$. Pero esto último equivale a que $f \in P_o(\mu_H,X)$, con la notación de 5.6. Como f es μ-dominada, aplicando 5.6 obtenemos que $f \in P_o(\mu,X)$. #

En el caso de que μ sea una medida de Radon finita ($\mu \in M_t(S)^+$) se tiene un resultado similar con sólo requerir que X sea casi completo.

5.24 COROLARIO *Sea* X *un e.l.c. casi completo y* $\mu \in M_t(S)^+$. *Entonces toda función* $f : S \to X$ *débilmente casi continua y* μ*-dominada es fuertemente integrable Pettis.*

Demostración .- Bastará probar que f es integrable Pettis, pues toda medida de Radón es perfecta y por consiguiente f es P-medible. Al igual que en el teorema anterior se tiene que μ es regular con respecto a la familia de los compactos sobre los que f es débilmente continua . Sobre estos compactos la función f está acotada, por lo que se puede asegurar que es débilmente integrable en virtud de 5.17. Aplicando el teorema 2.10 obtenemos la integrabilidad de Pettis de f . #

Supongamos que X es un espacio de Frechet y que $f: S \to X$ es una función $B_o(X)$-medible μ-dominada. Si μ es una medida de Radon (de tipo $\mathcal{K}$), Fremlin [1981] ha probado que f es casi-continua, aplicando 5.23 obtenemos que $f \in P_o(\mu,X)$. Si μ es una medida quasi-Radon y S satisface el segundo axioma de numerabilidad, entonces (como anotamos al final del epígrafe 3) Fremlin también tiene establecido que f es casi-continua, y por consiguiente $f \in P_o(\mu,X)$.

Siguiendo con la notación de Wheeler [1983] diremos que un e.l.c. posee la propiedad C.C.P. si la envoltura cerrada y convexa de cada subconjunto compacto sigue siendo compacta. Un caso particular de espacios con la propiedad C.C.P. son los espacios casi completos para la topología de Mackey (en virtud del teorema de Krein), aunque hay otros espacios que también poseen esta propiedad (Ostling-Wilansky [1974]). Un ejemplo de e.l.c. con la propiedad C.C.P. es el espacio $\mathcal{M}_\tau(S)$ con la topologia $\sigma(\mathcal{M}_\tau(S),C_b(S))$ (vease Wheeler [1983] 13.11).

5.25 TEOREMA *Sea* X *un e.l.c. secuencialmente completo tal que dotado de la topología débil posee la C.C.P. , y sea* $\mu \in M_t(S)^+$. *Entonces toda función* $f : S \to X$ *débilmente continua* μ*-dominada es fuertemente integrable Pettis.*

Demostración .- Como μ es perfecta, f es P-medible y basta probar que f es integrable Pettis. Al igual que en la prueba de 5.24 utilizaremos el teorema 2.10, por lo que sólo es necesario observar que para cada conjunto compacto $K \subset S$ la función $\psi_K : X^* \to R$ dada por $\psi_K(x^*) = \int_K \langle x^*, f\rangle \, d\mu$, es continua para la topología de Mackey $\tau(X^*,X)$. Para ver esto, observamos que f(K) es un conjunto debilmente compacto, y por la propiedad C.C.P. se tiene que $V = f(K)^\circ$ es un $\tau(X^*,X)$ entorno de cero en X^* sobre el que ψ_K está acotado. Por lo tanto $\psi_K = \int_K f \, d\mu \in X$. #

El siguiente teorema es una generalización de un resultado de Riddle-Saab-Uhl [1983] para espacios de Banach.

5.26 <u>TEOREMA</u> *Sea* $\mu \in M_t(S)^+$, X *un e.l.c. casi tonelado y separable, y* X^* *su dual topológico dotado de la topología fuerte* $\beta(X^*,X)$. *Si* $f : S \to X^*$ *es una función acotada y escalarmente medible, entonces* f *es fuertemente integrable Pettis.*

Demostración .- Como μ es perfecta, basta probar que f es integrable Pettis.

Si $B \subset X$ es un conjunto acotado, B° es un entorno de cero en X^*. Sea $B^{\circ\circ}$ su polar en X^{**}. Como X^* dotado de la topologia fuerte es casi completo, por ser X casi-tonelado, y f es acotada, bastará probar que la aplicación $\phi : x^{**} \to \int_S \langle x^{**}, f\rangle \, d\mu$ es $\sigma(X^{**},X^*)$ continua sobre cada $B^{\circ\circ}$, pues entonces el teorema de completitud de Grothendieck nos asegurará que $\phi \in X^*$. El mismo razonamiento aplicado a $f.\chi_E$, para cada $E \in B_o(S)$, permitirá concluir que f es integrable Pettis.

Como f es una función acotada existe un entorno de cero V en X tal que $f(S) \subset E = V^\circ$. Como X es separable, E dotado de la topología débil* es un compacto metrizable y por lo tanto un espacio Polaco.

Como $\{ x_{|E} : x \in X \}$ separa puntos de E, existe una subfamilia contable $\{ x_n : n \in \mathbb{N} \}$ que también los separa (Schwartz [1973]pag.105). Entonces la σ-álgebra generada por esta familia contable coincide con la σ-álgebra de Borel de E (con la topología débil*) teniendo $B_o(E) = B_a(E)$ (Schwartz pag.108), Esta σ-álgebra está contenida en la generada por los $x_{|E}$, que por el teorema de Edgard, es precisamente la σ-álgebra traza $B_a(X^*,\sigma(X^*,X)) \cap E$. Por lo tanto $B_o(E) = B_a(X^*,\sigma(X^*,X)) \cap E$. De esta igualdad se deduce que f es $B_o(E)$-medible, y como E es un espacio Polaco un Teorema de Schwartz prueba que es casi continua, considerando en E la topologia débil*. Por consiguiente, dado $\varepsilon > 0$, existe un compacto $K \subseteq S$ tal que $\mu(S-K) < \varepsilon$ y $f_{|K}$ es débil*-–continua.

$F = f(K)$ es un subconjunto débil* compacto de E. Si $\lambda \equiv \mu f^{-1}$ es la medida imagen de f definida sobre $B_o(E)$, se tiene que $\lambda(E-F) < \varepsilon$.

$M = \{ \langle x,f\rangle_{|K} : x \in B \}$ es un subconjunto relativamente compacto para la topología de la convergencia puntual t_p en el espacio de las funciones reales medibles definidas sobre K . En efecto, si $\langle x_j,f\rangle_{|K}$ es una red en M y $x^{**} \in B^{\circ\circ}$ es un punto de aglomeración en la $\sigma(X^{**},X^*)$ topología de la red x_j, entonces $\langle x^{**},f\rangle_{|K}$ es una función medible que es punto de aglomeración de la red $\langle x_j,f\rangle_{|K}$. Entonces por el teorema 2F de Bourgain-Fremlin-Talagrand [1978] se deduce que M es relativamente secuencialmente t_p-compacto en el espacio $\mathbb{R}^K$. Como $f(K)=F$, esto implica que $H = \{ x_{|F} : x \in B \}$ tiene la misma propiedad en $\mathbb{R}^F$. Como F es un subconjunto débil* compacto de E, también es un espacio Polaco, Aplicando el teorema principal de Rosenthal [1977] se tiene que H es relativamente t_p-compacto en el espacio de las funciones de la primera clase de Baire definidas sobre F , $B_1(F)$,(son las funciones que son limite puntual de sucesiones de funciones continuas). Aplicando el apartado (b) del citado teorema de Rosenthal se tiene que la aplicación $x^{**} \to \int_F \langle x^{**},x\rangle \, d\lambda$ es $\sigma(X^{**},X^*)$ continua sobre $B^{\circ\circ}$.

Sea x_j^{**} una red en $B^{\circ\circ}$ que converge hacia x^{**} en la $\sigma(X^{**},X^*)$ topología. Como E es acotado y $\lambda(E-F) < \varepsilon$, se tiene

$$\left| \int_S \langle x_j^{**},f\rangle \, d\mu - \int_S \langle x^{**},f\rangle \, d\mu \right| = \left| \int_E \langle x_j^{**},x^*\rangle \, d\lambda - \int_E \langle x^{**},x^*\rangle \, d\lambda \right| <$$
$$< \left| \int_F \langle x_j^{**},x^*\rangle \, d\lambda - \int_F \langle x^{**},x^*\rangle \, d\lambda \right| + 2\,C$$

donde $C = \sup\{|\langle x^{**},x^*\rangle| : x^{**} \in B^{\circ\circ} \text{ y } x^* \in E \}$. De la desigualdad anterior se deduce fácilmente la continuidad de la forma $\phi: x^{**} \to \int_S \langle x^{**},f\rangle \, d\mu$. #

5.27 TEOREMA *Sea S un espacio topológico metrizable,* $\mu \in M_t(S)^+$, *X un e.l.c. y* X^* *su dual dotado de la topología fuerte* $\beta(X^*,X)$. *Entonces toda función* $f : S \to X^*$ *acotada, escalarmente medible y* $\sigma(X^*,X)$*-casi continua es fuertemente integrable Pettis*

Demostración .- Basta iniciar la prueba como en el caso anterior. Ahora la débil* casi continuidad de f está asegurada por hipótesis. Si $K \subset S$ es un compacto con $\mu(S-K) < \varepsilon$ y $f_{|K}$ débil*continua, se tiene que K es un compacto metrizable y por lo tanto un espacio Polaco. Al igual que en el teorema anterior $M = \{<x,f>_{|K} : x \in B\}$ es relativamente secuencialmente compacto en $\mathbb{R}^K$. Ahora se aplica el teorema de Rosenthal directamente al espacio Polaco K (sin necesidad de subir a $F = f(K)$), se obtiene que $\{<x^{**},f>_{|K} : x^{**} \in B^{\circ\circ}\}$ es relativamente compacto en $B_1(K)$ y la restricción a $B^{\circ\circ}$ de la forma $\phi: x^{**} \to \int_K <x^{**},f> d\mu$ es $\sigma(X^{**},X^*)$ continua. Terminando la prueba de forma similar a la del teorema anterior . #

Para funciones con medida imagen en $\mathcal{M}_\infty(X)$ se tiene la siguiente condición suficiente de integrabilidad de Pettis fuerte.

5.28 PROPOSICION *Sea X un e.l.c. completo (resp. casi completo) y* $f : \Omega \to X$ *una función* μ*-dominada (resp.* X^**-esencialmente acotada)* $B_a(X)$*-medible. Si la medida imagen* μf^{-1} *definida sobre* $B_a(X)$ *está en* $\mathcal{M}_\infty(X)$, *entonces f es fuertemente integrable Pettis.*

Demostración .- En virtud del teorema 5.2 basta observar que para cada $p \in P(X)$, la restricción a V_p° del operador $T_f: X^* \to L^1(\mu)$ es $\sigma(X^*,X)$-$\|\ \|_1$ continuo.

Para cada $x^* \in X^*$ denotamos $t_n(x^*) = (x^* \wedge n) \vee (-n)$ con $n \in \mathbb{N}$. Sea x_j^* una red en V_p° débil* convergente hacia x^*. Para cada $n \in \mathbb{N}$ la red $|t_n(x_j^*) - t_n(x^*)|$ es equicontinua y uniformemente acotada. Como $\mu f^{-1} \in \mathcal{M}_\infty(X)$ se cumple :

(C) $$\lim_j \int_X |t_n(x_j^*) - t_n(x^*)| \, d\mu f^{-1} = 0$$

Sea $f_p \in L^1(\mu)$ una función de dominación de $\{ <x^*,f>: x^* \in V_p^\circ \}$. Como f es $B_a(X)$-medible se tiene que $p_\circ f$ es una función medible, y por lo tanto para cada $n \in \mathbb{N}$ $S_n = \{ s \in \Omega : p(f(s)) \leq n \} \in \Sigma$. Entonces para cada $y^* \in V_p^\circ$ $|< y^*, f(s)>| \leq n$ en todo S_n y $t_n(y^*)_\circ f = y^*{}_\circ f$ sobre S_n. Así, se tiene :

$$\begin{aligned} \| T_f(x_j^*) - T_f(x^*) \|_1 &= \int_\Omega |<x_j^* - x^*, f>| \, d\mu = \\ &= \int_{S_n} |<x^* - x^*, f>| \, d\mu + \int_{\Omega - S_n} |<x^* - x^*, f>| \, d\mu \leq \\ &\leq \int_X |t_n(x_j^*) - t_n(x^*)| \, d\mu f^{-1} + \int_{\Omega - S_n} f_p \, d\mu \end{aligned}$$

Como f_p es integrable y $\mu(\Omega - S_n) \to 0$ se tiene que $\int_{\Omega - S_n} f_p \, d\mu \to 0$. Esto junto con (C) implica que $\| T_f(x_j^*) - T_f(x^*) \|_1 \to 0$. Con lo que se tiene probada la continuidad de T_f. #

El resultado anterior no es cierto si se sustituye $\mathcal{M}_\infty(X)$ por $\mathcal{M}_\infty(X_w)$. Es conocido que si X es un espacio de Banach $\mathcal{M}_\sigma(X_w) = \mathcal{M}_\infty(X_w)$, y existen ejemplos de funciones escalarmente medible acotadas que no son integrables Pettis.

5.29 <u>COROLARIO</u> *Si X es un e.l.c. casi completo y $\mu \in \mathcal{M}_\infty(S)^+$, entonces toda función $f : S \to X$ continua y acotada es fuertemente integrable Pettis.*

<u>Demostración</u> .- Basta observar que la medida imagen por una función continua de $\mu \in \mathcal{M}_\infty(S)$, está en $\mathcal{M}_\infty(X)$. #

Como veremos en el epígrafe 8, esta propiedad caracteriza al espacio $\mathcal{M}_\infty(S)$.

5.30 <u>NOTAS</u> .- Como comprobaremos más adelante si X es un e.l.c. casi completo con la Propiedad Debil de Radon Nikodým, toda función integrable Pettis que es X*-esencialmente acotada es fuertemente integrable Pettis.

Musial [1979] señala que si X es un espacio de Banach y $f : \Omega \to X$ es una función escalarmente medible, existe un conjunto $A \in \Sigma$ con $\mu(A)=0$ y una sucesión disjunta $A_n \in \Sigma$ tal que $\Omega = A \cup (\cup_n A_n)$ y $f.\chi_{A_n}$ está esencialmente acotada para cada n, (tomar $g_n = \sup_{L^1(\mu)} \{ |<x^*,f>| \wedge n : \|x^*\| \leq 1 \}$ y $A_n = \{ g_n(s) \leq n-1 \} - A_{n-1}$). Este resultado prueba que si X es un espacio de Banach con la propiedad de que toda función X*-esencialmente acotada es P-medible, entonces toda función escalarmente medible es P-medible. También se tiene que si X es un espacio de Banach con la Propiedad Debil de Radon--Nikodým entonces $P(\mu,X) = P_o(\mu,X)$.

En los comentarios situados tras la prueba de 5.2 señalabamos una condición suficiente para que el recorrido de la integral indefinida de una función escalarmente integrable con (D)- $\int f\, d\mu \in X^{**}$ fuese relativamente compacto para la topología natural $\varepsilon(X^*,X)$. En general esto no ocurre, aún para medidas t-aditivas, por ejemplo si λ es la medida de Lebesgue en $[0,1]$ y $f:[0,1] \to c_o=X$ está definida por $f(t)= (n. \chi_{(0,1/n]}(t))$, f es escalarmente integrable $m_f(E)= (n. \lambda(E \cap (0,1/n]))\in l^\infty=X^{**}$, y m_f no tiene recorrido relativamente compacto en l^∞ (considerese la sucesión $m_f([0,1/m])$).

Si $f:\Omega \to X$ es una función fuertemente integrable Pettis se cumple que para cada $A \in \Sigma$ con $\mu(A)>0$ el $\text{core}(f,A) = \overline{\text{co}}\ \{ (1/\mu(E)).m_f(E):\ A\supset E \in\Sigma^* \}$ es un conjunto separable para cada conjunto A. Podriamos pensar que la condición core(f,A) es separable para cada $A\in\Sigma^*$ implica que f es P-medible. Fremlin-Talagrand [1979] dan ejemplos de funciones integrables Pettis cuya integral indefinida tiene recorrido separable, y por lo tanto con core(f,A) separable, y que no son fuertemente integrables Pettis.

Considerando μ definida sobre las partes de $\mathbb{N}$ dada por $\mu(\{n\})= 1/(n^2)$ y la función $f: N \to l^1$ dada por $f(n)= e_n$, f es fuertemente integrable Pettis con $m_f(A)= \sum_{n\in A} (1/(n^2)).e_n$, y $\text{core}(f, N) = B_{l^1}$. Obteniendo un ejemplo de una función fuertemente integrable Pettis de cuyo core(f,A) poco más se puede decir que el que es separable .

Para finalizar este epígrafe vamos a exponer dos aplicaciones de lo que en el se ha expuesto.

5.31 UNA CARACTERIZACION DE LOS ESPACIOS DE BANACH QUE NO CONTIENEN A l^1.

Se dice que un espacio de Banach no contiene a l^1 si ningun subespacio de X es isomorfo a l^1. Por B_{X^*} denotaremos a la bola unidad de X* dotada de la topología débil*.

Los espacios de Banach separables que no contienen a l^1 han sido caracterizados por Rosenthal [1977] y Odell-Rosenthal [1975] en los siguientes terminos : " Si X es un espacio de Banach que separable, son equivalentes : (a) X no contiene a l^1 ; (b) cada $x^{**} \in X^{**}$ es el débil*-limite de una sucesión $x_n \in X$; (c) para cada $x^{**} \in X^{**}$, $x^{**}|_{B_{l^1}}$ es de la primera clase de Baire ; y (d) Cada sucesión acotada $x_n^{**} \in X^{**}$ posee una subsucesión débil* convergente."

Haydon [1976] (puede verse también en Stegall [1975]) ha observado que en el caso no separable, espacios como $c_o(\Gamma)$, con Γ no numerable, no contienen copias de l^1 y no cumplen (b), pues $c_o(\Gamma)$ no es débil* secuencialmente compacto en $l^\infty(\Gamma)$. Utilizando convergencia en casi todo punto de B_{X^*} en lugar de debil* convergencia en (b), ha conseguido caracterizar los espacios que no contienen a l^1 en los siguientes terminos : " Sea X un espacio de Banach, son equivalentes : (a) X no contiene a l^1 ; (b) para cada medida de Radon λ sobre B_{X^*} y cada $x^{**} \in X^{**}$, $x^{**}|_{B_{X^*}}$ es el limite en casi todo punto (λ), de una sucesión $x_n \in X$; y (c) cada $x^{**} \in X^{**}$ es universalmente medible sobre B_{X^*}(es decir, es medible con respecto a cada medida de Radon definida sobre B_{X^*})."

El espacio $c_o(\mathbb{R})$ pone de manifiesto que la caracterización (d) del teorema de Rosenthal no se cumple en el caso no separable (por ejemplo la sucesión $g_n \in l^\infty(\mathbb{R})$, donde $g_n(t)$ es el n-esimo termino de la expansión diadica de t, no posee subsucesiones puntualmente convergente).

Utilizando la caracterización de las funciones fuertemente integrables Pettis como aquellas que son P-medibles se consigue completar la caracterización de Haydon en el siguiente sentido:

5.31-A <u>TEOREMA</u> *Sea* X *un espacio de Banach . Son equivalentes : (a)* X *no contine a* l^1; *y (d) Para cada medida de Radon* λ *sobre* B_{X^*} *,cada sucesión* $x_n^{**} \in X^{**}$ *posee una subsucesión que converge en casi todo punto* (λ) *de* B_{X^*}.

Demostración .- La implicación (a) $\to$ (d) se deduce de la prueba dada por Stegall del teorema de caracterización de Haydon. También se obtiene facilmente del teorema 2F de Fremlin [1975] , pues toda medida de Radon sobre B_{X^*} es una medida perfecta, y como cada sucesión x_n^{**} acotada en X^{**} posee puntos de aglomeración para la topología debil* y cada x_n^{**} es universalmente medible sobre B_{X^*}, para cada medida de Radon sobre B_{X^*} la sucesión x_n^{**} posee una subsucesión convergente en casi todo punto.

(d) $\to$ (a), Fremlin-Talagrand [1979] dan un ejemplo de una función f, valorada en l^∞, que es μ-integrable Pettis pero no fuertemente. Entonces existe una sucesión acotada $y_n^{**} \in (l^\infty)^*$ tal que $\langle y_n^{**}, f\rangle$ no posee subsucesiones convergentes en casi todo punto (μ).

No es restrictivo suponer que f toma valores en la bola unidad B_{l^∞}. Como B_{l^∞} es metrizable y compacta para la topología débil*, por un teorema de Schwartz [1973] se tiene que la σ-álgebra de Borel de B_{l^∞} coincide con la traza de la σ-álgebra $B_a(l^\infty, \sigma(l^\infty, l^1))$ sobre B_{l^∞}. Como f es medible con respecto a esta σ-álgebra, la medida imagen $\lambda = \mu f^{-1}$ es una medida de Radon sobre B_{l^∞} , y la sucesión y_n^{**} no posee subsucesiones convergentes en casi todo punto (λ) de B_{l^∞}, pues $\langle y_n^{**}, f\rangle$ no las tiene.

Supongamos que X es un espacio de Banach que contiene a l^1. Sea $i: l^1 \to X$ la inclusión canonica , $i^*: X^* \to l^\infty$ su transpuesta e $i^{**}: (l^\infty)^* \to X^{**}$ su bitranspuesta. No es restrictivo suponer que $i^*(B_{X^*}) = B_{l^\infty}$. Como ambos conjuntos son compactos, existe una medida de Radon ν sobre B_{X^*} tal que λ es la medida imagen νi^{*-1} . Además, como i^* es continua, lleva conjuntos ν-nulos a conjuntos λ-nulos.

Sea $x_n^{**} = i^{**}(y_n^{**})$. como $\langle x_n^{**}, x^*\rangle = \langle y_n^{**}, i^*(x^*)\rangle$ se obtiene que x_n^{**} es una sucesión acotada en X^{**} que no posee subsucesiones convergentes en casi todo punto (ν) de B_{X^*}, y por lo tanto no se cumple (d). #

En el epígrafe 9 daremos una prueba directa de este resultado, restringiendo la condición a que cada sucesión acotada $x_n \in X$ posea subsucesiones convergentes en casi todo punto.

5.32 UNA PRUEBA DE QUE TODO E.L.C. CASI COMPLETO ES UN μ-ESPACIO PARA LA TOPOLOGIA DEBIL . Valdivia [1977].

Un subconjunto B de un espacio topológico S se dice que es acotado en S ("bounding") si la resticción a B de cada función $f \in C(S)$ es una función acotada. Se dice que S es un μ-espacio si cada subconjunto acotado de S es relativamente compacto en S (Buchwalter [1973]).

En primer lugar damos una demostración directa del siguiente resultado de Buchwalter, pues en su prueba se hacen algunas consideraciones a tener en cuenta posteriormente.

5.32-A <u>LEMA</u> Si B es un conjunto acotado en S, entonces su adherencia en βS $\overline{B}^{\beta S}$ está contenida en νS .

<u>Demostración</u> .- Sea $\alpha \in \overline{B}^{\beta S}$. Existe una red $s_j \in B$ tal que para cada $g \in C_b(S)$ se cumple $g(s_j) \to \alpha(g)$. Como $|g(s_j)| \leq \sup\{|g(s)| : s \in B\} = \|g\|_B$ se tiene que $|\alpha(g)| \leq \|g\|_B$ para $g \in C_b(S)$. Consideramos el operador $\phi: C(S) \to \mathbb{R}$ definido por $\phi(f) = \lim_n ((f \wedge n) \vee (-n))$, este limite existe porque para funciones positivas $f \in C(S)$, la sucesión $\phi(f \wedge n)$ es creciente y está acotada por $\|f\|_B$. El funcional ϕ viene representado por una medida de Hewitt que coincide con α, pues es la medida que representa a la restricción de ϕ sobre $C_b(S)$. Así, se tiene que $\alpha \in \nu S$. #

Siguiendo a Buchwalter consideramos el siguiente subconjunto de βS, $S^{\#} = \bigcup \{ \overline{B}^{\beta S} : B \subset S \text{ es acotado} \}$. Si $S = S^{\#}$ entonces S es un μ-espacio, en efecto, si $B \subset S$ es acotado entonces $\overline{B}^{\beta S} \subset S$, como $\overline{B}^{\beta S}$ es compacto, se tiene que B es relativamente compacto en S.

Segun se acaba de ver en la prueba del lema, para cada $\alpha \in S^{\#}$ existe un acotado $B \subset S$ tal que $|\alpha(f)| \leq \|f\|_B$ para cada $f \in C(S)$.

5.32-B <u>PROPOSICION</u> $S^{\#} \subset \mathcal{M}_z(S) \cap \beta S$.

<u>Demostración</u> .- Sea $H \subset C_b(S)$ un subconjunto uniformemente acotado y puntualmente compacto. Para cada $\psi \in H$ sea ψ^{ν} su extensión a νS , y $H^{\nu} = \{ \psi^{\nu} : \psi \in H \}$. H^{ν} es numerablemente compacto para la topología de la

convergencia puntual sobre υS. En efecto, sea ψ_n una sucesión en H, y sea $\psi \in H$ un punto de aglomeración de ψ_n para la topología de la convergencia puntual. Por una de las propiedades que caracterizan a los puntos $\alpha \in \beta S$ que estan en υS, (vease Wheeler [1983] 2.5), existe $s \in S$ tal que $\psi(s) = \overset{\vee}{\psi}(\alpha)$ y $\psi_n(s) = \overset{\vee}{\psi}_n(\alpha)$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Entonces $\overset{\vee}{\psi}$ es un punto de aglomeración de la sucesión $\overset{\vee}{\psi}_n$ en la topologia de la convergencia puntual sobre υS.

Supongamos ahora que $\alpha \in S^{\#}$ ($\subset \upsilon S$), y sea $B \subset S$ un acotado tal que $\alpha \in \overline{B}^{\beta S}$. Como $\{ \overset{\vee}{\psi}_{|\overline{B}^{\beta S}} : \psi \in H \}$ es numerablemente compacto para la topología de la convergencia puntual, también es compacto para dicha topología (Schaefer [1971] IV.11.1).

Sea $\psi_j \in H$ una red puntualmente convergente hacia $\psi \in H$. Entonces $\overset{\vee}{\psi}_{|\overline{B}^{\beta S}}$ es el unico punto de aglomeración de $\overset{\vee}{\psi}_j{}_{|\overline{B}^{\beta S}}$, pues $\overset{\vee}{\psi}_{|B} = \psi_{|B}$. Por consiguiente $\alpha(\psi_j)$ converge hacia $\alpha(\psi)$. De donde resulta que $\alpha \in \mathcal{M}_z(S)$. #

Sea X un e.l.c. , denotamos por $\bar{\upsilon} X$ al subconjunto de $(X^*)'$ (dual algebraico de x^*)formado por los x^{**} tales que para cada subconjunto numerable x_n^* de X^* existe un $x \in X$ verificando $\langle x^{**}, x_n^* \rangle = \langle x_n^*, x \rangle$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Siguiendo el trabajo de Valdivia [1982], en el anexo comprobamos que $\bar{\upsilon} X$ dotado de la topología $\sigma(\bar{\upsilon}X, X^*)$ es un modelo de la real compactificación de Hewitt de X_w, también probamos que la aplicación $\phi : \upsilon X_w \rightarrow \bar{\upsilon} X$ dada por $\langle \phi(\alpha), x^* \rangle = \alpha(x^*)$ es un homeomorfismo entre υX_w y $\bar{\upsilon} X$.

5.32-C <u>TEOREMA</u> *Si* X *es un e.l.c. casi completo, entonces* $X_w = X_w^{\#}$ *y por consiguiente* X_w *es un* μ*-espacio.*

<u>Demostración</u> .- Sea $\alpha \in X_w^{\#}$. Por la proposición anterior $\alpha \in \mathcal{M}_z(X_w) \cap \beta X_w$. La función identidad $i : X \to X$ es una función escalarmente medible, y según hemos indicado antes, existe un conjunto $B \subset X$ acotado tal que $|\int \langle x^*, x \rangle \, d\alpha| < \|x^*\|_B$. Como α es una medida $\{0,1\}$ valuada para cada $x^* \in X^*$ existe un $x_\alpha \in X$ tal que $\alpha(\{x : \langle x^*, x \rangle = \langle x^*, x_\alpha \rangle\}) = 1$, luego $\int \langle x^*, x \rangle \, d\alpha = \langle x^*, x_\alpha \rangle$. Seguidamente, comprobamos que x_α no depende de x^*, es decir que $i : X \to X$ es α-integrable Pettis.

Observemos en primer lugar que como $|<x^*, x_\alpha>| \leqslant \|x^*\|_B$, se sigue que para cada $x^* \in B°$ $|<x^*,x>| \leqslant 1$ en casi todo punto (α) $x \in X$, es decir, i es X^*-esencialmente acotada. Aplicando el corolario 5.11 se obtiene que i es α-integrable Pettis, o lo que es lo mismo que (con la notación introducida antes) $x_\alpha = \phi(\alpha) \in X$. Como ϕ es un homeomorfismo que actua sobre X como la identidad, esto es equivalente a que $\alpha \in X$. Hemos probado que $X_w = X_w^{\#}$ y por lo tanto X_w es un μ-espacio. #

6 EL ESPACIO DE LAS FUNCIONES FUERTEMENTE INTEGRABLES PETTIS

Dedicamos este epígrafe al estudio de condicones de convergencia para sucesiones de funciones fuertemente integrables Pettis. Extenderemos al caso en que X es un e.l.c. completo un resultado de Musial [1980] que afirma que, en el caso de que X sea un espacio de Banach y (Ω,Σ,μ) sea un espacio de medida finito, las funciones fuertemente integrables Pettis son aquellas que se pueden aproximar mediante funciones simples en la topología de $P(\mu,X)$ dada por

$$\overline{p}\,(f) = \sup\left\{ \int_\Omega |\langle x^*,f\rangle|\, d\mu \ :\ x^* \in V_p^\circ \right\} \qquad (p\in P(X))$$

Aplicaremos este resultado para describir el completado de $P_o(\mu,X)$ y estudiar propiedades de su topología débil.

En todo el epígrafe (Ω,Σ,μ) será un espacio de medida finito .

Comenzamos extendiendo un resultado previo de Geitz [1981] relativo al caso de espacios de Banach y medidas perfectas.

6.1 <u>TEOREMA</u> *Sea* X *un e.l.c. casi completo y* $f:\Omega\to X$ *una función P-medible. Si* $f_n\in P_o(\mu,X)$ *es una sucesión de funciones que converge a* f *escalarmente en medida y tal que para cada* $p\in P(X)$ *el conjunto* $\{ \langle x^*,f_n\rangle : x^*\in V_p^\circ,\ n\in \mathbb{N} \}$ *es uniformemente integrable, entonces* $f\in P_o(\mu,X)$ *y* $m_{f_n}(E)$ *converge débilmente a* $m_f(E)$ *para cada* $E\in\Sigma$.

<u>Demostración</u> .- De la hipótesis se deduce que $\{ \langle x^*,f\rangle : x^*\in V_p^\circ \}$ es uniformemente integrable. En efecto, dado $\varepsilon>0$ existe $\delta>0$ tal que si $\mu(E)<\delta$ entonces $\int_E |\langle x^*,f_n\rangle|\, d\mu<\varepsilon$ para cada $x^*\in V_p^\circ$ y cada $n\in\mathbb{N}$. Fijado $x^*\in V_p^\circ$ como $\langle x^*,f_n\rangle$ converge en medida a $\langle x^*,f\rangle$, existe una subsucesión convergente en casi todo punto $\langle x^*,f_{n(k)}\rangle\to\langle x^*,f\rangle$. Aplicando el lema de Fatou se tiene que si $\mu(E)<\delta$ entonces $\int_E|\langle x^*,f\rangle|\, d\mu \leq \liminf_k \int_E|\langle x^*,f_{n(k)}\rangle|\, d\mu\leq\varepsilon$.

Por otra parte, fijado $E \in \Sigma$, sea $x_n = \int_E f_n \, d\mu$. Aplicando el teorema de convergencia de Vitali se deduce que $\langle x^*, x_n \rangle \to \int_E \langle x^*, f \rangle \, d\mu$ para cada $x^* \in X^*$. Por consiguiente $\{x_n\}$ es una sucesión de Cauchy para la topología débil $\sigma(X,X^*)$. Probaremos que $M = \{ x_n : n \in \mathbb{N} \}$ es débilmente relativamente compacto, lo que implicará que la sucesión x_n es débilmente convergente. Entonces, su limite x_E coincide con la integral $\int_E f \, d\mu$, con lo que concluirá la demostración del teorema.

Aplicaremos el teorema 11.2 de Schaefer [1971]. Sea $x_j^* \in V_p^\circ$ una sucesión para la que existen los limites iterados $\lim_j \lim_n \langle x_j^*, x_n \rangle = a$ y $\lim_n \lim_j \langle x_j^*, x_n \rangle = b$.

Como f es P-medible y cada f_n también lo es, aplicando un proceso diagonal, se puede obtener una subsucesión $x_{j(k)}^*$ tal que existen en casi todo punto $t \in \Omega$, los limites $\lim_k \langle x_{j(k)}^*, f(t) \rangle = \langle x^*, f(t) \rangle$ y $\lim_k \langle x_{j(k)}^*, f_n(t) \rangle = \langle x^*, f_n(t) \rangle$ cualquiera que sea $n \in \mathbb{N}$ y siendo x^* un punto de aglomeración de dicha subsucesión en la topología $\sigma(X^*,X)$. Por el teorema de Vitali se tiene que $\int_E \langle x_{j(k)}^*, f \rangle \, d\mu \to \int_E \langle x^*, f \rangle \, d\mu$.
Analogamente, para cada $n \in \mathbb{N}$ se tiene $\int_E \langle x_{j(k)}^*, f_n \rangle \, d\mu \to \int_E \langle x^*, f_n \rangle \, d\mu$.
Por lo tanto

$$a = \lim_j \lim_n \langle x_j^*, x_n \rangle = \lim_j \lim_n \int_E \langle x_j^*, f_n \rangle \, d\mu = \lim_j \int_E \langle x_j^*, f \rangle \, d\mu = \int_E \langle x^*, f \rangle \, d\mu$$

También se tiene

$$b = \lim_n \lim_j \langle x_j^*, x_n \rangle = \lim_n \lim_k \int_E \langle x_{j(k)}^*, f_n \rangle \, d\mu =$$
$$= \lim_n \int_E \langle x^*, f \rangle \, d\mu = \lim_n \langle x^*, x_n \rangle = \int_E \langle x^*, f \rangle \, d\mu$$

Por consiguiente, $a = b$. Con lo que tenemos probado que la sucesión x_n tiene la propiedad de permutabilidad de limites respecto de cada sucesión x_j^* en V_p°.

Entonces es fácil ver que toda sucesión $\{y_n\}$ en M también tiene esta propiedad de permutabilidad de limites. Aplicando el citado teorema de Schaefer se deduce que M es relativamente compacto para la topología débil, y con ello finaliza la prueba del teorema. #

6.2 COROLARIO *Sea* X *un e.l.c. casi completo* , f_n *una sucesión en* $P_o(\mu,X)$ *y* $f : \Omega \to X$ *una función P-medible. Se supone que para cada* $x^* \in X^*$ *la sucesión* $\langle x^*, f_n \rangle$ *converge en casi todo punto hacia* $\langle x^*, f \rangle$ *y que para cada* $p \in P(X)$ *existe una función* $\psi_p \in \mathcal{L}^1(\mu)$ *tal que* $p(f_n(t)) \leq \psi_p(t)$ *en casi todo punto, para todo* $n \in N$. *Entonces* $f \in P_o(\mu,X)$ *y* $m_{f_n}(E)$ *converge debilmente hacia* $m_f(E)$ *para cada* $E \in \Sigma$.

<u>Demostración</u> .- De las hipótesis del corolario se deducen las hipótesis de 6.1 pues como (Ω,Σ,μ) se supone finito, la convergencia en casi todo punto implica convergencia en medida. #

6.3 <u>LEMA</u> *Sea* X *un e.l.c. completo y* $f : \Omega \to X$ *una función escalarmente integrable. Si* $f_j : \Omega \to X$ *es una red de funciones (fuertemente) integrables Pettis, tal que para cada* $p \in P(X)$

(A) $$\lim_j \sup \left\{ \int_\Omega | \langle x^*, f_j - f \rangle | \, d\mu \;:\; x^* \in V_p^\circ \right\} = 0 ,$$

entonces f *es (fuertemente) integrable Pettis.*

<u>Demostración</u> .- Sea $E \in \Sigma$, denotamos por $x_j = \int_E f_j \, d\mu$. Como para cada $p \in P(X)$ se cumple

$$p(x_j - x_h) \leq \sup \left\{ \int_\Omega | \langle x^*, f_j - f \rangle | \, d\mu \;:\; x^* \in V_p^\circ \right\} + \sup \left\{ \int_\Omega | \langle x^*, f_h - f \rangle | \, d\mu \;:\; x^* \in V_p^\circ \right\} ,$$

de (A) se deduce que x_j es una red de Cauchy en X, y por lo tanto es convergente hacia un $x \in X$.

Es fácil comprobar que para cada $x^* \in X^*$ se cumple

$$\langle x^*, x \rangle = \lim_j \langle x^*, x_j \rangle = \lim_j \int_E \langle x^*, f_j \rangle \, d\mu = \int_E \langle x^*, f \rangle \, d\mu ,$$

y por consiguiente se tiene que $x = \int_E f \, d\mu$. Con lo que se ha probado que f es integrable Pettis.

Utilizando que $m_{f_j}(\Sigma)$ es precompacto en X para cada j, y que $m_{f_j}(E)$ converge a $m_f(E)$ uniformemente en $E \in \Sigma$, se deduce facilmente que $m_f(\Sigma)$ es precompacto en X, y por lo tanto relativamente compacto (pues X es completo).#

Si en el lema anterior se sustituye la red f_j por una sucesión f_n , bastará suponer que X es casi completo.

Una primera consecuencia de este lema es que $P_o(\mu,X)$ es un subespacio cerrado de $P(\mu,X)$.

6.4 TEOREMA *Si X es un e.l.c. completo, entonces las funciones simples son densas en* $P_o(\mu,X)$.

Demostración .- Sea π una partición finita de Ω formada por conjuntos de Σ , y sea $E_\pi : L^1(\mu) \to L^1(\mu)$ definido por

$$E_\pi(g) = \sum_{A\in\pi} (1/\mu(A)).\int_A g \; d\mu \,.\, \chi_A \quad ,$$

E_π es un operador lineal acotado y $\| E_\pi \| \leq 1$.

Consideremos el conjunto de las particiones finitas de Ω ordenado por refinamiento. Vamos a comprobar que si $f\in P_o(\mu,X)$, entonces la red de funciones simples $f_\pi = \sum_{A\in\pi} (1/\mu(A)).\int_A f \; d\mu \,.\, \chi_A$ converge a f en la topología de $P(\mu,X)$.

Sea $p\in P(X)$, como $f\in P_o(\mu,X)$, por el teorema 5.2 sabemos que el conjunto $\{<x^*,f> : x^*\in V_p^\circ\}$ es compacto en $L^1(\mu)$. Dado $\varepsilon>0$, existe un conjunto finito $\{x_1^*,x_2^*,\dots,x_m^*\}\subset V_p^\circ$ tal que para cada $x^*\in V_p^\circ$, existe un $n_o\in\{1,2,\dots,m\}$ con $\| <x^*,f> - <x_{n_o}^*,f> \|_1 < \varepsilon/3$.

Es fácil comprobar que cada $<x^*,f>$ es el limite en $\| \;\|_1$ de la red $E_\pi(<x^*,f>)$, luego existirá una partición π_o tal que para cada x_n^* (n=1,2,..,m) se cumple $\| <x_n^*,f> - E_\pi(<x_n^*,f>) \|_1 < \varepsilon/3$, para cada π más fina que π_o. Entonces, para cada $x^*\in V_p^\circ$ (eligiendo n_o como antes) se cumple

$$\int_\Omega | <x^*,f> - <x^*,f_\pi> | \, d\mu = \| <x^*,f> - E_\pi(<x^*,f>) \|_1 \leq$$

$$\leq \| <x^*,f> - <x_{n_o}^*,f> \|_1 + \| <x_{n_o}^*,f> - E_\pi(<x_{n_o}^*,f>) \|_1 +$$

$$+ \| E_\pi(<x_{n_o}^*,f>) - E_\pi(<x^*,f>) \|_1 < \varepsilon/3+\varepsilon/3+\varepsilon/3 = \varepsilon$$

Por lo tanto

$$\overline{p}\,(f - f_\pi) = \sup \left\{ \int_\Omega |<x^*, f - f_\pi>| \, d\mu : x^*\in V_p^\circ \right\} < \varepsilon$$

Con lo que se tiene probado que f_π converge a f en $P(\mu,X)$. #

La demostración de este teorema también puede hacerse mediante la construcción de una martingala f_π convergente a f, de forma analoga a la prueba de Musial [1980] . De hecho, nuestra prueba consiste en observar que la red f_π converge hacia f en $P(\mu,X)$. Al igual que en el caso escalar, si Σ está numerablemente generada, la aproximación a f se puede realizar mediante sucesiones de la forma f_{π_n}.

Si X es un espacio de Banach o un espacio de Frechet, entonces $P(\mu,X)$ es pseudo-metrizable y el siguiente corolario resulta inmediato.

6.5 COROLARIO *Sea* X *un espacio de Frechet, y* $f \in P(\mu, X)$. *Entonces son equivalentes : (a)* $f \in P_o(\mu, X)$ *; y (b) existe una sucesión de funciones simples* f_n *que converge a* f *en* $P(\mu, X)$. #

6.6 NOTA .- De la condición (b) se deduce la existencia de una subsucesión $f_{n(k)}$ de f_n tal que para cada $x^* \in X^*$, $\langle x^*,f_{n(k)}\rangle \to \langle x^*,f\rangle$ en casi todo punto (μ).

En efecto, sea $p_1 \leqslant p_2 \leqslant \dots \leqslant p_n \leqslant \dots$ una sucesión creciente de seminormas que define la topología de X . Procediendo como en la prueba cásica de la completitud de $L^p(\mu)$ es posible encontrar una subsucesión $f_{n(k,1)}$ de f_n tal que para cada $x^* \in V^\circ_{p_1}$ la sucesión $\langle x^*,f_{n(k,1)}\rangle$ converge en casi todo punto hacia $\langle x^*,f\rangle$. Con el mismo criterio se extrae una subsucesión $f_{n(k,2)}$ de $f_{n(k,1)}$, tal que para cada $x^* \in V^\circ_{p_2}$ la subsucesión $\langle x^*,f_{n(k,2)}\rangle$ converge en casi todo punto hacia $\langle x^*,f\rangle$. Procediendo de modo recurrente , la subsucesión diagonal $f_{n(k)} = f_{n(k,k)}$ posee las propiedades requeridas, pues es una subsucesión eventual en todas las anteriores y $X^* = \bigcup_{n=1}^\infty V^\circ_{p_n}$.

Observese que la subsucesión extraida $f_{n(k)} = g_k$ sigue convergiendo a f en $P(\mu,X)$. Como $\{\langle x^*,f\rangle : x^* \in V^\circ_p\}$ es uniformemente integrable para cada $p \in P(X)$, se sigue fácilmente que entonces $\{\langle x^*,g_k\rangle : x^* \in V^\circ_p , k \in \mathbb{N}\}$ también es uniformemente integrable .

Como consecuencia de estas anotaciones se obtiene la siguiente extensión del teorema 6 de Geitz [1981] .

6.7 TEOREMA *Sea* X *un espacio de Frechet, y* $f: \Omega \to X$ *una función P-medible . Una condición necesaria y suficiente para que* f *sea fuertemente integrable Pettis, es que exista una sucesión de funciones simples* g_k *que cumple : (a)* $\{ \langle x^*, g_k \rangle : x^* \in V_p^\circ , k \in \mathbb{N} \}$ *es uniformemente integrable para cada* $p \in P(X)$ *; y (b)* $\langle x^*, f \rangle$ *es el límite en casi todo punto de* $\langle x^*, g_k \rangle$ *, para cada* $x^* \in X^*$.

Demostración .- Es una consecuencia inmediata del teorema 6.1 y las anotaciones anteriores 6.6 . #

Volviendo al caso general, si X es un e.l.c. completo, como consecuencia de 6.3 y 6.4 se tiene que las funciones simples son densas en $P(\mu, X)$ si y sólo si $P_o(\mu,X) = P(\mu,X)$.

6.8 LA COMPLECCION DE $\mathcal{P}_o(\mu , X)$

Por $\mathcal{P}_o(\mu,X)$ denotaremos al espacio localmente convexo obtenido al separar $P_o(\mu,X)$ identificando las funciones que son escalarmente equivalentes. Supondremos que X es un e.l.c. completo.

Consideremos la inclusión del producto tensorial $L^1(\mu) \otimes X$ en $\mathcal{P}_o(\mu,X)$ dada por $i: L^1(\mu) \otimes X \to \mathcal{P}_o(\mu,X)$ con $i(\sum g_i \otimes x_i) = \sum g_i . x_i$. En $L^1(\mu) \otimes X$ la topología inducida por la de $\mathcal{P}_o(\mu,X)$, es la topología producto tensorial inyectivo. Por consiguiente el completado de $\mathcal{P}_o(\mu,X)$ se puede representar como el completado del producto tensorial, $L^1(\mu) \tilde{\otimes}_\varepsilon X$. Y como $L^1(\mu)$ tiene la propiedad de la aproximación y X es completo, $L^1(\mu) \tilde{\otimes}_\varepsilon X$ se puede identificar con el ε producto de Schwartz $L^1(\mu) \varepsilon X = L_e(X_c^*, L^1(\mu))$, el espacio de los operadores débil*-débil continuos que transforman equicontinuos de X* en relativamente compactos de $L^1(\mu)$, dotado de la topología de la convergencia uniforme sobre equicontinuos (las identificaciones pueden encontrarse en Köthe [1979]).

La inclusión de $\mathcal{P}_o(\mu,X)$ en $L_e(X_c^*, L^1(\mu))$ viene dada por la aplicación $f \to (T_f : x^* \to \langle x^*, f \rangle)$,(estos operadores T_f han sido estudiados en 5.2).

Razonando como en el caso de los espacios de Banach (Diestel-Uhl[1977], VIII.1.4) se obtiene que el espacio de las medidas $m:\Sigma \to X$ μ-continuas, con recorrido relativamente compacto, dotado de la topología localmente convexa dada por la p-semivariaciones también se puede identificar con $L^1(\mu) \tilde{\otimes}_\varepsilon X$. En este caso la inclusión de $\mathcal{P}_o(\mu,X)$ en este espacio de medidas viene dada por la aplicación que a cada función integrable le hace corresponder su integral indefinida.

En el anexo de Thomas [1976]se prueba que si X es un espacio de Banach <u>separable</u> y λ es la medida de Lebesgue en el intervalo $[0,1]$, $P(\lambda,X)$ es completo si y sólo si X es de dimensión finita, la prueba de este resultado está basada en que las funciones escalarmente medibles son fuertemente medibles.

6.9 COMPACIDAD DEBIL EN $\mathcal{P}_o(\mu, X)$

Cuando X es un espacio de Banach, Lewis [1973] y Brooks-Dinculeanu [1980] y [1982]han caracterizado los subconjuntos del subespacio $P_1(\mu,X) \subset P_o(\mu,X)$, formado por las funciones medibles Bochner, que son débilmente condicionalmente compactos (e.d. donde cada sucesión posee una subsucesión débilmente de Cauchy). Collins-Ruess [1983] extienden esta caracterización al caso de que X sea un espacio de Frechet utilizando la identificación del completado de $P_1(\mu,X)$ como el ε producto, $L^1(\mu)\ \varepsilon\ X \simeq L_e(X^*_c, L^1(\mu))$. Siguiendo los resultados del trabajo de Collins-Ruess y la identificación del completado de $\mathcal{P}_o(\mu,X)$ como $L_e(X^*_c, L^1(\mu))$ se tienen entre otros los siguientes resultados:

6.9.A <u>TEOREMA</u> *Sea* (Ω,Σ,μ) *un espacio de medida finito, y sea* X *un espacio de Frechet. Entonces, un subconjunto* $H \in \mathcal{P}_o(\mu,X)$ *es débilmente condicionalmente compacto si y sólo si se cumplen : (a) Para cada* $x^* \in X^*$ *el conjunto* $H_{x^*}=\{\langle x^*,f\rangle : f \in H\}$ *es relativamente débilmente compacto en* $L^1(\mu)$ *; y (b) el conjunto* $\{\int_E f\, d\mu : f \in H\}$ *es débilmente condicionalmente compacto en* X *para cada* $E \in \Sigma$.

Demostración .- Collins-Ruess ([1983],1.6) prueban que si X e Y son espacios de Frechet, e Y es debilmente secuencialmente completo, entonces un subconjunto $H \subset L_e(X^*_c,Y)$ es débilmente condicionalmente compacto en $L_e(X^*_c,Y)$ si y sólo si se cumplen : (i) Para cada $x^* \in X^*$ el conjunto $H(x^*)=\{ h(x^*): h \in H \}$ es relativamente débilmente compacto en Y ; y (ii) Para cada $y^* \in Y^*$ el conjunto $H^*(y^*)=\{ h^*(y^*) : h \in H \}$ es débilmente condicionalmente compacto en X.

Como $L^1(\mu)$ es débilmente secuencialmente completo. Utilizando que $L_e(X^*_c,L^1(\mu))$ es el completado de $\mathcal{P}_o(\mu,X)$, y tomando $Y = L^1(\mu)$ se tiene que un conjunto $H \subset \mathcal{P}_o(\mu, X)$ es débilmente condicionalmente compacto si y sólo si satisface (i) y (ii).

Claramente se tiene que (a) equivale a (i) y (ii) implica (b). Supongamos que se cumple (a) y (b), Para cada función simple $g_o \in L^\infty(\mu)$ es evidente que el conjunto $H^*(g_o) = \{ \int g_o.f \, d\mu : f \in H \}$ es débilmente condicionalmente compacto en X. Utilizando la aproximación uniforme de cada función de $L^\infty(\mu)$ por funciones simples se obtiene facilmente que para todo $g \in L^\infty(\mu)$ el conjunto $H^*(g)$ es débilmente condicionalmente compacto en X. Con lo que se tiene probado que (a) y (b) son equivalentes a (i) y (ii). #

6.9.B TEOREMA *Sea* (Ω , Σ ,μ) *un espacio de medida finito y* X *un e.l.c. completo. Si* f *y* f_n *son funciones de* $\mathcal{P}_o(\mu,X)$, *entonces* f_n *converge débilmente hacia* f *en* $\mathcal{P}_o(\mu,X)$ *si y sólo si* f_n *es acotada y* $\int_E \langle x^*,f_n\rangle \, d\mu$ *converge a* $\int_E \langle x^*,f\rangle \, d\mu$ *para cada* $E \in \Sigma$ *y cada* $x^* \in X^*$.

Demostración .- Collins-Ruess ([1983],2.4) prueban que una sucesión h_n en $L(X^*_c,Y)$ converge débilmente en $L_e(X^*_c,Y)$ hacia h, si y sólo si se cumple :
(i) $h_n(x^*)$ converge hacia $h(x^*)$ débilmente en Y, para todo $x^* \in X^*$.

Al igual que antes, como el completado de $\mathcal{P}_o(\mu,X)$ es $L_e(X^*_c,L^1(\mu))$, se tiene que f_n converge débilmente hacia f en $\mathcal{P}_o(\mu,X)$ si y sólo si la sucesión $\langle x^*,f_n\rangle$ converge débilmente hacia $\langle x^*,f\rangle$ en $L^1(\mu)$, para cada $x^* \in X^*$. Pero decir que $\langle x^*,f_n\rangle$ converge débilmente hacia $\langle x^*,f\rangle$, equivale a decir que

$<x^*,f_n>$ es acotada y $\int_E <x^*,f> d\mu$ converge a $\int_E <x^*,f> d\mu$ para cada $E \in \Sigma$ (Dunford-Schwartz [1958],IV.13.25). Con lo que se prueba el teorema. #

Como se prueba en el teorema 2.4 de Collins-Ruess, la condición dada en el teorema anterior se puede debilitar pidiendo que $\int_E <x^*,f_n> d\mu$ converja a $\int_E <x^*,f> d\mu$ para cada x^* que sea punto extremal de algun V_p° $(p \in P(X))$.

Si X es un subespacio de Frechet y se supone que $\mathcal{P}_o(\mu,X)$ es débilmente secuencialmente completo ,los subconjuntos de $\mathcal{P}_o(\mu,X)$ débilmente relativamente compactos quedan caracterizados por el teorema 6.9.A, puesto que por el teorema de Eberlein-Smulian coinciden con los condiconalmente compactos.

7 "LIFTING" DE UNA FUNCION ESCALARMENTE MEDIBLE

En este epígrafe se introduce la noción de "lifting" de una función escalarmente medible y se estudian algunas de sus propiedades. El motivo de este estudio está en que a la hora de estudiar la propiedad débil de Radon Nikodým (epígrafe 9) las dérivadas debiles de Radon Nikodým se pueden construir mediante el lifting. Como consecuencia de este estudio extendemos el teorema de Edgard [1977]que caracteriza a las funciones escalarmente equivalentes a funciones fuertemente medibles. También obtenemos una extensión al caso localmente convexo del teorema de Talagrand (vease Sentilles-Wheeler[1983]) que caracteriza la integrabilidad de Pettis en terminos del core.

7.1 DEFINICION Sea (Ω,Σ,μ) un espacio de medida completo. Una aplicación $\rho:\mathcal{L}^\infty(\mu)\to\mathcal{L}^\infty(\mu)$ se dice que es un "lifting" si cumple :

(i) $\rho(f) = f$ en casi todo punto (c.t.p. μ)

(ii) si $f = g$ c.t.p. μ entonces $\rho(f)(t) = \rho(g)(t)$ para todo $t\in\Omega$

(iii) ρ es lineal

(iv) si $f \geq 0$ c.t.p. entonces $\rho(f)(t) \geq 0$ para todo $t\in\Omega$

(v) $\rho(f.g) = \rho(f).\rho(g)$.

Si ρ es un lifting sobre $\mathcal{L}^\infty(\mu)$ entonces se cumplen : (a) si $f \geq g$ c.t.p. entonces $\rho(f)\geq\rho(g)$; (b) $|\rho(f)| = \rho(|f|)$; (c) $\sup\{\rho(f)(t): t\in\Omega\} = ||\rho(f)||_\infty = ||f||_\infty$; y (d) $\rho(f\wedge g) = \rho(f)\wedge\rho(g)$ y $\rho(f\vee g) = \rho(f)\vee\rho(g)$.

Si (Ω,Σ,μ) es un espacio de medida σ-finito no nulo y completo entonces existe un lifting en $\mathcal{L}^\infty(\mu)$. Más detalles sobre la definición, propiedades y existencia del lifting pueden encontrarse en Dinculeanu [1967] y A.Ionescu--Tulcea - C.Ionescu-Tulcea [1969] .

H.Weitzsäcker [1978], A.Bellow [1980]y Edgard-Talagrand [1980] dan construcciones de Lifting para funciones valoradas en espacios topológicos completamente regulares. Rodriguez-Salinas [1979] da una construcción de un lifting para funciones valoradas en e.l.c. en el estudio de la integración de tales funciones.

En todo el epígrafe (Ω,Σ,μ) será un espacio de medida finito y completo, y ρ será un lifting sobre $\mathcal{L}^\infty(\mu)$.

A continuación exponemos los resultados en que nos apoyaremos, relativos a la noción de lifting para una función valorada en un espacio completamente regular y sus propiedades basicas recogidos en el trabajo de Bellow [1980].

Sea K un espacio compacto y $f: \Omega \to K$ una función medible Baire. Para cada $s \in \Omega$ la aplicación $g \to \rho(g_\circ f)(s)$ definida sobre C(K), es un funcional lineal multiplicativo y por consiguiente viene representado por un unico elemento $\rho_K(f)(s) \in K$, tal que $\rho(g_\circ f)(s) = g(\rho_K(f)(s))$ para toda $g \in C(K)$.

7.2 TEOREMA (A.Bellow) *Sea* K *un espacio compacto,* $f : \Omega \to K$ *una aplicación medible Baire. Entonces : (1)* $\rho_K(f): \Omega \to K$ *es medible Borel, y (2) la medida de Borel imagen por* $\rho_K(f)$ *de* μ *coincide con la extensión canonica a la* σ*-álgebra* $B_o(K)$ *de la medida t-aditiva* $\lambda = \mu f^{-1}$ *definida sobre* $B_a(K)$.

Demostración .- Vease Bellow [1980] pag. 237. #

Sea T un espacio completamente regular, βT el compactificado de Stone-Cech de T, entonces toda función $f : \Omega \to T$ medible Baire también es medible Baire considerada con valores en βT. Aplicando lo anterior a $K = \beta T$ obtenemos la definición del lifting $\rho_{\beta T}(f)$ de f, que denotaremos por $\rho_\beta(f)$. Este lifting cumple : (1) $\rho(g_\circ f)(s) = g_\beta(\rho_\beta(f)(s))$ para toda $g \in C_b(S)$; (2) $\rho_\beta(f): \Omega \to \beta T$ es medible Borel ; y (3) la medida de Borel imagen por $\rho_\beta(f)$ de μ coincide con la medida de Borel regular $\hat{\lambda}$ definida sobre βT asociada a la medida imagen $\lambda = \mu f^{-1}$ definida sobre $B_a(T)$.

Edgard-Talagrand [1980] han completado un resultado de Weizsäcker [1978] obteniendo el siguiente teorema que da condiciones para que $\rho_\beta(f)(s) \in K$ para casi todo punto $s \in \Omega$.

7.3 TEOREMA (Edgard-Talagrand) *Sea* T *un espacio completamente regular,* $f:\Omega \to T$ *una función medible Baire y* $\lambda = \mu f^{-1}$ *la medida imagen de* μ *definida sobre* $B_a(T)$ *. Consideremos las proposiciones : (a)* $\lambda \in M_t(T)$ *;* *(b)* $\rho_\beta(f)(s) \in T$ *para casi todo* $s \in \Omega$ *; y (c)* $\lambda \in M_\tau(T)$ *. Entonces (a)* $\longrightarrow$ *(b)* $\longrightarrow$ *(c) . Consecuentemente si* $M_t(T) = M_\tau(T)$ *entonces las tres condiciones son equivalentes.*

Demostración .- Vease Bellow [1980] pag.243 . #

7.4 DEFINICION Sea X un e.l.c. (Hausdorff) y $f:\Omega \to X$ una función escalarmente medible, que por el teorema de Edgard es $B_a(X_w)$-medible. Aplicando los resultados anteriores a $T = X_w$ se tiene definido el lifting de f, $\rho_\beta(f)$, con valores en $\beta(X_w)$, teniendo las siguientes propiedades :

7.5 TEOREMA *Sea* X *un e.l.c.. Si* $f : \Omega \to X$ *es una función escalarmente medible y* $\overline{f} = \rho_\beta(f)$ *entonces* $\overline{f}$ *es* $B_o(\beta X_w)$*-medible y proporciona una medida imagen* $\mu\overline{f}^{-1}$ *sobre* $B_o(\beta X_w)$ *que coincide con* $\hat{\lambda}$ *, donde* $\lambda = \mu f^{-1}$ *es la medida imagen de* μ *mediante* f *definida sobre* $B_a(X_w)$. #

7.6 Nota .- De las definiciones se sigue facilmente que si $F \subset \beta X_w$ es cerrado y $f(\Omega) \subset F$ entonces $\rho_\beta(f)(\Omega) \subset F$. En particular si $F \subset X$ es débilmente compacto, y f está valorada en F, entonces $\rho_\beta(f)(\Omega) \subset F$.

El teorema de Edgard-Talagrand aplicado al espacio X_w proporciona el siguiente :

7.7 TEOREMA *Sea* X *un e.l.c.,* $f : \Omega \to X$ *una función escalarmente medible y* $\lambda = \mu f^{-1}$*. Consideremos las proposiciones : (a)* $\lambda \in M_t(X_w)$ *;* *(b)* $\rho_\beta(f)(s) \in X$ *para casi todo* $s \in \Omega$ *; y (c)* $\lambda \in M_\tau(X_w)$ *. Entonces (a)* $\longrightarrow$ *(b)* $\longrightarrow$ *(c). Si* X *es tal que* $M_t(X_w) = M_\tau(X_w)$ *(por ejemplo, si* X *es un LF-estricto, vease 7.10) las tres condiciones son equivalentes.* #

En virtud del teorema 3.2 que da condiciones suficientes para que una función sea medible por seminormas obtenemos el siguiente :

7.8 <u>COROLARIO</u> *Si* $f: \Omega \to X$ *es una función escalarmente medible tal que* $\rho_\beta(f)$ *toma casi todos sus valores en* X *, entonces* f *es escalarmente equivalente a una función* $g: \Omega \to X$ *debilmente* τ*-medible (y por consiguiente medible por seminormas según 3.2).*

<u>Demostración</u> .- Para obtener g, basta con modificar $\rho_\beta(f)$ en el conjunto nulo $\{s: \rho_\beta(f)(s) \notin X\}$. Las funciones f y g son escalarmente equivalentes pues si $x^* \in X^*$ y $\psi_n = (x^* \wedge n) \vee (-n)$, entonces como $\psi_n \in C_b(X_w)$ si $\rho_\beta(f)(s) \in X$ se tiene que $\rho(\psi_n \circ f)(s) = (\psi_n)_\beta(\rho_\beta(f)(s)) = \psi_n(g(s))$, pero esto ocurre para casi todo s. Como $\rho(\psi_n \circ f)$ y $\psi_n \circ f$ son iguales en casi todo punto, se deduce que $\psi_n \circ f = \psi_n \circ g$ en casi todo punto. De donde resulta facilmente que $<x^*,f>$ y $<x^*,g>$ coinciden en casi todo punto.

De las propiedades del lifting se sigue que g es $B_o(X_w)$-medible , y como la medida imagen μg^{-1} definida sobre $B_o(X_w)$ es la inducida por la medida t-aditiva $\mu(\rho_\beta(f))^{-1}$ definida sobre $B_o(\beta X_w)$, y $(\mu(\rho_\beta(f))^{-1})^*(X_w) = \mu(\Omega)$ un teorema de Knowles [1967] asegura que $\mu g^{-1} \in M_\tau(X_w)$. #

El siguiente teorema es una pequeña extensión del teorema de Edgard [1977] que en el caso de Banach caracteriza a las funciones escalarmente medibles que son escalarmente equivalentes a funciones medibles Bochner . Aportamos una nueva prueba de este resultado.

7.9 <u>TEOREMA</u> *Sea* X *un LF estricto y* $f: \Omega \to X$ *una función escalarmente medible . Entonces son equivalentes : (a)* $\mu f^{-1} \in \mathcal{M}_t(X_w)$*; y (b)* f *es escalarmente equivalente a una función* $g: \Omega \to X$ *medible por seminormas (y por lo tanto fuertemente medible).*

<u>Demostración</u> .- (a) $\Longrightarrow$ (b) es una consecuencia del teorema 7.7 y el corolario 7.8 . (b) $\Longrightarrow$ (a) se sigue del teorema 3.2 . #

7.10 <u>LEMA</u> *Si* X *es un LF estricto entonces* $\mathcal{M}_t(X_w) = \mathcal{M}_\tau(X_w)$ *y* X *es universalmente medible en* X^{**} *dotado de la topología* $\sigma(X^{**},X^*)$.

Demostración .-Si X es un espacio de Frechet, la primera afirmación es un resultado de Tortrat bien conocido. Sea X el limite inductivo estricto de la sucesión de espacios de Frechet X^n. Sea $\lambda \in {}_{\tau}(X_w)$ y $\bar{\lambda}$ su extensión a $B_o(X_w)$. Denotamos por λ_n a la medida que $\bar{\lambda}$ induce en cada $B_o(X^n_w)$. Como los espacios X^n son espacios de Frechet, y cada λ_n es una medida τ-aditiva, cada λ_n es t-aditiva y por consiguiente es regular con respecto a subconjuntos debilmente compactos de X^n. Se sigue de esto que $\bar{\lambda}$ es una medida regular con respecto a subconjuntos debilmente compactos de X, es decir, es una medida de $M_t(X_w)$. El que X es universalmente medible en X** es consecuencia de un resultado general de Sunyach . (Los resultados de Tortrat y Sunyach pueden encontrarse en Schwartz [1976]).#

Como consecuencia de este lema se tiene el siguiente

7.11 COROLARIO *Sea* X *un LF estricto. Son equivalentes : (a)* $\mathcal{M}_\sigma(X_w) = \mathcal{M}_\tau(X_w)$ *(* X_w *es compacto en medida); y (b) Para cada (* Ω , Σ , μ *) finito y completo y cada* $f : \Omega \to X$ *escalarmente medible, existe una función* $g : \Omega \to X$ *medible por seminormas, escalarmente equivalente a* f .

Demostración .- (a) $\to$ (b) es consecuencia del lema anterior y el teorema 7.9 . (b) $\to$ (a) dada $\mu \in \mathcal{M}_\sigma(X_w)^+$, si se aplica (b) al espacio de medida obtenido al completar $(X_w, B_a(X_w), \mu)$ y a la función identidad $i:X \to X$, se deduce, aplicando otra vez 7.9, que $\mu = \mu i^{-1} \in \mathcal{M}_t(X_w)$. #

Tenemos probado que si $\rho_\beta(f)(s) \in X$ para casi todo $s \in \Omega$, entonces f es escalarmente equivalente a una función medible por seminormas, y por lo tanto es P-medible. El siguiente resultado muestra como para obtener la P-medibilidad de f es suficiente con que $\rho_\beta(f)(s) \in \theta X_w$ para casi todo $s \in \Omega$.

7.12 PROPOSICION *Si* $f : \Omega \to X$ *es una función escalarmente medible tal que* $\rho_\beta(f)(s) \in \theta X_w$ *para casi todo* $s \in \Omega$ *entonces* f *es P-medible.*

<u>Demostración</u> .- Para cada $m \in \mathbb{N}$ sea $t_m = (x^* \wedge m) \vee (-m)$. Supongamos que $\alpha = \rho_\beta(f)(s)$ es un elemento de $\theta X_w = \mathcal{M}_\infty(X_w) \cap \beta X_w$. Sea $p \in P(X)$, x_j^* una red en V_p° , y x^* un punto de aglomeración de x_j^*. Entonces $t_m(x^*)$ es un punto de aglomeración de la red equicontinua $t_m(x_j^*)$ para la topología de la convergencia puntual en $C_b(X_w)$. Como $\alpha \in \mathcal{M}_\infty(X_w)$, se tiene que $\alpha(t_m(x^*))$ es un punto de aglomeración de la red $\alpha(t_m(x_j^*))$. En otros terminos, $\rho(t_m(<x^*,f>))(s)$ es un punto de aglomeración de la red $\rho(t_m(<x_j^*,f>))(s)$.

Sea $\Omega_o = \{ s \in \Omega : \rho_\beta(f)(s) \in \theta X_w \}$. Hemos probado que para cada $m \in \mathbb{N}$ la familia $F = \{ \rho(t_m(<x^*,f>))|_{\Omega_o} : x^* \in V_p^\circ \}$ es compacta para la topología de la convergencia puntual. Si dos funciones de F son iguales en casi todo punto de Ω_o son identicas, pues si $\rho(g) = \rho(h)$ en casi todo punto de Ω_o, lo mismo ocurre en casi todo punto de Ω , y aplicando de nuevo el lifting se obtiene que $\rho(g) = \rho(h)$ en todo punto. Por el teorema de metrizabilidad de Ionescu-Tulcea [1974] F es metrizable para la topología citada.

Dada una sucesión $x_n^* \in V_p^\circ$, existe una subsucesión $x_{n(k,1)}^*$ tal que $\rho(t_1(<x_{n(k,1)}^*, f>))$ converge puntualmente en Ω_o. De forma recurrente se van extrayendo subsucesiones $x_{n(k,m)}^*$ tales que $\rho(t_h(<x_{n(k,m)}^*, f>))$ converge en Ω_o para $h=1,2,\dots,m$. Tomando la subsucesión diagonal se tiene una subsucesión $x_{n(k)}^*$ tal que $\rho(t_m(<x_{n(k)}^*, f>))$ converge en Ω_o para todo m. Consecuentemente $<x_{n(k)}^*, f>$ converge en casi todo punto, con lo que se prueba que f es P-medible. #

LIFTING DE FUNCIONES ESCALARMENTE EN $\mathcal{L}^\infty(\mu)$

Consideramos ahora el caso de una función $f: \Omega \to X$ tal que para cada $x^* \in X^*$ $<x^*, f> \in \mathcal{L}^\infty(\mu)$ (diremos que f está escalarmente en $\mathcal{L}^\infty(\mu)$). En este caso parece más natural definir $\rho(f) : \Omega \to (X^*)'$, con valores en el dual algebraico de X^*, por $<\rho(f), x^*> = \rho(<x^*, f>)$. Las propiedades de este lifting se obtienen relacionandolo con $\rho_\beta(f)$. Para ello consideramos la siguiente terminología:

Por πX_w denotamos al subconjunto de βX_w formado por los elementos α tales que existe $\lim_m \alpha(t_m(x^*))$ cualquiera que sea $x^* \in X^*$. Entonces se convienen en definir $\int x^*\, d\alpha = \lim_m \alpha(t_m(x^*))$. Es facil comprobar que $\nu X_w \subset \pi X_w$ y para cada $\alpha \in \nu X_w$ la $\int x^*\, d\alpha$ no es otra cosa que la integral usual de $x^* \in C(X_w)$ con respecto a la medida σ-aditiva $\{0,1\}$-valuada α .

Por $\phi: \pi X_w \to (X^*)'$ denotamos a la aplicación definida por $<\phi(\alpha),x^*> = \int x^*\, d\alpha$ para cada $x^* \in X^*$.

7.13 <u>TEOREMA</u> *Sea* $f : \Omega \to X$ *una función escalarmente en* $\mathcal{L}^\infty(\mu)$. *Entonces* $\rho_\beta(f)(\Omega) \subset \pi X_w$ *y* $\phi_\circ \rho_\beta(f) = \rho(f)$. *La aplicación* ϕ *restringida a* $\rho_\beta(f)(\Omega)$ *es continua para la topología* $\sigma((X^*)',X^*)$.

<u>Demostración</u> .- Para cada $x^* \in X^*$ existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $m \geq \| x^*,f \|_\infty$, entonces $(t_m(x^*))_\beta(\rho_\beta(f)(s)) = \rho(t_m(<x^*,f>))\,(s) = \rho(<x^*,f>)(s)$.

Si $\alpha = \rho_\beta\,(f)(s)$, para cada $n \geq m$ se tiene $\alpha(t_n(x^*)) = \rho\,(<x^*,f>)(s)$, por lo tanto $\alpha \in \pi X_w$ y $\phi_\circ \rho_\beta(f) = \rho\,(f)$. Además, acabamos de ver que $(t_m(x^*))_\beta\,(\alpha) = <\phi\,(\alpha),x^*>$, de donde se tiene que si α_j converge hacia α en $\rho_\beta(f)\ (\Omega)$, $(t_m(x^*))_\beta(\alpha_j)$ converge hacia $(t_m(x^*))_\beta\,(\alpha)$ y por consiguiente $<\phi(\alpha_j),x^*>$ converge hacia $<\phi(\alpha),x^*>$, ó equivalentemente $\phi(\alpha_j)$ converge a $\phi(\alpha)$ en la $\sigma((X^*)',X^*)$ topología. #

Como consecuencia de la continuidad de ϕ y de que $\rho_\beta(f): \Omega \to \beta X_w$ es medible Borel se obtienen los siguientes corolarios de forma inmediata.

7.14 <u>COROLARIO</u> *Sea* $f: \Omega \to X$ *una función escalarmente en* $\mathcal{L}^\infty(\mu)$. *Entonces el lifting* $\rho(f): \Omega \to (X^*)'$ *es una función* $B_o((X^*)',\sigma((X^*)',X^*))$*-medible.#*

7.15 <u>COROLARIO</u> *Si* f *está escalarmente en* $\mathcal{L}^\infty(\mu)$ *y* $\mu f^{-1} \in \mathcal{M}_t(X_w)$ *, entonces* $\rho(f)$ *toma casi todos sus valores en* X .

<u>Demostración</u> .- Basta observar que en este caso $\rho_\beta(f)$ toma casi todos sus valores en $X \subset \beta X_w$, y que $\phi_{|X}$ es la identidad . #

Como en 5.32 denotamos por $\overline{\nu}X$ al subconjunto de $(X^*)'$ formado por los x^{**} tales que para cada conjunto numerable $x_n^* \in X$ existe un $x \in X$ verificando $\langle x^{**}, x_n^* \rangle = \langle x_n^*. x \rangle$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Entonces $\overline{\nu}X$ con la topología $\sigma(\overline{\nu}X, X^*)$ es un modelo para la real compactificación de Hewitt de X_w , y la aplicación ϕ restringida a $\nu X_w \subset \pi X_w$ define un homeomorfismo entre νX_w y $\overline{\nu}X$.

7.16 PROPOSICION *Sea* $f: \Omega \to X$ *una función escalarmente en* $\mathcal{L}^\infty(\mu)$.

Si $\rho(f)$ *(resp.* $\rho_\beta(f)$ *) toma casi todos sus valores en* $\overline{\nu}X$ *(resp. en* νX_w*) entonces* f *es P-medible.*

Demostración .- Por 7.13, es suficiente realizar la prueba en el caso en que $\rho(f)$ está esencialmente valorada en $\overline{\nu}X$.

Sea $\Omega_o = \{ s \in \Omega : \rho(f)(s) \in \overline{\nu}X \}$, $\mu(\Omega_o) = \mu(\Omega)$. Denotamos por $H_o = \{ \rho(\langle x^*, f \rangle)|_{\Omega_o} : x^* \in V_p^\circ \}$. Supongamos que x_n^* es una sucesión en V_p° y que x^* es un punto de aglomeración de x_n^* . Para cada $s \in \Omega_o$, como $\rho(f)(s) \in \overline{\nu}X$ existe un $x_s \in X$ tal que $\langle \rho(f)(s), x^* \rangle = \langle x^*, x_s \rangle$ y $\langle \rho(f)(s), x_n^* \rangle = \langle x_n^*, x_s \rangle$ para cada $n \in \mathbb{N}$. De donde resulta que $\rho(\langle x^*, f \rangle)|_{\Omega_o}$ es un punto de aglomeración de la sucesión $\rho(\langle x_n^*, f \rangle)|_{\Omega_o}$ en H_o, dotado de la topología de la convergencia puntual. Así, tenemos probado que H_o es numerablemente compacto para dicha topología.

Como H_o tiene la propiedad de que si dos de sus funciones coinciden en casi todo punto entonces son identicas, podemos aplicar el teorema de metrizabilidad de Ionescu-Tulcea [1974], obteniendo que H_o es compacto y metrizable para la topología de la convergencia puntual. Teniendo en cuenta que fuera de un conjunto nulo coinciden $\langle x_n^*, f \rangle$ y $\rho(\langle x_n^*, f \rangle)$ cualquiera que sea $n \in \mathbb{N}$, se sigue que f es P-medible. #

LIFTING DE FUNCIONES X*-ESENCIALMENTE ACOTADAS

Recordamos que una función escalarmente medible $f : \Omega \to X$ se dice X*-esencialmente acotada (definición 2.9) si existe un acotado $B \subset X$ ta que para cada $x^* \in B^\circ$ $|\langle x^*, f(s) \rangle| \leqslant 1$ en casi todo $s \in \Omega$. Es fácil comprobar que esta noción de acotación esencial coincide con la utilizada por Musial [1979] para funciones valoradas en espacios de Banach.

Evidentemente toda función X^*-esencialmente acotada está escalarmente en $\mathcal{L}^\infty(\mu)$. En este caso se tiene que $\rho(f)$ toma sus valores en X^{**}, el bidual topológico de X. En efecto, si $f:\Omega\to X$ es X^*-esencialmente acotada y $B\subset X$ es el acotado en X tal que para cada $x^*\in B^\circ$ $|<x^*,f>|\leq 1$ en casi todo punto, se cumple que $|<\rho(f),x^*>| = |\rho(<x^*,f>)| = \rho(|<x^*,f>|)\leq 1$ en todo punto. De donde resulta que $\rho(f)(s)$ es acotado sobre el entorno de cero B° en X^* dotado de la topología fuerte, y por consiguiente $\rho(f)(s)\in X^{**}$ para todo $s\in\Omega$. Además por los teoremas de separación se tiene que $\rho(f)\ (\Omega)\subset \overline{co}^*(B)\subset X^{**}$, donde $\overline{co}^*(B)$ es la $\sigma(X^{**},X^*)$ envoltura cerrada y absolutamente convexa de B en X^{**}.

Si $f:\Omega\to X$ es una función escalarmente medible y acotada, tomando $K=\overline{f(\Omega)}^*$, la $\sigma(X^{**},X^*)$ adherencia de $f(\Omega)$, el lifting $\rho_K(f)$ asociado a f, considerada con valores en K, coincide con $\rho(f)$ ya que las funciones de X^* separan puntos de X^{**} y $<\rho_K(f),x^*> = \rho(<x^*,f>) = <\rho(f),x^*>$. Por lo tanto $\rho(f)\ (\Omega)\subset K$.

7.17 PROPOSICION *Sea* $f:\Omega\to X$ *una función escalarmente medible* X^*-*esencialmente acotada. Entonces la función* $\rho(f):\Omega\to X^{**}$ *tiene las siguientes propiedades : (a)* $\rho(f)$ *es* X^*-*escalarmente equivalente a* $j_\circ f$ *donde* $j: X\to X^{**}$ *es la inclusión canonica ; (b)* $\rho(f)$ *es* $B_o(X^{**},\sigma(X^{**},X^*))$-*medible ; y (c) la medida imagen* $\overline{\lambda}=\mu\rho(f)^{-1}$ *definida sobre* $B_o(X^{**},\sigma(X^{**},X^*))$ *es la extensión canonica de la medida* $\lambda=\mu(j_\circ f)^{-1}$ *definida sobre* $B_a(X^{**},\sigma(X^{**},X^*))$. *Además,* $\overline{\lambda}\in M_t(X^{**},\sigma(X^{**},X^*))$ *y tiene soporte compacto.*

Demostración (a) es consecuencia inmediata de que $\rho(<x^*,f>) = <x^*,f>$ en casi todo punto. (b) se deduce del corolario 7.14 .

(c); Utilizando la notación empleada arriba se tiene que $\rho(f)(\Omega)\subset\overline{co}^*(B)$ donde B es un acotado de X, por consiguiente $\overline{\lambda}$ está soportada por el $\sigma(X^{**},X^*)$ compacto $K=\overline{co}^*(B)$. Consideradas con valores en K las funciones

$\rho(f): \Omega \to K$ y $\rho_K(f): \Omega \to K$ son identicas.Entonces la medida $\bar{\lambda}_K = \bar{\lambda}|_{B_o(K)}$ es la medida imagen de μ a traves de $\rho_K(f)$, la cual, en virtud de 7.2 es t-aditiva (es decir, regular con respecto a compactos). Por lo tanto $\bar{\lambda}$ es t-aditiva y tiene soporte compacto contenido en K.

Como la restricción de $\bar{\lambda}$ a $B_a(X^{**},\sigma(X^{**},X^*))$ es la medida imagen $\mu\rho(f)^{-1}$, y como $j_\circ f$ y $\rho(f)$ son X^*-escalarmente equivalentes, esta medida coincide con $\lambda = \mu(j_\circ f)^{-1}$. #

Para este lifting de funciones X^*-esencialmente acotadas se obtiene un resultado de tipo del de Edgard-Talagrand (7.3)

7.18 <u>TEOREMA</u> *Sea* $f : \Omega \to X$ *una función escalarmente medible* X^*-*esencialmente acotada. Consideramos las siguientes proposiciones :*

(a) $\lambda = \mu f^{-1} \in \mathcal{M}_t(X_w)$ *; (b)* $\rho(f)(s) \in X$ *para casi todo* $s \in \Omega$ *; y*

(c) $\lambda = \mu f^{-1} \in \mathcal{M}_\tau(X_w)$ *. Entonces (a)$\longrightarrow$(b)$\longrightarrow$(c) .*

Si además X_w *es universalmente medible en* $X^{**}(\sigma(X^{**},X^*))$ *entonces (a)$\longleftrightarrow$(b).*

Y si $\mathcal{M}_\tau(X_w) = \mathcal{M}_t(X_w)$*, por ejemplo si X es un LF estricto, las tres condiciones son equivalentes.*

<u>Demostración</u> .- (a) $\longrightarrow$ (b) es el corolario 7.15

(b)$\longrightarrow$(c). Observamos en primer lugar que $B_a(X^{**},\sigma(X^{**},X^*)) \cap X = B_a(X_w)$. En efecto, la σ-álgebra $B_a(X^{**},\sigma(X^{**},X^*)) \cap X$ hace medible a los $x^* \in X^*$, estos funcionales generan $B_a(X_w)$, por lo que se tiene que $B_a(X_w)$ está contenida en $B_a(X^{**},\sigma(X^{**},X^*)) \cap X$, la otra inclusión es inmedidata.

Segun 7.17, la medida $\nu = \mu(j_\circ f)^{-1}$ definida sobre $B_a(X^{**},\sigma(X^{**},X^*))$ es t-aditiva, y su extensión canónica a $B_o(X^{**},\sigma(X^{**},X^*))$ viene dada por $\bar{\nu} = \mu\rho(f)^{-1}$. Si se cumple (b), la medida exterior $\bar{\nu}^*$ asociada a la medida de Radon $\bar{\nu}$ cumple $\bar{\nu}^*(X) = \bar{\nu}(X^{**})$. Entonces $\bar{\nu}$ induce en $B_o(X_w)$ una medida τ-aditiva $\bar{\lambda}$ definida por $\bar{\lambda}(E \cap X) = \bar{\nu}(E)$ para cada $E \in B_o(X^{**},\sigma(X^{**},X^*))$,(vease Knowles [1967]). Teniendo en cuenta la definición de $\nu = \mu(j_\circ f)^{-1}$ y que $B_a(X^{**},\sigma(X^{**},X^*)) \cap X = B_a(X_w)$ se deduce que la restricción de $\bar{\lambda}$ a $B_a(X_w)$ es precisamente $\lambda = \mu f^{-1}$, por lo que λ es τ-aditiva.

Si X_w es universalmente medible en X^{**}, se tiene que (b) $\Rightarrow$ (a). Basta con observar que entonces $\bar{\lambda}$ es t-aditiva, y en consecuencia $\lambda \in \mathcal{M}_t(X_w)$. En efecto, sea $B \in B_o(X^{**},\sigma(X^{**},X^*))$, $B \subset X$ tal que $\bar{\nu}(B) = \bar{\nu}\ (X^{**})$, para cada $E \in B_o(X_w)$, $E = E^{**} \cap X$ donde $E^{**} \in B_o(X^{**},\sigma(X^{**},X^*))$, $\bar{\lambda}(E) = \bar{\nu}(E^{**} \cap B)$. Como $\bar{\nu}$ es t-aditiva $\bar{\nu}(E^{**} \cap B)$ se puede aproximar por medidas de $\sigma(X^{**},X^*)$-compactos contenidos en $E^{**} \cap B \subset E$, por lo tanto $\bar{\lambda}(E)$ se puede aproximar por medidas de $\sigma(X,X^*)$ compactos, de donde resulta que $\bar{\lambda}$ es t-aditiva.#

Como señalabamos en el primer epígrafe la integrabilidad de Pettis de una función valorada en un Banach puede caracterizarse en terminos del core(f,E). Utilizando el lifting extendemos esa caracterización para funciones valoradas en e.l.c. Recordamos la definición del"core" :

7.19 DEFINICION Dada una función escalarmente medible $f: \Omega \to X$, para cada $E \in \Sigma$ se define $\text{core}\ (f,E) = \bigcap \{ \overline{co}\ f(\ E - N\ ) : \ \mu(N)=0 \}$.

Si $f: \Omega \to X$ es una función escalarmente medible X^*-esencialmente acotada, es facil comprobar que $(D)\text{-}\int_E f\ d\mu \in X^{**}$ para cada $E \in \Sigma$. En el siguiente lema vamos a relacionar el core(f,E) y el recorrido del lifting $\rho(f)$. Si $M \in X^{**}$, por $\overline{co}^*(M)$ denotaremos a la envoltura $\sigma(X^{**},X^*)$ cerrada y convexa de M . Si $E \in \Sigma$, por $\rho(E)$ denotaremos al elemento de Σ cuya función carasteristica coincide con la función {0,1} valuada $\rho(\chi_E)$.

7.20 LEMA *Sea* $f: \Omega \to X$ *una función escalarmente medible* X^**-esencialmente acotada, entonces para cada* $A \in \Sigma$ *con* $\mu(A) > 0$ *se cumple :*

$$\text{core}(f,A) = \overline{co}^*(\rho(f)(\rho(A))) \cap X = \overline{co}^*\{(1/\mu(B)).\int_E f\ d\mu\ :\ A \supset B, \mu(B)>0\} \cap X$$

Demostración .- Es una consecuencia de los teoremas de separación de convexos.

Sea $N \in \Sigma$ con $\mu(N) = 0$. Entonces para cada $B \in \Sigma, B \subset A$ con $\mu(B) > 0$ y cada $x^* \in X^*$, el elemento $x^{**}_B = (1/\mu(B)).(D)\text{-}\int_E f\ d\mu$ cumple:

$$\langle x^*,\ x^{**}_B \rangle = (1/\mu(B)).\ \int_B \langle x^*,f\rangle\ d\mu \leq \sup\{ \langle x^*,f(s)\rangle :\ s \in A-N \}$$

En virtud de los teoremas de separación de convexos, de la desigualdad anterior se sigue que $\overline{co}^{*}\{x^{**}_{B} : B\cap A, \mu(B)>0\} \cap X \subset \overline{co}\ f(A-N)$. Esto sucede para todo conjunto $N \subset \Sigma$ con $\mu(N)=0$, de donde resulta la inclusión $\overline{co}^{*}\{x^{**}_{B} : B\cap A, \mu(B)>0\} \cap X \subset$ core (f,A).

Dado $x^{*}\in X^{*}$, sea α tal que $<\rho(f)(s), x^{*}> = \rho(<x^{*},f>)(s) \leq \alpha$ para cada $s \in \rho(A)$. Entonces $\rho(<x^{*},f>)(s) \leq \alpha$ para casi todo $s\in A$. De las propiedades del lifting resulta que si $N=\{s\in A : <x^{*},f>(s) > \alpha\}$, $\mu(N)=0$. Si $x \in \mathrm{core}(f,A) \subset \overline{co}\ f(A-N)$, se tiene que $<x^{*},x> \leq \alpha$. Por lo tanto se tiene la inclusión core $(f,A) \subset \overline{co}^{*}(\rho(f)\ (\rho(A))) \cap X$.

Por ultimo sea $x^{*}\in X^{*}$ y α tal que $<x^{*}, x^{**}_{B}> \leq \alpha$ para cada $B \subset A$ con $\mu(B)>0$. Es bien sabido que esta condición implica que $<x^{*},f>\chi_{A} \leq \alpha\ \chi_{A}$ en casi todo punto. Aplicando el lifting a esta desigualdad se tiene que $\rho(<x^{*},f>)\ \chi_{\rho(A)} \leq \alpha\ \chi_{\rho(A)}$ en todo punto. Es decir $<x^{*},\rho(f)(s)> \leq \alpha$ para todo $s \in \rho(A)$. Por consiguiente se tiene la inclusión

$$\overline{co}^{*}(\rho(f)(\rho(A))) \subset \overline{co}^{*}\left\{x^{**}_{B} : B\subset A, \mu(B)>0\right\}. \qquad \#$$

Sentilles-Wheeler [1983] estudian la transformada de Stone $\hat{f}: \Omega \rightarrow X^{**}$ de una función $f: \Omega \rightarrow X$ escalarmente medible y acotada valorada en un espacio de Banach, y establecen condiciones para la integrabilidad de Pettis de f en terminos de $\hat{f}$, exactamente en terminos de los conjuntos $\overline{co}^{*}\ \hat{f}(a)$, donde a es el representante de $A \in \Sigma$ en el compactificado de Stone asociado a Σ. De lo expuesto por Sentilles-Wheeler y del lema anterior se obtiene que $\overline{co}^{*}\hat{f}(a) = \overline{co}^{*}(\rho(f)(\rho(A)))$. A continuación trasladamos algunos de los resultados de Sentilles-Wheeler al caso de funciones X^{*}-esencialmente acotadas valoradas en e.l.c. . Comenzamos con un teorema debido a Talagrand que caracteriza la integrabilidad de Pettis en terminos del"core".

Dado un e.l.c. X , denotaremos por $\tilde{X}$ al conjunto formado por los elementos $x^{**}\in X^{**}$ que pertenecen a la $\sigma(X^{**},X^{*})$ clausura de subconjuntos numerables de X.

7.21 TEOREMA (Talagrand) *Sea* X *un e.l.c. completo . Una función* $f: \Omega \to X$ X^**-esencialmente acotada, escalarmente medible, es integrable Pettis si y sólo si para cada* $A \in \Sigma$ *con* $\mu(A) > 0$ *se cumple:*

(a) $\overline{co}^*\{ (1/\mu(B)) \, (D)\text{-}\int_B f \, d\mu : B \subset A \, , \, \mu(B) > 0 \} \cap \tilde{X} \neq \emptyset$

Si además f *es acotada es suficiente suponer que* X *es casi completo.*

Demostración .- No es restrictivo suponer que $\mu(\Omega) = 1$.

Aplicando el lema 7.20 se obtiene (a), pues $(1/\mu(B)) \int_B f \, d\mu \in X$ para cada $B \subset A$ con $\mu(B) > 0$.

Para probar el reciproco razonaremos por contradicción. Supongamos que $f : \Omega \to X$ no es integrable Pettis, entonces existirá un $A \in \Sigma$ con $\mu(A) > 0$ tal que $x^{**}_A = (D)\text{-} \int_A f \, d\mu \in X^{**}\text{-}X$.

Del teorema de completitud de Grothendieck se deduce la existencia de una seminorma $p \in P(X)$ tal que x^{**}_A no es $\sigma(X^*,X)$ continua sobre V_p° . Por tanto existe un número positivo $\delta > 0$, tal que para cada $\sigma(X^*,X)$ entorno cerrado y absolutamente convexo de cero U, el conjunto

$$H_{U,p} = \{ \rho(<x^*,f>) : x^* \in U \cap V_p^\circ \quad y \quad \int_A <x^*,f> d\mu \geq \delta \} \neq \emptyset .$$

Observese que $x^{**}|_{V_p^\circ}$ es continua en todos los puntos de V_p° si y sólo si es continua en 0. Como f es X^*-esencialmente acotada, existe un acotado $B \subset X$ tal que si $x^* \in B^\circ$ entonces $\rho(<x^*,f>)(s) \leq 1$ para todo $s \in \Omega$. Por lo tanto $H_{U,p}$ es uniformemente acotado, y uniformemente integrable. De donde resulta que $H_{U,p}$ es relativamente debilmente acotado en $L^1(\mu)$,(vease IV.8.9 de Dunford-Schwartz [1958]).

Si g es una función en la adherencia de $H_{U,p}$, como este conjunto es convexo, existe una sucesión $x_n^* \in U \cap V_p^\circ$ tal que $\rho(<x_n^*,f>)$ converge a g en la norma de $L^1(\mu)$. Entonces existe una subsucesión $x^*_{n(k)}$ tal que $\rho(<x^*_{n(k)},f>)$ converge a g en casi todo punto. Si x^* es un punto de aglomeración de $x^*_{n(k)}$ en $U \cap V_p^\circ$ se tiene que $g = <x^*,f>$ en casi todo punto, y por lo tanto $g = \rho(<x^*,f>)$ en casi todo punto, es decir g está en $H_{U,p}$ .Así se prueba que cada $H_{U,p}$ es debilmente compacto en $L^1(\mu)$.

Es facil comprobar que la familia $H_{U,p}$ posee la propiedad de la intersección finita, y por lo tanto existe un x^* X^* tal que $\rho(<x^*,f>) \in \bigcap_U H_{U,p}$.

Para este punto x^*, como $\int_A \rho(<x^*,f>)\, d\mu \geq \delta$ existe un conjunto $B \in \Sigma$ con $\mu(B) > 0$, tal que $B \subset A$ y $\rho(<x^*,f>)(s) \geq \delta/2$ para todo $s \in \rho(B)$.

Sea $\tilde{x} \in \overline{co}^*(\rho(f)\ (\rho(B))) \cap \tilde{X}$ y sea x_n una sucesión en X tal que $\tilde{x}$ es un $\sigma(X^{**},X^*)$ punto de aglomeración de $\{x_n\}$. Los conjuntos $U_n = (1/n)\,.\{x_1,x_2,\ldots,x_n\}^\circ$ forman una sucesión de entornos de cero en la topología $\sigma(X^*,X)$, y $\rho(<x^*,f>) \in \bigcap_{n=1}^{\infty} H_{U_n,p}$. Como los $U_n \cap V_p^\circ$ forman una sucesión decreciente de compactos, existe un $y^* \in \bigcap_{n=1}^{\infty} (U_n \cap V_p^\circ)$ tal que $\rho(<x^*,f>) = \rho(<y^*,f>)$, basta observar que para cada n N existe un $y_n^* \in U_n \cap V_p^\circ$ tal que $\rho(<x^*,f>) = \rho(<y_n^*,f>)$, si y^* es un punto de aglomeración de y_n^* en V_p° , $y^* \in \bigcap_{n=1}^{\infty} (U_n \cap V_p^\circ)$, y como $<x^*,f> = <y_n^*,f>$ en casi todo punto, se tiene que $<x^*,f> = <y^*,f>$ en casi todo punto, y por lo tanto $\rho(<x^*,f>) = \rho(<y^*,f>)$.

Entonces tenemos que $\rho(<y^*,f>) \geq \delta/2 > 0$ para cada $s \in \rho(B)$, y como $\tilde{x} \in \overline{co}^*(\rho(f)(\rho(B)))$ se tiene que $<\tilde{x},y^*> \geq \delta/2 > 0$. También sabemos que $<y^*,x_n> \leq 1/n$ para cada $n \in N$, y por consiguiente $<\tilde{x},y^*> = 0$. Con lo que llegamos a una contradicción, y por lo tanto f ha de ser integrable Pettis. #

Si por $\mathcal{B}_a^1(X)$ designamos al subespacio de X^{**} formado por las formas lineales sobre X^* que son $\sigma(X^{**},X^*)$ limites de sucesiones de puntos de x, se tiene que $\mathcal{B}_a^1(X) \subset \tilde{X}$. Por lo que resulta evidente el siguiente :

7.22 <u>COROLARIO</u> *Si* X *es un e.l.c. completo y* $\rho(f)(\Omega) \subset \mathcal{B}_a^1(X)$ *entonces* f *es integrable Pettis.* #

Sentilles-Wheeler ([1983], ejemplo 4.1) dan un ejemplo de una función integrable Pettis acotada tal que $\rho(f)\ (\Omega) \not\subset \mathcal{B}_a^1(X)$, Se trata de una función acotada $f\colon \Omega \to X$, valorada en un Banach debilmente secuencialmente completo ($\mathcal{B}_a^1(X) = X$) y tal que $\mu f^{-1} \notin \mathcal{M}_t(X_w)$, por lo que $\rho(f)$ no toma casi todos sus valores en $X = \mathcal{B}_a^1(X)$. Es de destacar el hecho de que si X es un e.l.c. completo $\mathcal{B}_a^1(X) \cap \bar{v}X = X$ (vease Sentilles-Wheeler ([1983], 4.4 aplicado a $T = V_p^\circ$). En el caso de que X sea un espacio de Banach, Odell-Rosenthal

[1975], lema 1) han probado que $\mathcal{B}_a^1(X)$ es justamente el conjunto de los elementos $x^{**} \in X^{**}$ tales que su restricción a la bola unidad B_{X^*} es una función de la primera clase de Baire sobre B_{X^*}.

El siguiente teorema revela el interes que tiene el conocer cuando el lifting $\rho(f)$ de una función escalarmente medible, X^*-esencialmente acotada tiene la imagen localizada esencialmente en un subespacio de X^{**}, separable para la topología fuerte $\beta(X^{**},X^*)$.

7.23 <u>TEOREMA</u> *Sea* X *un espacio de Frechet, y* $f \in P(\mu,X)$, X^**-esencialmente acotada, tal que* $\rho(f)$ *toma casi todos sus valores en un subespacio* $\beta(X^{**},X^*)$ *separable de* X^{**} *. Entonces* $\rho(f)$ *toma casi todos sus valores en un subespacio separable de* X *, y por lo tanto, despues de modificarla en un conjunto nulo se obtiene una función fuertemente medible escalarmente equivalente a* f *.*

<u>Demostración</u> .- Sea $\Omega_o \in \Sigma$ con $\mu(\Omega_o) = \mu(\Omega)$ tal que $\rho(f)(\Omega_o) \subset Y$, un subespacio de X^{**} cerrado y separable para $\beta(X^{**},X^*)$. Como X^{**} es un Frechet para la topología fuerte, podemos considerar que Y es un espacio Polaco. Como $\rho(f)$ es medible Borel, la función $g:\Omega \to Y$ definida por $g = \rho(f) . \chi_{\Omega_o}$ es medible Borel, acotada y valorada en un espacio Polaco, por lo tanto es integrable Pettis en Y. Además se tiene que $\int_A g\, d\mu = \int_A f\, d\mu$ para cada $A \in \Sigma$, pues los elementos de X^* separan puntos de Y.

Aplicando el lema de localización 2.4, se obtiene que $g(s) \in K = \overline{co}^Y(m_f(\Sigma))$ para casi todo $s \in \Omega$, donde la envoltura derrada convexa esta considerada en la topología de Y.

Si f es integrable Pettis $m_f(\Sigma) \subset X$ es un conjunto debilmente relativamente compacto. Como la topología que $\sigma(X^{**},X^*)$ induce en Y es más débil que la topología metrizable de Y, se tiene que $K \subseteq \overline{co}^*(m_f(\Sigma)) \subseteq \overline{co}(m_f(\Sigma)) \subset X$. De donde resulta que g toma casi todos sus valores en X . #

Del siguiente lema se deducen distintas condiciones para que $\rho(f)$ tome casi todos sus valores en un subespacio $\beta(X^{**},X^*)$ separable de X^{**}

7.24 LEMA *Supongamos que* X *es un e.l.c. metrizable, cuya topología viene dada por la familia de seminormas* p_n . *Sea* $f:\Omega \to X$ *una función escalarmente medible* X^**-esencialmente acotada, y sea* $\Omega_o \in \Sigma$ *con* $\mu(\Omega_o)=\mu(\Omega)$ *tal que para cada* $n \in \mathbb{N}$ *el conjunto* $B_n = \{ \rho(\langle x^*,f\rangle)_{|\Omega_o} : x^* \in V^\circ_{p_n} \}$ *es numerablemente compacto para la topologia de la convergencia puntual. Entonces* $\rho(f)\,(\Omega_o)$ *es separable en* X^{**} *con la topología* $\beta(X^{**},X^*)$.

Demostración .- Como $\mu(\Omega_o)=\mu(\Omega)$, se comprueba facilmente que si dos funciones de B_n coinciden en casi todo punto entonces son identicas. Aplicando el teorema de metrizabilidad de Ionescu-Tulcea [1974] a cada B_n, se obtiene que cada uno de estos conjuntos es metrizable y compacto para la topología de la convergencia puntual. Así cada uno de los espacios de Banach $E_n=(C(B_n),\|\ \|_\infty)$ es separable. Consideramos la aplicación $j:\Omega_o \to \Pi_n E_n$ definida por $j(s) = (\delta_{s|B_n})_{n=1}^{\infty}$. Si $j(s_1)=j(s_2)$ se tiene que $\rho(f)(s_1)=\rho(f)(s_2)$ pues se puede suponer que $X^*=\bigcup_{n=1}^{\infty} V^\circ_{p_n}$. Sea $\tilde{\Omega}_o$ el espacio cociente de Ω_o por la relación de equivalencia $s_1 \sim s_2$ si y sólo si $j(s_1)=j(s_2)$. $\tilde{\Omega}_o$ se puede sumergir en el espacio separable $\Pi_n E_n$.

Sea $\tilde{\rho}(f):\tilde{\Omega}_o \to X^{**}$ definida por $\tilde{\rho}(f)(\tilde{s})=\rho(f)(s)$. En $\tilde{\Omega}_o$ se considera la topología inducida por $\Pi_n E_n$, y en X^{**} consideramos la topología natural $\varepsilon(X^{**},X^*)$, que en este caso viene dada por las seminormas $\overline{p}_n(x^{**})=\sup\{\ |\langle x^*,x^{**}\rangle| : x^* \in V^\circ_{p_n}\}$ y coincide con la topología fuerte $\beta(X^{**},X^*)$,pues X es metrizable. Es claro que $\tilde{\rho}(f)$ es una aplicación continua. Como $\Pi_n E_n$ es un espacio metrizable y separable también lo es el subespacio $\tilde{\Omega}_o$, luego $\rho(f)\,(\Omega_o) = \tilde{\rho}(f)\,(\tilde{\Omega}_o)$ es separable en X^{**} . #

La demostración de este lema está inspirada en la que realiza Khurana [1979] para generalizar un teorema de Phillip considerando e.l.c. X tales que X^* es unión de una sucesión creciente A_n de conjuntos absolutamente convexos

$\sigma(X^*,X)$ compactos (en estos casos la topología de Mackey $\tau(X,X^*)$ de X es metrizable y viene dada por las seminormas $p_n(x) = \sup\{\ |\langle x^*,x\rangle| : x^*\in A_n\})$.

El lema 7.24 no sólo admite como corolario inmediato una generalización del citado teorema de Phillip (7.28), sino también los siguientes resultados:

7.25 <u>COROLARIO</u> *Sea* X *un e.l.c. tal que su topología de Mackey* $\tau(X,X^*)$ *es metrizable, y* $f: \Omega \to X$ *una función escalarmente medible* X^**-esencialmente acotada tal que* $\rho(f)(s) \in \overline{\nu}X$ *para casi todo punto. Entonces* $\rho(f)$ *toma casi todos sus valores en un subespacio* $\beta(X^*,X)$ *separable de* X^{**}.

<u>Demostración</u> .- Observando la prueba de la proposición 7.16 se ve que se verifican las hipótesis del lema anterior. #

7.26 <u>COROLARIO</u> *En las condiciones del corolario anterior, si* $\rho(f)(\Omega)$ *está esencialmente contenido en* $\overline{\nu}X - X$ *entonces* f *no puede ser integrable Pettis.*

<u>Demostración</u> .- Del corolario anterior y del teorema 7.23 se deduce que si $f\in P(\mu,X)$ entonces $\rho(f)$ toma casi todos sus valores en X . #

En virtud de la caracterización dada de νX_w, y de los resultados anteriores se obtiene la siguiente extensión de un teorema de Sentilles-Wheeler ([1983], 5.9)

7.27 <u>COROLARIO</u> *Sea* X *un e.l.c. tal que su topología de Mackey es metrizable,* (Ω,Σ,μ) *un espacio de medida* $\{0,1\}$ *valuado. Si* $f:\Omega \to X$ *es una función escalarmente medible* X^**-esencialmente acotada, entonces son equivalentes: (a)* f *es integrable Pettis ;(b)* $\mu f^{-1}\in \mathcal{M}_t(X_w)$ *; y (c)* f *es escalarmente equivalente a una función constante.*

Hay que destacar el hecho de que si X es un espacio de Banach y μ es una medida $\{0,1\}$valuada, toda función escalarmente medible está X^*-esencialmente acotada, pues se puede expresar como suma numerable de funciones esencialmente acotadas con soporte disjunto, veanse las notas de 5.30.

Demostración .- Si μ es $\{0,1\}$ valuada, entonces para cada $x^* \in X^*$ la función $< x^*, f >$ es esencialmente constante, luego $\rho(<x^*,f>)$ es una constante C_{x^*}. Sea $\alpha = \mu f^{-1}$, α es una medida $\{0,1\}$valuada σ-aditiva, por lo tanto el operador $\phi(\alpha): x^* \to \int x^* \, d\alpha$ pertenence a $\bar{\nu}X$, y como

$$< \phi(\alpha), x^* > = \int x^* \, d\alpha = \int x^* \, d\mu f^{-1} = \int < x^*, f > d\mu = C_{x^*} = < \rho(f)(s), x^* >$$

para todo $s \in \Omega$, se tiene que $\rho(f)(s) = \phi(\alpha) \in \bar{\nu}X$ para todo $s \in \Omega$.

Si f es integrable Pettis, por el corolario anterior se tiene que $\phi(\alpha) \in X$, y por lo tanto $\rho(f) = \phi(\alpha)$ X, es decir (a) $\Rightarrow$ (c). Evidentemente (c) $\Rightarrow$ (b),y (b) $\Rightarrow$ (a) pues las medidas t-aditivas $\{0,1\}$ valuadas son evaluaciones. #

El siguiente teorema extiende un clasico teorema de Philip (vease A.Ionescu-Tulcea [1973], cor.2) al caso de que X sea un e.l.c. metrizable.

7.28 TEOREMA *Sea* X *un e.l.c. metrizable, y* $f : \Omega \to X$ *una función escalarmente medible tal que* $f(\Omega) \subset K$, *un subconjunto débilmente compacto. Entonces* $g = \rho(f): \Omega \to X$ *toma sus valores en un subespacio separable de X .Por lo tanto,* g *es una función medible por seminormas escalarmente equivalente a* f .

Demostración .- Basta observar que $\rho(f)(\Omega) \subset K$ que es debilmente compacto, de donde resulta facilmente la hipotesis del lema 7.24 con $\Omega_0 = \Omega$. #

También como aplicación del lema 2.24 se obtiene el siguiente resultado, que en el caso de espacios de Banach fue obtenido por Geitz-Uhl [1981] por otro procedimiento

7.29 TEOREMA *Sea* $f : \Omega \to X$ *una función escalarmente medible,* X*-*esencialmente acotada, valorada en el espacio de Frechet* X , *y tal que para cada* $p \in P(X)$ *el conjunto* $\{ < x^*, f > : x^* \in V_p^\circ \}$ *es relativamente débilmente compacto en* $L^\infty(\mu)$. *Entonces existe una función* $g : \Omega \to X^{**}$ *fuertemente medible que es* X*-*escalarmente equivalente a* f . *Si ademas* f *es integrable Pettis,* g *se puede tomar con valores en* X .

Demostración .- Basta con observar que se cumplen las hipótesis del lema 7.24 con $\Omega_o = \Omega$, es decir que el conjunto $B = \{\rho(<x^*,f>): \; x^* \in V_p^o\}$ es numerablemente compacto para la topología de la convergencia puntual.

Como B es relativamente debilmente compacto en $L^\infty(\mu)$ que es un espacio de Banach, es relativamente debilmente secuencialmente compacto, por lo tanto dada una sucesión $\rho(<x_n^*,f>)$ en B, podemos encontrar una subsucesión $\rho(<x_{n(k)}^*,f>)$ convergente hacia una función $h \in L^\infty(\mu)$ en la topología débil de $L^\infty(\mu)$.

Para cada $t \in \Omega$, el funcional $\lambda_t : \psi \to \rho(\psi)(t)$ es continuo sobre $L^\infty(\mu)$ y por lo tanto $\rho(h)(t) = \lim_k \rho(<x_{n(k)}^*,f>)(t)$. Podemos elegir un conjunto nulo H fuera del cual la sucesión $<x_{n(k)}^*,f>$ converge a $\rho(h)$. Si $x^* \in V_p^o$ es un punto de aglomeración de $x_{n(k)}^*$ para la topología $\sigma(X^*,X)$, se tiene que $<x_{n(k)}^*,f>$ converge en casi todo punto hacia $<x^*,f>$. Por lo que $\rho(h)$ y $<x^*,f>$ coinciden en casi todo punto. Aplicando el lifting a estas dos funciones se tiene que $\rho(h) = \rho(<x^*,f>)$ B es el limite puntual de $\rho(<x_{n(k)}^*,f>)$, con lo que queda probado que se cumplen las hipótesis de 7.24. Aplicando este lema obtenemos que $g = \rho(f)$ es una función $B_o(X^{**},\sigma(X^{**},X^*))$ medible con valores en Y, un subespacio cerrado y separable de$(X^{**},\sigma(X^{**},X^*))$. Como Y es un espacio Polaco, g es fuertemente medible como anotabamos al final del epígrafe 3.

Si además f es integrable Pettis, por el teorema 7.23, tenemos que g se puede tomar con valores en X . #

En las condiciones del teorema anterior se obtiene que f es P-medible pues es X^*-escalarmente equivalente a una función $g : \Omega \to X^{**}$ fuertemente medible, y por lo tanto P-medible con respecto a la topología natural $\varepsilon(X^{**},X^*) = \beta(X^{**},X^*)$.

8 INTEGRABILIDAD DE PETTIS DE FUNCIONES DEBILMENTE CONTINUAS CON APLICACIONES A LA TEORIA DE MEDIDAS DE BAIRE

Dados S, un espacio topológico completamente regular, y X un e.l.c. , denotaremos por $C(S,X)$ y $C_b(S,X)$ (resp. $C^w(S,X)$ y $C_b^w(S,X)$) a los espacios de las funciones $f: S \to X$ continuas y continuas acotadas (resp. débilmente continuas y débilmente continuas acotadas).

En este epígrafe estudiaremos condiciones que garanticen la integrabilidad de Pettis de estas funciones con respecto a medidas de Baire $\mu \in \mathcal{M}_\sigma(S)$. Por otra parte, caracterizamos los espacios de medidas $\mu \in \mathcal{M}_\sigma(S)$ con la propiedad de que todas las funciones de $C_b(S,X)$ (resp. $C_b^w(S,X)$, $C(S,X), C^w(S,X)$) son funciones integrables Pettis. Nos referiremos a esta propiedad diciendo que μ hace universalmente integrables Pettis a las funciones continuas (resp. débilmente continuas) y acotadas. En los corolarios 5.12 y 5.16 se han dado los primeros resultados en esta linea, alli probabamos que si X es un e.l.c. completo (resp. casi-completo) y $\mu \in \mathcal{M}_z(S) \cup \mathcal{M}_\tau(S)$ entonces toda función $f:S \to X$ débilmente continua μ-dominada (resp. esencialmente acotada) es fuertemente integrable Pettis. Y en 5.29 veiamos que si $\mu \in \mathcal{M}_\infty(S)$ toda función $f:S \to X$ continua y acotada es integrable Pettis.

Las caracterizaciones obtenidas de ciertos espacios de medidas de Baire en los terminos citados arriba, ha mostrado ser una herramienta eficaz para estudiar algunas propiedades de tales espacios, como por ejemplo su completitud secuencial débil, o su caracterización en terminos del compactificado de Stone--Cech βS, resolviendose algunos de los problemas planteados por Wheeler[1983]. Entre otras aplicaciones se incluye una breve demostración de un teorema de Ptack [1955] .

En todo este epígrafe $\mu \in \mathcal{M}_\sigma(S)^+$ y ρ será un lifting sobre $\mathcal{L}^\infty(\overline{\mu})$ donde $\overline{\mu}$ es la compleción de μ .

INTEGRABILIDAD DE UNA FUNCION DEBILMENTE CONTINUA Y ACOTADA VIA SU EXTENSION CANONICA A βS

En el epígrafe anterior estudiabamos condiciones para la integrabilidad de Pettis de funciones acotadas escalarmente medibles $f: S \to X$ en terminos del lifting $\rho(f)$. Si $f \in C_b^w(S,X)$ nos resulta más util considerar la extensión canonica $f_\beta : \beta S \to X^{**}$ definida por

$$<f_\beta(\alpha),x^*> \;=\; <x^*,f>_\beta \;(\alpha) \quad \text{para todo} \quad x^* \in X^* \;\; \text{y} \;\; \alpha \in \beta S.$$

Evidentemente f_β es una extensión $\sigma(X^{**},X^*)$ continua de f.

La relación existente entre f_β y $\rho(f)$ se puede establecer de la siguiente forma :

Sea $\theta = \rho_{\beta S}(i) : S \to \beta S$ el lifting asociado a la inclusión canonica $i : S \to \beta S$. Por el teorema de Bellow (7.2) sabemos que θ es una función medible Borel con respecto a $(S,\Sigma,\overline{\mu})$ el espacio completado de $(S,B_a(S),\mu)$. Además $\overline{\mu}\,\theta^{-1}$ es una medida t-aditiva sobre $B_o(\beta S)$ y como $\psi_\beta \circ \theta = \rho(\psi)$ para cada $\psi \in C_b(S)$ resulta que $\int \psi_\beta \, d\,\overline{\mu}\theta^{-1} = \int \rho(\psi) d\mu = \int \psi \, d\mu$, por lo que se tiene la igualdad $\overline{\mu}\theta^{-1} = \hat{\mu}$.

Para cada $s \in S$ y cada $x^* \in X^*$ se tiene

$< \rho(f)(s),x^* > = \rho(<x^*,f>)(s) = <x^*,f>_\beta(\theta(s)) = <f_\beta(\theta(s)),x^*>$,

resulta que $\rho(f) = f_\beta \circ \theta$, y por lo tanto $\hat{\mu}\, f_\beta^{-1}$ y $\mu\rho(f)^{-1}$ coinciden sobre $B_o(X^{**},\sigma(X^{**},X^*))$.

Como consecuencia de los resultados obtenidos en terminos de $\rho(f)$, resultan,de modo inmediato,los siguientes

8.1 <u>PROPOSICION</u> *Sea* X *un e.l.c. casi completo y* $f \in C_b^w(S,X)$. *Si* f_β *toma casi todos sus valores en* $\mathcal{B}_a^1(X)$ *entonces* f *es integrable Pettis.*

<u>Demostración</u> .- es consecuencia inmediata de 7.22 . #

8.2 PROPOSICION *Sea* X *un espacio de Frechet y* $f \in C_b^w(S,X)$. *Si* f_β *toma casi todos sus valores en* $\vee X$, *entonces existe una función* $g: S \to X^{**}$ *fuertemente medible en* X^{**} *que es* X^**-escalarmente equivalente a* f .

Demostración .- Es una consecuencia inmediata del corolario 7.25 .#

8.3 TEOREMA *Sea* X *un e.l.c. LF-estricto y* $f \in C_b^w(S,X)$.*Entonces son equivalentes : (a)* $\mu f^{-1} \in \mathcal{M}_t(X_w)$; *(b)* f_β *toma casi todos sus valores en* X ; *y (c)* f *es escalarmente equivalente a una función* $g : S \to X$ *fuertemente medible.*

Demostración .- (c) $\Longrightarrow$ (a) es una consecuencia inmediata del teorema 7.9.

(a) $\Longrightarrow$ (b) . Supongamos que $\lambda = \mu f^{-1} \in \mathcal{M}_t(X_w)$. Entonces $\rho(f)$ toma casi todos sus valores en X. Por 7.10 sabemos que X_w es universalmente medible en X^{**}. Con la notación empleada en 7.17, es posible encontrar $A,B \in B_o(X^{**}, \sigma(X^{**},X^*))$ tales que $A \subset X \subset B$ y $\bar{\lambda}(A) = \bar{\lambda}(B) = \mu(S)$.
Como $\bar{\lambda} = \bar{\mu}\ \rho(f)^{-1}$ se tiene que $E = f_\beta^{-1}(A)$ es un subconjunto de Borel en βS que cumple :

$$\hat{\mu}(E) = \mu(\theta^{-1}\ f_\beta^{-1}(A)) = \mu(\rho(f)^{-1}(A)) = \bar{\lambda}\ (A) = \mu(S) = \hat{\mu}(\beta S) \qquad \text{y}$$

$f_\beta(E) \subset A \subset X$.

(b) $\longrightarrow$ (c). Teniendo en cuenta que $\rho(f) = f_\beta \circ \theta$, de los teoremas 7.18 y 7.9 se deduce que f es escalarmente equivalente a una función fuertemente medible. #

En el siguiente teorema se caracteriza la integrabilidad de Pettis de las funciones $f \in C_b^w(S,X)$ en terminos de f_β . Por $\overline{co}^*(M)$ denotamos a la envoltura debil* cerrada y convexa de $M \subset X^{**}$.

8.4 TEOREMA *Sea* X *un e.l.c. casi completo,* $\mu \in \mathcal{M}_\sigma(S)^+$ *una medida positiva y* $f \in C_b^w(S,X)$. *Entonces son equivalentes :*

(a) f *es integrable Pettis .*

(b) Si $K \subset \beta S$ *es un conjunto compacto con* $\hat{\mu}(K) > 0$ *entonces* $\overline{co}^*(\ f_\beta\ (K)) \cap X \neq \emptyset$

Demostración .- (a) $\longrightarrow$ (b) . Supongamos que f es integrable Pettis y que K es un subconjunto compacto de βS con $\hat{\mu}(K) > 0$. Existe una sucesión decreciente de co-ceros V_n en βS tal que $K \subset V_n$ y $\hat{\mu}(V_n)$ converge a $\hat{\mu}(K)$.

Como los conjuntos $U_n = V_n \cap S$ son subconjuntos de Baire de S, podemos considerar la sucesión $x_n = \int_{U_n} f \, d\mu \in X$. Entonces se tiene que

$$<x^*, x_n> = \int_{V_n} <x^*, f>_\beta \, d\hat{\mu} \quad \text{para cada } x^* \in X^* .$$

Como f es acotada, la sucesión x_n converge en la topología $\sigma(X^{**}, X^*)$ al elemento $x^{**} \in X^{**}$ definido por $<x^{**}, x^*> = \int_K <x^*, f>_\beta \, d\hat{\mu}$. El elemento x^{**} asi definido está en X, pues el recorrido de la integral indefinida de Pettis de f es debilmente relativamente compacto en X. Entonces tenemos que $(1/\hat{\mu}(K)). x^{**}$ es un elemento de $\overline{co}^* f_\beta(K) \cap X$.

(b) $\longrightarrow$ (a). Sea A un subconjunto de Baire de S tal que $\mu(A) > 0$, y sea $H \subset A$ un cero con $\mu(H) > 0$. entonces existe un conjunto $\hat{H} \subset \beta S$ que es un cero y cumple $\hat{H} \cap S = H$. La medida de Borel regular que $\hat{\mu}$ induce en $\hat{H}$ tiene soporte no vacio $K \subset \hat{H}$. Como suponemos que se cumple (b), tenemos que $\overline{co}^* f_\beta(K) \cap X \neq \emptyset$.

Si probamos que $f(K) \subset \overline{co}^* \{ (1/\mu(B)). (D)-\int_B f \, d\mu : B \cap A , \mu(B) > 0 \} = M$, aplicando el teorema de Talagrand (7.21) obtendremos que f es integrable Pettis.

Sean $\alpha \in K$ y $x^* \in X^*$. Consideramos los conjuntos $\hat{Z}_n$ definidos por :

$$\hat{Z}_n = \hat{H} \cap \{ \xi \in \beta S : | <x^*, f>_\beta (\xi) - <x^*, f>_\beta (\alpha) | \leq 1/n \} .$$

Estos conjuntos son entornos de α en $\hat{H}$ y por lo tanto $\hat{\mu}(\hat{Z}_n) > 0$. La sucesión de ceros $Z_n = \hat{Z}_n \cap S$ cumple $\mu(Z_n) = \hat{\mu}(\hat{Z}_n) > 0$, y es facil probar que $\lim_n (1/\mu(Z_n)) . \int_{Z_n} <x^*, f> d\mu = <x^*, f>_\beta (\alpha)$.

Como $Z_n \subset H \subset A$, la sucesión $x_n^{**} = (1/\mu(Z_n)).(D)-\int_{Z_n} f \, d\mu \in M$ y la sucesión $<x^*, x_n^{**}>$ converge a $<x^*, f_\beta(\alpha)>$. Se tiene que

$$<x^*, f_\beta(\alpha)> \leq \sup \{ <x^*, x^{**}> : x^{**} \in M \}$$

para cada $\alpha \in K$ y cada $x^* \in X^*$. Por lo tanto $f_\beta(K) \subset M$, con lo que se tiene completada la prueba. #

En el siguiente teorema se caracterizan las funciones $f \in C_b^w(S,X)$ que son integrables Pettis y escalarmente equivalentes a funciones fuertemente medibles. Denotaremos por $P^*(\mu,X)$ al subespacio de $P(\mu,X)$ formado por las funciones escalarmente equivalentes a funciones fuertemente medibles.

8.5 <u>TEOREMA</u> *Sea* X *un e.l.c. LF-estricto* , $\mu \in \mathcal{M}_\sigma(S)^+$ *y* $f \in C_b^w(S,X)$. *Entonces son equivalentes : (a)* $f \in P^*(\mu,X)$ *; (b) si* K *es un subconjunto compacto de* βS *y* $\hat{\mu}(K) > 0$ *entonces* $f_\beta(K) \cap X \neq \emptyset$ *; y (c)* f_β *toma casi todos sus valores en* X .

<u>Demostración</u> .- (a) $\longrightarrow$ (c) es una consecuencia de 8.3 , y (c) $\longrightarrow$ (b) es una implicación evidente.

(b) $\longrightarrow$ (a) . Por el teorema 8.4 sabemos que f es integrable Pettis . Si probamos que (b) $\longrightarrow$ (c), por el teorema 8.3 obtendremos que f es escalarmente equivalente a una función fuertemente medible.

Sea $\lambda_1 = \hat{\mu}\, f_\beta^{-1}$ la medida imagen de $\hat{\mu}$ por f_β definida sobre $B_o(X^{**}, \sigma(X^{**},X^*))$. Sea $D = \{ \alpha \in \beta S : f_\beta(\alpha) \in X \}$ y sea K un compacto contenido en $\beta S - D$. Si se cumple (b), se tiene que $\hat{\mu}(K) = 0$ y por lo tanto, si $\hat{\mu}^*$ y $\lambda_1{}^*$ son las medidas exteriores asociadas a $\hat{\mu}$ y λ_1 , se tiene que $\hat{\mu}^*(D) = \hat{\mu}(\beta S) = \mu(S) = \lambda_1{}^*(X)$.

Como λ_1 es una medida de Borel t-aditiva y X es universalmente medible en X^{**} , con la topología $\sigma(X^{**},X^*)$, existe un subconjunto de Borel $A \subset X$ tal que $\lambda_1(A) = \lambda_1{}^*(X)$. Por lo tanto $f_\beta(\alpha) \in A \subset X$ para casi todo ($\hat{\mu}$) $\alpha \in \beta S$, y se cumple (c). #

INTEGRABILIDAD UNIVERSAL DE LAS FUNCIONES DEBILMENTE CONTINUAS Y ACOTADAS.

En esta sección caracterizamos los espacios de medidas $\mathcal{M}_\infty(S)$ y $\mathcal{M}_g(S)$ en terminos de la integrabilidad universal de las funciones continuas en norma , y debilmente continuas , $f : S \to X$, valoradas en espacios de Banach. Paralelamente, obtenemos caracterizaciones de tales medidas en terminos de sus representaciones sobre βS, dando respuesta a una cuestion propuesta por Wheeler [1983]. Tambien se obtiene la secuencial completitud de $\mathcal{M}_g(S)$ (resp. de $\mathcal{M}_\infty(S)$) con respecto a la topología $\sigma(\mathcal{M}_g(S),C_b(S))$ (resp. $\sigma(\mathcal{M}_\infty(S),C_b(S))$).

Con este fin, para armonizar la exposición, consideraremos que X es un espacio de Banach, aunque anotaremos todos los resultados validos en casos más generales.

Siguiendo con la notación dada en el epígrafe 1, $\mathcal{H}$ (resp. $\mathcal{E}$) será la familia de los subconjuntos de $C_b(S)$ que son absolutamente convexos y compactos para la topología de la convergencia puntual t_p (resp. y equicontinuos). Como consecuencia del teorema de Banach-Mackey se tiene que cada $H \in \mathcal{H}$ es uniformemente acotado. En lo que sigue cada $H \in \mathcal{H}$ será considerado como un espacio compacto dotado de la topología t_p. Asi, C(H) será el espacio de Banach de las funciones real-valuadas y t_p-continuas definidas sobre H, con la norma del supremo.

8.6 LEMA *Si* $H \in \mathcal{H}$, *la función* $F_H: S \to C(H)$ *definida por* $F_H(s)(h)=h(s)$, *para cada* $h \in H$, *es débilmente continua y acotada. Si además* $H \in \mathcal{E}$ *entonces* F_H *es continua en norma.*

Demostración .- Como H es uniformemente acotado entonces F_H es acotada. Sea $\lambda \in M(H)$ una medida de Borel regular definida sobre H, positiva y con $\lambda(H)=1$. Entonces la función $g(s) = \int h(s)\, d\lambda(h)$ es el limite puntual de de una red en la envoltura convexa de H, y por consiguiente $g \in H$. Como M(H) es el dual de C(H) se tiene que F_H es debilmente continua. Si además H es equicontinua resulta inmediato que F_H es continua en norma. #

Con el fin de obtener caracterizaciones de $\mathcal{M}_g(S)$ y $\mathcal{M}_\infty(S)$ en terminos de βS a la vez que los caracterizamos en terminos de integrabilidad de funciones continuas, introducimos las siguientes familias de subconjuntos compactos de βS.

Por $K_\infty(S)$ (resp. $K_g(S)$) denotamos a la familia de todos los subconjuntos compactos $K \subset \beta S$, tales que existe un espacio de Banach X y una función $f \in C_b(S,X)$ (resp. $f \in C_b^w(S,X)$) con $f_\beta(K) \cap X = \emptyset$ (resp. $\overline{co}^* f_\beta(K) \cap X = \emptyset$).

El lema 8.6 nos permite dar una caracterización de $K_\infty(S)$ en terminos de la familia $\mathcal{E}$. Si $\alpha \in \beta S$ y $h \in C_b(S)$, denotamos $I_\alpha(h) = h_\beta(\alpha)$.

8.7 PROPOSICION *Supongamos que* K *es un compacto de* βS . *Entonces* $K \in K_\infty(S)$ *si y sólo si existe un* $H \in \mathcal{E}$ *tal que la restricción de* I_α *a* H *no es* t_p*-continua para cada* $\alpha \in K$.

Demostración .- Sea K un subconjunto compacto de βS tal que existe un Banach X y una función $f \in C_b(S,X)$ con $f_\beta(K) \cap X = \emptyset$. Entonces $H=\{<x^*,f> : \|x^*\| \leq 1\}$ es un miembro de $\mathcal{E}$. Para cada $\alpha \in K$ $f_\beta(\alpha) \notin X$. Asi, la forma lineal $x^* \to <x^*,f>_\beta(\alpha)$ no es $\sigma(X^*,X)$ continua sobre la bola unidad de X^*. Por lo tanto la restricción de I_α a H no es t_p-continua para cada $\alpha \in K$.

Reciprocamente, si $H \in \mathcal{E}$ es tal que se cumplen las ultimas condiciones, consideramos $X = C(H)$ y $f = F_H$ como en el lema 8.6. Entonces se tiene que $H = \{ <x^*,f> : \|x^*\| \leq 1 \}$, y un razonamiento sencillo basado en la compacidad de H nos asegura que si $f_\beta(\alpha) \in X$ entonces I_α restringido a H es t_p-continuo. Por lo tanto $f_\beta(\alpha) \notin X$ para cada $\alpha \in K$ y $K \in K_\infty(S)$.#

La siguiente caracterización de $\mathcal{M}_\infty(S)$ completa resultados previos de Haydon ([1976 a] 2.1) y Koumoullis ([1982] pag.473). Sea X un espacio de Banach, por $L^1(\mu,X)$ denotaremos al espacio de las funciones integrables Bochner $f : S \to X$ (Diestel-Uhl [1977]).

8.8 TEOREMA *Sea* $\mu \in \mathcal{M}_\sigma(S)^+$. *Son equivalentes : (a)* $C_b(S,X) \subset L^1(\mu,X)$ *para todo espacio de Banach X ; (b)* $C_b(S,X) \subset P(\mu,X)$ *para todo espacio de Banach X ; (c)* $\mu \in \mathcal{M}_\infty(S)$ *; y (d)* $\hat{\mu}(K) = 0$ *para cada* $K \in K_\infty(S)$.

Demostración .- (a) $\longrightarrow$ (b) es un resultado inmediato.

(b) $\longrightarrow$ (c) . Supongamos que se cumple (b), y que $X = C(H)$ y F_H son como en el lema 8.6 , entonces F_H es integrable Pettis. Sea $\psi = \int F_H \, d\mu$. Si $e_h \in C(H)^*$ es la evaluación en $h \in H$, tenemos que

$$\psi(h) = <e_h, \psi> = \int_S <e_h,F_H> d\mu = \int_S h \, d\mu$$

Asi, la integral asociada a μ ,I_μ, restringida a H es t_p-continua pues coincide con $\psi \in C(H)$. Por lo tanto $\mu \in \mathcal{M}_\infty(S)$.

(c) $\longrightarrow$ (a) . Dada $f \in C_b(S)$, la aplicación $d: S\times S \to \mathbb{R}$ definida por $d(u,v)= \| f(u)-f(v) \|$ define una pseudometrica continua en S. Si $\mu \in \mathcal{M}_\infty(S)$, entonces existe $F \subset S$ d-cerrado y d-separable tal que $\mu(F) = \mu(S)$. Como f es d-continua se tiene que f(F) está contenido en un subespacio separable Y de X. Entonces f toma casi todos sus valores en Y. Por lo tanto f es medible Bochner (fuertemente medible) y acotada, teniendose que $f \in L^1(\mu,X)$.

(a) $\longrightarrow$ (d). Por el teorema 8.5, la proposición (d) es equivalente a que $C_b(S,X) \subset P^*(\mu,X)$ para todo espacio de Banach X. Como (a) $\longleftrightarrow$ (b) y $L^1(\mu,X) \subset P^*(\mu,X) \subset P(\mu,X)$, se tiene que f es medible Bochner. #

Si X es un e.l.c. LF-estricto y $f \in C_b(S,X)$, como f es acotada, está localizada en un espacio de Frechet, entonces razonando como en la implicación (c) $\longleftrightarrow$ (a) se obtiene que f es fuertemente medible para toda $\mu \in \mathcal{M}_\infty(S)$.

Es facil comprobar que la familia $K_\infty(S)$ coincide con la que se utiliza en Koumoullis [1982]. Así, el teorema anterior proporciona otra demostración de la caracterización de Koumoullis de $\mathcal{M}_\infty(S)$.

En Wheeler [1983]se plantea el problema de obtener una caracterización similar de las medidas de $\mathcal{M}_g(S)$, utilizando la representación de las mismas en βS. La equivalencia (b)$\longleftrightarrow$(c) del siguiente teorema da una respuesta a esta cuestión.

8.9 <u>TEOREMA</u> *Sea* $\mu \in \mathcal{M}_\sigma(S)^+$. *Son equivalentes : (a)* $C_b^w(S,X) \subset P(\mu,X)$ *para todo espacio de Banach X ; (b)* $\mu \in \mathcal{M}_g(S)$ *; y (c)* $\hat{\mu}(K)= 0$ *para cada* $K \in K_g(S)$.

<u>Demostración</u> .- (a) $\longrightarrow$ (b). Supongamos que se cumple (a). Sea $H \in \mathcal{H}$. Consideremos la función $F_H : S \to C(H)$ debilmente continua y acotada dada en 8.6 . Si $\psi = \int_S F_H \, d\mu$, procediendo como en la prueba del teorema anterior se tiene que la integral I_μ asociada a μ , restringida a H, es precisamente ψ

y por lo tanto es t_p-continua. Con lo que se prueba que $\mu \in \mathcal{M}_g(S)$.

(b) $\longrightarrow$(a) . Sea $f \in C_b^w(S,X)$, y supongamos que $\mu \in \mathcal{M}_g(S)$. Para cada subconjunto $B \subset S$, $B \in B_a(S)$, la medida $\mu_B(E) = \mu(E \cap B)$ es un elemento de $\mathcal{M}_g(S)$ (Wheeler [1983] pag.122). Como $H = \{ \langle x^*,f\rangle : \|x^*\| \leq 1 \}$ es un elemento de $\mathcal{H}$, la forma lineal x_B^{**} definida por $x^* \to \int_B \langle x^*,f\rangle \, d\mu = \int_S \langle x^*,f\rangle \, d\mu_B$ es $\sigma(X^*,X)$-continua sobre la bola unidad de X^*. Esto implica que $x_B^{**} = (D)\text{-} \int_B f \, d\mu \in X$. Por lo tanto $f \in P(\mu,X)$.

(a)$\longleftrightarrow$(c). Es una consecuencia inmediata del teorema 8.4. #

Sea X un e.l.c. casi completo y $f \in C_b^w(S,X)$. Razonando como en la implicación (b)$\longrightarrow$(a), considerando $H = \{\langle x^*,f\rangle : x^* \in V_p^o\}$ (donde $p \in P(X)$), se tiene que si $\mu \in \mathcal{M}_g(S)$ entonces $f \in P(\mu,X)$.

En virtud de la proposición 2.12, también se tiene como condición equivalente a que $\mu \in \mathcal{M}_g(S)$, el que toda $f \in C_b^w(S,X)$ sea débilmente integrable.

A la luz de estas caracterizaciones se observa la inclusión $\mathcal{M}_\infty(S) \supset \mathcal{M}_g(S)$. En general estos dos espacios de medidas no son iguales. En efecto, observemos el siguiente ejemplo:

8.10 <u>EJEMPLO</u> (Edgar [1979], Wheeler [1983]). Sea w_1 el primer ordinal no numerable y S la bola unidad del espacio de Banach $C([0,w_1])$, dotada de la topología débil. Consideremos el elemento $\phi = \delta_{w_1} \in l^\infty([0,w_1]) = C([0,w_1])^{**}$, $\phi \notin C([0,w_1])$. Como $[0,w_1]$ es un compacto disperso ("scattered") (Wheeler [1981] 5.3) a ϕ se le puede asociar una medida {0,1}-valuada, perfecta y separable $\mu = \delta_\phi$. Veamos que $\mu \notin \mathcal{M}_g(S)$. En otro caso la inclusión $i: S \to C([0,w_1])$ sería integrable Pettis y se tendria $\phi = \int_S i \, d\mu \in C([0,w_1])$ lo que es una contradicción. Entonces $\mathcal{M}_g(S) \subsetneq \mathcal{M}_\infty(S)$.

Como consecuencia del teorema 8.9 obtenemos que el espacio $\mathcal{M}_g(S)$ dotado de la topología $\sigma(\mathcal{M}_g(S), C_b(S))$ es secuencialmente completo. Probamos este resultado en los dos proximos corolarios :

8.11 COROLARIO *Sea* $C \subset \mathcal{M}_g(S)$ *un subconjunto numerable formado por medidas positivas. Si* $\nu \in \mathcal{M}_\sigma(S)$ *está en la clausura de* C *para la topología* $\sigma(\mathcal{M}_\sigma(S), C_b(S))$ *, entonces* $\nu \in \mathcal{M}_g(S)$.

Demostración .- Sea X un espacio de Banach arbitrario y $f \in C_b^w(S,X)$. Si probamos que $f \in P(\nu,X)$, aplicando el teorema 8.9, tendremos que $\nu \in \mathcal{M}_g(S)$.

Sea $Z \in \mathcal{Z}(S)$ con $\nu(Z) > 0$, y sea ψ_n una sucesión en $C_b(S)$ que decrece puntualmente hacia la función carasteristica de Z. Sea $C = \{ \mu_k, k \in N \}$. Por 8.9 se tiene que $x_{n,k} = \int_S \psi_n . f \, d\mu_k \in X$ para cada k y n pertenecientes a N. Para cada $n \in N$ $x_n^{**} = (D)- \int_S \psi_n . f \, d\nu$ está en la $\sigma(X^{**},X^*)$ clausura del conjunto numerable $\{ x_{n,k} , k \in N \}$. Como x_n^{**} converge en la $\sigma(X^{**},X^*)$-topología hacia $x_Z^{**} = (D) \int_Z f \, d\nu$. Obtenemos que x_Z^{**} está en la $\sigma(X^{**},X^*)$ clausura del conjunto numerable $\{ x_{n,k} : n \in N \; k \in N \}$. Para cada subconjunto $A \in B_a(S)$ con $\nu(A) > 0$ existe un $Z \in \mathcal{Z}(S)$ $Z \subset A$ con $\nu(Z) > 0$. Aplicando el teorema de Talagrand 7.21 se tiene que $f \in P(\nu,X)$. #

8.12 COROLARIO $\mathcal{M}_g(S)$ *es secuencialmente completo para la topología* $\sigma(\mathcal{M}_g(S), C_b(S))$.

Demostración .- Supongamos que μ_n es una sucesión en $\mathcal{M}_g(S)$ tal que $\int \psi \, d\mu_n$ es una sucesión convergente para cada $\psi \in C_b(S)$. Como $\mathcal{M}_\sigma(S)$ es secuencialmente completo para la topología $\sigma(\mathcal{M}_\sigma(S), C_b(S))$ (Wheeler [1983]pag 162), existe una medida $\mu \in \mathcal{M}_\sigma(S)$ tal que $\int \psi \, d\mu_n$ converge a $\int \psi \, d\mu$ para cada $\psi \in C_b(S)$.

Como $\{ \mu_n : n \in N \}$ es relativamente compacto para la topología $\sigma(\mathcal{M}_\sigma(S), C_b(S))$ entonces los conjuntos $\{\mu_n^+ : n \in N \}$ y $\{\mu_n^- : n \in N \}$ también son relativamente compactos para esta topología (Wheeler[1983] pag 142).Así, existen ν_1 y ν_2 , puntos de aglomeración para la anterior topología, de las sucesiones μ_n^+ y μ_n^- respectivamente, tales que $\mu = \nu_1 - \nu_2$.

Del corolario 8.11 se obtiene que $\nu_1, \nu_2 \in \mathcal{M}_g(S)$, y por consiguiente $\mu \in \mathcal{M}_g(S)$. #

Tomando funciones continuas en norma en la prueba de 8.11 y haciendo los mismos razonamientos, se obtiene una nueva demostración de la completitud secuencial del espacio $\mathcal{M}_\infty(S)$ dotado de la topología $\sigma(\mathcal{M}_\infty(S),C_b(S))$.

En el siguiente corolario denotamos por $B_1^w(S,X)$ al espacio de las funciones acotadas $f:S \to X$ para las que existe una sucesión $f_n \in C_b^w(S,X)$ que verifica :

(A) $\qquad <x^*,f(t)> = \lim_n <x^*,f_n(t)> \qquad$ para todo $t \in S$ y todo $x^* \in X^*$

8.13 <u>COROLARIO</u> *Si* $\mu \in \mathcal{M}_g(S)^+$ *enotonces* $B_1^w(S,X) \subset P(\mu,X)$ *para todo e.l.c. casi completo* X.

<u>Demostración</u> .- Dada $f \in B_1^w(S,X)$, sea $f_n \in C_b^w(S,X)$ la sucesión que cumple (A), Para cada $Z \in \mathcal{Z}(S)$ con $\mu(Z)>0$, sea ψ_k una sucesión en $C_b(S)$ que decrece puntualmente hacia χ_Z . De la anotación echa tras el teorema 8.9 se deduce que $x_{n,k} = \int_S \psi_k . f_n \; d\mu \in X$. Razonando como en la prueba de 8.11 se tiene que $f \in P(\mu,X)$.#

A continuación damos una respuesta parcial a la siguiente cuestión :
¿ Se cumple $f \in P(\mu,X)$, si f es una función escalarmente medible acotada con $\mu f^{-1} \in \mathcal{M}_g(X_w)$?

Se dice que un espacio de Banach X se retracta sobre su bola unidad B_X, si existe una aplicación $r: X \to B_X$ que fija los puntos de B_X y es continua cuando X y B_X estan dotados de la topología $\sigma(X,X^*)$.

8.14 <u>PROPOSICION</u> *Sea* X *un espacio de Banach que se retracta sobre su bola unidad. Si* $f:\Omega \to X$ *es una función escalarmente medible tal que* $\mu f^{-1} \in \mathcal{M}_g(X_w)$ *entonces* $f \in P(\mu,X)$.

<u>Demostración</u> .- No es restrictivo suponer que $f(\Omega) \subset B_X$. Sea $r:X \to B_X$ la retracción débil-continua de X en B_X, y sea $\bar{r}: X \to X$ la composición de r con la inclusión de B_X en X . $\bar{r}$ es una función débilmente continua y acotada, por lo tanto si $\mu f^{-1} \in \mathcal{M}_g(X_w)$, se tiene que $\bar{r} \in P(\mu f^{-1},X)$. Para cada $B \in B_a(X_w)$ se tiene $(P)-\int_B \bar{r} \; d\mu f^{-1} = (D)-\int_{f^{-1}(B)} f \; d\mu \in X$.

Entonces f es integrable Pettis sobre la sub-σ-álgebra de Σ formada por las conjuntos $f^{-1}(B)$ con $B \in B_a(X_w)$. Aplicando 2.11 se tiene que $f \in P(\mu,X)$.#

Esta proposición se puede enunciar en terminos de e.l.c. pidiendo que X sea un e.l.c. casi completo y f tal que exsite un acotado B que contiene a $f(\Omega)$ y existe una retracción de $(X,\sigma(X,X^*))$ en $(B,\sigma(X,X^*))$.

Ejemplos de espacios de Banach que se retractan en la bola unidad son $c_o(\Gamma)$ y $C(K)$, donde K es un compacto disperso (vease Wheeler [1982]). La propiedad de la retracción sobre la bola unidad no es necesaria para obtener que $\mu f^{-1} \in \mathcal{M}_g(X_w)$ implica la integrabilidad de Pettis de f, pues, por ejemplo, el espacio $l^p(\Gamma)$ ($1 < p < +\infty$ y Γ no numerable) no se retracta en su bola unidad (Wheeler [1982]) y toda función acotada valorada en el espacio reflexivo $l^p(\Gamma)$ es integrable Pettis.

Es evidente que $\mathcal{M}_z(S) \subset \mathcal{M}_g(S)$. Recordemos que en 5.12 se ha probado que las medidas de $\mathcal{M}_z(S)$ hacen fuertemente integrables Pettis a las funciones de $C_b^w(S,X)$.

<u>Problema</u> .- (a) ¿ Es posible distinguir entre $\mathcal{M}_z(S)$ y $\mathcal{M}_g(S)$?. (b) ¿ Existen X , μ y $f \in C_b^w(S,X)$ tales que $f \in P(\mu,X) - P_o(\mu,X)$? . (c) ¿ Se puede caracterizar $\mathcal{M}_z(S)$ en terminos de la integral de Pettis?.

Otra inclusión evidente es $\mathcal{M}_\tau(S) \subset \mathcal{M}_g(S)$ (vease 5.17). Wheeler [1981] ha probado que si S es un K_R-espacio entonces $\mathcal{M}_\tau(S) \subset \mathcal{M}_z(S)$. En lo que sigue probamos que si S es un K_R-espacio entonces se tiene $\mathcal{M}_z(S) = \mathcal{M}_g(S)$.

Wheeler en [1983] , motivado por la frecuencia con que $\mathcal{M}_g(S) = \mathcal{M}_\infty(S)$ pregunta si hay una noción de "casi equicontinuidad" para la que se cumpla un teorema que diga : " Cada $H \subset C_b(S)$ uniformemente acotado y t_p-compacto es casi-equicontinuo". El siguiente lema da un resultado en esta dirección.

8.15 <u>LEMA</u> *Sea* $H \subset C_b(S)$ *un conjunto compacto para la topología de la convergencia puntual y uniformemente acotado. Entonces se cumple la siguiente condición de casi equicontinuidad sobre compactos:*

Dado un compacto $K \subset S$, *para cada* $\varepsilon > 0$ *y cada* $\lambda \in M_t(H)^+$ *existe un* $H_\varepsilon \subset H$ t_p*-compacto, con* $\lambda(H - H_\varepsilon) < \varepsilon$ *y tal que* $H_{\varepsilon|K} = \{ h_{|K} : h \in H_\varepsilon \}$ *es equicontinuo.*

Demostración .- Por un conocido teorema de Grothendieck (vease Diestel [1984] VII.1), sobre $H_{|K} = \{h_{|K} : h \in H\}$ coinciden la topología t_p y la topología débil $\sigma(C(K), M_t(K))$. Así $H_{|K}$ es débilmente compacto en C(K). Sea ν la medida imagen de λ por la aplicación $h \to h_{|K}$, definida sobre $B_o(H_{|K})$. Otro teorema de Grothendieck (Edgar[1977] 5.1(c)) asegura que toda medida de Radon ν sobre un subconjunto débilmente compacto F de un Banach X, posee soporte separable en norma (Este resultado se puede obtener por una aplicación directa del teorema 7.28 a la identidad $i: F \to X$). Aplicando esto a $H_{|K}$ y a la medida ν se obtiene que existe $H_o \subset H$ tal que $H_{o|K}$ es débilmente compacto en C(K) y separable en norma, con $\nu(H_{o|K}) = \nu(H_{|K})$. Consecuentemente $\lambda(H_o) = \lambda(H)$. A la medida de Borel regular que λ induce en H_o la seguiremos denotando por λ .

Por lo indicado al principio de la demostración, la aplicación $T: H_o \to C(K)$ definida por $T(h) = h_{|K}$ es t_p-débilmente continua, y acabamos de ver que tiene recorrido separable. Entonces T es fuertemente medible y consecuentemente λ-Lusin medible (vease el epígrafe 3). Así dado $\varepsilon>0$ esiste un t_p-compacto $H_\varepsilon \subset H_o$ con $\lambda(H_o - H_\varepsilon) < \varepsilon$ tal que $T_{|H_\varepsilon}$ es t_p- $\|\ \|$ continuo. Esto implica que $H_{\varepsilon|K}$ es compacto en la norma de C(K) y por lo tanto equicontinuo. #

8.16 COROLARIO *Para todo* $H \subset C_b(S)$ t_p*-compacto uniformemente acotado, la aplicación* $F_H : S \to C(H)$ *definida por* $F_H(s) = \delta_s$*, es débilmente continua sobre cada compacto* $K \subset S$.

Demostración .- Es una consecuencia del lema anterior, pues si $K \subset S$ es un compacto, sea s_j una red en K convergente hacia $s \in K$. Sea $\lambda \in M_t(H)^+$, dado $\varepsilon > 0$, del lema anterior se obtiene un t_p-compacto $H_\varepsilon \subset H$ tal que $H_{\varepsilon|K}$ es equicontinuo y $\lambda(H - H_\varepsilon) < \varepsilon/4k$ (donde k es una cota uniforme de H). Enton- existe j_o tal que si $j \geq j_o$ se tiene $|h(s_j)-h(s)| < \varepsilon/2\lambda(H_\varepsilon)$ para cada $h \in H_\varepsilon$. Por lo tanto

$$| \int_H <\delta_{s_j} - \delta_s, h> d\lambda | \leq \int_{H-H_\varepsilon} |h(s_j)-h(s)|\, d\lambda + \int_{H_\varepsilon} | h(s_j)-h(s)|\, d\lambda \leq$$

$$\leq 2.\, k\ \lambda(H - H_\varepsilon) + (\varepsilon/2\lambda(H_\varepsilon)).\lambda(H_\varepsilon) \leq \varepsilon .$$

La desigualdad anterior establece que $<\lambda, F_H(s_j)>$ converge hacia $<\lambda, F_H(s)>$ para cada $\lambda \in M_t(H)^+$, y con ello queda probado el corolario . #

8.17 <u>COROLARIO</u> *Si* S *es un* K_R*-espacio entonces* $\mathcal{M}_z(S) = \mathcal{M}_g(S)$.

<u>Demostración</u> .- Acabamos de probar que para cada $H \subset C_b(S)$ t_p-compacto y uniformemente acotado, la aplicación $F_H: S \to C(H)$ es débilmente continua sobre cada compacto $K \subset S$. Si S es un K_R-espacio, entonces F_H es débilmente continua y acotada. Si $\mu \in \mathcal{M}_g(S)^+$ entonces F_H es μ-integrable Pettis, y actuando como en la prueba (a) $\Longrightarrow$ (b) del teorema 8.9 esto se traduce en que la integral I_μ asociada a μ , restringida a H es t_p-continua, y por lo tanto $\mu \in \mathcal{M}_z(S)$. #

Wheeler [1981] ha probado que, bajo el axioma de Martin, se cumple $\mathcal{M}_\tau(S) \subset \mathcal{M}_z(S)$. En general se tiene que $\mathcal{M}_\tau(S) \subset \mathcal{M}_g(S)$. Así si $\mathcal{M}_z(S) = \mathcal{M}_g(S)$ se tiene la inclusión $\mathcal{M}_\tau(S) \subset \mathcal{M}_z(S)$. Utilizando el resultado de Wheeler obtenemos el siguiente . Por β_τ denotamos a la topología estricta definida sobre $C_b(S)$ que está asociada al espacio de medidas $\mathcal{M}_\tau(S)$ (Wheeler[1983]).

8.18 <u>PROPOSICION</u> *Bajo el Axioma de Martin, si* S *es un espacio topológico tal que el espacio* $(C_b(S), \beta_\tau)$ *es completo, entonces* $\mathcal{M}_z(S) = \mathcal{M}_g(S)$.

<u>Demostración</u> .- Recordemos en primer lugar, que $\mathcal{M}_\tau(S)$ se identifica con el dual del espacio $(C_b(S), \beta_\tau)$. Sea $H \subset C_b(S)$ un conjunto t_p-compacto y uniformemente acotado. Como $\mathcal{M}_\tau(S) \subset \mathcal{M}_z(S)$, es facil comprobar que la inclusión $i: H \to (C_b(S), \beta_\tau)$ es débilmente continua y acotada.

Si λ $M_t(H)^+$, i es λ-integrable Pettis, pues $(C_b(S), \beta_\tau)$ se supone completo. Sea $\psi \in C_b(S)$ $\psi = \int_H i \; d\lambda$, entonces para cada $s \in S$, $\delta_s \in \mathcal{M}_\tau(S) = (C_b(S), \beta_\tau)^*$, luego $\psi(s) = \int_H h(s) \; d\lambda = <\lambda, F_H(s)>$, y queda probada la continuidad débil de $F_H: S \to C(H)$.

Si $\mu \in \mathcal{M}_g(S)^+$, F_H es μ-integrable Pettis, y razonando como en corolario anterior se tiene que $\mu \in \mathcal{M}_z(S)$. #

Como Wheeler señala en [1983]el problema de la completitud de la topología β_τ no está aún resuelto. La proposición anterior podia abordarse considerando $C_b(S)$ dotado de la topología estricta β_t asociada a $\mathcal{M}_t(S)$, pero en este caso la completitud de β_t equivale a que S sea un K_R-espacio y en este caso ya sabemos que $\mathcal{M}_z(S) = \mathcal{M}_g(S)$. A la luz del teorema 5.25 también se obtiene $\mathcal{M}_z(S) = \mathcal{M}_g(S)$ considerando S tal que β_τ sea secuencialmente completo y $\sigma(C_b(S), \mathcal{M}_\tau(S))$ posea la C.C.P.

Queda abierto el problema de caracterizar los espacios $\mathcal{M}_\tau(S)$ y $\mathcal{M}_t(S)$ en terminos de la integral de Pettis. En este sentido tenemos el siguiente resultado:

8.19 <u>PROPOSICION</u> *Sea* $\mu \in \mathcal{M}_\sigma(S)^+$ *con la propiedad de que toda función débilmente continua y acotada* f: S $\rightarrow$ X, *valorada en un e.l.c.* X *tal que* $\sigma(X,X^*)$ *tiene la propiedad C.C.P. , es integrable Pettis. Entonces* $\mu \in \mathcal{M}_\tau(S)$.

<u>Demostración</u> .- Consideramos la inclusión $\Psi : S \rightarrow \mathcal{M}_\tau(S)$ con $\Psi(s) = \delta_s$. Es inmediato que Ψ es $\sigma(\mathcal{M}_\tau(S), C_b(S))$-continua y acotada. Como $\mathcal{M}_\tau(S)$ tiene la propiedad C.C.P. resulta que Ψ es μ-integrable Pettis, y entonces es fácil probar que $\mu = \int_S \Psi \, d\mu \in \mathcal{M}_\tau(S)$. #

Como consecuencia de 5.25 se tiene que si S es un espacio topológico tal que $\sigma(\mathcal{M}_\tau(S),C_b(S))$ es secuencialmente completa y $\mathcal{M}_t(S) = \mathcal{M}_\tau(S)$ entonces la hipótesis de 8.19 caracteriza a $\mathcal{M}_\tau(S)= \mathcal{M}_t(S)$.

Para finalizar esta sección estudiaremos como son las medidas de Baire $\mu \in \mathcal{M}_\sigma(S)^+$ tales que $C_b^w(S,X) \subset P^*(\mu,X)$ (resp. $C_b^w(S,X) \subset L^1(\mu,X)$) para todo espacio de Banach X. Con este fin introducimos la siguiente definición.

8.20 <u>DEFINICION</u> Dada una medida $\mu \in \mathcal{M}_\sigma(S)^+$, diremos que un conjunto $H \in \mathcal{H}$ (la familia de los subconjuntos de $C_b(S)$ absolutamente convexos y t_p-compactos) cumple la condición C_μ si existe un conjunto de Borel $B \subset \beta S$ con $\hat{\mu}(B)=\hat{\mu}(\beta S)$ tal que la aplicación $G: h \rightarrow h_{\beta|B}$ $(h \in H)$ es continua para las topologías de la convergencia puntual en H y G(H).

Es fácil comprobar que si H cumple C_μ entonces la restricción de la integral asociada a μ sobre H es t_p-continua. Por lo tanto el conjunto de medidas $\mu \in \mathcal{M}_\sigma(S)$ tales que cada $H \in \mathcal{H}$ verifica $C_{|\mu|}$ es un subespacio vectorial $\mathcal{M}^*_g(S)$ de $\mathcal{M}_g(S)$. La caracterización de este nuevo espacio en βS se obtiene considerando la familia $K^*_g(S)$ formada por los subconjuntos compactos $K \subset \beta S$ para los que existe un espacio de Banach X y una función $f \in C^w_b(S,X)$ tal que $f_\beta(K) \cap X = \emptyset$. Al igual que en la proposición 8.7 se obtiene una caracterización de $K^*_g(S)$ en terminos de la familia $\mathcal{H}$. Un compacto $K \in K^*_g(S)$ si y sólo si existe un $H \in \mathcal{H}$ tal que la restricción de I_α a H no es t_p-continua para cada $\alpha \in K$.

8.21 <u>TEOREMA</u> *Sea* $\mu \in \mathcal{M}_\sigma(S)^+$. *Son equivalentes : (a)* $C^w_b(S,X) \subset P^*(\mu,X)$ *para todo espacio de Banach X; (b)* $\mu \in \mathcal{M}^*_g(S)$ *; y (c)* $\hat{\mu}(K) = 0$ *para cada* $K \in K^*_g(S)$.

<u>Demostración</u> .- (a) $\Longleftrightarrow$ (c) Es una consecuencia de 8.5 .

(a) $\Longrightarrow$ (b) Supongamos que se cumple (a), y sea $H \in \mathcal{H}$. Si $X = C(H)$ y $f = F_H$ son como en el lema 8.6, entonces $H = \{ \langle x^*, f \rangle : \|x^*\| \leq 1 \}$. Del teorema 8.5 se obtiene la existencia de un subconjunto de Borel B de βS tal que $\hat{\mu}(B) = \hat{\mu}(\beta S)$ y $f_\beta(B) \subset X$.

Si $G(h) = h_{|B}$ entonces $G(H)$ es t_p-compacto en $C_b(B)$. Si $h_j = \langle x^*_j, f \rangle$ es una red en H t_p-convergente a $h = \langle x^*, f \rangle$, entonces $G(h)$ es el unico punto de aglomeración de la red $G(h_j)$. Por lo tanto $G(h_j)$ es t_p-convergente a $G(h)$. Con lo que se concluye que cada $H \in \mathcal{H}$ cumple C_μ ,y $\mu \in \mathcal{M}^*_g(S)$.

(b) $\Longrightarrow$ (c) Dado $K \in K^*_g(S)$, existe un $H \in \mathcal{H}$ tal que la restricción de I_α a H no es t_p-continua para cada $\alpha \in K$. Si se cumple (b) existirá un subconjunto de Borel $B \subset \beta S$ con $\hat{\mu}(B) = \hat{\mu}(\beta S)$ y tal que $G(h) = h_{|B}$ es continua para la topología t_p. Por lo tanto para cada $\alpha \in B$ la restricción de I_α a H es t_p-continua. Así se tiene que $K \cap B = \emptyset$ y en consecuencia $\hat{\mu}(K) = 0$. #

Si X es un espacio de Banach y $\mu \in \mathcal{M}_\tau(S)$ entonces para cada función $f \in C^w_b(S,X)$ se tiene que $\mu f^{-1} \in \mathcal{M}_\tau(X_w) = \mathcal{M}_t(X_w)$, y f_β toma casi todos sus valores en X, por lo que $f \in P^*(\mu,X)$. Por tanto $\mathcal{M}_\tau(S) \subset \mathcal{M}^*_g(S)$. Si S no es un

μ-espacio entonces la anterior inclusión es estricta. En efecto

$$S = \beta S \cap \mathcal{M}_\tau(S) \subsetneq \mu S \subset \beta S \cap \mathcal{M}_g(S) \quad \text{(Wheeler [1983] p.123)}$$

teniendo en cuenta que $\beta S \cap \mathcal{M}_g^*(S) = \beta S \cap \mathcal{M}_g(S)$ por el corolario 7.27, se tiene que $\mathcal{M}_\tau(S) \subsetneq \mathcal{M}_g{}^*(S) \subseteq \mathcal{M}_g(S)$.

La similaridad existente entre las caracterizaciones funcionales de $\mathcal{M}_\infty(S)$ y $\mathcal{M}_g(S)$, y la existente entre las caracterizaciones en βS de $\mathcal{M}_\infty(S)$ y $\mathcal{M}_g^*(S)$ nos hacen plantear la cuestión : ¿ Es posible distinguir entre $\mathcal{M}_g(S)$ y $\mathcal{M}_g^*(S)$?

8.22 <u>DEFINICION</u> Por $\mathcal{M}^*(S)$ denotaremos al espacio de las medidas $\mu \in \mathcal{M}_\sigma(S)$ que cumplen : "Para cada $H \in \mathcal{H}$ existe un $S_o \in B_a(S)$ con $|\mu|(S) = |\mu|(S_o)$ tal que $H_{|S_o} = \{ h_{|S_o} : h \in H \}$ es t_p-metrizable".

Si μ $\mathcal{M}^*(S)$ y $H \in \mathcal{H}$, la aplicación integral $h \to \int_S h \, d\mu$ definida sobre H se puede factorizar a traves de $H_{|S_o}$ usando la aplicación $h_{|S_o} \to \int_{S_o} h \, d\mu = \int_S h \, d\mu$. Como $H_{|S_o}$ es t_p-metrizable, esta ultima aplicación es t_p-continua. Entonces la integral asociada a μ restringida a H es t_p-continua, y por lo tanto $\mu \in \mathcal{M}_g(S)$.

El siguiente teorema prueba que $\mathcal{M}^*(S)$ esta formado por las medidas para las que toda función débilmente continua y acotada valorada en un Banach es integrable Bochner.

8.23 <u>TEOREMA</u> *Sea* $\mu \in \mathcal{M}_\sigma(S)^+$ *. Son equivalentes : (a)* $\mu \in \mathcal{M}^*(S)$ *; y (b) para todo espacio de Banach* X , $C_b^w(S,X) \subset L^1(\mu,X)$.

<u>Demostración</u> (a) $\Longrightarrow$ (b) Sea $f \in C_b^w(S,X)$ y $H = \{\langle x^*, f\rangle : \|x^*\| \leq 1 \}$. Sea $S_o \in B_a(S)$ con $\mu(S_o) = \mu(S)$ tal que $H_{|S_o}$ es t_p-metrizable. Denotamos $H_o = H_{|S_o}$. Como H_o es metrizable, el espacio de Banach $Y = C(H_o)$ con la norma del supremo es separable. Sea $\phi : S_o \to Y$ la aplicación que a cada s S_o le hace corresponder la evaluación δ_s. La relación $s \simeq s'$ si y sólo si $\phi(s) = \phi(s')$ es una relación de quivalencia en S_o, y si $s \simeq s'$ entonces $f(s) = f(s')$. El espacio cociente $S_o/\simeq$ se puede sumergir en el espacio de Banach separable Y. En $S_o/\simeq$ consideramos la topología separable γ_o inducida por Y. Obviamente, la función $\tilde{f} : S_o/\simeq \to X$ dada por $\tilde{f}(\tilde{s}) = f(s)$ está bien definida.

Como $H_o=\{<x^*,f>_{|S_o}: \ ||x^*||\leq 1\}$ resulta que $\tilde{f}$ es continua cuando en $S_o/\approx$ consideramos la topología γ_o. Por consigiente $\tilde{f}(S_o/\approx) = f(S_o)$ es separable en X. Como $\mu(S_o)= \mu(S)$, f está esencialmente valorada en un separable y es medible Bochner.

(b) $\Longrightarrow$ (a). Sea $H \in \mathcal{H}$ y sea $X = C(H)$ y $f = F_H$ como en el lema 8.6, entonces $f \in C_b^w(S,X)$. Si f es medible Bochner, entonces existe un $S_o \in B_a(S)$ con $\mu(S_o) = \mu(S)$ y $f(S_o)$ separable en X. Sea s_n una sucesión en S_o tal que $f(s_n)$ es densa en $f(S_o)$ para la norma de $X = C(H)$. Entonces la sucesión de semidistancias $d_n(h,h')= |h(s_n)-h'(s_n)|$ define la topología t_p de $H_{|S_o}$. En efecto, sea h_j una red en H tal que para cada $n \in N$ $\lim_j h_j(s_n)=h(s_n)$, con $h \in H$. Dado $s \in S_o$ y $\varepsilon > 0$ existe un $m \in N$ tal que $|g(s)-g(s_m)|<\varepsilon/3$ para cada $g \in H$. Sea j_o tal que si $j \geq j_o$ $|h_j(s_m)-h(s_m)|< \varepsilon/3$, entonces se tiene que $|h_j(s)-h(s)| < \varepsilon$. Con lo que se prueba que $h_j(s) \to h(s)$. Por lo tanto $H_{|S_o}$ es t_p metrizable. #

¿Es posible distinguir entre los espacios $\mathcal{M}^*(S)$, $\mathcal{M}_g(S)$ y $\mathcal{M}_g^*(S)$?

INTEGRABILIDAD UNIVERSAL DE LAS FUNCIONES DEBILMENTE CONTINUAS (no necesariamente acotadas).

Por $\mathcal{M}_\sigma^\bullet(S)$ denotaremos al espacio formado por las medidas $\mu \in \mathcal{M}_\sigma(S)$ que integran a todas las funciones reales continuas definidas sobre S. Estas medidas se denominan usualmente como medidas de Riesz (Gould-Mahowald [1962]) y estan caracterizadas en βS porque el soporte de la medida $\hat{\mu}$ es un subconjunto de νS.

Si $\mu \in \mathcal{M}_\sigma^\bullet(S)^+$, denotaremos por $\tilde{\mu}$ a la medida de Borel regular con soporte compacto definida sobre νS que se obtiene restringiendo la medida regular $\hat{\mu}$ definida sobre βS. Para cada $B \in B_a(S)$ existe un $\tilde{B} \in B_a(\nu S)$ tal que $\tilde{\mu}(\tilde{B}) = \mu(\tilde{B} \cap S) = \mu(B)$ y $B = \tilde{B} \cap S$, es decir, la restricción de $\tilde{\mu}$ a $B_a(\nu S)$ es la medida imagen de μ a traves de la inclusión $i: S \to \nu S$. Por lo tanto

$$\int_{\tilde{B}} \psi^\nu d\tilde{\mu} = \int_B \psi \, d\mu \quad \text{para cada } \psi \in C(S).$$

Dada una función $f : S \to X$ débilmente continua, denotamos por $f^{\nu} : \nu S \to \overline{\nu X}$ a la función $\sigma(\overline{\nu X},X^*)$ continua que extiende a la función f, dada por el teorema 10.4 de Gillman-Jerison [1976]. Cuando se utiliza el modelo de la realcompactificación $\overline{\nu X}$ descrito en el anexo, es claro que la función f^{ν} viene definida por $\langle x^*,f^{\nu}\rangle = (\langle x^*,f\rangle)^{\nu}$ para cada $x^* \in X^*$.

8.24 PROPOSICION *Sea X un espacio de Banach. Si* $\mu \in \mathcal{M}^{\bullet}_{\sigma}(S)^+$ *y* $f \in C^{w}(S,X)$, *entonces f es X*-esencialmente acotada.*

Demostración .- Como $\tilde{\mu}$ está soportada por un compacto, f^{ν} toma casi todos sus valores ($\tilde{\mu}$) en un $\sigma(\overline{\nu X},X^*)$acotado $B \subset \overline{\nu X} \subset X^{**}$. B es un conjunto acotado en X^{**}, entonces existe una constante $k > 0$ tal que para cada $x^* \in X^*$ se tiene: $\tilde{\mu}(\{\alpha : |\langle x^*,f^{\nu}(\alpha)\rangle| > k\ \|x^*\|\}) = 0$. Como $\langle x^*,f^{\nu}\rangle = (\langle x^*,f\rangle)^{\nu}$ y $\tilde{A}_{x^*} = \{\alpha : |\langle x^*,f^{\nu}(\alpha)\rangle| > k\ \|x^*\|\} \in B_a(\nu S)$ es tal que su intersección con S $\tilde{A}_{x^*} \cap S = \{s : |\langle x^*,f(s)\rangle| > k\ \|x^*\|\} \in B_a(S)$. Se tiene que $\mu(\tilde{A}_{x^*} \cap S) = 0$ concluyendo que f está X*-esencialmente acotada. #

8.25 PROPOSICION *Sea X un espacio de Banach, si* $\mu \in \mathcal{M}^{\bullet}_{\sigma}(S)^+$ *y* $f \in C^{w}(S,X)$ *es tal que* f^{ν} *toma casi todos sus valores (*$\tilde{\mu}$*) en X, entonces* $f \in P(\mu,X)$.

Demostración .- Razonaremos como en la prueba (b) $\Longrightarrow$ (a) de 8.4. Sea $A \in B_a(S)$ con $\mu(A) > 0$, entonces existe un $Z \in \mathcal{Z}(S)$ tal que $Z \subset A$ y $\mu(Z) > 0$. Sea $\tilde{Z} \in \mathcal{Z}(\nu S)$ con $\tilde{Z} \cap S = Z$, entonces $\tilde{\mu}(\tilde{Z}) > 0$. Sea $K \subset \nu S$ el soporte de la medida regular que $\tilde{\mu}$ induce en $\tilde{Z}$, Entonces $\tilde{\mu}(K) > 0$, y como f^{ν} toma casi todos sus valores en X se tiene que $\{\alpha \in K : f^{\nu}(\alpha) \in X\} \neq \emptyset$.

Razonando como en 8.4 utilizando f^{ν} en lugar de f_{β} , se obtiene que: $f^{\nu}(K) \subset \overline{co}^{*}(\ (1/\mu(B)).\ (D)\text{-}\int_B f\,d\mu\ :\ B \subset A\ \text{ y } \mu(B) > 0\ )$. Aplicando el teorema 7.21 se obtiene que $f \in P(\mu,X)$. #

Como consecuencia obtenemos que si $\mu \in \mathcal{M}^{\bullet}_{\sigma}(S)$ entonces $C^{w}(S,X) \subset P(\mu,X)$ para todo espacio de Banach X real compacto para la topología $\sigma(X,X^*)$.

El reciproco de este resultado es evidente pues siempre se puede sumergir C(S) en $C^{w}_{b}(S,X)$. Entonces tenemos probado el siguiente:

8.26 TEOREMA *Sea* $\mu \in \mathcal{M}_\sigma(S)^+$ *, entonces* $\mu \in \mathcal{M}^{\bullet}_\sigma(S)$ *si y sólo si ,para todo espacio de Banach* X *débilmente realcompacto, se cumple* $C^w(S,X) \quad P(\mu,X)$.#

En el teorema anterior basta suponer la inclusión sólo para un espacio de Banach débilmente realcompacto, en particular se puede tomar $X = l^\infty$ que es realcompacto para la topología débil (vease Corson [1961]).

8.27 COROLARIO *Para un espacio de Banach* X *, son equivalentes: (a)* X *es realcompacto para la topología débil; y (b)* $C^w(S,X) \subset P(\mu,X)$ *para cada espacio topológico* S *y cada* $\mu \in \mathcal{M}^{\bullet}_\sigma(S)^+$.

Demostración .- Sólo tenemos que probar (b) $\Longrightarrow$ (a). Supongamos que X no es realcompacto para la topología débil, (siguiendo la notación dada en el anexo, para el modelo $\overline{\nu X}$ de la real-compactificación de X) existirá un elemento $\phi \in \overline{\nu X}-X$. También existirá una medida $\{0,1\}$ valuada σ-aditiva α tal que $\alpha \in \nu X-X$, $\phi_\alpha = \phi$, y también está en $\mathcal{M}^{\bullet}_\sigma(S)$. Sea $S = X_w$ y f la función identidad, si se cumple (b), $f \in P(\alpha,X)$, y $\phi_\alpha = (P)\text{-}\int f \; d\alpha$ será un elemento de X, con lo que llegamos a una contradicción. #

Como consecuencia de la caracterización de 8.26 se obtiene otra demostración del siguiente teorema de Ptack [1955].

8.28 PROPOSICION (Ptack) *Sea* S *un espacio topológico completamente regular y* $\mu \in \mathcal{M}_\sigma(S)^+$. *Si* $\mu \in \mathcal{M}^{\bullet}_\sigma(S)$ *entonces el funcional* $I_\mu(f) = \int f \; d\mu$ *es* t_p*-continuo sobre cada conjunto* $H \subset C(S)$ t_p*-compacto,* t_p*-separable y absolutamente convexo de* C(S).

Demostración .- Sea $\mu \in \mathcal{M}^{\bullet}_\sigma(S)$ y $H \subset C(S)$ t_p-compacto, t_p-separable y absolutamente convexo. Sea $M = \{\psi_n : n \in \mathbb{N}\} \subset H$ un conjunto numerable t_p-denso en H.

Sea $f : S \to l^\infty$ la función definida por $f(s) = (\psi_n(s))$. Como H es absolutamente convexo y t_p-compacto, resulta fácilmente que $\{\langle x^*, f\rangle : x^* \in l^{\infty *}, \|x^*\| \leq 1\}$ está contenido en H. En efecto, sea e_n la base canonica de l^1 y $x^* \in l^{\infty *}$ con

$\|x^*\| \leqslant 1$, x^* es el limite en la topología $\sigma(l^{\infty *}, l^{\infty})$ de una red $x_j^* = \sum_n \lambda_{n,j} e_n$ con $\sum_n |\lambda_{n,j}| \leqslant 1$. Como para cada j $<x_j^*, f(s)> = \sum_n \lambda_{n,j} \psi_n(s)$ es una función de H, se sigue que $<x^*, f(s)> = \lim_j <x_j^*, f(s)>$ también está en H.

En realidad, lo que se sucede realmente es que $H = \{<x^*, f> : \|x^*\| \leqslant 1\}$ $\overline{\underline{(B)}}$ Hemos de probar que dada $\psi \in H$, existe $x_\psi^* \in l^{\infty *}$ tal que $\psi = <x_\psi^*, f>$. En efecto, sea $\psi_j = \psi_{n(j)}$ una red en M que converge puntualmente hacia ψ , la correspondiente red $e_{n(j)}$ en l^1 posee un punto de aglomeración $x_\psi^* \in l^{\infty *}$ para la topología $\sigma(l^{\infty *}, l^{\infty})$. Evidentemente $<x_\psi^*, f(s)>$ es un punto de aglomeración de la red $<e_{n(j)}, f(s)> = \psi_{n(j)}(s)$ la cual converge hacia $\psi(s)$. Asi pues se tiene que $<x_\psi^*, f(s)> = \psi(s)$. En cirtud de (B) se tiene que f es débilmente continua y por 7.26 es integrable Pettis.

Como f es integrable Pettis, la forma $\phi : x^* \to \int <x^*, f> d\mu$ es continua sobre $\{x^* \in l^{\infty *} : \|x^*\| \leqslant 1\}$ con la topología débil*. En virtud de (B) y un sencillo razonamiento basado en la t_p-compacidad de H, se obtiene que I_μ es t_p-continua sobre H. #

Para finalizar este epígrafe, observamos como $\mathcal{M}_\infty^\bullet(S) = \mathcal{M}_\infty(S) \cap \mathcal{M}_\sigma^\bullet(S)$ es el espacio de las medidas que hacen integrables Bochner a todas las funciones $f \in C(S,X)$.

8.29 <u>TEOREMA</u> *Sea* $\mu \in \mathcal{M}_\sigma(S)^+$. *Son equivalentes : (a)* $\mu \in \mathcal{M}_\infty^\bullet(S)$ *; y (b) para todo espacio de Banach* X $C(S,X) \subset L^1(\mu, X)$.

<u>Demostración</u> .- (b) $\Longrightarrow$ (a) . Si μ cumple (b) por el teorema 8.8 tenemos que $\mu \in \mathcal{M}_\infty(S)$. Tomando $X = \mathbb{R}$ se tiene que $\mu \in \mathcal{M}_\sigma^\bullet(S)$.

(a) $\Longrightarrow$ (b). Dada $\mu \in \mathcal{M}_\infty^\bullet(S)$, por el lema 8.24 sabemos que toda función $f \in C(S,X)$ es X^*-esencialmente acotada respecto de μ , es decir, existe $k > 0$ tal que $\mu\{s : |<x^*, f(s)>| > k \|x^*\|\} = 0$ para todo $x^* \in X^*$.

Razonando como en la prueba (c) $\Longrightarrow$ (a) de 8.8 se deduce que f es medible Bochner. Es decir, f toma casi todos sus valores en un subespacio separable Y de X. Sea y_n un subconjunto denso y numerable de Y, y sean $x_n^* \in X^*$ tales que

$\|x_n^*\| \leqslant 1$ y $\|y_n\| = |\langle x_n^*, y_n\rangle|$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Entonces para todo $y \in Y$ se cumple $\|y\| = \sup\{ |\langle x_n^*, y\rangle| : n \in \mathbb{N} \}$.

Sea $A_n = \{ s : |\langle x_n^*, f(s)\rangle| > k \}$, entonces tanto A_n como $A = \bigcup_n A_n$ son conjuntos de medida nula. Si $s \notin A$ y $f(s) \in Y$ se tiene que $\|f(s)\| \leqslant k$. Por lo tanto f toma casi todos sus valores en un conjunto acotado, lo que junto a que f es medible Bochner, implica que $f \in L^1(\mu, X)$. #

9 LA PROPIEDAD DE RADON-NIKODYM PARA LA INTEGRAL DE PETTIS EN ESPACIOS DUALES.

LA PROPIEDAD DEBIL DE RADON-NIKODYM.

Musial [1979] ha introducido la Propiedad Débil de Radon-Nikodym en un espacio de Banach como la propiedad de Radon-Nikodym para la integral de Pettis, "Un espacio de Banach X tiene la Propiedad Débil de Radon-Nikodym si para cada espacio de medida finito y completo (Ω, Σ, μ) y cada medida vectorial μ-continua $m: \Sigma \to X$ con variación σ-finita, existe $f \in P(\mu, X)$ tal que $m(A) = \int_A f \, d\mu$ para cada $A \in \Sigma$". Para espacios de Banach duales X^* se tienen las siguientes equivalencias : (a) X^* tiene la Propiedad débil de Radon-Nikodym ; (b) X no contine copias de l^1(Musial [1979], Janicka [1979]); (c) Cada sucesión acotada en X posee subsucesiones débilmente de Cauchy (Rosenthal [1974]); (d) Todo operador lineal acotado $T: L^1([0,1]) \to X^*$ lleva conjuntos débilmente compactos a conjuntos compactos en norma (Pełczyński [1968]); (e) X^* no contiene copias de $L^1([0,1])$; (f) Cada subconjunto débil* compacto y convexo de X^* es la envoltura convexa y cerrada en norma de sus puntos extremales (Haydon [1976], Odell-Rosenthal [1975]); (g) Cada operador Dunford-Pettis de $L^1([0,1])$ en X^* es representable por una función integrable Pettis (Saab [1982-b]) ,(recuerdese también la caracterización expuesta en 5.31).

Recientemente, se ha abordado el problema de localizar la propiedad débil de Radon-Nikodym en subconjuntos de los espacios de Banach. Buenas exposiciones de los resultados existentes en esta dirección aparecen en los trabajos de Bourgin[1983] y Diestel-Uhl[1983].

9.1 <u>DEFINICION</u> Un subconjunto acotado K de un e.l.c. X se dice que tiene la Propiedad Débil de Radon-Nikodym (PDRN) para el espacio de medida finito y completo (Ω,Σ,μ), si para cada medida vectorial $m:\Sigma \to X$ tal que para cada $A \in \Sigma$ es $m(A) \in \mu(A).K$, existe una función $f \in P(\mu,X)$ tal que $m(A)=\int_A f \; d\mu$ para cada $A\in\Sigma$.

Se dice que K tiene la PDRN cuando la tiene para todo espacio de medida finito y completo (Ω,Σ,μ).

En el contexto de los trabajos de Musial [1979] y Janicka [1979] se pone de manifiesto que para espacios de Banach X, X posee la PDRN si y sólo si su bola unidad B_X también la tiene.

Diremos que un e.l.c. X posee la PDRN si cada conjunto acotado $K\subset X$ tiene la PDRN.

El principal proposito de esta sección es extender al caso de e.l.c. las caracterizaciones existentes de la PDRN para subconjuntos débil*-compactos y convexos de espacios de Banach duales. En el teorema 9.9 establecemos las principales caracterizaciones de esta propiedad dando una prueba más simple y directa que la correspondiente para el caso de espacios de Banach, que aparece dispersa en la literatura (Saab [1982-c], Riddle-Saab-Uhl [1983], Saab-Saab [1983]). Este teorema nos permitira caracterizar la PDRN en el caso de e.l.c. a través de la PDRN sobre suconjuntos de espacios de Banach duales. También permite obtener el resto de caracterizaciones de la PDRN sobre subconjuntos débil*compactos convexos existentes en el caso de los Banach, para el caso localmente convexo.

El teorema 9.9 también nos facilitará el estudio de la propiedad de Radon Nikodym (para la integración por seminormas que señalamos en la siguiente sección) a traves de la misma propiedad en espacios de Banach.

Antes de probar el citado teorema, exponemos la notación y los resultados previos que vamos a utilizar:

Sea X un e.l.c. y X^* su dual topológico. Si $K\subset X^*$ es un subconjunto débil* compacto, en lo sucesivo, lo supondremos siempre dotado de la topología indu-ducida por la topología débil* $\sigma(X^*,X)$, salvo mención expresa de lo contrario.

Siguiendo la terminología empleada por Bourgain-Fremlin-Talagrand [1978], $B_1(K)$ denotará al espacio de la funciones $\psi: K \to \mathbb{R}$ de la primera clase de Baire (limites puntuales de sucesiones de funciones continuas $\psi_n: K \to \mathbb{R}$). Si μ es una medida de Radon sobre K, $M_\mu(K)$ denotará al espacio vectorial de las funciones μ-medibles $\psi: K \to \mathbb{R}$, y $M_r(K)$ denotará al espacio de todas las funciones $\psi: K \to \mathbb{R}$ universalmente medibles (es decir, $M_r(K)$ es la intersección de todos los espacios $M_\mu(K)$). Evidentemente $B_1(K) \subset M_r(K)$.

Diremos que $K \subset X^*$ posee la PDRN si la posee como subconjunto de $(X^*, \beta(X^*,X))$. Si $K \subset X^*$ es convexo y débil* compacto, dada una medida de Radon μ sobre K con $\mu(K)=1$, la forma lineal $x^*_\mu : x \to \int_K \langle x, x^* \rangle \, d\,\mu(x^*)$ es continua para la topología de Mackey $\tau(X,X^*)$, así queda definido el baricentro de μ como el elemento $x^*_\mu \in K \subset X^*$. Una función afín $g: K \to \mathbb{R}$ se dice que satisface el cálculo baricéntrico si es universalmente medible y para cada medida de Radon μ sobre K, se cumple $g(x^*) = \int_K g(x^*) \, d\,\mu(x^*)$.

La siguiente proposición de Haydon([1976],prop.4.1) da una condición necesaria y suficiente para que una función afín y acotada $g: K \to R$ satisfaga el cálculo baricéntrico.

9.2 <u>PROPOSICION</u> (Haydon) *Si* $K \subset X^*$ *es un subconjunto débil*-compacto y convexo, y* $g: K \to \mathbb{R}$ *es una función afín acotada, son equivalentes : (a)* g *satisface el cálculo baricéntrico ; y (b) Para cada* $r \in \mathbb{R}$ *y* $\delta > 0$, *y cada medida de Radon* μ *sobre* K *existe un subconjunto cerrado convexo* L *de* K *con* $\mu(L) > 0$ *que está contenido en* $A = \{x^* \in K : g(x^*) > r\}$ *o en* $B_\delta = \{x^* \in K : g(x^*) < r+\delta\}$. #

Utilizando este resultado de Haydon, obtenemos una demostración directa, en el caso localmente convexo, de un resultado obtenido por Saab [1982-c] en el caso de los espacios de Banach. La prueba de Saab involucra un paseo a través de varios trabajos, y parece difícil de trasladar al caso localmente convexo. La prueba directa de esta proposición constituye uno de los puntos clave que nos ha permitido extender a los e.l.c. los resultados dados en 9.9.

9.3 PROPOSICION *Sea* $K\subset X^*$ *un subconjunto débil*-compacto y convexo que satisface la siguiente condición:*

(a) Para cada suconjunto débil-compacto* $M\subset K$ *la restricción a* $(M,\sigma(X^*,X))$ *de cada elemento* $x^{**}\in X^{**}$ *posee un punto de continuidad.*

Entonces, para cada x^{**} *su restricción a K,* $g=x^{**}|_K$ *,satisface el cálculo baricéntrico.*

Demostración .- Bastará probar que bajo la hipótesis de la proposición, la función afín acotada $g=x^{**}|_K$ satisface la condición (b) de 9.2. Supongamos que existen una medida de Radon μ sobre K, $r\in\mathbb{R}$ y $\varepsilon>0$, tales que cada cerrado convexo $L\subset K$ no está contenido ni en $A=\{x^*\in K: g(x^*)>r\}$ ni en $B_\delta=\{x^*\in K: g(x^*)<r+\delta\}$, si $\mu(L)>0$.

Sea $M\subset K$ el soporte de μ y $a^*\in M$ un punto de continuidad de $g|_M=x^{**}|_M$. Probaremos que si $g(a^*)>r$ (resp. $g(a^*)\leq r$) existe un subconjunto cerrado convexo $L\subset K$ con $\mu(L)>0$ y $L\subset A$ (resp. $L\subset B_\delta$). Con lo que se llega a una contradicción, que prueba la proposición.

Supongamos que $g(a^*)>r$, sea $0<\varepsilon<g(a^*)-r$, y $V\subset K$ un entorno abierto convexo de a^* en K tal que $g(x^*)<r+\varepsilon$ para cada $x^*\in V\cap M$. Sea $H\subset K$ la envoltura débil*-cerrada convexa de $V\cap M$. Si $h=g|_H=x^{**}|_H$ y $x^*\in H$, sea $o(h,x^*)=\inf\{\sup h(W\cap H)-\inf h(W\cap H): W$ entorno de x^* en $K\}$ la oscilación de h en x^*. Es fácil observar que el conjunto $T=\{x^*\in H: o(h,x^*)\geq\varepsilon\}$ es un subconjunto cerrado convexo de H. Como h posee algún punto de continuidad $T\neq H$, y recordando la definición de H se tiene que $V\cap M$ no está contenido en T. Por lo tanto existe $b^*\in V\cap M$ tal que $o(h,b^*)<\varepsilon$, de modo que se puede encontrar un entorno cerrado y convexo W de b^* en K de modo que $\sup h(W\cap H)-\inf h(W\cap H)<\varepsilon$. Como M es el soporte de μ y $V\cap M$ es un entorno de $b^*\in M$ se puede asegurar que el conjunto cerrado y convexo $L=H\cap W\supseteq M\cap V\cap W$ cumple $\mu(L)\geq\mu(M\cap V\cap W)>0$. Si $x^*\in L$ se tiene que $g(x^*)-g(b^*)<\varepsilon$, entonces $g(x^*)>g(b^*)-\varepsilon>r+\varepsilon-\varepsilon=r$, y $L\subset A$.

De forma análoga si se supone que $g(a^*)\leq r<r+\delta$ se obtiene $L\subset B_\delta$. #

La hipótesis (a) de la proposición anterior se suele definir como que K tiene la SPCP (propiedad escalar del punto de continuidad).

En la demostración de 9.9 se utilizaran los siguientes resultados:

9.4 TEOREMA (Rosenthal [1977]) *Sea* H *un espacio polaco, y* $\mathcal{F}\subset B_1(H)$ *una familia de funciones de la primera clase de Baire. Son equivalentes :*

(a) Cada sucesión $f_n \in \mathcal{F}$ *posee una subsucesión puntualmente convergente; y*

(b) $\mathcal{F}$ *es relativamente compacto en* $B_1(H)$ *dotado de la topología de la convergencia puntual.* #

El siguiente resultado es consecuencia inmediata del dificil teorema 2F de Bourgain-Fremlin-Talagrand [1978] que caracteriza los conjuntos relativamente compactos de $M_r(K)$ para la topología de la convergencia puntual. Una demostración derecta puede verse en Rosenthal ([1978], th.3.18)

9.5 TEOREMA *Sea* H *un espacio polaco y* f_n C(H) *una sucesión puntualmente acotada de funciones continuas sobre* H *, que no posee subsucesiones puntualmente convergentes. Entonces existe una subsucesión* f'_n *de* f_n *que no posee puntos de aglomeración universalmente medibles en la topología de la convergencia puntual.* #

Por ultimo, en virtud del lema 2 de Odell-Rosenthal [1975], si $f:K \to R$ es una función sin puntos de continuidad sobre el espacio compacto separado K, f cumple el criterio de discontinuidad descrito en Rosenthal [1977]. Así, la proposición 1 de Rosenthal [1977] da el siguiente resultado:

9.6 TEOREMA *Sea* $\mathcal{F} \subset C(T)$ *una familia uniformemente acotada de funciones continuas sobre el espacio compacto separado* T. *Se supone que existe una función* $f: T \to \mathbb{R}$ *sin puntos de continuidad sobre* T *,que es adherente a* $\mathcal{F}$ *para la topología de la convergencia puntual. Entonces* $\mathcal{F}$ *contiene una sucesión* f_n *que, con respecto a la norma del supremo, es equivalente a la base canonica de* l^1 . #

9.7 LEMA *Sea* Y *un e.l.c. separable . Si* $H \subset Y^*$ *es un subconjunto débil* compacto y convexo, son equivalentes : (a) Para cada* $y^{**} \in Y^{**}$ *existe una sucesión acotada* $y_n \in Y$ *tal que* $\langle y^{**}, y^* \rangle = \lim_n \langle y_n, y^* \rangle$ *para cada* $y^* \in H$ *; (b)* $y^{**}|_H \in B_1(H)$ *para cada* $y^{**} \in Y^{**}$ *; (c)* $y^{**}|_H \in M_r(H)$ *para cada* $y^{**} \in Y^{**}$*; y (d) Cada sucesión acotada* $x_n \in Y$ *posee una subsucesión* y_n *tal que* $\langle y_n, y^* \rangle$ *es convergente para cada* $y^* \in H$.

Demostración .- Las implicaciones (a) $\Longrightarrow$ (b) y (b) $\Longrightarrow$ (c) son inmediatas. (c) $\Longrightarrow$ (d) es una consecuencia de 9.5.

(d) $\Longrightarrow$ (a) Dado $y^{**} \in Y^{**}$ existe un conjunto acotado $B \subset Y$ tal que y^{**} es adherente a B para la topología $\sigma(Y^{**}, Y^*)$. Si se cumple (d) la familia $\mathcal{F} = \{ y|_H : y \in B \}$ es relativamente compacta en $B_1(H)$ por 9.4. Por lo tanto, $y^{**} \in B_1(H)$. Hemos utilizado que H es metrizable para la topología debil*, hecho que se deduce de que Y es separable, y consecuentemente H es un espacio polaco para esta topología.

Como H es un espacio polaco, el teorema 3F de Bourgain-Fremlin-Talagrand [1978] establece que $B_1(H)$ es angelico para la topología de la convergencia puntual. Por lo tanto $y^{**}|_H$ es el limite puntual de alguna sucesión $y_n|_H$ con $y_n \in B$. Es decir, se sumple (a). #

En la prueba de 9.9. sólo se utilizan las equivalencias entre (b),(c) y (d), por lo que no es necesario recurrir al teorema 3F de Bourgain-Fremlin--Talagrand.

9.8 LEMA *Sea* K *un subconjunto débil*- compacto y convexo de* X^* *, y sea* Y *un subespacio separable de* X *y* $H = \{ x^*|_Y : x^* \in H \}$ *. Si* K *posee la PDRN, entonces* H *es un subconjunto convexo debil*-compacto de* Y^* *que satisface las condiciones equivalentes del lema 9.7.*

Demostración .- Sea $i^* : X^* \to Y^*$ la aplicación transpuesta de la inclusión, y sea $\pi = i^*|_K$, entonces $H = \pi(K)$. Probaremos que se cumple (c) de 9.7.

Dada una medida de Radon λ sobre H, como π es sobreyectiva y continua para las topologías $\sigma(X^*, X)$ y $\sigma(Y^*, Y)$, existe una medida de Radon μ sobre

K tal que $\mu\pi^{-1} = \lambda$ (Schwartz [1973] p.39). Sobre la σ-álgebra $B_o(K)$ podemos definir la medida vectorial $m: B_o(K) \to X^*$ dada por $< m(A), x > = \int_A < x^*, x > d\mu(x^*)$ (si $\mu(A) > 0$, $(1/\mu(A)).m(A)$ es el baricentro de la medida $\mu_A(E) = (1/\mu(A)).m(E \cap A)$). Así, $m(A) \in \mu(A).K$ para cada $A \in B_o(K)$. Como K posee la PDRN, existe una función escalarmente medible $f: K \to (X^*, \beta(X^*,X))$ tal que para cada $A \in B_o(K)$ y cada $x^{**} \in X^{**}$ se cumple $<m(A), x^{**}> = \int_A <x^{**}, f> d\mu$.

La función $g = i^* \circ f : K \to Y^*$ es escalarmente medible y para cada $A \in B_o(K)$ y cada $y \in Y$ se cumple

$$\int_A <y,g>\, d\mu = \int_A <y,f>\, d\mu = < m(A), y> = \int_A <y, x^*> d\mu(x^*) = \int_A < y, \pi(x^*)>\, d\,\mu(x^*)$$

Por lo tanto, para cada $y \in Y$ la funciones reales $x^* \to <y, g(x^*)>$ y $x^* \to < y, \pi(x^*) >$ son iguales en casi todo punto (μ) $x^* \in K$. Como Y es separable se deduce que $g(x^*)$ y $\pi(x^*)$ son iguales en casi todo punto. Por consiguiente la función $\pi: K \to Y^*$ es escalarmente medible, es decir, para cada $y^{**} \in Y^{**}$ la función escalar $y^{**} \circ \pi$ es μ-medible. El teorema I.9 de Schwartz [1973] permite asegurar que $y^{**}|_H$ es λ-medible cualquiera que sea $y^{**} \in Y^{**}$. con lo que concluimos la prueba de la condición (c) de 9.7. #

9.9 <u>TEOREMA</u> *Sea* $K \subset X^*$ *un subconjunto convexo y débil*-compacto. Las siguientes proposiciones son equivalentes:*

(a) K *posee la Propiedad Débil de Radon-Nikodým .*

(b) Cada sucesión acotada x_n *en* X *posee una subsucesión* y_n *tal que* $< x^*, y_n >$ *es convergente para cada* $x^* \in K$.

(c) K *verifica la SPCP.*

(d) La restricción a K de cada $x^{**} \in X^{**}$ *satisface el cálculo baricéntrico.*

(e) La restricción a K de cada $x^{**} \in X^{**}$ *es universalmente medible.*

<u>Demostración</u> .- (a) $\Longrightarrow$ (b) Si $x_n \in X$ es una sucesión en X acotada, sea Y el subespacio cerrado de X generado por los x_n. Si se cumple (a), aplicando el lema 9.8 se obtiene una subsucesión y_n tal que $<y^*, y_n>$ es convergente para cada $y^* \in H = \{ x^*|_Y : x^* \in K \}$, de donde resulta (b).

(b) $\Longrightarrow$ (c) Si se supone que (c) es falso, existirá un $x^{**} \in X^{**}$ y un subconjunto débil*-cerrado $T\subset K$ tal que $x^{**}_{|T}$ no posee puntos de continuidad Sea $B\subset X$ un conjunto acotado tal que x^{**} es $\sigma(X^{**},X^*)$ adherente a B, y sea $F=\{x_{|T} : x\in B\}$. Aplicando el teorema 9.6 se deduce la existencia de una sucesión $x_n\in B$ tal que $x_{n|T}\in C(T)$, con la norma del supremo, es equivalente a la base canónica de l^1. La sucesión $x_{n|T}$ no puede poseer subsucesiones puntualmente convergentes sobre T, pues en otro caso tendria una sucesión débilmente de Cauchy en C(K), en contradicción con que sea equivalente a la base canónica de l^1. Por consiguiente (b) es falso.

(c) $\Longrightarrow$ (d) es la proposición 9.3.

(d) $\Longrightarrow$ (e) es un resultado inmediato.

(e) $\Longrightarrow$ (b) Si se supone que (b) es falso, existirá una sucesión acotada $x_n\in X$ tal que $x_{n|K}$ no posee subsucesiones puntualmente convergentes. Si Y es el subespacio cerrado de X engendrado por los términos de la sucesión x_n, y si $H=\{x^*_{|Y}: x^*\in K\}$, es claro que no se cumple la condición (d) del lema 9.7, y por lo tanto tampoco se cumple la condición (c) de dicho lema. Entonces existe un $y^{**}\in Y^{**}$ tal que $y^{**}_{|H}$ no es universalmente medible. Ahora si $x^{**}=i^{**}(y^{**})$, entonces $x^{**}_{|K}=y^{**}_{|H}\circ\pi$ no es universalmente medible, otra vez por el teorema I.9 de Schwartz [1973].

(d) $\Longrightarrow$ (a) La prueba de esta implicación se realiza de forma análoga a la del caso de los espacios de Banach. Sea (Ω,Σ,μ) un espacio de medida finito y completo, y sea ρ un "lifting" sobre $\mathcal{L}^\infty(\mu)$. Sea $m:\Sigma\to X^*$ una medida vectorial tal que $m(A)\in\mu(A).K$ para cada $A\in\Sigma$. Para cada $x\in X$ la medida escalar $\langle x,m(.)\rangle$ es μ-continua. Por el teorema de Radon-Nikodym escalar, existe una función $g_x\in\mathcal{L}^1(\mu)$ tal que $\int_A g_x\,d\mu=\langle x,m(A)\rangle$ para cada $A\in\Sigma$. Sea $\alpha=\inf\{\langle x,x^*\rangle\ x^*\in K\}$ y $\beta=\sup\{\langle x,x^*\rangle\ x^*\in K\}$. Como $\int_A g_x\,d\mu\in\mu(A).[\alpha,\beta]$ para cada $A\in\Sigma$, se deduce que g_x toma casi todos sus valores en $[\alpha,\beta]$. Así se tiene que $g_x\in\mathcal{L}^\infty(\mu)$.

Para cada $t\in\Omega$ consideramos la aplicación lineal $f(t): x\to\rho(g_x)(t)$. Como $|\rho(g_x)(t)|=\rho(|g_x|)(t)\leq\sup|\alpha|,|\beta|\leq 1$ si $x\in K^\circ$, se tiene que

$f(t)$ X^*. Así tenemos definida una función $f:\Omega \to X^*$ verificando $\langle f(t),x\rangle = \rho(g_x)(t)$ para todo $x\in X$ y todo $t\in\Omega$ .Evidentemente $\langle x,f(t)\rangle\in[\alpha,\beta]$ par todo $t\in\Omega$, lo que implica que $f(\Omega)\subset K$ por los teoremas de separación. Entonces $f:\Omega\to X$ es una función X-escalarmente medible y acotada tal que $f=\rho(f)$. Por 7.17 sabemos que f es medible con respecto a la σ-álgebra $B_o(X^*,\sigma(X^*,X))$ y que la medida imagen $\lambda=\mu f^{-1}$ definida sobre esta σ-álgebra es una medida de Radon con soporte contenido en K. Para cada $B\in B_o(K)$ consideramos la medida de Radon λ_B definida sobre K por $\lambda_B(E)=(1/\lambda(B)).\mu(B\cap E)$ para todo $E\in B_o(K)$, y sea $A=f^{-1}(B)\in\Sigma$. De la construcción de f sabemos que el baricentro de λ_B es $(1/\mu(A)).\, m(A)$. si suponemos que se cumple (d) se tiene

$$\int_A \langle x^{**},f\rangle d\mu = \int_B \langle x^{**},x^*\rangle d\lambda = \lambda(B)\int_B \langle x^{**},x^*\rangle\, d\lambda_B =$$

$$= \mu(A).\ \langle x^{**},(1/\mu(A)).\ m(A)\rangle = \langle x^{**},\ m(A)\rangle$$

Con lo que se tiene probado que f es integrable Pettis con respecto a la sub-σ-álgebra $\Sigma_o=\{f^{-1}(B) : B\in B_o(K)\}$. Aplicando la proposición 2.11 se deduce que f es integrable Pettis sobre Σ y su integral indefinida m_f coincide con m , pues $\langle x,m_f(.)\rangle = \langle x,m(.)\rangle$ para cada $x\in X$. Por consiguiente se tiene que f es la derivada débil de Radon-Nikodym de la medida vectorial m . #

En la demostración de este teorema cuando X es un espacio de Banach, dada por Saab [1982-c], al probar las implicaciones (a) $\Rightarrow$ (b) $\Rightarrow$ (c) se utilizan resultados previos de Saab-Saab [1983]y Riddle-Saab-Uhl [1983] relativos al caso en que K es absolutamente convexo. Esencialmente, esta prueba utiliza toda la potencia del extenso teorema 3 de Riddle-Saab-Uhl, basado entre otros resultados, en el teorema de Fremlin, en la caracterización de los operadores Dunford-Pettis mediante martingalas debida a Bourgain,y en la caracterización de Haydon de los espacios de Banach que no contienen a l^1. La prueba (b) $\Leftrightarrow$(e) está basada en el teorema 2F de Bourgain-Fremlin-Talagrand,(b)$\Rightarrow$(c) se apoya en los resultados de Odell-Rosenthal y (b) $\Rightarrow$(d) se realiza utilizando el teorema de Choquet sobre la validez de la formula baricéntrica. Por ultimo ,

(d) $\Longrightarrow$ (a) se debe a Janicka [1979] y es esencialmente la expuesta anteriormente con las modificaciones correspondientes al caso localmente convexo. Así pues, la prueba que hemos dado del teorema 9.9 ,incluso en el marco de los espacios de Banach, es más simple y autocontenida que la que aparece en el trabajo de Saab.

9.10 <u>COROLARIO</u> *Sea* $K \subset X^*$ *un subconjunto débil*-compacto convexo con la PDRN. Entonces cada uno de los siguientes conjuntos también tiene la PDRN: (a)* $a^* + K$ *para cada* $a^* \in X^*$ *; (b)* $K_1 = \{ \lambda x^* : x^* \in K , 0 \leq \lambda \leq 1 \}$*; (c) el conjunto absolutamente convexo* $K - K$ *; y (d) la envoltura débil* cerrada absolutamente convexa de* K.

<u>Demostración</u> .- (a),(b),(c) son consecuencias inmediatas de la condición (b) de 9.9. De (c) se tiene que $K_1 - K_1$ tiene la PDRN, como la envoltura absolutamente convexa de K esta contenida en esa diferencia, otra vez la condición (b) de 9.9 prueba (d). #

9.11 <u>COROLARIO</u> *Sea* $K \subset X^*$ *un subconjunto débil*-compacto convexo. Son equivalentes: (a)* K *tiene la PDRN ; y (b) Para cada subespacio separable* $Y \subset X$, $\pi(K) = \{x^*|_Y : x^* \in K \}$ *tiene la PDRN.* #

9.12 <u>COROLARIO</u> *Si* $T : Y \to X$ *es un operador lineal continuo, y* $K \subset X^*$ *es un conjunto débil*-compacto convexo con la PDRN, entonces* $T^*(K) \subset Y^*$ *también tiene la PDRN.* #

9.13 <u>COROLARIO</u> *Sean* X *un e.l.c. e* $Y \subset X$ *un subespacio cerrado que es casi tonelado. Si* X^* *tiene la PDRN, el espacio* Y^* *también la tiene.*

<u>Demostración</u> .- Basta observar que los conjuntos acotados de Y* poseen envoltura absolutamente convexa débil*-relativamente compacta. Por lo tanto es suficiente probar que los conjuntos débil*-compactos absolutamente convexos de Y* tienen la PDRN. Como estos conjuntos son las polares de entornos de cero en Y para la topología de Mackey, se pueden expresar como imagenes mediante

la aplicación transpuesta de la inclusión i: $Y \to X$, de polares de entornos de cero en X para la topología de Mackey, y estos ultimos conjuntos poseen la PDRN. Aplicando el corolario anterior se concluye la prueba. #

Si X es un e.l.c. casi-tonelado tal que todo subespacio cerrado separable $Y \subset X$ sigue siendo casi tonelado, entonces X^* posee la PDRN si y sólo si la posee cada uno de los duales Y^*. Esta condición ocurre, por ejemplo, si X es un Banach o un Frechet.

Del corolario anterior se obtiene de forma inmediata la siguiente proposición .

9.14 PROPOSICION *Si* X *es un e.l.c. casi tonelado y* X^* *tiene la PDRN entonces* X *no contine copias de* l^1. #

Para la demostración de 9.14 basta observar que l^∞ no tiene la PDRN. Un cierto reciproco de esta proposición se puede dar en los siguientes terminos.

9.15 PROPOSICION *Sea* X *un e.l.c. casi tonelado, tal que cada* V *entorno de cero cerrado y absolutamente convexo, para la topología de Mackey de* X *, el espacio de Banach* X_V *no contiene copias de* l^1 *. Entonces* X^* *tiene la PDRN.*

Demostración .- Si $K \subset X^*$ es un conjunto débil*-compacto absolutamente convexo, $V = K^\circ$ es un entorno de cero para la topología de Mackey en X . Además $(X_V)^* = X^*_K$. Sea $x_n \in X$ una sucesión acotada, entonces $\hat{x}_n \in X_V$ es una sucesión acotada. Como X_V no contiene a l^1, $\hat{x}_n$ posee una subsucesión $\hat{y}_n$ que converge puntualmente sobre K, la bola unidad de $(X_V)^*$, Entonces x_n posee una subsucesión y_n puntualmente convergente sobre K. Por 9.9 tenemos que K posee la PDRN. #

A continuación exponemos una extensión al caso localmente convexo de un resultado de Janicka [1979].

9.16 PROPOSICION *Sea* X *un e.l.c. casi tonelado tal que* X^* *posee la PDRN. Si* $Y \subset X^*$ *es un subespacio débil*-cerrado, entonces* Y *posee la PDRN.*

Demostración .- Cada acotado débil*-cerrado y convexo $K \subset Y$ es débil*-compacto en X^*. K tiene la PDRN como subconjunto de X^*, observando la prueba (d) $\Longrightarrow$ (a) de 9.9, se ve que las derivadas débiles de Radon-Nikodym de las medidas vectoriales con $m(A) \in \mu(A).K$, se pueden tomar valoradas en $K \subset Y$. con lo que se concluye la prueba. #

Utilizando la caracterización dada en 9.9 de los subconjuntos débil*--compactos de X^* con la PDRN, nos proponemos comprobar como esta propiedad se puede estudiar sobre las proyecciónes de X^* en los espacios de Banach asociados a sus entornos de cero.

Sea X un e.l.c. y X^* su dual topológico dotado de la topología fuerte. Una base de entornos de cero para esta topología viene dada por las polares B° de los discos acotados (conjuntos absolutamente convexos, cerrados y acotados) $B \subset X$. Para simplificar la notación denotaremos por $\pi_B : X^* \to X^*_{B^\circ}$ a la proyección canónica de X^* en el espacio de Banach $X^*_{B^\circ}$ asociado a B°. Por X_B denotamos al espacio normado asociado a $B \subset X$, se sabe (Jarchow [1981] 8.6.9) que $X^*_{B^\circ}$ se puede sumergir como subespacio cerrado del espacio de Banach dual $(X_B)^*$, y que si $i: X_B \to X$ es la inyección canónica, su transpuesta $i^*:X^* \to (X_B)^*$ toma valores en $X^*_{B^\circ}$ y coincide con la proyección π_B . Si $K \subset X^*$ es un subconjunto débil*-compacto y convexo, $\pi_B(K)$ es un conjunto acotado en $(X_B)^*$ y por lo tanto es un equicontinuo, entonces en $\pi_B(K)$ coinciden la topologia débil* ($(X_B)^*$ es el dual del espacio de Banach que resulta al completar X_B) y la topología $\sigma((X_B)^*, X_B)$ (vease Schaefer [1971] III.4.5). Así tenemos que $\pi_B : K \to \pi_B(K) \subset (X_B)^*$ es continua para las topologías débiles*, y en particular que $\pi_B(K)$ es débil*-compacto convexo en el Banach dual $(X_B)^*$.

El siguiente lema se obtiene de manera similar al "lifting" de medidas dado por Musial y Ryll-Nardezewski [1978].

9.17 LEMA *Sea* (Ω,Σ,μ) *un espacio de medida finito y completo,* X *un e.l.c.* $B \subset X$ *un disco acotado y* $K \subset X^*$ *un conjunto débil*-compacto y convexo. Si* $m : \Sigma \to X^*_{B^\circ}$ *es una medida vectorial tal que* $m(A) \in \mu(A).\pi_B(K)$ *para cada*

$A \in \Sigma$, *entonces existe una medida vectorial* $m_1 : \Sigma \to X^*$ *tal que* $m = \pi_B \circ m_1$ *y* $m_1(A) \in \mu(A).K$ *para cada* $A \in \Sigma$.

Demostración .- Sea $\mathcal{A}$ el conjunto de todas las álgebras finitas $\Lambda \subset \Sigma$ ordenado por inclusión, y $M(\mathcal{A},T)$ el conjunto de las redes $\{y_\Lambda\}$ con indice en $\mathcal{A}$ y recorrido relativamente compacto en el espacio completamente regular T. Como se señala en la proposición 1 de Musial-Nardzewski, existe un limite generalizado de Banach $\lim_\Lambda$ definido sobre $M(\mathcal{A},T)$ simultaneamente para todos los espacios completamente regulares T, cumpliendo : (1) $\lim_\Lambda y_\Lambda$ es un punto de aglomeración de $\{y_\Lambda\}$; (2) si $x_\Lambda = y_\Lambda$ para Λ suficientemente grande, se tiene $\lim_\Lambda x_\Lambda = \lim_\Lambda y_\Lambda$; (3) si $\pi : T \to T'$ es continua entonces $\pi(\lim_\Lambda x_\Lambda) = \lim_\Lambda (\pi(x_\Lambda))$; y (4) si $T = \mathbb{R}$ entonces $\lim_\Lambda$ es lineal, multiplicativo y positivo.

Sobre K consideramos la topología $\sigma(X^*,X)$ y sobre $\pi_B(K)$ consideramos la topología débil*, de manera que tanto K como $\pi_B(K)$ son compactos y π_B es continua.

Sea $\Lambda \in \mathcal{A}$ con atomos $A_1,A_2,\ldots,A_m$. Para cada A_i existe $x_i^* \in K$ tal que $m(A_i) = \mu(A_i).\pi_B(x_i^*)$. Sea $m_\Lambda : \Lambda \to X^*$ la medida vectorial definida por $m_\Lambda(A_i) = \mu(A_i).x_i^*$. Entonces se tiene que $\pi_B(m_\Lambda(A)) = m(A)$ para cada $A \in \Lambda$, y que $m_\Lambda(A) \in \mu(A).K$ para cada $A \in \Lambda$ (porque K es convexo).

Para cada $A \in \Sigma$ la red $m_\Lambda(A)$ toma valores en el compacto $\mu(A).K$. Sea $m_1 : \Sigma \to X^*$ definida por $m_1(A) = \lim_\Lambda m_\Lambda(A)$ para todo $A \in \Sigma$.
De las propiedades del limite generalizado se deduce fácilmente la conclusión del lema. #

9.18 TEOREMA *Sea* X *un e.l.c. y* $K \subset X^*$ *un subconjunto débil*-compacto y convexo. Supuesto que* X^* *está dotado de la topología fuerte, son equivalentes : (a)* K *tiene la PDRN ; y(b) Para cada disco acotado* $B \subset X$, *el conjunto* $\pi_B(K)$ *como subconjunto de* $X^*_{B^\circ}$ *o de* $(X_B)^*$ *tiene la PDRN* .

Demostración .- (a) $\Longrightarrow$ (b) Es consecuencia inmediata del lema anterior.

(b) $\Longrightarrow$ (a). Sea x_n una sucesión acotada en X, y sea $B \subset X$ un disco acotado que contiene a la sucesión. Si suponemos que $\pi_B(K)$ tiene la PDRN, toda sucesión acotada en X_B posee una subsucesión puntualmente convergente sobre $\pi_B(K)$, entonces la sucesión x_n posee una subsucesión y_n tal que $<y_n, \pi_B(x^*)> = <y_n, x^*>$ converge para cada $x^* \in K$. Aplicando 9.9, tenemos probado que K posee la PDRN. #

Riddle ([1982]th.3) caracteriza los subconjuntos absolutamente convexos débil*-compactos de espacios de Banach duales con la PDRN como aquellos que cumplen las propiedades (b) ó (c) (en el teorema siguiente) de tipo Krein-Milman. Utilizando el teorema anterior extendemos al caso localmente convexo la caracterización de Riddle .

9.19 TEOREMA *Sea X un e.l.c. y $K \subset X^*$ un subconjunto débil*-compacto absolutamente convexo. Entonces son equivalentes : (a) K tiene la PDRN ; (b) Cada subconjunto $M \subset K$ débil*-compacto y convexo es la envoltura $\beta(X^*,X)$-cerrada convexa de sus puntos extremales ; y (c) Para cada $M \subset K$ débil*-compacto coinciden sus envolturas convexas débil*-cerrada y $\beta(X^*,X)$-cerrada.*

Demostración .- (a) $\Longrightarrow$ (b) Supongamos que existe $M \subset K$ tal que $M \neq \overline{co}^{\beta}(ext(M)$ (envolura convexa $\beta(X^*,X)$-cerrada del conjunto de sus puntos extremales). Entonces existe un disco acotado $B \subset X$, $\varepsilon > 0$ y un $x^* \in M$ tal que $\|\pi_B(x^*-y^*)\| = \sup\{|<x, x^*-y^*>| : x \in B\} > \varepsilon$ para cada $y^* \in co(ext(M))$. Por consiguiente $\pi_B(M) \subset \pi_B(K)$ es un débil*-compacto y convexo que contiene estrictamente a la envoltura convexa cerrada en norma de sus puntos extremales. En efecto, es fácil comprobar que se cumple la inclusión $ext(\pi_B(M)) \subset \pi_B(ext(M))$ pues π_B es una aplicación continua. Por lo tanto $\overline{co}^{\beta}(ext(\pi_B(M)) \subset \overline{co}^{\beta}(\pi_B(ext(M))$ y por la desigualdad expresada arriba, este ultimo conjunto está estrictamente contenido en $\pi_B(M)$.

En virtud de la caracterización dada por Riddle se tiene que $\pi_B(K)$

no posee la PDRN, y por 9.18 K también falla la PDRN.

(b) $\Longrightarrow$ (c) Sea $M \subset K$ un subconjunto débil*-compacto, y sea $F = \overline{co}^{*}(M) \subset K$. F también es débil*-compacto y por el teorema de Milman sabemos que los puntos extremales de F estan contenidos en M. Entonces por (b) tenemos que $\overline{co}^{*}(M) = F = \overline{co}^{\beta}(\text{ext}(F)) \subset \overline{co}^{\beta}(M)$, y por lo tanto $\overline{co}^{*}(M) = \overline{co}^{\beta}(M)$.

(c) $\Longrightarrow$ (a) , si K falla la PDRN, por 9.18, existirá un disco acotado $B \subset X$ tal que $\pi_B(K) \subset (X_B)^*$ también falla la PDRN. Por la caracterización de Riddle en el caso de espacios de Banach, existirá un conjunto débil*-compacto $M_1 \subset \pi_B(K)$ tal que $\overline{co}^{*}(M_1) \neq \overline{co}^{\beta}(M_1)$. Sea $M = K \cap \pi_B^{-1}(M_1) \subset K$, M es débil*-compacto. Como $\pi_B(\overline{co}^{\beta}(M)) \subseteq \overline{co}^{\beta}(M_1)$, y $\pi_B(\overline{co}^{*}(M)) = \overline{co}^{*}(M_1)$, tenemos que para este subconjunto M no se cumple (c). Con lo que llegamos a una contradicción. #

9.20 <u>COROLARIO</u> *Sea* X *un e.l.c. casi tonelado. Son equivalentes :*

(a) $(X^*, \beta(X^*, X))$ *cumple la PDRN* .

(b) Para cada subconjunto débil-compacto* $M \subset X^*$ *se cumple* $\overline{co}^{*}(M) = \overline{co}^{\beta}(M)$.

(c) Para cada subconjunto débil-compacto y convexo* $M \subset X^*$ *se cumple* $M = \overline{co}^{\beta}(\text{ext}(M))$. #

Una condición suficiente para que se cumpla (c) es que X* satisfaga la la Propiedad de Krein-Milman , es decir, que cada conjunto cerrado , convexo y acotado es la envoltura cerrada y convexa de sus puntos extremales, o equivalentemente, que cada cerrado y acotado posea algún punto extremal.

Utilizando esta caracterización, en el siguiente teorema, extendemos al caso de espacios Frechet separables, la propiedad de aproximación de los elementos de X** mediante sucesiones de X, que caracteriza a los espacios de Banach separables que no contienen a l^1,o equivalentemente con X* que cumple la PDRN.

9.21 TEOREMA *Sea X un e.l.c. Frechet separable. Son equivalentes :*

(a) $(X^*,\beta(X^*,X))$ posee la PDRN.

(b) Cada débil-compacto convexo $K \subset X^*$ cumple $K = \overline{co}^{\beta}(ext(K))$*

(c) Para cada $x^{**} \in X^{**}$ existe una sucesión acotada x_n en X que converge hacia x^{**} en la $\sigma(X^{**},X^*)$-topología.

Demostración .- La equivalencia entre (a) y (b) está establecida en el anterior corolario, y la implicación (c) $\Longrightarrow$ (a) resulta inmediata de 9.9.

(a) $\Longrightarrow$ (c). Sea H_n una sucesión creciente de subconjuntos de X^* absolutamente convexos y débil*-compactos cuya unión es X^*. Denotemos por $B(X^*)$ al espacio vectorial de las funciones reales que son medibles con respecto a la σ-álgebra de Borel $B_o(X^*, \sigma(X^*,X))$. Si se cumple (a) entonces $X^{**} \subset B(X^*)$. En efecto, por 9.9 y el lema 9.7 se deduce que $x^{**}|_{H_n} \in B_1(H_n)$ para cada $x^{**} \in X^{**}$ y cada $n \in N$. Entonces dado $x^{**} \in X^{**}$ la sucesión $f_n = \chi_{H_n} \cdot x^{**}$ está en $B(X^*)$ y converge puntualmente hacia x^{**}, de modo que $x^{**} \in B(X^*)$.

Dado $x^{**} \in X^{**}$, sea $B \subset X$ un acotado tal que x^{**} es $\sigma(X^{**},X^*)$ adherente a B. Actuando como en la implicación (d) $\Longrightarrow$ (a) de 9.7, para cada $n \in N$ encontramos una sucesión $x_{m,n} \in B$ tal que $x_{m,n}|_{H_n}$ converge puntualmente hacia $x^{**}|_{H_n}$.

El conjunto $A = \{ x_{m,n} : m,n \in \mathbb{N} \} \subset B(X^*)$ es numerable, puntualmente acotado y relativamente compacto en $B(X^*)$ (pues $X^{**} \subset B(X^*)$). Como X^* dotado de la topología débil* es K-analítico, y $A \subset C(X^*)$, el teorema 4D de Bougain-Fremlin-Talagrand [1978] asegura que la clausura de A en R^{X^*} es angélica para la topología de la convergencia puntual. El elemento x^{**} está en dicha clausura, de donde resulta la existencia de una sucesión $x_n \in A$ tal que $\langle x^{**},x^* \rangle = \lim_n \langle x_n,x^* \rangle$ para cada $x^* \in X^*$. #

También como consecuencia del teorema 9.9 obtenemos la siguiente proposición que localiza la caracterización obtenida en 5.31 de los espacios de Banach que no contienen a l^1, o equivalentemente con dual que cumple la PDRN.

9.22 <u>PROPOSICION</u> *Sea* X *un e.l.c. secuencialmente completo y* $K \subset X^*$ *un subconjunto débil*-compacto absolutamente convexo. Son equivalentes : (a)* K *tiene la PDRN ; (b) Para cada medida de Radon* λ *sobre K, cada sucesión* $x_n^{**} \in X^{**}$ *relativamente* $\sigma(X^{**},X^*)$*-compacta posee una subsucesión convergente en casi todo punto* (λ) *de* K *; (c) Para cada medida de Radon* λ *sobre* K *, cada sucesión acotada* $x_n \in X$ *posee una subsucesión convergente en casi todo punto* (λ) *de* K *; y (d) Para cada espacio de medida finito y completo* (Ω,Σ,μ) *los operadores lineales continuos* $S : X \to L^{\infty}(\mu)$ *con* $\|S(x)\|_{\infty} \leq 1$ *para cada* $x \in K^{\circ}$ *, llevan sucesiones acotadas a sucesiones con subsucesiones convergentes en casi todo punto.*

<u>Demostración</u> .- (a) $\Longrightarrow$ (b) Es igual que en la prueba de 5.31-A , basta con observar que cada $x^{**} \in X^{**}$ es universalmente medible sobre K.

(b) $\Longrightarrow$ (c) Es trivial.

(c) $\Longrightarrow$ (d) Sea $S : X \to L^{\infty}(\mu)$ con $\|S(x)\|_{\infty} \leq 1$ para cada $x \in K^{\circ}$, y sea ρ un lifting sobre $\mathcal{L}^{\infty}(\mu)$. Definimos $f: \Omega \to X^*$ por $\langle f(s),x\rangle=\rho(S(x))(s)$. Resulta fácilmente que $f(\Omega) \subset K$. Entonces f es una función X-escalarmente medible acotada con $f = \rho(f)$. Por 7.18, sabemos que f es medible con respecto a la σ-álgebra de Borel $B_o(X^*,\sigma(X^*,X))$, y la medida imagen $\lambda = \mu f^{-1}$ es una medida de Radon sobre $B_o(K)$. De (c) se deduce que cada sucesión acotada $x_n \in X$ posee una subsucesión convergente en casi todo punto (λ) de K. Por la medibilidad de Borel de f se tiene que $\rho(S(x_n)) = \langle x_n,f \rangle$ (y por lo tanto $S(x_n)$) posee una subsucesión convergente en casi todo punto (μ) de Ω .

(d) $\Longrightarrow$ (a) Razonamos de forma similar a la prueba del teorema 1 de Riddle-Saab-Uhl [1983] . Si K falla la PDRN, por 9.9 existe una sucesión $x_n \in X$ que no posee subsucesiones puntualmente convergentes sobre K. Sea $Y = C(K)$ y $T : X \to Y$ la aplicación definida por $T(x) = x_{|K}$. Sabemos que $x_{n|K}$ con la norma del supremo, es equivalente a la base canónica de l^1. Supongamos que l^1 está dotado de una norma $\|\ \|_o$ equivalente a $\|\ \|_1$ de manera que el operador $P : (l^1, \|\ \|_o) \to (Y,\|\ \|_{\infty})$ define una isometría entre l^1 y un subespacio cerrado de Y. Sea $k > 0$ tal que $\| \|_1 \leq k \| \|_o$. Sea $R : (l^1, \| \|_o) \to L^\infty[0,1]$ la aplicación dada por $R(e_n) = (1/k).r_n$, donde r_n son las funciones de Rademacher $r_n = \mathrm{sig}(\mathrm{sen}(2^n \pi\ t))$, entonces se tiene que $\|R\| \leq 1$. Como $L^\infty[0,1]$ es un espacio inyectivo (vease Lacey [1974] 3.11.6) existe una aplicación lineal $Q : Y \to L^\infty[0,1]$ con $\|Q\| = \|R\| \leq 1$ y tal que $Q_\circ P = R$. Sea $S : X \to L^\infty[0,1]$ el operador lineal continuo $S = Q_\circ T$. Como $\| T(x) \| \leq 1$ para cada $x \in K^\circ$, se tiene que $\|S(x)\| \leq \|Q\|.\|T(x)\| \leq 1$ para cada $x \in K^\circ$. Además $S(x_n) = Q(x_{n|K}) = Q(P(e_n)) = R(e_n) = (1/k).r_n$, Luego S no lleva sucesiones acotadas a sucesiones con subsucesiones convergentes en casi todo punto, en contradicción con la condición (d). #

Si E es un espacio distinguido, en particular si es un espacio de Banach o un Frechet, en (b) se puede suponer la sucesión x_n^{**} sólamente acotada.

En virtud de la proposición anterior obtenemos una prueba directa del teorema 5.31-A.

9.23 <u>COROLARIO</u> *Sea* X *un e.l.c. casi tonelado, secuencialmente completo y distinguido. Son equivalentes : (a)* X^* *posee la PDRN ; (b) Si* $K \subset X^*$ *es un subconjunto débil*-compacto absolutamente convexo y* λ *es una medida de Radon sobre* K *, cada sucesión acotada* $x_n^{**} \in X^{**}$ *posee una subsucesión convergente en casi todo punto* (λ) *de* K *; (c) Igual que (b) pero sólo para sucesiones acotadas* $x_n \in X$. #

A continuación observamos como la caracterización de la PDRN en terminos de dentabilidad dada para espacios de Banach duales por Saab-Saab([1983]th.6) y Saab ([1982]cor.6), es valida en el caso localmente convexo.

Si Y es un e.l.c. y $B \subset Y$ es un subconjunto acotado, a los conjuntos de la forma $S = \{ y \in B : \langle y^*,y\rangle > \sup\{\langle y^*,z\rangle : z \in B \} - \varepsilon \}$ se les llama rebanadas débil-abierta de B ("weak-slice" en la terminología inglesa). Si $Y = X^*$ es un espacio dual e $y^* = x \in X$, se dice que S es una rebanada débil*-abierta de B.

Dado un e.l.c. X y un subconjunto acotado $A \subset X^*$, se dice que A es débil*-dentable siempre que para cada entorno de cero V en X^*, dotado de la topología $\sigma(X^*,X^{**})$, existe una rebanada débil*-abierta S de A tal que $S-S \subset V$. Y se dice que A es débil*-escalarmente dentable, si para cada $\varepsilon > 0$ y cada $x^{**} \in X^{**}$ existe una rebanada débil*-abierta S de A tal que la oscilación de x^{**} en S es menor que ε, es decir, $S-S \subset \{ x^* : |\langle x^{**},x^*\rangle| < \varepsilon\}$.

La prueba realizada por Saab-Saab [1983] del teorema 9.24 está basada en los siguientes resultados :

(1)- Si K es un espacio compacto y f es una función real sobre K tal que para cada $\varepsilon > 0$ y cada cerrado $A \subset K$ existe un abierto U con $U \cap A \neq \emptyset$ y tal que la oscilación de f en $U \cap A$ es menor que ε. Entonces el conjunto de puntos de continuidad de f es un G_δ ,denso en K .Saab-Saab ([1983]th.1).

(2)- Si $K \subset X^*$ es un subconjunto débil*-compacto y convexo, K posee la PDRN si y sólo si verifica la SPCP. Teorema 9.9.

(3)- El teorema 27.9 de Choquet [1969]. Y

(4)- La prueba del teorema 2.2 de Namioka [1967].

Todos estos resultados son validos en e.l.c.. Así, siguiendo la prueba dada por Saab, se observa sin ninguna dificultad que sirve en el caso localmente convexo.

9.24 <u>TEOREMA</u> *Sea X un e.l.c. $K \subset X^*$ un subconjunto débil*-compacto convexo. Son equivalentes : (a) K posee la PDRN ; (b) Todo subconjunto no vacio $A \subset K$ es débil*-escalarmente dentable ; y (c) Todo subconjunto no vacio $A \subset K$ es débil* dentable.* #

Riddle-Saab-Uhl [1983] prueban que si K es un subconjunto débil*-compacto y absolutamente convexo de un Banach dual X^*, la PDRN sobre K es equivalente que todo operador lineal acotado $T : L^1[0,1] \to X^*$ con $T(\chi_A/\lambda(A)) \in K$ es Dunford-Pettis, es decir, lleva sucesiones débilmente convergentes a sucesiones convergentes en norma, esta condición se conoce como que K es un conjunto de continuidad completa. También prueban que otra condición equivalente a que K tenga la PDRN es que todo operador Dunford-Pettis $T: L^1[0,1] \to X^*$ con $T(\chi_A/\lambda(A)) \subset K$ es representable mediante una función $f:[0,1] \to X^*$ integrable Pettis.

Riddle [1984] ha localizado estos resultados para subconjuntos débil-compactos convexos. En el siguiente teorema, siguiendo un procedimiento de factorización similar al usado por Riddle, se obtiene que esta caracterización sigue siendo valida en el caso de subconjuntos débil*-compactos convexos de duales de e.l.c.. Como consecuencia de este resultado se obtiene la equivalencia entre la PDRN y la PDRN para la medida de Lebesgue sobre el intervalo [0,1].

9.25 TEOREMA *Sea* X *un e.l.c. tonelado, secuencialmente completo, y* $K \subset X^*$ *un subconjunto débil*-compacto convexo. Son equivalentes :*

(a) K *posee la PDRN.*

(b) Cada operador $\|\ \|_1 - \beta(X^*,X)$ *continuo* $T: L^1[0,1] \to X^*$ *con* $T(\chi_A/\lambda(A)) \in K$ *para cada conjunto medible Lebesgue* $A \subset [0,1]$ *con* $\lambda(A)>0$, *y que lleva sucesiones débil-convergentes a sucesiones fuertemente convergentes, es representable mediante una función* $f:[0,1] \to K$ *integrable Pettis.*

(c) Cada operador lineal $\beta(X^*,X)$*-continuo* $T: L^1[0,1] \to X^*$ *con* $T(\chi_A/\lambda(A)) \in K$ *para cada conjunto medible* $A \subset [0,1]$ *con* $\lambda(A)>0$ *lleva sucesiones débil-convergentes a sucesiones fuertemente convergentes.*

Demostración .- (b) $\Longrightarrow$ (a) y (c) $\Longrightarrow$ (a)

Basaremos la prueba en la demostración dada por Riddle en el caso del dual de un Banach.

No es restrictivo suponer que $0 \in K$. Sea H un subconjunto débil*-compacto convexo contenido en Y* el dual de un Banach, con $0 \in H$ y tal que H falla la PDRN. Por 9.9, sabemos que existe una sucesión acotada $y_n \in Y$ sin subsucesiones puntualmente convergentes sobre H. También sabemos que la sucesión de funciones $y_{n|H} \in C(H-H)$ es equivalente a la base canónica de l^1.

Consideramos la aplicación $R : l^1 \to Y$ dada por $R(e_n) = y_n$, y sea $R^* : Y^* \to l^\infty$ su transpuesta. Riddle ha probado que para cada operador lineal acotado $P : L^1[0,1] \to l^\infty$ tal que $\|P(\chi_A/\lambda(A))\| < 1$ para cada conjunto medible $A \subset [0,1]$, se pueden encontrar dos operadores lineales acotados $U,V : L^1[0,1] \to Y^*$ con $U(\chi_A/\lambda(A)) \in H$ y $V(\chi_A/\lambda(A)) \in H$ tal que $R^* \circ (U-V) = P$.

Supongamos que K falla la PDRN. Por 9.9 sabemos que existe una sucesión acotada $x_n \in X$ sin subsucesiones puntualmente convergentes sobre K.

Sea $Y = C(K)$ con la norma del supremo, y sea $M : X \to Y$ la aplicación dada por $M(x)(x^*) = \langle x^*,x \rangle$, M es continua cuando en X se considera la topología de Mackey. Consideramos la aplicación transpuesta $M^* : Y^* \to X^*$, es fácil comprobar que la imagen de la bola unidad B_{Y^*} de Y^*, por M^* coincide con la envoltura absolutamente convexa de K. El conjunto $H = B_{Y^*} \cap (M^*)^{-1}(K)$ es débil*-compacto y convexo, y la sucesión $y_n = M(x_n)$ no posee subsucesiones puntualmente convergentes sobre H. Sea $R : l^1 \to Y$ la aplicación definida antes y $L : l^1 \to X$ definida por $L(e_n) = x_n$, entonces $R = M \circ L$.

Por la caracterización de Saab([1982-b] th.2) de los espacios de Banach duales con la PDRN, sabemos que existe un operador $P : L^1[0,1] \to l^\infty$ tal que $\|P(\chi_A/\lambda(A))\| \leq 1$ que lleva sucesiones débilmente convergentes a sucesiones convergentes en norma y que no es representable mediante ninguna función integrable Pettis.

Siguiendo la prueba de Riddle, es posible encontrar operadores $U,V : L^1[0,1] \to Y^*$ con $U(\chi_A/\lambda(A)) \in H$ y $V(\chi_A/\lambda(A)) \in H$ que llevan sucesiones débilmente convergentes a sucesiones convergentes en norma y tales que $R^* \circ (U-V) = P$. Entonces si L^* es el operador transpuesto de L tenemos el siguiente diagrama :

$$\begin{tikzcd} L^1[0,1] \arrow[r, "U{,}V"] \arrow[dr, "P"'] & Y^* \arrow[r, "M^*"] \arrow[d, "R^*"] & X^* \arrow[dl, "L^*"] \\ & l^\infty & \end{tikzcd}$$

donde <u>(1)</u> $P = R^* \circ (U-V) = L^* \circ (M^* \circ U - M^* \circ V)$.

Los operadores $M^*{}_\circ U$ y $M^*{}_\circ V$: $L^1[0,1] \to X^*$, llevan sucesiones débilmente convergentes a sucesiones $\beta(X^*,X)$-convergentes, para cada conjunto medible Lebesgue $A \subset [0,1]$ con $\lambda(A) > 0$ se tiene que

$$M^*(U(\chi_A/\lambda(A))) \in M^*(H) = K \quad \text{y} \quad M^*(V(\chi_A/\lambda(A))) \in M^*(H) = K.$$

Entonces al menos uno de los operadores $M^*{}_\circ U$ o $M^*{}_\circ V$ no admite representación mediante una función integrable Pettis, pues en otro caso por la igualdad (1) tendriamos que P admitiría una representadión mediante una función integrable Pettis, llegando a una contradicción. Con lo que tenemos probado que (b) $\Longrightarrow$ (a).

Con la misma argumentación, tomando $P : L^1[0,1] \to l^\infty$ un operador que no lleva sucesiones debil-convergentes a sucesiones convergentes en norma se obtiene que al menos uno de los operadores $M^*{}_\circ U$ o $M^*{}_\circ V$ no lleva sucesiones débilmente convergentes a sucesiones fuertemente convergentes. Con lo que se prueba que (c) $\Longrightarrow$ (a).

(a) $\Longrightarrow$ (b) Supongamos que K tiene la PDRN y sea $T : L^1[0,1] \to X^*$ tal que $T(\chi_A/\lambda(A)) \in K$ un operador $\| \|_1 - \beta(X^*,X)$ continuo. Consideramos la medida vectorial m definida por $m(A) = T(\chi_A)$, es claro que $m(A) \in \lambda(A).K$ para conjunto medible Lebesgue $A \subset [0,1]$. Entonces existe una función integrable Pettis $f : [0,1] \to K \subset X^*$ tal que $m(A) = \int_A f \, d\lambda$.

Como $f([0,1]) \subset K$, se tiene que para cada $x^{**} \in X^{**}$ $\langle x^{**},f\rangle \in L^\infty[0,1]$ Si $B \subset X$ es un conjunto acotado ,$\{\langle x,f\rangle : x \in B\}$ es acotado en $L^\infty[0,1]$, y por lo tanto es equicontinuo en $L^\infty[0,1]$ para el par dual $\langle L^1,L^\infty\rangle$. Por lo tanto el operador T_f: $L^1[0,1] \to X^*$ definido por $T_f(g) = \int_{[0,1]} g.f \, d\lambda$ es $\| \|_1 - \beta(X^*,X)$ continuo. Como T y T_f coinciden sobre las funciones simples se tiene que $T = T_f$, y por lo tanto T viene representado por una función integrable Pettis.

(a) $\Longrightarrow$ (c) . Sean $T : L^1[0,1] \to X^*$ y $f:[0,1] \to K$ como en la implicación anterior. Como la medida de Lebesgue en [0,1] es perfecta, por 5.9 sabemos que f es fuertemente integrable Pettis, (aqui se utiliza que X es tonelado para que $\beta(X^*,X)$ sea casi completa). Siguiendo la observación hecha por Riddle-Saab-Uhl ([1983] p.530) deduciremos que T lleva sucesiones débilmente convergentes de $L^1[0,1]$ a sucesiones fuertemente convergentes.

En primer lugar, se observa fácilmente que como el conjunto $\{ m(A)$, A medible Lebesgue en $[0,1] \}$ es relativamente compacto en X^*, $\{ T(g) : g \in L^\infty[0,1]$ con $\|g\|_\infty \leqslant 1 \}$ también es relativamente compacto en X^*.

Sea $g_n \in L^1[0,1]$ una sucesión débilmente convergente hacia g. Entonces $x^*_n = T(g_n)$ es $\sigma(X^*,X^{**})$ convergente hacia $T(g)$. Si probamos que el conjunto $M = \{ x^*_n : n \in N \}$ es relativamente $\beta(X^*,X)$-compacto, tendremos que x^*_n es $\beta(X^*,X)$ convergente hacia $T(g)$, pues este es su único punto de aglomeración posible.

Para probar que M es relativamente $\beta(X^*,X)$-compacto, utilizamos el lema 5.3. Probaremos que cada red equicontinua x^{**}_j que converge en la $\sigma(X^{**},X^*)$ topología hacia x^{**}, es uniformemente convergente sobre M.

Sea $\varepsilon > 0$. Como $g_n \in L^1[0,1]$ es débilmente relativamente compacto , por el teorema de Dunford, sabemos que es uniformemente acotado en $L^1[0,1]$ y es uniformemente integrable.

Sea $E_{n,m} = \{t : |g_n(t)| > m \}$, y sea $k = \sup \{\|g_n\|_1 : n \in N \}$, entonces se tiene que $k \geqslant \|g_n\|_1 > m.\lambda(E_{n,m})$, y por lo tanto $\lambda(E_{n,m}) < k/m$. Como la sucesión g_n es uniformemente integrable se tiene que $\lim_m \int_{0,1} |g_n| \chi_{E_{n,m}} d\lambda = 0$ uniformemente en $n \in N$. Como T es continuo si $p \in P(X^*)$ es tal que $x^{**}_j \in V^\circ_p$, existe un m' tal que $p(T(g_n \chi_{E_{n,m'}})) < \varepsilon/4$ para todo n N . Por otra parte $\| g_n(1-\chi_{E_{n,m'}})\|_\infty \leqslant m'$ y por lo tanto $N = \{ T(g_n(1-\chi_{E_{n,m'}})) \}$ es relativamente $\beta(X^*,X)$ compacto en X^*. Entonces x^{**}_j converge uniformemente a x^{**} sobre N. Por lo tanto exite un j_o tal que si $j > j_o$ $|< x^{**}_j - x^{**}, T(g_n(1-\chi_{E_{n,m'}}))>| < \varepsilon/2$. Entonces es fácil observar que si $j > j_o$ se tiene $|<x^{**}_j - x^{**}, T(g_n)>| < \varepsilon$, para cada $n \in N$. Con lo que probamos que x^{**}_j converge uniformemente sobre M hacia x^{**}. #

Como consecuencia de esta caracterización se obtiene el siguiente corolario, que extiende un resultado de Musial ([1979]Notes added in proof) para duales de espacios de Banach.

9.26 <u>COROLARIO</u> *Sea* X *un e.l.c. tonelado y secuencialmente completo, y* $K \subset X^*$ *un subconjunto débil*-compacto convexo. Son equivalentes :* *(a)* K *tiene la PDRN ; y (b)* K *tiene la PDRN para la medida de Lebesgue en el intervalo* $[0,1]$.

Consecuentemente, X^* *posee la PDRN si y sólo si posee la PDRN para la medida de Lebesgue en* $[0,1]$.

<u>Demostración</u> .- Basta observar que si K tiene la PDRN para la medida de Lebesgue en $[0,1]$ entonces se cumple la condición (b) de 9.25. #

El siguiente resultado localiza una condición equivalente a la PDRN dada por Musial ([1979]th.2).

Dado un e.l.c. Y diremos que una función Y^*-escalarmente medible $f : \Omega \to Y$ está Y^*-esencialmente valorada en el conjunto acotado, absolutamente convexo y cerrado $K \subset Y$, si para cada $x^* \in K^\circ$ se cumple $|\langle x^*, f(s)\rangle| \leq 1$ para casi todo $s \in \Omega$. En particular las funciones Y^*-esencialmente acotadas estan Y^*-esencialmente valoradas en un acotado.

9.27 <u>TEOREMA</u> *Sea* X *un e.l.c. y* $K \subset X^*$ *un subconjunto débil*-compacto absolutamente convexo. Son equivalentes : (a)* K *tiene la PDRN con respecto al espacio de medida finito y completo* (Ω, Σ, μ) *; y (b) Para cada* $f : \Omega \to X^*$ X*-escalarmente medible y* X*-esencialmente valorada en* K *, existe una función* $g : \Omega \to X^*$ *valorada en* K *,* X^{**}*-escalarmente medible e integrable Pettis* X*-escalarmente equivalente a* f .

<u>Demostración</u> .- (b) $\Longrightarrow$ (a) Sea $m : \Sigma \to X^*$ una medida vectorial tal que $m(A) \in \mu(A).K$ para cada $A \in \Sigma$. Para cada $x \in X$ el teorema escalar de Radon-Nikodym nos da una función $g_x \in L^\infty(\mu)$ que es la derivada de Radon-Nikodym de la medida escalar $\langle x, m(.)\rangle$, además se puede

comprobar que $\|g_x\|_\infty \leq 1$ para cada $x \in K°$.

Sea ρ un lifting sobre $\mathcal{L}^\infty(\mu)$ y $f : \Omega \to X^*$ la función definida por $<f(s),x> = \rho(g_x)(s)$, f es X-escalarmente medible y está valorada en K , entonces existe una función $g:\Omega \to X^*$, X^{**}-escalarmente medible y μ-integrable Pettis tal que g y f son X-escalarmente equivalentes.

Es sencillo probar que g es una derivada débil de Radon-Nikodym de la medida m, con lo que queda probado (a).

(a) $\Longrightarrow$ (b) Sea $f : \Omega \to X^*$ X-medible, X-esencialmente valorada en K. Como K° es un entorno de cero en X para la topología de Mackey, la función de conjunto $m : \Sigma \to X^*$ definida por $<m(A),x> = \int_A <x,f> d\mu$ es finitamente aditiva. Además se tiene que $m(A) \in \mu(A).K$ para cada $A \in \Sigma$, de donde se tiene que m es σ-aditiva. Si K posee la PDRN respecto de μ , existirá una función $g : \Omega \to X^*$ valorada en K, μ-integrable Pettis tal que $m(A)=\int_A g\, d\mu$. Es fácil comprobar que f y g son X-escalarmente equivalentes, completando la prueba del teorema. #

En la implicación (b) $\Longrightarrow$ (a) sólo se necesita suponer (b) cierto para funciones valoradas en K.

9.28 <u>COROLARIO</u> *Sea* X *un e.l.c. tonelado, secuencialmente completo.*

Son equivalentes :

(a) X^* *tiene la PDRN.*

(b) Para cada espacio de medida finito y completo (Ω,Σ,μ) *y cada función* $f : \Omega \to X^*$ *X-esencialmente acotada y X-escalarmente medible, existe* $g : \Omega \to X^*$ μ*-integrable Pettis X-escalarmente equivalente a* f .

(c) Lo mismo que en (b) pero sólo para la medida de Lebesgue sobre [0,1].

<u>Demostración</u> : Basta observar que cada conjunto débil*-acotado en X* es relativamente débil*-compacto y aplicar 9.26 y 9.27. #

La caracterización sigue siendo cierta si en (b) y en (c) sólo se consideran funciones acotadas.

Basandonos en la misma idea de la prueba de la proposición 4 de Musial [1980], obtenemos el siguiente resultado adelantado en 5.30.

9.29 PROPOSICION *Si* X *es un e.l.c. casi completo con la PDRN, toda función* $f \in P(\mu,X)$ X^**-esencialmente acotada es fuertemente integrable Pettis.*

Demostración .- Sea $m_f : \Sigma \to X$ la integral indefinida asociada a f. Como f está X^*-esencialmente acotada, existe un acotado $B \subset X$ tal que $m(A) \in \mu(A).B$ para cada $A \in \Sigma$. Siguiendo la observación hecha por Musial, es posible encontrar un espacio de medida perfecto $(\tilde{\Omega},\tilde{\Sigma},\tilde{\mu})$ (por ejemplo, el dado por la compactificación de Stone) y una medida vectorial $\tilde{m} : \tilde{\Sigma} \to X$ de manera que $\tilde{m}(\tilde{\Sigma}) = m(\Sigma)$ y

$$\{ (1/\tilde{\mu}(A))\, \tilde{m}(A) : A \in \tilde{\Sigma} \ \text{y}\ \tilde{\mu}(A) > 0 \} = \{ (1/\mu(A))m(A) : A \in \Sigma \ \text{y}\ \mu(A) > 0\} \subset B.$$

Si X posee la PDRN, $\tilde{m}$ viene dada como la integral indefinida de una función $g \in P(\tilde{\mu},X)$. Como $\tilde{\mu}$ es perfecta, por 5.9 sabemos que g es fuertemente integrable Pettis, y por consiguiente $m(\Sigma) = \tilde{m}(\tilde{\Sigma})$ es relativamente compacto en X.#

Siguiendo la demostración anterior se obtiene facilmente el siguiente corolario. Se supone que X es tonelado para que $(X^*,\beta(X^*,X))$ sea casi completo.

9.30 COROLARIO *Sea* X *un e.l.c. tonelado. Si* $K \subset X^*$ *es un subconjunto débil*-compacto absolutamente convexo con la PDRN, toda función* $f \in P(\mu,X^*)$ X*-esencialmente valorada en* K *es fuertemente integrable Pettis.* #

El siguiente resultado se obtiene como una aplicación del Lifting , y extiende resultados de Saab ([1980-a] th.12,[1981]th.5).

9.31 TEOREMA *Sea* X *un e.l.c. tal que existe una proyección* $P : X^{**} \to X$ *verificando :*

(a). Para cada $H \subset X^{**}$ $\sigma(X^{**},X^*)$*-compacto y* $x^* \in X^*$ *la aplicación* $x^* \circ P_{|H}$ *tiene un punto de continuidad en* $(H,\sigma(X^{**},X^*))$.

Entonces X *posee la PDRN.*

<u>Demostración</u> .- Sea $m : \Sigma \to X$ una medida vectorial tal que $m(A) \in \mu(A).B$ para cada $A \in \Sigma$, donde B es un acotado de X. Sea K la envoltura $\sigma(X^{**},X^*)$-cerrada y absolutamente convexa de B en X^{**}. Aplicando el teorema de Radon-Nikodym escalar a las medidas $\langle x^*,m(.)\rangle$ se obtienen funciones $g_{x^*} \in \mathcal{L}^\infty(\mu)$ con $\|g_{x^*}\|_\infty \leq 1$ para cada $x^* \in B^o$, y tales que $\langle x^*,m(A)\rangle = \int_A g_{x^*}\, d\mu$ para cada $A \in \Sigma$. Sea $g : \Omega \to X^{**}$ la aplicación dada por $\langle g(s),x^*\rangle = (g_{x^*})(s)$. Es fácil probar que $g(\Omega) \subset K$. Por la proposición 7.18 sabemos que g es medible con respecto a la σ-álgebra $B_o(K,\sigma(X^{**},X^*))$ y que la medida imagen $\lambda = \mu g^{-1}$ es una medida de Radon sobre K.

Si se cumple (a), la demostración de 9.3 prueba que $x^* \circ P$ es universalmente medible sobre K, en particular es λ-medible y satisface el cálculo baricéntrico.

Entonces la función $f : \Omega \to X$ dada por $f = P \circ g$ es X^*-escalarmente medible. Para cada $A \in \Sigma$ sea $\mu_A(E) = (1/\mu(A)).\ \mu(A \cap E)$. y sea $\lambda_A = \mu_A\, g^{-1}$, el baricentro de λ_A en K es $(1/\mu(A)).m(A) \in X$. Entonces se tiene

$$\langle x^*,m(A)/\mu(A)\rangle = \langle x^* \circ P,\ m(A)/\mu(A)\rangle = \int_K \langle x^* \circ P,x^{**}\rangle\, d\,\lambda_A(x^{**}) =$$
$$= \int_\Omega \langle x^* \circ P,g(s)\rangle\, d\,\mu_A(s) = (1/\mu(A)).\ \int_A \langle x^*,f\rangle\, d\mu$$

Con lo que se tiene que $f \in P(\mu,X)$ y $m_f = m$. #

Una condición suficiente para que se cumpla (a) es que $x^* \circ P \in B_1(X^{**},\sigma(X^{**},X^*))$, de donde resulta el teorema 12(i) de Saab [1980-a].

Supongamos además que X es un espacio de Frechet y que la proyección $P : X^{**} \to X$ es $\sigma(X^{**},X^*)$-$\sigma(X,X^*)$ universalmente Lusin medible,(es decir, para cada medida de Radon λ sobre $B_o(X^{**},\sigma(X^{**},X^*))$, cada débil*-compacto $K \subset X^{**}$ y cada $\varepsilon > 0$, existe un débil*-compacto $K_\varepsilon \subset K$ con $\lambda(K-K_\varepsilon) < \varepsilon$ y tal que $P_{|K_\varepsilon}$ es $\sigma(X^{**},X^*)$- $\sigma(X,X^*)$ continua). Con la notación del teorema anterior es posible encontrar una sucesión disjunta $B_n \in \Sigma$ tal que $\mu(\Omega) = \mu(\bigcup_n B_n)$ y $f(B_n) = P \circ g(B_n) \subset H_n$, un conjunto $\sigma(X,X^*)$-compacto. Entonces para cada n se tiene que $\rho(f\, \chi B_n)$ toma valores en $H_n \subset B^{\hat{}} \subset X$. Por el corolario

7.26 y 7.24 podemos asegurar que existe una función fuertemente medible $h_n : \Omega \to X$ tal que $h_n \cdot \chi_{B_n}$ y $f \cdot \chi_{B_n}$ son X*-escalarmente equivalentes. La función $h = \sum_n h_n \cdot \chi_{B_n}$ es fuertemente medible valorada en el acotado B^{**}, X*-escalarmente equivalente a f, y por lo tanto es integrable Pettis con $m_h = m$. En particular si X es un espacio de Banach, tenemos probado que X posee la Propiedad de Radon-Nikodym.

LA PROPIEDAD DE RADON-NIKODYM EN ESPACIOS LOCALMENTE CONVEXOS DUALES.

El estudio de la Propiedad de Radon-Nikodym en espacios localmente convexos se dirige principalmente a obtener posibles extensiones de los potentes resultados relativos a la representación de medidas vectoriales valoradas en espacios de Banach mediante la integral de Bochner. Autores como Chi[1976], Gilliam [1976], Saab [1978], y Bombal [1981] abordan el problema de representar medidas vectoriales valoradas en e.l.c. mediante una densidad integrable, construyendo un espacio de Banach sobre el recorrido de la medida vectorial y aplicando los resultados conocidos para espacios de Banach. Otra posibilidad, Blondia [1981-b], Edge[1980], Rodriguez-Salinas [1980], es realizar una aproximación por seminormas, se trata de estudiar la representación de una medida vectorial m valorada en un e.l.c. X, mediante una función f valorada en X, de modo que para cada $p \in P(X)$, la medida $\pi_p \circ m$ valorada en el espacio de Banach X_{V_p} (asociado a V_p) este representada por $\pi_p \circ f$, donde $\pi_p : X \to X_{V_p}$ es la proyección canónica.

La siguiente noción de integral se debe a Grothendiek [1966] y responde al segundo planteamiento. (Ω, Σ, μ) será un espacio de medida finito y completo.

" Una función $f : \Omega \to X$ se dice μ-integrable por seminormas si para cada $p \in P(X)$ existe una sucesión de funciones simples f_n^p que cumplen :

(a)- $\lim_n p(f_n^p(t) - f(t)) = 0$ para casi todo $t \in \Omega$.

(b)- $p(f_n^p - f) \in L^1(\mu)$ para cada $n \in N$ y $\lim_n \int p(f_n^p - f)\, d\mu = 0$.

(c)- Para cada $A \in \Sigma$ existe un $x_A \in X$ tal que $\lim_n p(\int_A f_n^p \, d\mu - x_A) = 0$, Entonces se define $x_A = \int_A f \, d\mu$.

Evidentemente si X es un espacio de Banach, esta noción de integral coincide con la integral de Bochner.

Si X es un e.l.c. casi completo, la noción de integral por seminormas coincide con la $\tilde{\mu}$ -integral estudiada por Rodriguez-Salinas [1979],([1980]th.10).

Rodriguez-Salinas [1979] y Blondia [1981-a] prueban el siguiente resultado.

9.32 <u>PROPOSICION</u> *Si* $f : \Omega \to X$ *es una función medible por seminormas e integrable Pettis, entonces* f *es integrable por seminormas si y sólo si* m_f *tiene p-variación acotada (vease 3.8), y en este caso se tiene que* $|m_f|_p(A) = \int_A p_\circ f \, d\mu$ *para cada* $A \in \Sigma$. #

Se dice que un conjunto acotado $B \subset X$ tiene la propiedad de Radon-Nikodym (PRN), cuando para cada espacio de medida finito y completo (Ω,Σ,μ) y cada medida vectorial $m : \Sigma \to X$ verificando $m(A) \in \mu(A).B$ para cada $A \in \Sigma$, existe una función integrable por seminormas $f : \Omega \to X$ tal que $m(A) = \int_A f \, d\mu$ para cada $A \in \Sigma$.

Se dice que el e.l.c. X posee la PRN-1, propiedad de Radon-Nikodym(1), cuando todo acotado de X la posee. (Edge [1978], Saab[1978]).

Otra posible definición de la Propiedad de Radon-Nikodym es la siguiente. Un e.l.c. X se dice que cumple la PRN-2, cuando para cada espacio de medida finito y completo (Ω,Σ,μ) y cada medida vectorial μ-continua $m : \Sigma \to X$ de variación acotada (e.d. $|m|_p(\Omega) < +\infty$ para cada $p \in P(X)$), existe una función integrable por seminormas $f : \Omega \to X$ tal que $m(A) = \int_A f \, d\mu$ para cada $A \in \Sigma$.

Blondia prueba en su tesis doctoral (según cita Defant [1983]) que si X es un e.l.c. con la propiedad (B) de Pietsch[1972], entonces X posee la PRN-1 si y sólo si posee la PRN-2. Esto ocurre para espacios de Frechet, espacios con la propiedad gDF y en los espacios duales de espacios nucleares casi-tonelados.

Utilizando la caracterización dada en 9.18 de los subconjuntos débil* compactos convexos de e.l.c. duales X* con la PDRN en terminos de sus proyecciones por seminormas $\pi_B(K)$ en el espacio de Banach $X^*_{B^\circ} \subsetneq (X_B)^*$, junto con la proposición 9.32, caracterizaremos los subconjuntos débil*compactos convexos de e.l.c. duales X* con la PRN en terminos análogos.

9.33 TEOREMA *Sea X un e.l.c. y $K \subset X^*$ un subconjunto débil*-compacto convexo. Supuesto que X* está dotado de la topología fuerte, son equivalentes : (a) K cumple la PRN ; y (b) Para cada disco acotado $B \subset X$ el conjunto $\pi_B(K)$ como subconjunto de $X^*_{B^\circ} \subsetneq (X_B)^*$ posee la PRN.*

Demostración .- (a) $\Longrightarrow$ (b) Es consecuencia inmediata de 9.17.

(b) $\Longrightarrow$ (a) . En virtud de 9.18 sabemos que K cumple la PDRN . Por la proposición 9.32, es suficiente con observar que la derivada débil de Radon-Nikodym construida en la demostración de 9.9, con valores en el acotado K, es medible por seminormas.

Sea (Ω,Σ,μ) un espacio de medida finito y completo, y sea $m : \Sigma \to X^*$ una medida vectorial tal que $m(A) \in \mu(A).K$ para cada $A \in \Sigma$. Entonces, si ρ es un lifting sobre $\mathcal{L}^\infty(\mu)$, existe una función $f : \Omega \to X^*$ integrable Pettis tal que $f(\Omega) \subset K$, $m(A) = \int_A f \, d\mu$ para cada $A \in \Sigma$, y para cada $x \in X$ se cumple $\rho(\langle f,x\rangle) = \langle f , x \rangle$.

Sea $m_B : \Sigma \to (X_B)^*$ la medida definida por $m_B = \pi_B \circ m$. Entonces m_B cumple $m_B(A) \in \mu(A).\ \pi_B(K)$ para todo $A \in \Sigma$. Como $\pi_B(K)$ tiene la PRN, existe una función $g : \Omega \to (X_B)^*$ integrable Bochner tal que $m_B(A) = \int_A g \, d\mu$ para cada $A \in \Sigma$. Como para cada $A \in \Sigma$ $\int_A g \, d\mu = (P) \int_A \pi_B \circ f \, d\mu$, se deduce fácilmente que g y $\pi_B \circ f$ son escalarmente equivalentes. Por 7.9 tenemos que $\mu(\pi_B \circ f)^{-1}$ es una medida t-aditiva sobre $B_A((X_B)^*_w)$.

(I)- Si aplicamos el lifting a $\pi_B \circ f$, por 7.18 y 7.25 obtenemos que $\rho(\pi_B \circ f)$ toma casi todos sus valores en un subespacio separable de $(X_B)^*$.

Como los elementos de X_B separan puntos de $(X_B)^*$, se tiene que

$\pi_B \circ f\ (t) = \rho(\pi_B \circ f)(t)$ para todo $t \in \Omega$ con $\rho(\pi_B \circ f)(t) \in (X_B)^*$, pues si $x \in X_B$, se cumple :

$$<\rho(\pi_B \circ f)(t), x> = \rho(<\pi_B \circ f, x>)(t) = \rho(<f,x>)(t) = <f(t),x> = <\pi_B \circ f(t),x> .$$

Por lo tanto $\pi_B \circ f$ toma casi todos sus valores en un subespacio separable de $(X_B)^*$, y consecuentemente es medible Bochner.

Tenemos probado que f es medible por seminormas, lo que junto con 9.32 implica que f es integrable por seminormas. Concluyendo que K posee la PRN.#

Bourgin ([1983],4.2.7) prueba que si K es un conjunto débil*compacto convexo de un espacio de Banach dual X^*, tal que K dotado de la topología débil $\sigma(X^*,X^{**})$ es Lindeloff, entonces K posee la PRN. Así obtenemos de forma inmediata el siguiente corolario .

9.34 <u>COROLARIO</u> *Sea* X *un e.l.c. y* $K \subset X^*$ *un subconjunto débil*-compacto y convexo. Si para cada disco acotado* $B \subset X$ *el subconjunto* $\pi_B(K) \subset (X_B)^*$ *es Lindeloff para la topología débil (por ejemplo si* K *es débilmente Lindeloff) entonces* K *posee la PRN.* #

Dentro del contexto de los resultados expuestos en esta memoria se puede dar una prueba parcial de este corolario, en el caso en que K es absolutamente convexo. En efecto, si $\pi_B(K) \subset (X_B)^*$ es débil*-compacto, absolutamente convexo y débilmente Lindeloff, entonces $\pi_B(K)$ posee la PDRN pues en otro caso tazonando como en la prueba de 9.25 es posible encontrar una sobreyección de $(X_B)^*$ sobre l^∞ que lleva $\pi_B(K)$ a la bola unidad de l^∞ , teniendo que esta bola es Lindeloff para la topología débil, lo cual es falso (sabemos que existen funciones escalarmente medibles valoradas en l^∞ que no son P-medibles, en contradicción con 4.12). Como la medida imagen $\mu(\pi_B \circ f)^{-1}$ está soportada por $\pi_B(K)$ y la σ-álgebra de Baire $B_a(\pi_B(K),\sigma((X_B)^*,(X_B)^{**}) = B_a((X_B)^*_w) \cap \pi_B(K)$ (Moran [1970] 5.2), entonces $\mu(\pi_B \circ f)^{-1}$ es una medida t-aditiva sobre $B_a((X_B)^*_w)$ pues $\pi_B(K)$ es compacto en medida y $\mathcal{M}_\tau((X_B)^*_w) = \mathcal{M}_t((X_B)^*_w)$. Razonando como en (I) de la prueba del teorema anterior se concluye que $\pi_B(K)$ tiene la PRN.

En el siguiente corolario exponemos algunos tipos de espacios duales con la PRN-1. Parte de estos resultados aparecen en los trabajos de Rodriguez-Salinas[1983].

9.35 <u>COROLARIO</u> *Sea* X *un e.l.c. casi tonelado. Entonces* X^* *dotado de la topología fuerte, posee la PRN-1 en cada uno de los siguientes casos.*

(a) Para cada conjunto acotado $A \subset X^*$ *y cada disco acotado* $B \subset X$ $\pi_B(A)$ *es débilmente Lindeloff (en particular si es separable).*

(b) Para cada disco acotado $B \subset X$ *, el espacio de Banach* $X^*_{B^\circ}$ *es débilmente Lindeloff.*

(c) Para cada disco acotado $B \subset X$ *, el espacio de Banach* $X^*_{B^\circ}$ *es débilmente K-analítico.*

(d) Para cada disco acotado $B \subset X$ *, el espacio de Banach* $X^*_{B^\circ}$ *es débilmente compactamente generado (en particular si es separable)*

<u>Demostración</u> .- (a) y (b) son consecuencias inmediatas del corolario anterior. Como todo espacio K-analítico es Lindeloff resulta (c). Talagrand [1979] ha probado que todo espacio de Banach débilmente compactamente generado es K-analítico y por consiguiente Lindeloff, con lo que se tiene (d). #

En general se tiene el siguiente corolario

9.36 <u>COROLARIO</u> *Sea* X *un e.l.c. casi tonelado tal que para cada disco acotado* $B \subset X$ *, el espacio de Banach* $X^*_{B^\circ}$ *posee la PRN (resp. la PDRN) . Entonces* X^* *dotado de la topología fuerte posee la PRN-1 (resp. la PDRN)*

#

ANEXO

A) .- EL TEOREMA DE METRIZABILIDAD DE A. IONESCU-TULCEA

Dado un espacio de medida finito (Ω,Σ,μ), se denota por $M(\Sigma)$ al ágebra de todas las aplicaciones Σ-medibles $f:\Omega\to R$. Para f y $g \in M(\Sigma)$, se escribe $f = g$ si $f(t)=g(t)$ para cada $t\in\Omega$, y $f\equiv g$ si $f(t)=g(t)$ para casi todo (μ) $t\in\Omega$.

A.1 TEOREMA (A.Ionescu-Tulcea) *Sea* $H\subset M(\Sigma)$ *un conjunto cumpliendo :*

(i) Para cada $h_1, h_2 \in H$ *si* $h_1 \neq h_2$ *entonces* $h_1 \not\equiv h_2$.

Entonces, para la topología de la convergencia puntual en H *, son equivalentes:*

(a-1) H *es secuencialmente compacto*

(a-2) H *es compacto y metrizable*

(ii) Si además H *es convexo , entonces (a-1) y (a-2) también son equivalentes a*

(a-3) H *es compacto*

(a-4) H *es numerablemente compacto.*

Para la prueba de (i) se puede ver A.Ionescu-Tulcea ([1973] prop.1) y para la prueba de (ii) A.Ionescu-Tulcea ([1974], the.1). Una prueba completa de este teorema puede verse en Khurana [1979] junto con interesantes aplicaciones.

B) .- UN TEOREMA DE D.H.FREMLIN

Tratando de suprimir la hipótesis de convexidad en el teorema anterior D.H. Fremlin [1975] obtiene el siguiente :

B.1 TEOREMA (Fremlin 2F) *Si* (Ω,Σ,μ) *es un espacio de medida perfecto y finito, entonces:*

Cada sucesión $f_n \in M(\Sigma)$ *posee una subsucesión convergente en casi todo punto, ó posee una subsucesión sin puntos de aglomeración medibles para la topología de la convergencia puntual.*

C) .- ALGUNOS RESULTADOS DE BOURGAIN-FREMLIN-TALAGRAND [1978]

Todos los espacios considerados a continuación se suponen provistos de la topología de la convergencia puntual.

Sea T un espacio topológico completamente regular Hausdorff. Por $C(T)$ denotamos al espacio de las funciones $f : T \to R$ continuas. Por $B(T)$ al espacio de las funciones reales medibles con respecto a la σ-álgebra de Borel de T. Por $B^a(T)$ a las medibles con respecto a la σ-álgebra de Baire de T. Por $B_1(T)$ al espacio de las funciones de la primera clase de Baire (e.d. las funciones que son limite puntual de sucesiones de funciones continuas). Y por $M_\mu(T)$ (resp. $M_r(T)$) al espacio de las funciones reales medibles con respecto a la medida de Radon μ definida sobre K (resp. universalmente medibles).

C.1 TEOREMA (Bourgain-Fremlin-Talagrand 2F) *Sea* $A \subset C(T)$ *un conjunto puntualmente acotado. Son equivalentes :*

(a) Para cada compacto $K \subset T$, $A_K = \{ f_{|K} : f \in A \}$ *es relativamente secuencialmente compacto en* R^K

(b) A *es relativamente compacto en* $M_r(T)$

(c) Para cada medida de Radon μ *definida sobre* T , A *es relativamente numerablemente compacto en* $M_\mu(T)$.

C.1 TEOREMA (Bourgain-Fremlin-Talagrand 3F) *Si* T *es un espacio Polaco entonces* $B_1(T)$ *es angélico (es decir, si* $A \subset B_1(T)$ *es relativamente numerablemente compacto, entonces es relativamente compacto y cada punto de* $\overline{A}$ *es el límite puntual de una sucesión en* A).

C.3 TEOREMA (Bourgain-Fremlin-Talagrand 4D) *Sea* T *un espacio K-analítico (completamente regular) y* $A \subset B^a(T)$ *un conjunto numerable puntualmente acotado. Entonces son equivalentes : (a)* A *es relativamente secuencialmente compacto en* R^T *; (b)* A *es relativamente numerablemente compacto en* $B(T)$*; y (c) La clausura de* A *en* R^T *es angélica.*

D) .- UN MODELO DE LA REAL-COMPACTIFICACION DE HEWITT DE X_w COMO UN SUBESPACIO DE $(X^*)'$

Sea X un e.l.c. y $(X^*)'$ el dual algebraico de X^*. Por $\overline{\nu}X$ se denota al subespacio de $(X^*)'$ formado por los elementos x^{**} con la propiedad de que para cada conjunto numerable $x_n^* \in X^*$ existe un $x \in X$ verificando : $<x_n^*, x> = <x^{**}, x_n^*>$ para cada $n \in \mathbb{N}$. En esta sección comprobamos, siguiendo el trabajo de Valdivia [1982] , que $\overline{\nu}X$ es un modelo de la real compactificación de Hewitt de X_w , considerando en $\overline{\nu}X$ la topología $\sigma(\overline{\nu}X, X^*)$. El correspondiente resultado para el caso de que X sea un Banach se debe a Corson . También identificamos este modelo con él dado por Varadarajan [1965] en terminos de medidas $\{0,1\}$ -valuadas definidas sobre la σ-álgebra de Baire $B_a(X_w)$.

D.1 TEOREMA (Valdivia) $\overline{\nu}X$ *dotado de la topología* $\sigma(\overline{\nu}X, X^*)$ *es real compacto.* #

La demostración está en Valdivia [1982] pag.137 . Allí también se prueba que $X = \overline{\nu}X$ si y sólo si X_w es real-compacto. Siguiendo la demostración de este resultado comprobamos que la razón del mismo es que $\overline{\nu}X$ es un modelo de la realcompactificación de X_w, es decir, que X está C-inmerso y es denso en $\overline{\nu}X$.

D.2) TEOREMA $\overline{\nu}X$ *dotado de la topología* $\sigma(\overline{\nu}X, X^*)$ *es un modelo de la realcompactificación de* X_w.

Demostración .- Sea $x^{**} \in \overline{\nu}X$. Para cada subconjunto numerable $C \subset X^*$, existe un $x_C \in X$ tal que $<x_C, x^*> = <x^{**}, x^*>$ para todo $x^* \in C$. Si ordenamos los conjuntos numerables por inclusión, la red x_C obtenida es convergente hacia x^{**} en la topología $\sigma(\overline{\nu}X, X^*)$. De esta forma se tiene que X es denso en X.

Veamos que X_w está C-inmerso en $\overline{\nu}X$. Para ello probaremos que cualquier función $\sigma(X,X^*)$ continua $g : X \to R$ se puede extender a una función continua definida sobre $\overline{\nu}X$.

Sea T una base de Hamel de X^*, entonces $X \subset \overline{\nu}X \subset R^T$, y además X es denso en R^T. Sea $g : X \to R$ una función $\sigma(X,X^*)$ continua. Para cada $r \in Q$ consideramos los abiertos de X_w $U_r = \{ x \in X : g(x) > r \}$ y $V_r = \{ x \in X : g(x) < r \}$. Existen abiertos U'_r y V'_r en R^T tales que $X \cap U'_r = U_r$ y $X \cap V'_r = V_r$, y como X es denso en R^T, se tiene que $U'_r \cap V'_r = \emptyset$. Aplicando el teorema de Bockstein [1948] es posible encontrar un subconjunto numerable $C \subset T$ y abiertos disjuntos U^*_r y V^*_r en R^C tales que $U'_r = \pi^{-1}(U^*_r)$ y $V'_r = \pi^{-1}(V^*_r)$, donde $\pi : R^T \to R^C$ es la proyección canónica. Como todo elemento de $\overline{\nu}X$ actua sobre C como un elemento de X se tiene que $\pi(X) = \pi(\overline{\nu}X)$, y de esta igualdad se deduce:

$$\overline{\nu}X = \bigcup_{r \in Q} \pi^{-1}(U^*_r) \cap \overline{\nu}X = \bigcup_{r \in Q} \pi^{-1}(V^*_r) \cap \overline{\nu}X$$

pues

$$X = \bigcup_{r \in Q} \pi^{-1}(U^*_r) \cap X = \bigcup_{r \in Q} \pi^{-1}(V^*_r) \cap X.$$

Definimos $\overline{g} : \overline{\nu}X \to R$ por $\overline{g}(x^{**}) = \sup\{ r \in Q : x^{**} \in \pi^{-1}(U^*_r) \}$.

Se cumple que

(A) $\qquad \overline{g}(x^{**}) = \sup \{ r : x^{**} \in \pi^{-1}(U^*_r) \} \leq \inf \{ s : x^{**} \in \pi^{-1}(V^*_s) \}$

pues si $x \in X$ es tal que $\pi(x^{**}) = \pi(x)$ y si $x^{**} \in \pi^{-1}(U^*_r)$ entonces $g(x) > r$ y si $x^{**} \in \pi^{-1}(V^*_s)$ entonces $g(x) < s$ .Por lo tanto $r < s$, y resulta la desigualdad (A).

De la desigualdad (A) se obtiene que $|\overline{g}(x^{**})| < +\infty$. Si $x \in X$ es claro que $\overline{g}(x) = g(x)$, por lo que $\overline{g}$ es una extensión de g.

Para ver la $\sigma(\overline{\nu}X,X^*)$conttinuidad de $\overline{g}$ observamos en primer lugar que para cada $t \in R$

$$\{x^{**} \in \overline{\nu}X : \overline{g}(x^{**}) > t \} = \bigcup_{r > t} \pi^{-1}(U^*_r) \cap \overline{\nu}X$$

que es un abierto en $\overline{\nu}X$. Si probamos que

(B) $\qquad \overline{g}(x^{**}) = \inf \{ s \in Q : x^{**} \in \pi^{-1}(V^*_s) \}$

tendremos de forma análoga que $\{ x^{**} \in \overline{\nu}X : \overline{g}(x^{**}) < t \}$ es un abierto de $\overline{\nu}X$. Con lo que se tiene que $\overline{g}$ es continua en $\overline{\nu}X$.

Por (A) sabemos que $\overline{g}(x^{**})$ es menor o igual que el infimo considerado en (B). Supongamos que $x^{**} \in \bar{\nu}X$ es tal que esa desigualdad es estricta. Existiran t_1 y t_2 en Q tales que :

$$\sup\{ r : x^{**} \in \pi^{-1}(U_r^*) \} < t_1 < t_2 < \inf\{ s : x^{**} \in \pi^{-1}(V_s^*) \}$$

Entonces $x^{**} \notin \pi^{-1}(U_{t_1}^*)$ y $x^{**} \notin \pi^{-1}(V_{t_2}^*)$. Pero como $U_{t_1} \cup V_{t_2} = X$ se tiene que $X = \pi^{-1}(U_{t_1}^*) \cup \pi^{-1}(V_{t_2}^*) \cap X$, y por el mismo razonamiento hecho anteriormente, $\bar{\nu}X = \pi^{-1}(U_{t_1}^*) \cup \pi^{-1}(V_{t_2}^*) \cap \bar{\nu}X$. Con lo que llegamos a una contradicción, y por lo tanto (B) es cierta. #

Si νX es el conjunto de la medidas $\{0,1\}$ valuadas σ-aditivas definidas sobre X_w. El espacio νX con la topología dada por la uniformidad definida por $C(X_w)$ es un modelo de la realcompactificación de Hewitt de X_w. Por consiguiente existe un homeomorfismo $\psi : \nu X \to \bar{\nu}X$ que deja fijos a los puntos de X. El siguiente teorema describe este homeomorfismo.

D.3 <u>TEOREMA</u> *Si para cada* $\alpha \in \nu X$ *se define la forma lineal* $\phi_\alpha \in (X^*)'$ *dada por* $\phi_\alpha(x^*) = \int \langle x^*,x\rangle \, d\alpha(x)$. *La aplicación* $\phi : \nu X \to \bar{\nu} X$ *dada por* $\phi(\alpha) = \phi_\alpha$ *es un homeomorfismo entre* νX *y* $\bar{\nu} X$ *que fija los puntos de* X .

<u>Demostración</u> .- En primer lugar comprobamos que $\phi_\alpha \in \bar{\nu}X$. Para ello consideramos un subconjunto numerable $C \subset X^*$. Para cada $x_n^* \in C$,

$$\langle \phi_\alpha, x_n^* \rangle = \int \langle x_n^*, x\rangle \, d\alpha(x) = \langle x_n^*, x_n \rangle = a_n$$

para algún $x_n \in X$, ya que α es $\{0,1\}$ valuada. Sea $H_n = \{ x : \langle x^*, x\rangle = a_n \}$ entonces $\alpha(H_n) = 1$. Como α es $\{0,1\}$valuada, las intersecciones finitas $\bigcap_{n=1}^{m} H_n$ siguen teniendo medida 1. Y como α es σ-aditiva, se tiene que $\bigcap_{n=1}^{\infty} H_n$ tiene medida 1, y por lo tanto existe un x en la intersección. Evidentemente $\langle \phi_\alpha, x_n^* \rangle = \langle x_n^*, x\rangle$ para cada n. Con lo que se prueba que $\phi_\alpha \in \bar{\nu} X$.

Es evidente que ϕ deja fijos los elementos de X. Además como $X^* \subset C(X_w)$ se tiene que ϕ es continua considerando en $\bar{\nu} X$ la topología $\sigma(\bar{\nu} X, X^*)$. Por la unicidad de la realcompactificación existe un homeomorfismo $\psi : \nu X \to \bar{\nu}X$ que fija los puntos de X. Como X es denso en νX y ϕ y ψ

coinciden en X se tiene que $\Phi = \Psi$ es un homeomorfismo. #

Cabe preguntarse qué tipo de espacio debe de ser X para que $\overline{\nu}X \subset X^{**}$. Es fácil observar que todo $x^{**} \in \overline{\nu}X$ es secuencialmente continuo sobre X^*. Por lo tanto si X^* dotado de la topología fuerte $\beta(X^*,X)$ es metrizable, en general si X^* tiene la propiedad de que toda función secuencialmente continua es continua, se tiene que $\overline{\nu}X \subset X^{**}$.

La condición $X^{**} \subset \overline{\nu}X$ es más fuerte, como se observa en la siguiente:

D.4 <u>PROPOSICION</u> *Sea* X *un e.l.c. casi completo, entonces* $X^{**} \subset \overline{\nu}X$ *si y sólo si* X *es semirreflexivo.*

<u>Demostración</u> .- La condición suficiente es inmediata.

Supongamos que $X^{**} \subset \overline{\nu}X$, y veamos que todo acotado $B \subset X$ es $\sigma(X,X^*)$ relativamente compacto. Para ello utilizaremos la caracterización de la compacidad débil que aparece en Schaefer [1971] 11.2 pag.187 .

Sea x_n una sucesión en B y x_n^* una sucesión en V_p° para algún $p \in P(X)$. Supongamos que existen los limites dobles

$$\lim_n \lim_m \langle x_m, x_n^* \rangle = a \quad y \quad \lim_m \lim_n \langle x_m, x_n^* \rangle = b$$

tenemos que probar que $a = b$.

Sea $x^{**} \in X^{**}$ un punto de aglomeración de x_m para la topología $\sigma(X^{**},X^*)$. Entonces $\lim_n \lim_m \langle x_m, x_n^* \rangle = \lim_n \langle x^{**}, x_n^* \rangle = a$. Sea $x^* \in V_p^\circ$ un punto de aglomeración de x_n^* para la topología $\sigma(X^*,X)$. Entonces se tiene que $\lim_m \lim_n \langle x_m, x_n^* \rangle = \lim_m \langle x_m, x^* \rangle = \langle x^{**}, x^* \rangle = b$. Como $x^{**} \in \overline{\nu}X$, sea $x \in X$ tal que $\langle x^{**}, x_n^* \rangle = \langle x, x_n^* \rangle$ para todo $n \in N$ y $\langle x^{**}, x^* \rangle = \langle x, x^* \rangle$ Entonces se tiene $a = \langle x, x^* \rangle = b$. #

BIBLIOGRAFIA

ASPLUND,E [1968] Fréchet differentiability of convex functions. Acta. Math. 121 31-47

BELLOW,A. [1980] Lifting compact spaces. Lect. Notes in Math. 794 Springer-Verlag. 233-253

BLONDIA,C. [1981-a] Integration in locally convex spaces. Simon Stevin 55 81-102

[1981-b] A Radon-Nikodym theorem for vector valued measures. Bull.Soc. Math. Belg. 33 Ser.B. 231-249

[1983] The Radon-Nikodym property in locally convex spaces. Vorlesungen aus der Universit'a't Essen Heft.10 107-120

BOCKSTEIN,M. [1948] Un théoreme de séparabilité pour les produits topologiques. Fund. Math. 35 241-246

BOMBAL,F. [1981] El teorema de Radon-Nikodym en espacios Bornologicos. Rev. de la R. Acad. de Cienc. Exac. Fis. y Nat. Madrid 75 139-154

BOURGAIN,J FREMLIN,D.H. TALAGRAND,M. [1978] Pointwise compact sets of Baire--measurable functions. Amer. J. Math. 100 845-886

BOURGIN,R.D. [1983] Geometric Aspect of Convex Sets with the Radon-Nikodym Property. Lect. Notes in Math. 993 Springer-Verlag.

BROOKS,J.K. DINCULEANU,N. [1980] Weak and strong compactness in the space of Pettis integrable functions. Contemp. Math. 2 Amer.Math.Soc. 161-187

[1982] On weak compactness in the space of Pettis integrable functions. Adv. in Math. 45 255-258.

BUCHWALTER,H. [1973] Fonctions continues et mesures sur un espace complètement régulier. Lect. Notes in Math. 331 Springer-Verlag 183-202

BUCHWALTER,H. PUPIER,R. [1969] Caractérisation topologique de la complétion universelle d'un espaces topologique complètement régulier. C.R. Acad. Sc. Paris 268 1534-1536

CHI,G.Y.H. [1976] On the Radon-Nikodym Theorem in locally convex spaces. Lect. Notes in Math. 541 Springer-Verlag 199-210

CHOQUET,G. [1959] Ensembles K-analytiques et K-sousliniens , cas général et cas métrique. Ann. Inst. Fourier 9 75-89

[1969] Lectures on analysis. vol.II W.A. Benjamin Inc. Massachusetts.

COLLINS,H. RUESS,W. [1982] Duals of spaces of compact operators. Studia Math. 74 213-245

[1983] Weak compactness in spaces of compact operators and of vector-valued functions. Pac. J. of Math. 106 45-71

CORSON,H.H. [1961] The weak topology of Banach spaces. Trans. Amer. Math. Soc. 101, 1-15

DEFANT,A. [1983] Radon-Nikodym properties for duals of locally convex spaces. Vorlesungen aus der Universit'a't Essen Heft. 10 131-147

DELANGE,R.-BLONDIA,C. [1978] On measurable and partitionable vector valued multifunctions. Lect. Notes in Math. 645 Springer-Verlag 35-47

DIESTEL,J. [1984] Sequences and Series in Banach Spaces. Springer-Verlag G.T.M. 92 New York.

DIESTEL,J UHL,J.J. Jr. [1977] Vector Measures Math. Surv. 15 Amer. Math. Soc. Providence.

[1983] Progress in Vector Measures 1977-1983 Lect. Notes in Math. 1033 Springer-Verlag 144-192.

DINCULEANU,N. [1967] Vector Measures . Pergamonn Press . Berlin .

DUDLEY,R. [1966] Convergence of Baire Measures. Studia Math. 27 251-268

DUNFORD,N. SCHWARTZ,J.T. [1958] Linear Operator, part.I . Interscience New York.

EDGAR, G.A. [1977] [1979] Measurability in a Banach space. I y II Indiana UNiv. Math. J. 26 663-677 y 28 559-579

[1982] On pointwise-compact sets of measurable functions. Lect. Notes in Math. 945 Springer-Verlag 24- 28.

EDGAR,G.A. TALAGRAND,M. [1980] Lifting of functions with values in a completely regular space. Proc.Amer. Math. Soc. 78 345-349

EDGE,L. [1978] On the Radon-Nikodym property and related topics in locally convex spaces. Lect. Notes in Math. 645 Springer-Verlag 77-90

[1980] The Radon-Nikodym property, σ-dentability and martingales in locally convex spaces. Pac. J. of Math. 87 313-322

FREMLIN,D.H. [1974] Topological Riesz Spaces and Measure Theory. Cambridge Univ. Press .

[1975] Pointwise compact sets of measurable functions. Manus. Math. 15 219-242

[1981] Measurable functions and almost-continuous functions. Manus. Math. 33 387-407

FREMLIN,D.H. TALAGRAND,M. [1979] A descomposition theorem for additive set--functions with applications to Pettis integral and Ergodic Means. Math. Z. 168 117-142

GEITZ,R.F. [1981] Pettis integration. Proc. Amer. Math. Soc. 82 81-86

[1982] Geometry and the Pettis Integral. Trans. Amer. Math. Soc. 269 535-548

GEITZ,R.F. UHL,J.J. Jr. [1981] Vector-valued functions as families of scalar--valued functions. Pac. J of Math. 95 75-83

GHOUSSOUB,N. SAAB,E. [1981] On the Radon-Nikodym property. Proc. Amer. Math. Soc. 81 81-84

GILLIAM,D. [1976] Geometry and the Radon-Nikodym theorem in strict Mackey convergence spaces. Pac. J. of Math. 65 353-364

GILLMAN,L. JERISON,M. [1976] Rings of continuous functions. Springer-Verlag G.T.M. 43 New York.

GOULD,G.G. MAHOWALD,M. [1962] Measures on completely regular spaces. J. London Math. Soc. 37 103-111

GROTHENDIECK,A [1966] Produits tensoriels topologiques et espaces nucléaires Mem. Amer. Math. Soc. 16

HAGLER,J. SULLIVAN,F. [1980] Smoothness and weak* sequential compactness Proc. Amer. Math. Soc. 78 497-503

HAYDON,R. [1976] Some more characterization of Banach spaces containing l^1. Math. Proc. Cambridge Phil. Soc. 80 269-276

[1976-a] An extreme point criterion for separability of a dual Banach space and a new proof of a theorem of Corson. Quart. J. Math. Oxford 27 379-385

[1977] On Banach spaces which contain $l^1(\tau)$ and types of measures on compact sets. Isr. J. Math. 28 313-325

IONESCU-TULCEA,A. [1973] On pointwise convergence, compactness and equicontinuity in the lifting topology I. Z. Wahr. verw. Geb. 26 197-205

[1974] On pointwise convergence, compactness and equicontinuity II. Adv. in Math. 12 171-177

IONESCU-TULCEA,A. IONESCU-TULCEA,C. [1969] Topics in the theory of lifting Springer-Verlag New York

JANICKA,L. [1979] Some measure-theoretical characterization of Banach spaces not containing l^1. Bull. Acad. Polon. des Sci. XXVII 561-565

JARCHOW,H. [1981] Locally Convex Spaces. B.G. Teubner, Stuttgart.

KHURANA,S.S. [1979] Pointwise compactness and measurability. Pac. J. of Math. 83 387-391

KNOWLES,J. [1967] Measures on topological spaces. Proc. London Math. Soc. 17 139-156

KOTHE,G. [1969] [1979] Topological Vector Spaces I y II Springer-Verlag New York.

KOUMOULLIS, G. [1982] Perfect, u-additive measures and strict topologies Illinois J. Math. 26 466-478

LABUDA,I. [1978] On integration and suslin Spaces. Proc. of the Conference Topology and Measure II Univ. Grifswald 199-218

LACEY, H.E. [1974] The Isometric Theory of Classical Banach Spaces. Springer-Verlag New York.

LEWIS; D.R. [1970] Integration with respect to vector measures. Pac. J. Math. 33 157-165

LEWIS,D.R. [1973] Conditional weak compactness in certain inductive tensor product. Math. Ann. 201 201-209

de MARIA, J.L. [1981] Extensiones al teorema de Egorov. Tesis Doctoral. Univ. Complutense de Madrid.

MORAN,W. [1970] Measures on metacompact spaces. Proc. London Math. Soc. 20 507-524

MUSIAL,K. [1979] The weak Radon-Nikodym property in Banach Spaces. Studia Math. 64 151-173

[1980] Martingales of Pettis integrable functions. Lect. Notes in Math. 794 Springer-Verlag 324-336

MUSIAL,K. RYLL-NARDZEWSKI,C. [1978] Liftings of vector measures and their applications to RNP and WRNP . Lect. Notes in Math. 645 Springer-Verlag 162-171

NAMIOKA,I. [1967] Neigborhoods of estreme points. Isr. J. Math. 5 145-152

ODELL;E. ROSENTHAL, H.P. [1975] A double-dual characterization of separable Banach spaces containing l^1, Isr. J. Math. 20 375-384

OSTLING,E. WILANSKY,A. [1974] Locally convex spaces and the Convex Compactness Property. Proc. Camb. Phil. Soc. 75 45-50

PELCZYNSKI,A. [1968] On Banach spaces containing $L^1(\mu)$. Studia Math. 30 231-246

PETTIS,B.J. [1938] On integration in vector spaces. Trans Amer. Math. Soc. 44 277-304

PIETSCH,A. [1972] Nuclear Locally Convex Spaces. Springer-Verlag New York.

PTACK,V. [1955] Concerning spaces of continuous functions Czechoslovack Math.J. 5 (80) 412-431

PRYCE,J. [1971] A device of R.J. Whitley's applied to pointwise compactness in spaces of continuous functions. Proc. London Math. Soc. 23 532-546

RIDDLE,L.H. [1982] The geometry of weak Radon-NIkodym sets in a dual Banach space. Proc. Amer. Math. Soc. 86 433-438

RIDDLE,L.H. [1984] Dunford-Pettis operatos and weak Radon-Nikodym sets. Proc Amer. Math. Soc. 91 254-256

RIDDLE;L.H. UHL,J.J. Jr. [1982] Martingales and the fine line between Asplund spaces and spaces not containing a copy of l^1. Lect. Notes in Math. 939 145-156

RIDDLE,L.H. SAAB,E. UHL,J.J. Jr. [1983] Sets with the weak Radon-Nikodym property in dual Banach spaces. Ind. Univ. Math. J. 32 527-541

RODRIGUEZ-SALINAS,B.[1979] Integracion de funciones valoradas en un espacio localmente convexo. Rev. R. Acad. Cienc. Exac. Fis. Nat. Madrid 73 361-387

[1980] El teorema de Radon-Nikodym para las medidas con valores en un espacio localmente convexo. REv.R. Acad. Cienc. Exac. Fis. Nat. Madrid 74 41-64

[1983] Sobre el dual de un e.l.c. con PRN I y II. La PRN en el dual fuerte de un espacio infratonelado. La PRN del dual de un e.l.c. Apareceran en la Rev. R. Acad. Cienc. Exac. Madrid.

RODRIGUEZ-SALINAS,B. JIMENEZ,P. [1979] Medidas de Radon de tipo en espacios topológicos arbitrarios. Memo. R. Acad. Cienc. Exac. Fis. Nat. X Madrid

ROSENTHAL,H.P. [1974] A characterization of Banach spaces containing l^1. Proc. Nat. Acad. Sci. USA 71,6 2411-2413

[1977] Pointwise compact subsets of the first Baire class. Amer. J. Math. 99 362-378

[1978] Some recent discoveries in the isomorphic theory of Banach spaces. Bull. Amer. Math. Soc. 84 803-831

SAAB,E [1978] On the Radon-NIkodym property in a class of locally convex spaces. Pac. J. Math. 75 281-291

[1980-a] Universally Lusin-measurable and Baire 1-projections. Proc. Amer. Math. Soc. 78 614-618

[1980-b] A characterization of w*-compact convex sets having the Radon-Nikodym property. Bull Sc. Math. 2$^{\underline{e}}$ serie 104 79-88

[1981] On measurable projections in Banach spaces. Pac. J. Math. 97, 453-459.

SAAB,E. [1982-a] On Dunford-Pettis operators. Canad. Bull. 25 207-209

[1982-b] On Dunford Pettis operators that are Pettis-representable. Proc. Amer. Math. Soc. 85 363-365

[1982-c] Some characterizations of weak Radon-Nikodym sets. Proc. Amer. Math. Soc. 86 307-311.

SAAB,E. SAAB,P. [1981] Sur les espaces de Banach ne contenant pas l^1. C.R. Acad. Sc. Paris 293 261-263

[1983] A dual geometric characterization of Banach spaces not containing l^1. Pac. J. Math. 105 415-425

SAZANOV,V.V. [1965] On perfect measures. Amer. Math. Soc. Transl. 48 229-254

SCHAEFER [1971] Topological Vector Spaces ($3^{\underline{th}}$ ed.).Springer-Verlag G.T.M. 3 New York.

SCHWARTZ,L. [1973] Radon Measures on arbitrary topological spaces and Cylindrical Measures. Oxford Univ. Press.

SCHWARTZ,L. [1976] Certains Propietes des mesures sur les espaces de Banach. Seminaire Maurey-Schwartz 1975-76 Exposé 23.

SENTILLES,D. WHEELER,R.F. [1983] Pettis integration via the Stonian Transform. Pac. J. Math. 107 473-496

SION,M. [1973] A theory of semigroup valued measures. Lect. Notes in Math. 355 Springer-Verlag.

STEGALL,C. [1975] A result of Haydon and its applications. Seminaire Maurey-Schwartz 1975-76 Exposé 2

[1981] The Radon-Nikodym property in conjugate Banach spaces II . Trans. Amer. Math. Soc. 264 507-519

TALAGRAND,M. [1979] Espaces de Banach faiblement K-analitiques. Ann. of Math. 110 407-438

[1980] Compacts de fonctions mesurables et filtres non mesurables. Studia Math. 67 13-43

TALAGRAND,M. [1980-a] Sur les mesures vectorielles definies par une application Pettis-integrable. Bull. Soc. Math. France 108 475-483

[1984] Pettis integral and measure theory. Mem. of the Amer. Math. Soc. 307 . Providence.

THOMAS,G.E. [1974] The Lebesgue-Nikodym theorem for vector valued Radon measures. Mem. of the Amer. Math. Soc. 139. Providence.

[1975] Integration of functions with values in locally convex spaces . Trans. Amer. Math. Soc. 212 61-81

[1976] Totally summable functions with values in locally convex spaces. Lect. Notes in Math. 541 Springer-Verlag 117-131

TWEDDLE,I. [1968] Weak compactness in locally convex spaces. Glasgow Math. Soc. J. 9 123-127.

VALDIVIA,M. [1977] Some news results on weak compactness . J. Funct. Anal. 24 1-10

[1982] topics in Locally Convex Spaces . Notas de Matemática 85 . North Holland . Amsterdam.

VARADARAJAN,V.S. [1965] Measures on topological spaces. Amer. Math. Soc. Transl. 48 161-228.

WEIZSACKER, H. [1978] Strong measurability, liftings and the Choquet-Edgar theorem. Lect. Notes in Math. 645 Springer-Verlag 209-218

WHEELER,R.F. [1981] Weak and pointwise compactness in the space of bounded continuous functions. trans. Amer. Math. Soc. 266 515-530.

[1982] The retraction Property, CCC Property, and a Dunford-Pettis-Phillips Property for Banach spaces. Lec. Notes in Math. 945 Springer-Verlag 252-262

[1983] A survey of Baire measures and strict topologies. Expo. Math. 2 97-190.