Caracterización de la medida imagen de una función integrable Pettis (*)

Por G. VERA BOTÍ

Departamento de Teoría de Funciones. Universidad de Murcia

Abstract

Let f be a weakly measurable function with values in the Banach space X, defined on the finite measure space (Ω, Σ, μ), and $\lambda = \mu f^{-1}$ its distribution induced on the Baire subsets of $(X, \sigma(X, X'))$. It is proved that f is Pettis integrable if and only if λ has the following property: Whenever a net Z_j of convex zero sets decreases to the empty set, $\lambda(Z_j) \to 0$.

This gives us Baire measure characterizations of the Banach spaces with the Pettis Integrability Property (P.I.P.) and the Pettis-essentially separable Banach spaces.

En lo que sigue X será siempre un espacio de Banach y (Ω, Σ, μ) un espacio de medida finito y completo. Para la terminología y conceptos básicos relativos a la integral de Pettis nos remitimos a Edgard (1977).

Denotaremos por $B_a = B_a(X, \sigma(X, X'))$ a la σ-álgebra de Baire de X dotado de la topología débil. Si $f : \Omega \to X$ es una función escalarmente medible, un teorema de Edgard (1977) asegura que f es B_a-medible, lo que permite definir sobre B_a la medida imagen de μ por f, que denotaremos por λ.

En Edgard (1977) se prueba que f es escalarmente equivalente a una función medible Bochner si, y sólo si, λ es una medida de Baire τ-suave. Wheeler en (1981) introduce un nuevo espacio de medidas de Baire, sobre un espacio completamente regular T, denotado por $Z(T)$, y conjetura que cuando f es acotada, la integrabilidad de Pettis de f se puede caracterizar, en términos similares a los de Edgar, por la condición de que λ esté contenida en el espacio $Z(X) = Z(X, \sigma(X, X'))$.

En (1982) probamos que la conjetura era falsa, quedando abierto el problema de describir las medidas de Baire que proporcionan una caracterización del tipo indicado. Estas medidas son las siguientes:

1. *Definición:* Una medida ν definida sobre la σ-álgebra de Baire $B_a(X, \sigma(X, X'))$ diremos que es C-suave si para cada red decreciente al vacío $Z_j \downarrow \phi$, formada por ceros convexos de funciones reales débilmente continuas, se verifica $|\nu|(Z_j) \to 0$.

Es fácil ver que la definición anterior es equivalente a la que resulta considerando solamente redes formadas por subconjuntos poliédricos de X (subconjuntos obtenidos como intersecciones finitas de semiespacios cerrados).

Nos remitimos a Wheeler (1983) para la terminología y resultados básicos

---

* Presentada en la sesión científica del 5 de diciembre de 1984, dirigida por el académico numerario Baltasar Rodríguez-Salinas.

sobre medidas de Baire. Así pues, $M_\sigma(X)$ (resp. $M_\tau(X)$) denota al espacio de las medidas σ-aditivas (resp. τ-suaves) definidas sobre la σ-álgebra de Baire B_a. Si denotamos por $M_c(X)$ al subespacio de $M_\sigma(X)$ formado por las medidas C-suaves, es claro que $M_\tau(X) \subset M_c(X) \subset M_\sigma(X)$.

La caracterización dada en el teorema 2, junto con los resultados de Fremlin-Talagrand (1979) ponen de manifiesto que para $X = l^\infty$ los tres espacios son distintos.

Si $j : X \to X''$ es la aplicación canónica y λ'' es la medida imagen de λ por j, definida sobre $B_a'' = B_a(X'', \sigma(X'', X'))$, entonces λ'' es una medida t-aditiva. Es bien sabido (véase Wheeler (1983)) que entonces λ'' se puede extender de modo único a una medida de Radon $\bar{\lambda}$ definida sobre la σ-álgebra de Borel $B_0'' = B_0(X'', \sigma(X'', X'))$.

Si existe una constante $M > 0$ tal que para cada $x' \in X'$ con $\|x'\| \leqslant 1$ se cumple $|\langle f(t), x'\rangle| \leqslant M$, para casi todo $t \in \Omega$, diremos que f está escalarmente esencialmente acotada (e.e.a.) (para mayor comodidad supondremos que la constante M en la definición anterior vale 1). En este caso $\bar{\lambda}$ tiene soporte compacto contenido en $B_{X''}$ (bola unidad de X'').

Utilizando que X es universalmente medible en $(X'', \sigma(X'', X'))$ (véase, por ejemplo, Edgar (1977)) es fácil completar el teorema de Edgar probando que la condición de que λ sea τ-suave también es equivalente a que $K \cap X \neq \phi$ para cada débil*-compacto $K \subset X''$ con $\bar{\lambda}(K) > 0$. Queda así más patente la analogía con el siguiente:

2. *Teorema:* Sea $f : \Omega \to X$ escalarmente medible y e.e.a. Son equivalentes: *a)* f es μ-integrable Pettis; *b)* λ es C-suave, y *c)* $K \cap X \neq \phi$ para cada débil*-compacto convexo $K \subset X''$ con $\bar{\lambda}(K) > 0$.

Demostración: *a)* $\Rightarrow$ *c)*. Sea $K \subset X''$ convexo y débil*-compacto con $\bar{\lambda}(K) > 0$, y sea $U(n) \supset K$ una sucesión de coceros en $(X'', \sigma(X'', X'))$ decreciente con $\lambda''(U(n)) \to \bar{\lambda}(K)$. Como f es μ-integrable Pettis, la sucesión $x_n = \int_{E(n)} f\, d\mu$, con $E(n) = f^{-1}(U(n) \cap X)$, verifica que:

$$\langle x_n, x'\rangle = \int_{U(n)\cap X} \langle x_n, x'\rangle \, d\lambda(x') =$$
$$= \int_{U(n)} \langle x'', x'\rangle \, d\bar{\lambda}(x'') \to \int_K \langle x'', x'\rangle \, d\bar{\lambda}(x'')$$

Así pues, x_n converge en la topología débil*, hacia el elemento $z'' \in X''$ definido por $\langle z'', x'\rangle = \int_K \langle x'', x'\rangle \, d\bar{\lambda}(x'')$. Es claro que el elemento $y'' = (1/\bar{\lambda}(K)) \cdot z''$ pertenece a K. Como x_n es una sucesión contenida en un subconjunto débilmente relativamente compacto de X (el recorrido de la integral de Pettis de f) se deduce que $y'' \in K \cap X$.

c) $\Rightarrow$ *b)*. Si λ no es C-suave existe una red decreciente al vacío $P_j \downarrow \phi$, formada por subconjuntos poliédricos, tal que $\lambda(P_j) \geq \varepsilon$ para cada j, y algún $\varepsilon > 0$. Es claro que cada P_j es de la forma $P_j = \bar{P}_j \cap X$, donde $\bar{P}_j \subset X''$ son subconjuntos poliédricos relativos a la topología débil*. Si $F = \cap_j \bar{P}_j$, es claro que $F \cap X = \phi$ y $\bar{\lambda}(F) \geqslant \varepsilon$. Podemos suponer que el soporte de $\bar{\lambda}$ está en $B_{X''}$, con lo que $F \subset B_{X''}$ será un débil* compacto convexo para el que no se cumple la condición *c)*.

b) $\Rightarrow$ *a)*. Es una consecuencia directa del teorema del «core» de Talagrand (véase Edgar (1982)).

Utilizando el teorema 2 y la observación que le precede sobre el teorema de Edgar se puede probar que una condición necesaria y suficiente para que una medida C-suave λ sea τ-suave es que $(X'', \| \|)$ sea $\bar{\lambda}$ esencialmente separable. La condición de que λ sea C-suave es esencial para la validez de esta afirmación. Esto se pone de manifiesto considerando un espacio de Banach X no débilmente real-compacto. Si νX es su realcompactificación, existe una medida $\{0,1\}$-valuada σ-aditiva $\lambda \in M_\sigma(X) - M_c(X)$ tal que el soporte de $\bar{\lambda}$ se reduce a un punto de $\nu X - X$. Más generalmente, se puede probar que si $\lambda \in M_\sigma(X)$ y sop $(\bar{\lambda}) \subset \nu X - X$, entonces $\lambda \notin M_c(X)$. Esto es consecuencia de que las condiciones $\lambda \in M_c(X)$ y sop $(\bar{\lambda}) \subset \nu X$ implican que sop $(\bar{\lambda})$ es separable en $(X'', \| \|)$, y esto garantiza que λ es τ-suave.

La igualdad $M_\sigma(X) = M_c(X)$ caracteriza a los espacios de Banach con la propiedad de que cada función escalarmente medible y e.e.a. con valores en X es integrable Pettis (espacios con la propiedad P.I.P. según Edgard (1979)).

Los espacios de Banach X con la propiedad de que cada función integrable Pettis con valores en X es escalarmente equivalente a una función medible Bochner (espacios Pattis-esencialmente separables según Diestel) se caracterizan mediante la igualdad $M_c(X) = M_\tau(X)$, y también por la condición de que X'' sea $\bar{\lambda}$-esencialmente separable para cada $\lambda \in M_c(X)$. Entre los espacios de Banach de esta clase se pueden citar, además de los que poseen la PRN, todos los retículos de Banach que no contienen a c_0.

Nota: Para la prueba de los resultados citados es muy útil una observación de Musial (1978) que permite expresar cada medida λ como límite uniforme de una sucesión λ_n tal que la identidad $i : X \longrightarrow X$ está e.e.a. con respecto a cada λ_n.

BIBLIOGRAFIA

EDGAR, G. A.: «Measurability in Banach Spaces I y II», *Indiana Math. J.*, 26, 663-667 y 28, 559-579 (1977, 1979). «On pointwise-compact sets of measurable functions. Measure Theory. Oberwolfach, 1981», *Lec. Notes in Math.*, 945, 559-579 (1982).

FREMLIN, D., y TALAGRAND, M.: «A descomposition theorem for additive set-functions», *Math. Z.*, 168, 117-142 (1979).

MUSIAL, K.: «The weak Radon-Nikodym Property in Banach spaces», *Studia Math.*, 64, 151-174 (1978).

PALLARES, A., y VERA, G.: «El recorrido de la integral de Pettis», aparecerá en la *Rev. de la Real Acad. de Cienc. Exac. Fís. y Nat. de Madrid* (1982).

WHEELER, R. F.: «Weak and Pointwise compactness in the space of bounded continuous fuctions», *Trans. Amer. Math. Soc.*, 266, 515-530 (1981). «A survey of Baire measures and srtict topologies», *Expo. Math.*, 2, 97-190 (1983).