El recorrido de la integral indefinida de Pettis

Por A. J. PALLARES
y G. VERA

Recibido: 13 abril 1983

Presentado por el académico numerario D. Baltasar Rodríguez–Salinas

Abstract

In this paper we study the compactness for the range of the Indefinite Pettits Integral. A theorem of Stegall [5] asserts that in the case of a function with values in a Banach space, Pettis integrable with respect to a perfect finite measure, the range is relatively compact in the norm topology. We extend this result to functions taking values in quasi–complete locally convex spaces and perfect measures not necessarily finite. We also give conditions, in terms of the image measure associated to the function, which imply its Pettis integrabilty and the compactness for the range of its indefinite integral. As a consequence of the results obtained, we give a negative answer to a conjeture settled by Wheeler in [17].

1. INTRODUCCION

En este trabajo estudiamos la compacidad del recorrido de la integral indefinida asociada a una función integrable Pettis. Un teorema de Stegall [5] establece que en el caso de funciones valoradas en espacios de Banach, integrables Pettis con respecto a una medida perfecta finita, este recorrido es relativamente compacto en norma. Nosotros extendemos este resultado al caso de funciones valoradas en espacios localmente convexos casi-completos y medidas perfectas no necesariamente finitas. También damos condiciones, en términos de la medida imagen asociada a una función, que aseguran la integrabilidad de Pettis de la misma y la compacidad del recorrido de su integral indefinida. Como consecuencia de los resultados obtenidos damos respuesta negativa a una conjetura planteada por Wheeler en [17].

2. RESULTADOS PRELIMINARES

En todo este trabajo (X, γ) designará un espacio localmente convexo casi–completo, X' su dual topológico y X_σ el espacio X dotado de la topología $\sigma(X, X')$. $P(X)$ designará a la familia de todas las seminormas γ–continuas sobre X. Si $p \in P(X)$, designamos por V_p al conjunto $\{x{:}p(x) \leqslant 1\}$.

S designará un conjunto no vacío, Σ una σ–álgebra de subconjuntos de S, y (S, Σ, μ) un espacio de medida positivo. Si $m{:}\Sigma \to X$ es una medida vectorial σ–aditiva y $\Pi \subset \Sigma$ es un retículo, diremos que m es Π–regular si para cada $\epsilon > 0$, cada $p \in P(X)$ y cada $E \in \Sigma$ existe un conjunto $H \in \Pi$, $H \subset E$ verificando $\|m\|_p(E - H) \leqslant \epsilon$, donde $\|m\|_p$ es la p-semi-variación de la medida m definida por:

$$\|m\|_p\ (B) = \sup\{|<x', m>|(B) : x' \epsilon V_p^\circ\}$$

Si m es Π-regular es fácil probar que para cada $E \in \Sigma$ se cumple:

$$m(E) = \text{lím}_{E \supset H} m(H) \qquad (H \in \Pi).$$

1. *Lema.*– Si $m: \Sigma \to X$ es una medida vectorial σ–aditiva tal que para cada $x' \in X'$ la medida escalar $|<x', m>|$ es Π–regular entonces m es Π–regular.

Demostración.– La familia de medidas escalares $F = \{|<x', m>| : x' \epsilon V_p^\circ\}$ es uniformemente acotada para cada $p \in P(X)$. (Véase el teorema 1.3 de [11]). Razonando como en la prueba del teorema I.2.4. del libro de Diestel–Uhl [1] y teniendo en cuenta que cada medida de F es Π–regular, se obtiene una medida finita, positiva y Π–regular ν definida sobre Σ con la propiedad de que la familia F es uniformemente ν–contínua.

Puesto que lím $_{E \supset H}\ \nu(E - H) = 0$ $(H \in \Pi)$, para cada $E \in \Sigma$, se deduce fácilmente que m es Π–regular.

Una función $f: S \to X$ se dice que es escalarmente Σ–medible si para cada $x' \in X'$ la función $<x', f>$ es Σ–medible. Edgar ha probado que f es escalarmente Σ–medible si y solamente si es medible respecto a la σ–álgebra de Baire de X_σ, que denotaremos $B_a(X_\sigma)$, ([2]).

Si $<x', f>$ es μ–integrable para cada $x' \in X'$ se dice que f es escalarmente μ–integrable. Si Π es una subfamilia de Σ y f una función escalarmente μ–integrable tal que para cada $H \in \Pi$ existe $x_H \in X$ verificando

$$x'(x_H) = \int_H <x', f>\, d\mu \quad \text{para todo } x' \in X'$$

diremos que f es μ–integrable Pettis sobre Π y que $\int_H f\, d\mu = x_H$.

Cuando $\Pi = \Sigma$ se dice que f es μ–integrable Pettis. Es sabido que en este caso su integral indefinida $m_f(A) = \int_A f\, d\mu$ $(A \in \Sigma)$ es una medida vectorial σ–aditiva con valores en X. Aplicando el lema 1 a la familia Σ^* formada por los conjuntos $A \in \Sigma$ con $\mu(A) < +\infty$, se obtiene que m_f es Σ^*–regular.

El siguiente lema recoge algunas de las propiedades de la integral de Pettis que se requieren para establecer resultados posteriores:

2. *Lema.*– Si $f: S \to X$ es escalarmente μ–integrable y $p \in P(X)$ entonces

$$\sup\left\{\int_S |<x', f>|\ d\mu : x' \in V_p^\circ\right\} < +\infty \tag{2.1}$$

Si además f es μ–integrable Pettis se cumple:

Para cada $\epsilon > 0$ existe $A \in \Sigma^*$ tal que si $B \in \Sigma^*$ y $A \cap B = \phi$, entonces

$$p(\int_B f\, d\mu) < \epsilon . \tag{2.2}$$

$$\lim_{\mu(E)\to 0} \sup\{\int_E |\langle x', f\rangle|\, d\mu : x' \in V_p^\circ\} = 0 \tag{2.3}$$

Demostración.– Véase [14]. Aunque en [14] se consideran sólo medidas σ–finitas, es fácil ver que los resultados que recoge este lema siguen siendo válidos para medidas arbitrarias.

La siguiente proposición completa un resultado de Fremlin que puede verse en [12], al mismo tiempo que lo extiende al caso de espacios localmente convexos y medidas infinitas.

3. *Proposición.*– Sea X un espacio localmente convexo separado y casi-completo, μ una medida positiva definida sobre Σ (finita o no) y Σ_0 una sub-σ-algebra de Σ . Si $f:S \to X$ es una función escalarmente Σ_0–medible μ–integrable Pettis sobre Σ_0 entonces f es μ–integrable Pettis sobre Σ. Si además el recorrido de la integral de f sobre Σ_0 es relativamente compacto entonces el recorrido de la integral indefinida de f sobre Σ también es relativamente compacto.

Demostración.– Supongamos en primer lugar que $\mu(S) < +\infty$, y sea μ_0 la restriccion de μ a Σ_0. Dado $F \in \Sigma$ definimos sobre Σ_0 la medida finita y μ_0–continua $\mu_F(A) = \mu(A \cap F)$. Aplicando el teorema de Radon–Nikodym encontramos una función μ_0–integrable $0 \leqslant g_F \leqslant 1$ tal que:

$$\mu_F(A) = \int_A g_F\, d\mu_0 = \int_A g_F\, d\mu \quad \text{si } A \in \Sigma$$

Sea s_n una sucesión de funciones Σ_0–simples $0 \leqslant s_n \leqslant g_F$ que converge uniformemente hacia g_F, y sea m_f la integral indefinida de f sobre Σ_0. Sea $x_n = \int_S s_n\, dm_f$. Un razonamiento similar al que se hace en la demostración del teorema VI.1.1 de [1] permite probar que $x_n \in \mathrm{co}(m_f(\Sigma_0))$, la envoltura convexa del recorrido de m_f.

Dada $p \in P(X)$

$$p(x_n - x_m) \leqslant \sup\{\int_S |s_n - s_m|\, d|\langle x', m_f\rangle| : x' \in V_p^\circ\} =$$
$$= \|s_n - s_m\|_\infty \sup\left\{\int_S |\langle x', f\rangle|\, d\mu_0 : x' \in V_p^\circ\right\}$$

teniendo en cuenta (2.1) se obtiene que $p(x_n - x_m)$ tiende a cero cuando n y m tienden a infinito, luego x_n es una sucesión de Cauchy en un espacio casi-completo, por lo tanto x_n converge hacia un elemento $x_F \in \overline{\mathrm{co}}(m_f(\Sigma_0))$. Aplicando el teorema de la convergencia dominada se tiene

$$x'(x_F) = \lim_n x'(x_n) = \lim_n \int_S s_n \, d\langle x' m_f\rangle = \lim_n \int_S s_n \langle x', f\rangle \, d\mu_0 =$$
$$= \int_S g_F \langle x', f\rangle \, d\mu_0 = \int_S \langle x', f\rangle \, d\mu_F = \int_F \langle x', f\rangle \, d\mu$$

por consiguiente $x_F = \int_F f \, d\mu$. Así, tenemos probado que f es integrable Pettis sobre Σ, y que $m_f(\Sigma) \subset \overline{\mathrm{co}}(m_f(\Sigma_0))$.

Supongamos ahora que $\mu(S) = +\infty$. Para cada $E \in \Sigma_0$ con $\mu(E) < +\infty$ definimos μ_E sobre Σ por $\mu_E(A) = \mu(E \cap A)$. Si f es μ–integrable Pettis sobre Σ_0, también es μ_E–integrable Pettis sobre Σ_0 y la prueba anterior nos asegura que f es μ_E –integrable Pettis sobre Σ, y que para cada $A \in \Sigma$.

$$\int_A f \, d\mu_E = \int_{A \cap E} f \, d\mu \in \overline{\mathrm{co}}(m_f(\Sigma_0)).$$

Sea A un conjunto de Σ, y $x_{A \cap E} = \int_{A \cap E} f \, d\mu$ la red obtenida cuando E recorre la subfamilia Σ_0^* de Σ_0 formada por los conjuntos de medida finita. Esta red es débilmente de Cauchy, porque para cada $x' \in X'$, $x'(x_{A \cap E})$ converge hacia $\int_A \langle x', f\rangle \, d\mu$ (recuérdese que las funciones escalares μ–integrables se anulan fuera de un conjunto de medida σ–finita).

Como m_f es una medida vectorial σ –aditiva sobre Σ_0, $m_f(\Sigma_0)$ es un conjunto relativamente débilmente compacto en X [15]. Como X es casi completo, $\overline{\mathrm{co}}(m_f(\Sigma_0))$ es débilmente compacto. Así, tenemos una red débilmente de Cauchy en un conjunto débilmente compacto, por tanto $x_{A \cap E}$ converge hacia un $x_A \in \overline{\mathrm{co}}(m_f(\Sigma_0))$, y evidentemente $x_A = \int_A f \, d\mu$.

Hemos probado que f es μ–integrable Pettis y que $m_f(\Sigma) \in \overline{\mathrm{co}}(m_f(\Sigma_0))$. En el caso de que $m_f(\Sigma_0)$ sea relativamente compacto, por la casi-completitud de X, tendremos que $m_f(\Sigma)$ también será relativamente compacto.

3. INTEGRALES INDEFINIDAS DE PETTIS CON RECORRIDO RELATIVAMENTE COMPACTO

En este apartado vamos a establecer condiciones suficientes para que el recorrido de la integral indefinida de una función integrable Pettis sea relativamente compacto. Utilizaremos frecuentemente el siguiente resultado:

4. *Lema.*– Sea X un espacio localmente convexo separado casi-completo, y $M \subset X$ un subconjunto acotado con la siguiente propiedad:

Cada red equicontinua $x'_\alpha \in X'$ que converge en la topología $\sigma(X', X)$ es uniformemente convergente sobre M. (4.1)

Entonces M es un conjunto relativamente compacto.

Demostración.– Es un corolario del teorema §21.7 de [8]. En efecto, consideremos la familia ψ formada por los $M \subset X$ acotados que cumplen (4.1), y ϕ la familia de los equicontinuos de X'. (4.1) implica que sobre cada conjunto $N \in \phi$ coinciden la topología $\sigma(X', X)$ y la topología de la convergencia uniforme sobre los conjuntos de ψ. Aplicando §21.7 [8] se obtiene que cada conjunto $M \in \psi$ es precompacto para la topología de la convergencia uniforme sobre los equicontínuos, es decir, la topología de X. Como X es casi completo se tiene que M es relativamente compacto en X.

En el siguiente teorema extendemos al caso localmente convexo un resultado de Edgar([3]4.1) que vamos a utilizar de modo sistemático para estudiar la compacidad del recorrido de la integral indefinida.

5. *Teorema.*– Sea X un espacio localmente convexo completo, y $f:S \to X$ una función escalarmente μ–integrable. Si para cada $p \in P(X)$ la restricción a V_p° del operador $T_f:X' \to L^1(\mu)$, definido por $T_f(x') = \langle x', f\rangle$, es $(\sigma(X', X) - \| \ \|_1)$–continuo, entonces f es μ–integrable Pettis y su integral indefinida tiene recorrido relativamente compacto.

Demostración.– Para cada $E \in \Sigma$ consideramos χ_E como forma lineal contínua sobre $L^1(\mu)$. El operador $\phi_E(x') = \int_E \langle x', f\rangle \, d\mu = \langle \chi_E, T_f(x')\rangle$ es continuo sobre V_p° para cada $p \in P(X)$. Del teorema de completitud de Grothendieck [8] se deduce que $\phi_E \in X$, luego f es μ–integrable Pettis.

Par probar la compacidad del recorrido $m_f(\Sigma)$ usaremos el lema 4. Sea x'_α una red equicontinua que converge a x' en la topología $\sigma(X' X)$, esta red está contenida en algún V_p°. Como el operador T_f es continuo para la norma $\| \ \|_1$, $\langle g, T_f(x'_\alpha)\rangle$ converge hacia $\langle g, T_f(x')\rangle$ uniformemente en

$$\{g \in L^\infty(\mu) : \|g\|_\infty \leqslant 1\}.$$

Tomando $g = \chi_E$, con $E \in \Sigma$, se tiene:

$$\langle x'_\alpha, \int_E f \, d\mu\rangle = \langle \chi_E, T_f(x'_\alpha)\rangle \longrightarrow \langle \chi_E, T_f(x')\rangle = \langle x', \int_E f \, d\mu\rangle$$

uniformemente en $E \in \Sigma$.

La condición de completitud en el teorema anterior, sólo se ha utilizado para la demostración de la integrabilidad de f. Si en las hipótesis se supone que f es μ–integrable Pettis, basta con que X sea casi–completo para obtener que la integral indefinida tiene recorrido relativamente compacto. Por otra parte, en el caso de funciones acotadas y medidas finitas también basta pedir que X sea casi–completo, pues en este caso, si $\hat{X}$ es su completado, se tiene que $\phi_E \in \mu(E). \overline{\mathrm{co}}_{\hat{X}}(f(S)) \subset X$.

6. *Teorema.*– Sea X un espacio localmente convexo casi–completo y y $f:S \to X$ una función μ–integrable Pettis. Se supone que para cada $A \in \Sigma$ con $\mu(A) < +\infty$, y para cada $p \in P(X)$, el conjunto $\{<x', f> : x' \in V^\circ_p\}$ es relativamente compacto en $L^1(\mu_A)$, donde $\mu_A(E) = \mu(E \cap A)$ $(E \in \Sigma)$. Entoces $m_f(\Sigma)$ es relativamente compacto.

Demostración.– Sea $p \in P(X)$, y $x'_\alpha \in V^\circ_p$ una red $\sigma(X', X)$ convergente hacia $x' \in V^\circ_p$. Si $A \in \Sigma$ con $\mu(A) < +\infty$, de la hipótesis del teorema se obtiene la existencia de un punto de aglomeración $\psi \in L^1(\mu_A)$ de la red $T_{f,A}(x'_\alpha) = <x'_\alpha, f>$ que está contenida en un subconjunto compacto de $L^1(\mu_A)$. Por tanto existe una subred $x'_{\alpha(j)}$ de x'_α que cumple:

$$\int_E \psi \, d\mu_A = \lim_j \int_E <x'_{\alpha(j)}, f> d\mu_A = \lim_j <x'_{\alpha(j)}, \int_E f \, d\mu_A> =$$
$$= <x', \int_E f \, d\mu_A> = \int_E <x', f> d\mu_A$$

para cada $E \in \Sigma$. Entonces $\psi = <x', f>$ en $L^1(\mu_A)$. Hemos probado que la red $<x'_\alpha, f>$, tiene un único punto de aglomeración en $L^1(\mu_A)$ y por consiguiente es convergente en $L^1(\mu_A)$ hacia dicho punto de aglomeración $<x', f>$.

Queda probado que la aplicación $T_{f,A} : X' \to L^1(\mu_A)$ restringida a cada V°_p es $\sigma(X', X)$– $\| \ \|_1$ continua. Aplicando el teorema 5 se tiene que

$\Pi_A = \left\{ \int_{A \cap E} f \, d\mu : E \in \Sigma \right\}$ es relativamente compacto en X.

Utilizando el lema 4 vamos a probar que $m_f(\Sigma^*)$ es relativamente compacto en X. Sea $x'_\alpha \in V^\circ_p$ una red $\sigma(X', X)$ convergente hacia $x' \in V^\circ_p$. Dado $\epsilon > 0$, por (2.2) encontramos un conjunto $A \in \Sigma^*$ tal que $p(\int_B f \, d\mu) < \epsilon$ para cada $B \in \Sigma^*$ tal que $B \cap A = \phi$. Sea $E \in \Sigma^*$ y $x_E = \int_E f \, d\mu$, entonces tenemos:

$$|x'_\alpha(x_E) - x'(x_E)| = |x'_\alpha(x_{E \cap A}) - x'(x_{E \cap A})| + |(x'_\alpha - x')(x_{E \cap A^c})| =$$

$$= |x'_\alpha(x_{E \cap A}) - x'(x_{E \cap A})| + 2p(\textstyle\int_{E \cap A^c} f \, d\mu) \leqslant |(x'_\alpha - x')(x_{E \cap A})| + 2\epsilon.$$

Como Π_A es relativamente compacto, x'_α converge a x' uniformemente sobre Π_A. De la igualdad anterior se sigue fácilmente que x'_α converge a x' uniformemente sobre $m_f(\Sigma^*)$. Aplicando el lema 4 tenemos que $m_f(\Sigma^*)$ es relativamente compacto en X.

Como suponemos que f es μ–integrable Pettis, su integral indefinida m_f es regular con respecto a los conjuntos de medida finita, por lo tanto $m_f(\Sigma) \subset \overline{m_f(\Sigma^*)}$ es un conjunto relativamente compacto en X.

Si f es un función escalarmente Σ–medible, en virtud del teorema de Edgar es medible respecto a la σ–álgebra de Baire $B_a(X_\sigma)$ por lo que sobre dicha σ-álgebra podemos considerar la medida imagen μf^{-1}. En los resultados que siguen daremos condiciones suficientes en términos de esta medida imagen para que el recorrido de m_f sea relativamente compacto.

7. *Teorema.*– Si X es un espacio localmente convexo casi–completo y $f: S \to X$ es una función μ – integrable Pettis que cumple:

Para cada $p \in P(X)$ toda sucesión x'_n en V_p° posee una subsucesión convergente en casi todo punto respecto a la medida μf^{-1} (7.1)

Entonces $m_f(\Sigma)$ es relativamente compacto.

Demostración.– En virtud del teorema 6 bastará probar que para cada $A \in \Sigma^*$ y cada $p \in P(X)$ la familia de funciones $\{<x', f> : x' \in V_p^\circ\}$ es relativamente compacta en $L^1(\mu_A)$. La condición (7.1) implica que cualquier sucesión x'_n en V_p° posee una subsucesión y'_n que converge en casi todo punto con respecto a la medida imagen $\mu_A f^{-1}$. Si y' es un punto de aglomeración de y'_n para la topologia $\sigma(X', X)$ se tiene que $<y'_n, f>$ converge hacia $<y', f>$ en casi todo un punto (μ_A). Como esta sucesión está acotada en $L^1(\mu_A)$ en virtud de (2.1) y es uniforme integrable en virtud de (2.3), aplicando el teorema de Vitali se deduce que es convergente, en la norma de $L^1(\mu_A)$, hacia $<y', f>$.

Diremos que la medida imagen μf^{-1} está soportada por un subconjunto $M \subset X$ si para cada $A \in B_a(X_\sigma)$ disjunto con M se cumple $\mu f^{-1}(A) = 0$.

8. *Teorema.*– Sea X un espacio localmente convexo casi-complejo y $f: S \to X$ una función μ–integrable Pettis. Si μf^{-1} está soportada por un subespacio cerrado que está generado por un conjunto débilmente σ–compacto, entonces $m_f(\Sigma)$ es relativamente compacto.

Demostración.– Si X_0 es un subespacio cerrado de X generado por un conjunto débilmente σ –compacto, es fácil ver que es la adherenecia de un conjunto débilmente σ–compacto, y en consecuencia el espacio $C(X_0)$, de las funciones reales continuas sobre X_0, es angélico para la topología de la convergencia puntual [13]. Si suponemos que μf^{-1} esta soportada por X_0 y x'_n es una sucesión en V_p°, existirá una subsucesión y'_n convergente puntualmente sobre X_0 hacia algún $x' \in V_p^\circ$. El conjunto E de los puntos donde y'_n converge hacia x' es un conjunto de $B_a(X_\sigma)$ que contienen a X_0. Por consiguiente $\mu f^{-1}(X - E) = 0$, es decir y'_n converge hacia x' en casi todo punto respecto a μf^{-1}. Aplicando el teorema 7 se obtiene el resultado.

Como corolario de este teorema se obtiene que si X es un espacio localmente convexo generado por un conjunto débilmente σ–compacto (en particular si X es separable o débilmente compacto generado) el recorrido de la integral indefinida de cualquier función μ–integrable Pettis $f: S \to X$ es siempre relativamente compacto.

Recordemos que un espacio de medida (S, Σ, μ) se dice que es perfecto si para cada conjunto $A \in \Sigma^*$ cada función Σ–medible $f: S \to \mathbb{R}$ y cada conjunto $F \subset \mathbb{R}$ con $f^{-1}(F) \in \Sigma$ se cumple que existe un conjunto de Borel

$B \subset F$ verificando $\mu(A \cap f^{-1}(F)) = \mu(A \cap f^{-1}(B))$. Es fácil comprobar que si (S, Σ, μ) es un espacio de medida perfecto y $A \in \Sigma^*$ entonces el espacio de medida inducido en A es perfecto. La versión del siguiente teorema para el caso particular de medidas finitas y espacios de Banach se debe a Stegall [5].

9. *Teorema.*– Si (S, Σ, μ) es perfecto, X un espacio localmente convexo casi completo y $f:S \to X$ es μ–integrable Pettis entonces $m_f(\Sigma)$ es relativamente compacto.

Demostración.– Comprobaremos que se verifican las condiciones de teorema 6. Si $A \in \Sigma^*$ sea μ_A la medida perfecta que μ induce en A. Su medida imagen $\mu_A f^{-1}$ también es perfecta [5]. Si $p \in P(X)$ y x'_n es una sucesión en V_p°, un teorema de Fremlin [4] permite asegurar la existencia de una subsucesión y'_n que converge en casi todo punto con respecto a la medida perfecta $\mu_A f^{-1}$. Procediendo como en la prueba del teorema 7 se obtiene que la familia $\{\langle x', f\rangle : x' \in V_p^\circ\}$ es relativamente compacta en $L^1(\mu_A)$.

10. *Corolario.*– Sea X un espacio localmente convexo casi completo y $f:S \to X$ una función μ–integrable Pettis cuya medida imagen μf^{-1} es perfecta. Entonces $m_f(\Sigma)$ es relativamente compacto.

Demostración.– Sea $\Sigma_0 = \{ f^{-1}(A) : A \in B_a(X_\sigma)\}$. Aplicando el teorema anterior a la identidad que es μf^{-1}–integrable Pettis, se deduce que

$m_f(\Sigma_0) = \left\{\int_A x \, d(\mu f^{-1})(x) : A \in B_a(X_\sigma)\right\}$ es relativamente compacto.

Aplicando la proposición 3 se deduce que $m_f(\Sigma)$ también es relativamente compacto.

Recordemos que una medida positiva finita ν sobre $B_a(X_\sigma)$ se dice que es τ –aditiva, si para cada red decreciente hacia cero de funciones continuas acotadas $g_j : X_\sigma \to \mathbb{R}$, se cumple $\int g_j \, d\nu \to 0$. Es bien conocido que entonces ν se puede extender a una medida sobre la σ–álgebra de Borel $\mathrm{Bo}(X_\sigma)$, [7], y que entonces existe el soporte de ν ($T = \text{sop } \nu$, dado por la intersección de todos los conjunto cerrados $F \subset X_\sigma$ tales que $\mu(F) = \nu(X)$, siendo $\nu(T) = \nu(X)$).

11. *Teorema.*– Sea (S, Σ, μ) un espacio de medida finito, X un espacio localmente convexo casi completo y $f:S \to X$ una función escalarmente Σ–medible cuya medida imagen μf^{-1} es τ–aditiva.

Si f es acotada, es μ–integrable Pettis. Si f es μ–integrable Pettis entonces $m_f(\Sigma)$ es relativamente compacto.

Demostración.– Sea λ la medida de Borel que se obtiene al extender la medida imagen μf^{-1} a la σ–álgebra $Bo(X_\sigma)$ y $T = \text{sop } \lambda$. Es bien sabido [7] que si G es un abierto en X_σ entonces $\lambda(G) = \sup\{\lambda(Z): G \supset Z \in \mathfrak{Z}\}$, donde $\mathfrak{Z}$ es la familia de los ceros de funciones reales débilmente continuas. De aquí se deduce que si $G = X - \overline{co}\,(f(S))$ se cumple $\lambda(G) = 0$. Por consiguiente T es un conjunto $\sigma(X, X')$–cerrado contenido en $\overline{co}((f(S))$.

Designemos por $\widehat{x}'$ la restricción de x' a T y sea $H_p = \{\widehat{x}': x' \in V_p^\circ\}$. H_p es un conjunto convexo y compacto para la topología de la convergencia puntual sobre T. Sea λ_T la medida de Borel que λ induce en T. Como T es el soporte de λ se deduce que si $\widehat{x}'$, $\widehat{y}'$ son dos funciones de H_p que coinciden en casi todo punto respecto de λ_T entonces $\widehat{x}' = \widehat{y}'$. Aplicando un teorema de Ionescu–Tulcea [6] se obtiene que para cada $p \in P(X)$ H_p es metrizable para la topología de la convergencia puntual. De aquí se deduce fácilmente que se cumple la condición (7.1). En efecto cada sucesión x'_n en V_p° posee una subsucesión que converge en cada punto de T, y si B es el conjunto de Baire formado por los puntos donde esta subsucesión es convergente, se tendrá que $T \subset B$ y que $\mu f^{-1}(X - B) = 0$. Aplicando el teorema 7 se obtiene que $m_f(\Sigma)$ es relativamente compacto si f es μ–integrable Pettis.

Probaremos a continuación que si f es acotada entonces es μ–integrable Pettis. Puesto que $T \subset co(f(S))$, H_p es un conjunto de funciones uniformemente acotado. Teniendo en cuenta que H_p es metrizable para la topología de la convergencia puntual y utilizando el teorema de la convergencia dominada para la medida λ_T se obtiene que la aplicación $V_p^\circ \to L^1(\lambda_T)$ dada por $x' \to \widehat{x}'$ es $\sigma(X', X) - \|\ \|_1$ continua.

Si x'_j es una red en V_p°, $\sigma(X', X)$ convergente hacia $x' \in V_p^\circ$ se tiene:

$$\int_S |\langle x'_j - x', f\rangle|\, d\mu = \int_X |x'_j - x'|\, d\lambda = \|\widehat{x}'_j - \widehat{x}'\|_1 \to 0$$

Aplicando el teorema 5 se obtiene que f es integrable Pettis.

Como consecuencia de este teorema se obtiene una mejora de un resultado de Khurana [5] sobre existencia de baricentros:

Si (X, γ) es un espacio localmente convexo casi completo para su topología de Mackey y A es un subconjunto de X acotado cerrado y convexo, dotado de la topología inducida por $\sigma(X', X)$. Aplicando el teorema anterior a la inclusión $i: A \to X$ se obtiene que cada medida finita τ–aditiva sobre $(B_a(A))$ tiene baricentro. (Khurana considera A con la topología inducida por γ, y X γ–completo.)

12. *Corolario.* Si X es casi–completo, Lindelöf para su topología débil, y (S, Σ, μ) es un espacio de medida finito, cada función escalarmente Σ–medible acotada f es μ–integrable Pettis, y para toda función μ–integrable Pettis $m_f(\Sigma)$ es relativamente compacto.

Demostración.– Inmediata, pues toda medida finita sobre $B_a(X_\sigma)$ es τ–aditiva. Véase [16].

Diremos que una medida finita ν sobre $B_a(X_\sigma)$ es z-aditiva si su integral es un operador contínuo sobre cada $H \in \mathfrak{K}$, donde $\mathfrak{K}$ es la familia de los subconjuntos de $C_b(X_\sigma)$ uniformemente acotados y relativamente compactos para la topología de la convergencia puntual, (denotamos por $C_b(X_\sigma)$ el espacio de la fuciones reales acotadas débilmente continuas definidas sobre X). Esta clase de medidas ha sido introducida por Wheeler en [17], donde prueba que bajo el axioma de Martín toda medida τ-aditiva es z–aditiva.

13. *Teorema.* Sea (S, Σ, μ) un espacio de medida finito y X un espacio localmente convexo casi–completo. Si $f:S \to X$ es una función escalarmente Σ–medible acotada y su medida imagen μf^{-1} es z–aditiva, entonces f es μ–integrable Pettis y $m_f(\Sigma)$ es relativamente compacto.

Demostración.– Dada $p \in P(X)$ sea x'_j una red en V_p° débilmente convergente hacia x'. Como f es acotada existe un número positivo n tal que $|<y', f(s)>| < n$ para cada $s \in S$ y cada $y' \in V_p^\circ$. Sea $\tau_n(x')$ la función que coincide con x' sobre el conjunto$\{x: |x'(x)| \leqslant n\}$, y que vale n (resp. $-n$) en los puntos x donde $x'(x) > n$ (resp. $x'(x) < -n$). Sea $H = \{|\tau_n(y') - \tau_n(x')|: y' \in V_p^\circ\}$.Obviamente H es un subconjunto de $C_b(X)$ uniformemente acotado y compacto para la topología de la convergencia puntual. Como μf^{-1} es z–aditiva y $h_j = |\tau_n(x'_j) - \tau_n(x')|$ es una red en H que converge puntualmente a cero se tiene:

$$\int_S |<x'_j - x', f>| \, d\mu = \int_S h_j \circ f \, d\mu = \int_X h_j \, d\mu f^{-1} \to 0$$

Aplicando el teorema 5 se obtiene el resultado.

Wheeler en [17] conjetura que una función acotada escalarmente Σ–medible con los valores en un espacio de Banach X es μ–integrable Pettis si y sólo si su medida imagen μf^{-1} es z–aditiva. Fremlin y Talagrand en [5] (ejemplo 2.*D.*) construyen un espacio de medida finito y una función f con valores en el espacio de Banach $\ell^\infty(N)$, acotada y μ–integrable Pettis cuya integral indefinida no tiene recorrido relativamente compacto. Este ejemplo y el teorema anterior ponen de manifiesto que la conjetura de Wheeler no se cumple en general. Esta conjetura se puede reformular en los siguientes términos: ¿Será cierto que si x es un espacio de Banach y $f:S \to X$ es una función acotada μ–integrable Pettis con $m_f(\Sigma)$ relativamente compacto entonces la medida imagen μf^{-1} es z–aditiva?. También se puede plantear el problema de caracterizar los espacios de Banach para los que la integrabilidad Pettis de toda función acotada escalarmente medible equivale a que su medida imagen sea z–aditiva.

BIBLIOGRAFIA

[1] DIESTEL, J. UHL J. J.: Vector Measures. Math. Surv. 15. *Amer. Math. Soc.* (1977).

[2] EDGAR, G. A : Measurability in a Banach space. *Ind. Univ. Math. J.* 26. (1977). 663-677.

[3] EDGAR, G. A.: Measurability in a Banach space II. Ind. Univ. Math. J. 28. (1979). 559-579.

[4] FREMLINN. D. H.. Pointwise compact sets of measurable functions. Manuscripta Mathematica. 15. (1975). 219-242.

]5] FREMLIN, D. H., TALAGRAND, M.: A descomposition theorem for additive set-functions, with applications to Pettis Integrals and ergodic means. *Math. Z.* 168. (1979). 117-142.

[6] IONESCU TULCEA, A.: On pointwise convergence, compactness, and equicontinuity. II *Adv. Math.* 12(1974). 171-177.

[7] KNOWLES., J. D.: Measures on topological spaces. *Proc. London Math. Soc.* (3) 17. (1967). 136-156.

[8] KOTHE, G.: Topological Vector Spaces I. Springer-Verlag. New York (1969).

[9] KHURANA, S. S.: Characterization of extreme points. *J. LondonMath.Soc.* (2)5. (1972). 102-104.

[10] KHURANA, S. S.: Pointwise compactness and measurability. *Pac. J. Math.* (2) 83. (1979). 387-391.

[11] LEWIS, D. R.: Integration with respect to vector measures. *Pac. J. Math.* 133. (1970). 157-165.

[12] MUSIAL. K.:Martingales of Pettis integrable functions. *Lec. NotesinMath.* 794. Springer-Verlag (1980).

[13] PRYCE, J. D.: A device of R. J. Whitley's applied to poinwise compactness in spaces of continuous functions. *Proc. London Math. Soc* (3) 23. (1971). 532-546.

[14] THOMAS, G. E. F.: Integration of functions with values in locally convex Suslin spaces. *Trans. Amer. Math. Soc.* 212. (1975). 61-81.

[15] TWEDDLE, I.: Weak compactness in locally convex spaces. *Glasgow. Math. Soc. J.* 9. (1968). 123-127.

[16] VARADARAJAN, V. H.: Measures on topological spaces. *Amer. Math. Soc. Transl.* (2). 48. (1965). 161-228.

[17] WHEELER. R. F.: Weak and pointwise compactness. *Trans. Amer. Math. Soc.* (2) 266. (1981) 515-530.

Departamento de Teoría de Funciones
Facultad de Ciencias
Universidad de Murcia