DEPARTAMENTO DE MATEMATICAS

FUNCIONES SEPARADAMENTE CONTINUAS

Carlos Martínez Sánchez

P. C.

Trabajo de investigación realizado en el Departamento de Matemáticas para el programa de doctorado "ANALISIS FUNCIONAL", bajo la dirección del Doctor D.GABRIEL VERA BOTI y que se presenta como Tesina de Licenciatura.

Murcia, Junio de 1992.

FACULTAD DE MATEMATICAS

UNIVERSIDAD DE MURCIA

INDICE

AGRADECIMIENTOS

Quisiera agradecer al profesor D.Gabriel Vera Botí la posibilidad que me ha ofrecido de poder realizar este trabajo así como la paciencia que ha tenido conmigo.

A Inma.

0 INTRODUCCION

La consideración de aplicaciones separadamente continuas y el problema de encontrar puntos de continuidad conjunta se remontan, al menos, a Baire [Ba] en el año 1899, demostrando que dada una aplicación separadamente continua $f : [0,1]x[0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ existe un conjunto residual de lineas paralelas a los ejes constituidas por puntos de continuidad conjunta. Trabajos posteriores fueron en la dirección de extender este tipo de resultados a otros espacios más generales, pero en todos los casos la aplicación f debía estar definida sobre un producto en el que, al menos, uno de los factores fuese un espacio metrizable o verificase alguna condición de numerabilidad, lo que era bastante restrictivo a la hora de las posibles aplicáciones.

En 1974 I.Namioka [Na1], en un excelente artículo lleno además de muchas e interesantes aplicaciones, demuestra el siguiente resultado:

Supongamos que X es un espacio Fuertemente Numerablemente Completo y Regular, Y un espacio localmente compacto y σ-compacto y Z un espacio métrico. Entonces, para cualquier aplicación separadamente continua $f : XxY \longrightarrow Z$ existe un subconjunto $X_o \subseteq X$, que es un $\mathcal{G}_\delta$-denso, de modo que f es conjuntamente continua en cada punto de $X_o xY$.

La publicación de este artículo, es además la causa del renacimiento de los problemas relativos a continuidad separada y conjunta y hace que muchos matemáticos se interesen por el estudio de estas cuestiones, no en vano Namioka, en una observación a su teorema, ya cuestionaba si el resultado se podría extender a cualquier espacio de Baire X.

El siguiente trabajo relevante en esta dirección se debe a J.P.R.Christensen [Ch1] en el año 1981 que extiende el resultado de Namioka a una clase más amplia de espacios que vienen definidos en términos de juegos topológicos. Además, en un artículo posterior [Ch2] aparece, por vez primera, el término de espacio de Namioka.

Siguiendo una terminología introducida por G.Debs [Db2], dados dos espacios topológicos X e Y consideramos la siguiente propiedad:

$\mathcal{N}(X,Y)$: Para cualquier aplicación separadamente continua $f : X \times Y \longrightarrow [-1,1]$ existe un subconjunto $X_0 \subseteq X$, que es un $\mathcal{G}_\delta$-denso, de modo que f es conjuntamente continua en cada punto de $X_0 \times Y$.

Se dice que un espacio topológico X es un *espacio de Namioka* (o que pertenece a la clase $\mathcal{N}$) si se verifica la propiedad $\mathcal{N}(X,Y)$ para cualquier espacio compacto Y.

Trabajos posteriores generalizaron el juego topológico introducido por Christensen, lo que permitió obtener nuevas clases de espacios de Namioka; así J.Saint-Raymond [Sr], demuestra que en la clase de los espacios métricos los espacios de Baire y de Namioka coinciden; M.Talagrand [Ta1] prueba que los espacios de Baire que contienen un K_σ-denso son espacios de Namioka y G.Debs [Db2] y [Db4], que un espacio de Baire que contiene un subconjunto K-analítico denso también es un espacio de Namioka.

En una dirección un poco distinta también han sido objeto de estudio aquellos espacios topológicos Y que verifican la condición $\mathcal{N}(X,Y)$ para cualquier espacio de Baire X. En este caso, diremos que el espacio Y es un *espacio de co-Namioka* (o que pertenece a la clase $\mathcal{N}^*$). En particular, se han estudiado los espacios compactos que se encuentran en esta clase. Destacan a este respecto, los trabajos de G.Debs [Db2] que prueba que los compactos de Corson son espacios de Co-Namioka; Deville y Godefroy [DG] que extienden el resultado a los compactos de Valdivia; y R.Deville [D2] que además, demuestra que los compactos de ordinales, así como los compactos dispersos K tales que $K^{(\omega_1)} = \emptyset$ también se encuentran en la clase $\mathcal{N}^*$.

Por otra parte, el tratamiento de cuestiones relativas a la medibilidad de funciones separadamente continuas definidas en un espacio producto XxY (Ver [Mo], [Ru] y [V1]) ha motivado el estudio de cuando estas funciones se encuentran en la primera clase de Baire (e.d. son límite puntual de una sucesión de funciones continuas). En [Ru] se demuestra que si X o Y es un espacio metrizable entonces toda aplicación separadamente continua $f : X\times Y \longrightarrow \mathbb{R}$ pertenece a la primera clase de Baire (2.10) y en consecuencia, si los subconjuntos puntualmente compactos de C(X) son metrizables (diremos entonces que X es un *espacio con la propiedad P.C.M.*) toda función separadamente continua $f : X\times Y \longrightarrow \mathbb{R}$ es de la primera clase de Baire siempre que el espacio Y sea compacto (2.13). El espacio X tiene la propiedad P.C.M., por ejemplo, cuando es el soporte de una medida de Borel y tiene un subconjunto σ-compacto denso. G.Vera ha extendido estos resultados [V1] y motivado por los trabajos a este respecto de W.Moran [Mo] introduce el término de espacio de Moran y estudia su relación con los espacios de Namioka.

Diremos que un espacio topológico X es un *espacio de Moran* si para todo espacio compacto Y tenemos que cualquier aplicación separadamente continua $f : X \times Y \longrightarrow \mathbb{R}$ es de la primera clase de Baire (2.13).

En lo que sigue representaremos por $C_p(K)$ al espacio de las funciones continuas sobre K dotado de la topología de la convergencia puntual (t_p).

De manera general a partir de una función $f : X \times Y \longrightarrow \mathbb{R}$ continua en la segunda variable podemos construir una nueva función $F : X \longrightarrow C_p(Y)$ definida como $F(x) = f_x$. Recíprocamente dada una función $F : X \longrightarrow C_p(Y)$ se puede obtener otra función $f : X \times Y \longrightarrow \mathbb{R}$ continua en la segunda variable definida como $f(x,y) = F(x)(y)$. Es claro que f es separadamente continua si y sólo si F es t_p-continua. Además, cuando Y es un compacto, F es continua en la norma del supremo de C(Y) si y sólo si f es continua (2.1). Así la condición $\mathcal{N}(X,Y)$, cuando Y es compacto, se puede enunciar del siguiente modo:

$\mathcal{N}(X,Y)$: Para cada función t_p-continua y acotada $F : X \longrightarrow C_p(Y)$ existe un subconjunto $X_0 \subseteq X$ que es un $\mathcal{G}_\delta$-denso y tal que F es $\| \ \|$-continua en cada punto de X_0.

De este modo dedicamos el primer capítulo al estudio de ciertas propiedades estructurales de las aplicaciones $F : X \longrightarrow E$, (con (E,d) un espacio métrico) que en presencia de la propiedad de Baire en X permitan asegurar que el conjunto de puntos de continuidad de F es un $\mathcal{G}_\delta$-denso. Estas propiedades se recogen con las definiciones de aplicaciones *huskables*, *σ-huskables*, *fragmentables*, y *σ-fragmentables* (1.8). Nociones que se dan como extensiones naturales, al caso de funciones, de los conceptos análogos, correspondientes al caso de la aplicación identidad $i : (A,\tau) \longrightarrow (A,\| \|)$ donde A es un subconjunto de un espacio de Banach y τ una topología más gruesa que la de la norma, introducidos en [EW] y [JR], y que ya en [JOPV] se utilizan en este sentido más amplio.

Las consideraciones realizadas anteriormente junto al hecho de que, cuando X es un espacio de Baire, es equivalente que una aplicación $F : X \longrightarrow E$, con (E,d) un espacio métrico, sea *huskable* y que Cont(F), conjunto de los puntos de continuidad de F, sea un $\mathcal{G}_\delta$-denso (1.1) ponen de manifiesto el interés que tiene el estudio de estas aplicaciones para el tratamiento de los problemas que pretendemos desarrollar.

Consideramos también topologias τ en (E,d) tales que la distancia d es semicontinua inferiormente respecto a la topología τ (d es τ-s.i.) y de modo que F sea τ-continua, pues esta es la situación que más nos va a interesar ($E = C(K)$, d = la generada por $\| \|_\infty$, $\tau = t_p$).

Basándonos en un lema de J.Bourgain [B] recogemos una caracterización de las aplicaciones *fragmentables* en el caso de que X sea un espacio métrico (1.3 y 1.4). Probamos que los conceptos de aplicación *huskable* y *fragmentable* se pueden reducir al caso numerable y separable respectivamente cuando $F : X \longrightarrow (E,d)$ es τ-continua, el espacio X tiene la propiedad de Kaplansky y d es τ-s.i. (1.6 y 1.7), generalizando una proposición de [EW]. En el teorema 1.9 establecemos las principales relaciones entre estos tipos de aplicaciones y las de ellas con el problema de encontrar conjuntos "grandes" de puntos de continuidad. Recogemos varios ejemplos de aplicaciones *σ-fragmentables* que posteriormente serán de interés, como son las aplicaciones de la primera clase de Baire y las débilmente de la primera clase de Baire (Ver 1.10).

En este trabajo hemos pretendido hacer un estudio detallado de las clases de los espacios Namioka y Co-Namioka, recogiendo los resultados hasta ahora existentes y tratándolos de un modo unificado y distinto mediante la utilización de la noción de *σ-fragmentabilidad* estudiada en el primer capítulo. Esto nos ha permitido dar nuevas demostraciones y extender algunos resultados. Procediendo de esta forma hacemos un uso escaso de los juegos topológicos que ha sido la herramienta utilizada por la mayor parte de los autores en el tratamiento de este tipo de problemas.

En el capítulo segundo introducimos las clases $\mathcal{N}$ y $\mathcal{N}^*$ y obtenemos los primeros ejemplos de espacios de estas clases; los espacios de Baire separables (2.7), los espacios hereditariamente Baire que contienen un subconjunto denso con la propiedad de Kaplansky (clase que contiene a la de los métricos completos) (2.8) y los espacios localmente compactos (2.9) están en la clase $\mathcal{N}$, (e.d. son espacios de Namioka) mientras que los compactos metrizables (2.7) y los espacios que son segundo axioma de numerabilidad (2.15) están en la clase $\mathcal{N}^*$ (e.d. son espacios de Co-Namioka).

Introducimos también la clase $\mathcal{M}$ de los espacios de Moran, y la noción de *σ-fragmentabilidad* junto al teorema de la convergencia dominada de Lebesgue nos permite probar que los espacios de Moran que son de Baire son espacios de Namioka (2.14). Con esto se da respuesta afirmativa a una cuestión planteada por

G.Vera en [V1]. La clase $\mathcal{M}$ contiene a los espacios metrizables y como ya hemos indicado a los espacios con la propiedad P.C.M. (en particular a los espacios separables) (2.13). En 7.1.8 recogemos algunos ejemplos más de espacios con la propiedad P.C.M.

Continuamos en este segundo capítulo mostrando algunas propiedades estructurales relativas a las clases $\mathcal{N}$ y $\mathcal{N}^*$, así, en la definición de espacio de Namioka, como espacio de llegada de las aplicaciones separadamente continuas es equivalente poner el intervalo cerrado [-1,1] o cualquier espacio métrico (2.18), aunque no parece que esta condición pueda rebajarse y seguir obteniendo buenos resultados (2.20). No podemos, sin embargo, obtener un resultado semejante para los espacios de Co-Namioka, aunque si una respuesta parcial en este sentido (2.19). Recientemente I.Namioka y R.Pol han probado la validez del resultado si nos restringimos a los compactos de la clase $\mathcal{N}^*$ [NP]. Si los compactos de $C_p(X)$ son de la clase $\mathcal{N}^*$ entonces si el espacio X es de Baire se encuentra en la clase $\mathcal{N}$ (2.16) lo que nos establece una interesante relación entre las clases $\mathcal{N}$ y $\mathcal{N}^*$.

La clase $\mathcal{N}$ se relaciona directamente con la de los espacios de Baire, pues si X es un espacio de Namioka completamente regular entonces es un espacio de Baire (2.23) y la hipótesis de que X sea completamente regular no se puede suprimir pues el ejemplo 2.24 proporciona un espacio de Namioka que no es de Baire. En 4.3 recogemos un ejemplo de M.Talagrand [Ta1] que nos proporciona un espacio de Baire que no es de Namioka. Concluimos el tema obteniendo dos nuevos ejemplos de espacios de Namioka, los espacios de Prohorov (Ver 2.25) y la bola unidad cerrada con la topología débil de un espacio de Banach con norma Kadec (2.26).

En el capítulo tres obtenemos algunas consecuencias relativas a los espacios completamente regulares X que tienen la propiedad de que los subconjuntos puntualmente compactos de C(X) son metrizables (P.C.M.). Resultados previos han puesto de manifiesto como interviene esta propiedad en relación con los problemas que estamos considerando. Recogemos resultados de Moran [Mo], Rudin [Ru] y Vera [V1]. Introducimos, también, las propiedades C.C.C. y D.C.C.C. estableciendo diversas relaciones entre espacios de Moran y espacios de Namioka que gozan de estas propiedades. Terminamos con un resultado de tipo Namioka, que mejora uno de D.Helmer [Hr] en el que se afirma que un espacio de Baire $X = \overline{\cup X_n}$ donde los X_n son de Namioka y verifican la C.C.C., es un espacio de Namioka (3.10).

El capítulo cuatro está dedicado al estudio de los espacios de la clase $\mathcal{N}^*$ y más concretamente de los espacios compactos que se encuentran en ella. Hemos visto que los compactos metrizables y más generalmente los espacios con una base numerable en su topología se encuentran en la clase $\mathcal{N}^*$, sin embargo, las clases de los espacios métricos completos, localmente compactos, separables y Lindelöf no se encuentran incluidas en la clase $\mathcal{N}^*$ como lo demuestran los ejemplos 4.1 y 4.2 debidos a J.P.Lee y Z.Piotrowski [LP]. Tampoco lo está la clase de los compactos como muestra el ejemplo 4.3 debido a M.Talagrand [Ta1], es más, ni siquiera lo está la de los compactos separables (4.5). Trabajando ahora en sentido positivo, introducimos una nueva clase de compactos (clase $\mathfrak{C}$) (4.6) que engloba a los compactos de Valdivia (4.10) y a los compactos de ordinales (4.11) y probamos que esta nueva clase se encuentra incluida en $\mathcal{N}^*$ (4.8) con lo que obtenemos una extensión unificada de estas dos clases de compactos. No sabemos, si los compactos dispersos K tales que $K^{(\omega_1)} = \emptyset$ también se encuentran incluidos en esta clase $\mathcal{C}$, por lo que recogemos una prueba de R.Deville [D2] del hecho de que estos compactos se encuentran en $\mathcal{N}^*$ (4.15), asi como un ejemplo de R.Haydon [H1] en el que prueba que en este sentido no se puede obtener un mejor resultado, pues construye un compacto disperso tal que $K^{(\omega_1)}$ se reduce a un punto y el compacto no se encuentra en la clase $\mathcal{N}^*$ (4.16).

En el capítulo cinco estudiamos nuevas clases de espacios de Namioka para lo que necesitamos un importante resultado de J.P.R.Christensen [Ch1] en el que se prueba que los espacios "favorables" para un juego topológico que él mismo introduce (espacios α-σ-favorables) son espacios de Namioka (5.2). Esta clase de espacios, que son de Baire, contiene a los espacios Fuertemente Numerablemente Completos y Regulares (5.1) y en consecuencia a los espacios Čech-completos. Apoyandonos en este hecho y como consecuencia de los resultados del primer capítulo damos una nueva demostración de un teorema de G.Debs (5.5) del que deducimos que los espacios Čech-analíticos de Baire son espacios de Namioka (5.6). De todos modos, la recta de Sorgenfrey es un espacio topológico de Baire que no es (α-σ)-favorable y tampoco es un espacio Čech-analítico y es un ejemplo de un espacio de Namioka (5.4). En 5.3 probamos que los espacios casi-Čech-completos constituyen otro ejemplo de espacios de Namioka, clase estrictamente más amplia que la de los Čech-completos (ver 7.2.3).

Después del trabajo de Christensen distintos autores ampliaron la clase de los espacios de Baire que eran de Namioka, utilizando nuevos juegos topológicos "menos restrictivos" que el de éste. Estos fundamentalmente fueron, el introducido por Deville y Talagrand ([D1], [Ta1]) y más generalmente el de G.Debs [Db3]. Como consecuencia de este último se probó que los espacios K-analíticos (resp. numerablemente determinados) de Baire son espacios de Namioka. Este resultado lo podemos obtener como consecuencia del hecho de que estas clases de espacios se incluyen en la de los Web-compactos [O], y de que si X es un espacio Web-compacto los t_p-compactos de C(X) son compactos de Gul'ko [CO] y por lo tanto se encuentran en la clase $\mathcal{N}^*$ (5.7).

La utilización que a lo largo del trabajo hacemos de las aplicaciones *σ-fragmentables* para el estudio de las clases $\mathcal{N}$ y $\mathcal{N}^*$ nos sugiere la consideración de dos nuevas clases de espacios, las clases $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$. Diremos que un espacio topológico X pertenece a la clase $\mathcal{A}$ si para cualquier compacto K se tiene que cualquier aplicación t_p-continua $F : X \longrightarrow C_p(K)$ es *σ-fragmentable*, y diremos que un compacto K pertenece a la clase $\mathcal{B}$ si la aplicación identidad $i : (C(K),t_p) \longrightarrow (C(K),\|\ \|)$ es *σ-fragmentable*. Si un espacio X es de Baire y pertenece a la clase $\mathcal{A}$ entonces será un espacio de Namioka, y los compactos de la clase $\mathcal{B}$ son de Co-Namioka. En el capítulo seis estudiamos detenidamente las clases $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ lo que además nos va a permitir obtener nuevos resultados sobre continuidad conjunta. De las demostraciones de los correspondientes resultados se deduce que los espacios separables (2.7), los hereditariamente Baire con la propiedad de Kaplansky (2.8), los compactos (2.9) y los espacios metrizables y más generalmente los espacios de Moran (2.14) se encuentran en la clase $\mathcal{A}$. Después de todo esto queda claro que, cuando nos restringimos a espacios completamente regulares, esta clase es una extensión de la clase $\mathcal{N}$. En la primera parte del capítulo adaptamos al caso de funciones un importamte y laborioso teorema que aparece en [JNR1] para el caso de la aplicación identidad y de este modo probamos que si X es un espacio Čech-analítico, $F : X \longrightarrow (E,\eta)$ es una aplicación continua y d una métrica en E que es η-s.i. entonces es equivalente que F sea *σ-fragmentable* a que $F|_K$ sea *huskable* para cada espacio compacto $K \subseteq X$ (6.5). A partir de este resultado podemos demostrar que la clase de los espacios Čech-analíticos se encuentra incluida en la clase $\mathcal{A}$, y además nos permite mejorar un resultado de tipo Namioka de G.Debs [Db4] como consecuencia del cual obtenemos que los espacios X que contienen una parte K-analítica densa se encuentran en la clase $\mathcal{A}$ (6.11 y 6.13). Desde luego si X además es un espacio de Baire obtenemos otra demostración del resultado de G.Debs.

En otra dirección, a partir de un teorema de [JNR2] se obtiene que los compactos K, tales que en C(K) existe una norma equivalente a la del supremo, de modo que sobre la esfera unidad coinciden la topología inducida por dicha norma y la inducida por la topología de la convergencia puntual, se encuentran incluidos en la clase $\mathcal{B}$ (6.7). En esta situación se encuentran los compactos de Valdivia [DG] y los compactos dispersos tales que $K^{(\omega_1)} = \emptyset$ [HR]. Los espacios compactos tales que $C_p(K)$ sea Čech-analítico también se encuentran incluidos en la clase [JNR2], sin embargo la clase $\mathcal{B}$ se encuentra estrictamente incluida en la de los compactos de $\mathcal{N}^*$, pues recientemente I.Namioka y R.Pol [NP], asumiendo una hipótesis adicional sobre el intervalo [0,1], independiente de los axiomas ZFC de la teoría de conjuntos, han encontrado un espacio compacto de la clase $\mathcal{N}^*$ que no se encuentra en la clase $\mathcal{B}$.

En el capítulo siete recogemos algunas aplicaciones de estos resultados. El apartado 7.1 lo dedicamos al estudio de las funciones de la primera clase de Baire, esto es, aplicaciones $F : X \longrightarrow (E,d)$ para las que existe una sucesión de funciones continuas $F_n : X \longrightarrow (E,d)$ verificando $d(F_n(x),F(x)) \longrightarrow 0$ para todo $x \in X$ ($F \in B_1(X,E)$). Cuando X es un espacio perfectamente paracompacto es equivalente que F sea *σ-fragmentable* y que $F \in B1(X,E)$ (7.1.3) [V2]. Este importante teorema, que relaciona la *σ-fragmentabilidad* con las funciones de la primera clase de Baire, nos permite obtener condiciones suficientes para que una función débilmente continua $F : X \longrightarrow (E,d)$ sea de la primera clase de Baire. En este caso nos encontramos cuando X es un espacio métrico (7.1.4), o bien, cuando F(X) es un subconjunto separable de E (7.1.5). En la proposición 7.1.6 recogemos muchos más ejemplos de esta situación mientras que en 7.1.7 obtenemos funciones de la primera clase de Baire a partir de funciones t_p-continuas $F : X \longrightarrow (C_p(K))$ donde K es un espacio compacto. El subconjunto F(X) es $\| \ \|$-separable en E cuando el espacio X tiene la propiedad P.C.M. (recogemos varios ejemplos de espacios con esta propiedad) y cuando el espacio X es de Baire con la propiedad C.C.C. y además E es un espacio de Banach *σ-fragmentable* (7.1.8).

En 7.2 estudiamos los subconjuntos de Namioka en un espacio de Banach con su topología débil, obteniendo una interesante caracterización de éstos que nos permite extender la proposición 3.10 en [EW]. Así, si A es un subconjunto débil cerrado en un espacio de Banach E, es equivalente que (A,débil) sea un espacio de Namioka, que sea casi-Čech-completo, y que la aplicación identidad $i : (A,\text{débil}) \longrightarrow (A,\| \ \|)$ sea *huskable*; además una condición suficiente para que se verifique lo anterior es que (A,débil) sea hereditariamente Baire (7.2.1).

En 7.3 vemos algunos resultados sobre puntos de continuidad de aplicaciones que toman valores en espacios de Banach sobre los que consideramos distintas topologías. Si X es un espacio de Namioka, $(E,\|\ \|)$ un espacio de Banach y $F : X \longrightarrow (E,\text{débil})$ una aplicación continua entonces existe un subconjunto $\mathcal{G}_\delta$-denso en X de puntos de continuidad de F cuando sobre E consideramos la topología de la norma (7.3.1). Si sobre el espacio E consideramos la topología $\tau = \sigma(E,\text{ext}B(E^*))$ inducida por los puntos extremales de la bola del espacio dual de E, Ch.Stegall demostró que el resultado anterior permanecía válido para cualquier aplicación continua $F : X \longrightarrow (E,\tau)$ siempre que el espacio E fuese Čech-completo [St2]. Recientemente G.Vera lo ha probado en el caso en que X es un espacio métrico de Baire [V2]. En 7.3.6 extendemos el resultado de Stegall a espacios X que sean Čech-analíticos de Baire.

Por último en 7.4 recogemos un teorema clásico de R.Hellis, sobre grupos topológicos, que demostramos con la ayuda de los teoremas de Namioka.

X

1 APLICACIONES FRAGMENTABLES Y σ-FRAGMENTABLES.

En lo que sigue X representará un espacio ∈ topológico Hausdorff y (E,d) un espacio métrico. Si $A \subset X$ entonces $d\text{-diam}(A) = \sup\{ d(x,y);\ x,y \in A \}$ y si $F : X \longrightarrow E$ es una aplicación d-cont(F) representará el conjunto de los puntos de continuidad de dicha aplicación.

Diremos que la aplicación F es *huskable* si para cualquier $\varepsilon > 0$ y cualquier abierto no vacío $V \subset X$ existe otro abierto no vacío $U \subset V$ de modo que $d\text{-diam}(F(U)) < \varepsilon$.

Diremos que la aplicación F es *fragmentable* si para cada $\varepsilon > 0$ y cada conjunto no vacío $C \subset X$ existe un abierto $U \subset X$ de modo que $U \cap C \neq \emptyset$ y $d\text{-diam}(F(C \cap U))<\varepsilon$. Esto es equivalente a que para cada $C \subset X$ (equivalentemente para cada cerrado $C \subset X$), la restricción $F|_C$ es *huskable*. Finalmente diremos que F tiene la propiedad del punto de continuidad (P.C.) si al restringirla a cada cerrado $C \subset X$, $F|_C$ tiene al menos un punto de continuidad.

Después de todo esto es claro que:

F posee P.C. $\Rightarrow$ F es *fragmentable* $\Rightarrow$ F es *huskable*.

Las definiciones de aplicación *huskable* y *fragmentable* son las extensiones naturales, al caso de funciones, de las correspondientes nociones que intervienen en el estudio de propiedades topológicas de los espacios de Banach, y que corresponden al caso particular de la identidad:

$$i : (A,\tau) \longrightarrow (A,\|\ \|)$$

donde A es un subconjunto de un espacio de Banach B y τ es una topología más gruesa que la de la norma (débil, o débil* en el caso de espacios duales). Véase [EW],[Na2],[JR],...

En [JR] se introduce la noción en el contexto de espacio métrico. Los espacios compactos (K,τ) tales que se pueden dotar de una distancia d de modo que la identidad

$$i : (K,\tau) \longrightarrow (K,d)$$

es *fragmentable* desempeñan un papel destacado en la teoría de espacios de Banach (diferenciabilidad de funciones convexas) y son objeto de estudio en investigaciones muy recientes [Na2].

Nótese que si $F : X \longrightarrow E$ es *fragmentable*, entonces la restricción de F a cualquier subconjunto $C \subseteq X$ (con la topología inducida) sigue siendo *fragmentable*. Sin embargo la afirmación análoga para aplicaciones *huskables* no es cierta como se verá más adelante (véase **7.2.3**). Sólamente se puede afirmar que si $C \subseteq X$ es denso y F es *huskable*, entonces $F|_C$ también lo es.

A continuación veremos resultados preliminares relativos a este tipo de aplicaciones.

1.1 Proposición.

Si X es un espacio de Baire y $F : X \longrightarrow E$ son equivalentes:

(a) F es *huskable*

(b) d-cont(F) es un $\mathcal{G}_\delta$-denso.

Demostración:

Es evidente que (b) $\Rightarrow$ (a). Para probar que (a) $\Rightarrow$ (b) observemos que

$$\text{d-cont}(F) = \bigcap \{ O_n(F);\ n \in \mathbb{N} \} \text{ donde}$$

$$O_n(F) = \bigcup \{V \subset X,\ V \text{ abierto y d-diam}(F(V)) < 1/n \}.$$

Es claro que F es *huskable* si y solo si $O_n(F)$ es un abierto denso para todo $n \in \mathbb{N}$; por lo que al ser X un espacio de Baire se tiene que d-cont(F) es un $\mathcal{G}_\delta$-denso.

Recordemos que un espacio de Baire X se dice *hereditariamente Baire* si cada subespacio cerrado es de Baire.

1.2 Corolario:

Si X es hereditariamente Baire dada $F : X \longrightarrow E$ son equivalentes :

(a) F es *fragmentable.*

(b) F tiene la propiedad P.C.

Demostración :

Sabemos que siempre se verifica (b) $\Rightarrow$ (a). Para probar que (a) $\Rightarrow$ (b) basta aplicar la proposición anterior a la restricción de F a cada cerrado, que por hipótesis es un espacio de Baire.

Observación:

Nótese que, de acuerdo con la prueba de la proposición anterior, si X es hereditariamente Baire y $F : X \longrightarrow E$ tiene la propiedad P.C. entonces, para cada cerrado $C \subset X$ el conjunto de los puntos de continuidad de $F|_C$ es un $\mathcal{G}_\delta$-denso, relativo a C.

La siguiente proposición está basada en un lema de J. Bourgain [B].

1.3 Proposición.

Sea X metrizable y $F : X \longrightarrow E$ tal que para cada precompacto numerable $P \subset X$ la restricción $F|_P$ es *huskable.* Entonces F es *huskable.*

Demostración:

En lo que sigue s representa una sucesión finita de ceros y unos, $|s|$ su longitud y $s,0$ y $s,1$ son las sucesiones obtenidas añadiendo un cero o un uno a la sucesión s.

Supongamos que F no es *huskable* entonces existe $\varepsilon > 0$ y un abierto no vacío $W \subset X$ tal que si $U \subset W$ es abierto no vacío se cumple que $d\text{-diam}(F(U)) > \varepsilon$. Fijado un punto $a \in W$ y un $r > 0$ tal que $B(a,r) \subset W$, como $d\text{-diam}(F(B(a,r))) > \varepsilon$, existen x_0, $x_1 \in B(a,r)$ tales que $x_0 = a$ y $d(F(x_0),F(x_1)) > \varepsilon/2$. Tomemos $r_1 < r/2$ tal que $B(x_1,r_1) \subset B(a,r)$. Se repite la construcción con las bolas $B(x_0,r_1)$, $B(x_1,r_1)$ y para $i = 0,1$, y $k = 0,1$ se obtienen bolas $B(x_{ik},r_2) \subset B(x_i,r_1)$, con $x_{i0} = x_i$ y $r_2 < r_1/2$, verificando $d(F(x_{i0}),F(x_{i1})) > \varepsilon/2$ se repite sucesivamente esta construcción y se obtiene un conjunto precompacto numerable $P = \{ x_s ; |s| \geq 1 \}$ y una familia numerable de bolas $\{ B(x_s,r_n); |s|=n \geq 1\}$, tal que para cada $y \in P$ hay una sucesión de bolas en esta familia, centradas en y, cuyos radios tienden hacia cero. Por tanto si V es un abierto que tiene intersección no vacia con P, fijado un punto $y \in P \cap V$, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $B(y,r_n) \subseteq V$, siendo $y = x_s$ para algun s $|s|=n$. Puesto $x_{s,0}$, $x_{s,1}$ pertenecen ambos a $B(y,r_n) \cap P$ se obtiene que $d\text{-diam}(F(V \cap P)) > \varepsilon/2$, es decir $F|_P$ no es *huskable*, en contra de lo que habíamos supuesto.

1.4 Corolario:

Si X es un espacio métrico y $F : X \longrightarrow E$ son equivalentes :

(a) F es *fragmentable* .

(b) Para cada subespacio cerrado separable $Z \subset X$, $F|_Z$ es *fragmentable* .

(c) Para cada precompacto (numerable) $P \subset X$, $F|_P$ es *fragmentable*.

Si X es completo, también es equivalente:

(d) Para cada compacto $K \subset X$, $F|_K$ tiene un punto de continuidad.

Demostración:

Es evidente que (a) $\Rightarrow$ (b) $\Rightarrow$ (c). Veamos que (c) $\Rightarrow$ (a). Si C es un cerrado en X cada precompacto numerable $P \subset C$ verifica que $F|_P$ es *huskable* luego $F|_C$ lo es y tenemos (a).

Si X es completo es hereditariamente Baire, y por 1.2 tenemos que (a) $\Rightarrow$ (d). Por otra parte, si suponemos que se cumple (d) y que X es completo, si P es un precompacto numerable en X entonces $\overline{P}$ es compacto y $F|_{\overline{P}}$ tiene P.C. luego es *fragmentable* y tenemos que (d) $\Rightarrow$ (c) con lo que concluimos la demostración.

A continuación demostraremos una generalización de la proposición 3.11 en [EW], para la que necesitamos considerar una propiedad qué desempeña un papel importante en el desarrollo de este trabajo.

Supongamos que sobre un espacio métrico (E,d) tenemos una topología τ de modo que $d : E \times E \longrightarrow \mathbb{R}$ es una aplicación semicontinua inferiormente, entonces diremos que la distancia d es τ-semicontinua inferiormente (τ-s.i.). Es importante hacer notar que en este caso si $A \subset E$ y $\overline{A}^{\tau}$ es su clausura en la topología τ entonces, $d\text{-diam}(A) = d\text{-diam}(\overline{A}^{\tau})$.

1.5 Proposición.

Si $F : X \longrightarrow E$ es τ-continua donde la métrica d es τ-s.i. y $A \subset X$ entonces $F|_A$ es *huskable* si y solo si $F|_{\overline{A}}$ lo es.

Demostración:

Si $F|_{\overline{A}}$ es *huskable* entonces claramente $F|_A$ lo es. Para el recíproco observemos que si U es un abierto en X de modo que $U \cap X \neq \emptyset$ y d-diam$(F(U \cap A)) < \varepsilon$ entonces:

$$\text{d-diam}(F(U \cap \overline{A})) \leq \text{d-diam}(F(\overline{U \cap A})) \leq \text{d-diam}(\overline{F(U \cap A)}^{\tau}) =$$

$$= \text{d-diam}(F(U \cap A)) < \varepsilon.$$

la primera desigualdad es evidente, la segunda es consecuencia de que F es τ-continua y la última de que d es τ-s.i.

Luego si $F|_A$ es *huskable* también lo es $F|_{\overline{A}}$.

En lo que sigue diremos que un espacio topológico X posee la *propiedad de Kaplansky* ("countable tightness") si siempre que $a \in \overline{M} \subseteq X$, existe un subconjunto numerable $C \subseteq M$ con $a \in \overline{C}$.

1.6 Proposición.

Sea X un espacio topológico que tiene un subespacio denso X_0 con la propiedad de Kaplansky.

Si $F : X \longrightarrow E$ es una aplicación τ-continua, donde τ es una topología en E de modo que d es τ-s.i., entonces una condición suficiente para que sea *huskable* es que para cada conjunto numerable $H \subset X_0$ la restricción $F|_H$ sea *huskable*.

Demostración:

En virtud de la proposición anterior podemos suponer $X = X_0$.

Si F no es *huskable* existe un abierto no vacío U y un $\varepsilon > 0$ con d-diam$(F(V)) > \varepsilon$ para todo abierto no vacío $V \subset U$. Dado $x \in U$ sea V un entorno de x, como d-diam$(F(U \cap V)) > \varepsilon$ existe $a_V \in U \cap V$ con $d(F(x),F(a_V)) > \varepsilon/3$. Sea $M_x = \{ a_V ; V \text{ es un entorno de } x \}$, como desde luego $x \in \overline{M_x}$ existe $C_x \subset M_x$ numerable con $x \in \overline{C_x}$. Es claro que si $y \in C_x$ entonces $d(F(x),F(y)) > \varepsilon/3$ y que $C_x \subset M_x \subset U$.

Fijado $a \in U$ se define $D_1 = \{a\}$, $D_{n+1} = \cup \{ C_x ; x \in D_n \}$ y

$D = \cup D_n$. D es un conjunto numerable contenido en U y $F|_D$ no es *huskable*. En efecto, si $W \cap D \neq \emptyset$, donde W es abierto, fijado un $z \in W \cap D$, entonces $z \in D_n$ para algún n y $z \in \overline{C}_z$ de modo que existe $y \in C_z \cap W$. Por lo anterior $d(F(y),F(z)) > \varepsilon/3$ luego $d\text{-diam}(F(W \cap D)) > \varepsilon/3$.

Observación:

Nótese que la existencia de una tal topología τ en E es lo que nos permite exigir la propiedad de Kaplansky sólo sobre un subconjunto denso $X_0 \subseteq X$. Así, si en 1.6, suponemos que el espacio X es el que goza de la mencionada propiedad tendremos también la tesis sin necesidad de considerar la topología τ. Es decir, si X es un espacio topológico con la propiedad de Kaplansky entonces una condición suficiente para que $F : X \longrightarrow E$ sea *huskable* es que para cada conjunto numerable $H \subset X$ la restricción $F|_H$ sea *huskable*.

1.7 Corolario:

Sea X un espacio topológico con la propiedad de Kaplansky. Son equivalentes :

(a) F es *fragmentable*.

(b) Para cada subespacio cerrado separable $Z \subset X$, $F|_Z$ es *fragmentable* (*huskable*).

Demostración:

Bastará probar que (b) $\Rightarrow$ (a). Sea $C \subset X$ un cerrado y, sea $D \subset C$ numerable. Si se cumple (b) entonces $F|_{\overline{D}}$ es *huskable* de donde se sigue que $F|_D$ también es *huskable*. Puesto que C, con la topología relativa, posee la propiedad de Kaplansky, en virtud de la proposición anterior $F|_C$ es *huskable*.

1.8 Definición.

Sea X un espacio topológico y E un espacio métrico, $F : X \longrightarrow E$ una aplicación y $\mathcal{H}$ una familia de subconjuntos de X. Se dice que F es *σ-fragmentable* (resp. *σ-huskable*) mediante conjuntos de $\mathcal{H}$ si para cada $\varepsilon > 0$ existe una sucesión de conjuntos de $\mathcal{H}$ $\{ X_n ; n \in \mathbb{N} \}$ que recubre X y cumple:

F_ε (resp.H_ε):

Fijado $n \in \mathbb{N}$ y un subconjunto $C \subset X_n$ (resp. subconjunto abierto relativo a X_n), es posible encontrar un abierto no vacío $W \subset X$ con $W \cap C \neq \emptyset$ y $d\text{-diam}(F(W \cap C)) < \varepsilon$.

Cuando $\mathcal{H} = \mathcal{P}(X)$ -partes de X- se dirá que F es *σ-fragmentable* (resp. *σ-huskable*). Desde luego si $\mathcal{H} = \{X\}$ la definición coincide con la de *fragmentable* (resp. *huskable*).

La definición de aplicación *σ-fragmentable* aparece en [JOPV] y no es más que la extensión, al caso de funciones, de la noción de espacio σ-fragmentado introducida en [JNR1].

Observemos que si $F : X \longrightarrow E$ es *σ-fragmentable* y $\varphi : T \longrightarrow X$ es una aplicación continua siendo T un espacio topológico cualquiera, entonces, $F \circ \varphi$ también es *σ-fragmentable* pues la sucesión $Y_n = \varphi^{-1}(X_n)$ cumple las condiciones de la definición anterior siempre y cuando la sucesión X_n lo haga.

El siguiente teorema nos establece las principales relaciones entre los distintos tipos de aplicaciones hasta ahora introducidas. Diremos que un conjunto pertenece a la clase $\mathcal{F}\mathcal{G}$ si se puede expresar como $F \cap G$ donde F es un cerrado ($\mathcal{F}$) y G es un abierto ($\mathcal{G}$).

1.9 Teorema.

Sea X un espacio de Baire, (E,d) un espacio métrico y $F : X \longrightarrow E$ entonces (a) $\Rightarrow$ (b) $\Leftrightarrow$ (c) $\Leftrightarrow$ (e).

(a) F es *σ-fragmentable* mediante conjuntos $\mathcal{FG}$.

(b) d-cont(F) es un $\mathcal{G}_\delta$-denso.

(c) F es *huskable.*

(e) F es *σ-huskable* mediante cerrados.

Si además F es τ-continua donde τ es una topología sobre E tal que d es τ-s.i. entonces (a') $\Rightarrow$ (e') $\Leftrightarrow$ (e)

(a') F es *σ-fragmentable.*

(e') F es *σ-huskable.*

Demostración:

(a) $\Rightarrow$ (b)

Como hemos visto en (a) $\Rightarrow$ (b) de **1.1** es suficiente con demostrar que $O_n(F)$ es denso para todo número natural n. En otro caso, existiría un $m \in \mathbb{N}$, y un abierto no vacío W tal que $O_m(F) \cap W = \emptyset$. Por hipótesis para $\varepsilon = 1/m$ existe una sucesión $X_n = F_n \cap G_n$, donde G_n es abierto y F_n cerrado, que recubre X y verifica F_ε. Como para todo subconjunto abierto U de W se tiene que d-diam(F(U)) > 1/m entonces resulta que $H_n = W \cap \overline{G}_n \cap F_n$ es una sucesión de cerrados, relativos a W, con interior vacío. En efecto, si $V \subset W \cap \overline{G}_n \cap F_n$ es abierto, y se supone no vacío, se obtiene que $V \cap G_n$ es un abierto no vacío, contenido en X_n, luego existe un abierto no vacío $U \subset V \cap G_n$ con d-diam(F(U)) < ε, lo que contradice lo anterior ya que $U \subset W$ (recuérdese que $O_m(F) \cap W = \emptyset$).

Como la unión de los H_n es todo W se obtiene una contradicción pues W es un espacio de Baire.

(b) $\Leftrightarrow$ (c). Es la proposición **1.1.**

Son evidentes las siguientes implicaciones: (c) $\Rightarrow$ (e);

(a') $\Rightarrow$ (e');

(e) $\Rightarrow$ (e').

(e) $\Rightarrow$ (c).

Si suponemos que (c) es falso existe un abierto no vacío $W \subset X$ y un $\varepsilon > 0$ de modo que $d\text{-diam}(F(U)) > \varepsilon$ para cada abierto no vacío $U \subset W$. Para este $\varepsilon > 0$, se puede expresar X en la forma $X = \cup X_n$ donde cada X_n es cerrado y se cumple la condición (H_ε). $W = \cup (W \cap X_n)$ y como W es un espacio de Baire existen un $n_0 \in \mathbb{N}$ y un abierto no vacío $V \subset W \cap X_n$. Si $U \subset V$ es un abierto no vacío se tiene que $d\text{-diam}(F(U)) < \varepsilon$ y obtenemos así una contradicción.

(e') $\Rightarrow$ (e).

Si $X = \cup X_n$ donde $\{ X_n \}$ es una sucesión de conjuntos que cumple la condición (H_ε) para un $\varepsilon > 0$ dado, entonces $\{\overline{X}_n\}$ también la cumple. En efecto, si $V \cap \overline{X}_n \neq \emptyset$ es un abierto relativo a $\overline{X}_n$ entonces $V \cap X_n$ es un abierto no vacío relativo a X_n, luego existe un abierto U tal que $\emptyset \neq U \cap X_n \subset V \cap X_n$ y $d\text{-diam}(F(U \cap X_n)) < \varepsilon$.

Tenemos pues que:

$$d\text{-diam}(F(U \cap \overline{X}_n)) \leq d\text{-diam}(F(\overline{U \cap X_n})) \leq d\text{-diam}(\overline{F(U \cap X_n)}^{\tau}) =$$

$$= d\text{-diam}(F(U \cap X_n)) < \varepsilon.$$

La primera desigualdad es evidente, la segunda es consecuencia de que F es τ-continua y la última igualdad de que d es τ-s.i. Con esto concluímos la demostración.

Observación.

Es claro que si X es un espacio hereditariamente Baire, (E,d) un espacio métrico y tenemos una aplicación $F : X \longrightarrow E$ que es *σ-fragmentable* mediante conjuntos $\mathcal{FG}$, entoces F tiene la propiedad P.C., para lo que es suficiente con aplicar el teorema **1.9** a la restricción de F a cada cerrado. Así tenemos que para una tal aplicación F, son equivalentes:

(i) F tiene la propiedad P.C.

(ii) F es *fragmentable.*

(iii) F es *σ-fragmentable* mediante conjuntos cerrados.

(iv) F es *σ-fragmentable* mediante conjuntos $\mathcal{FG}$.

Si además, F es τ-continua, donde τ es una topología sobre E tal que d es τ-s.i., entonces las afirmaciones anteriores son equivalentes a:

(v) F es *σ-fragmentable.*

En la mayoría de los casos los espacios métricos que se van a considerar son espacios vectoriales normados y d será la distancia asociada a la norma. Sobre E se considerarán topologías τ de modo que d es τ-s.i. Este es el caso cuando $E = C(K)$, espacio de las funciones continuas sobre un compacto, $\tau = t_p$ es la topología de la convergencia puntual y d es la distancia asociada a la norma de la convergencia uniforme. Representaremos por $C_p(K)$ al espacio C(K) dotado de la topología t_p. Según el teorema anterior dada una función t_p-continua $F : X \longrightarrow C_p(K)$ entonces:
(a') $\Rightarrow$ (b) $\Leftrightarrow$ (c) $\Leftrightarrow$ (e) $\Leftrightarrow$ (e'). Aunque este es el caso que más nos va a interesar, en los espacios de Banach existen algunas topologías que cumplen esta condición :

i) $\tau = \sigma(E,E^*)$ topología débil de un Banach.

ii) $\tau = \sigma(F^*,F)$ topología débil* en un dual.

iii) $\tau = \sigma(E,\mathrm{ext}B(E^*))$ topología en E inducida por los puntos extremales de la bola del dual.

1.10 Ejemplos.

a) Si $F : X \longrightarrow \mathbb{R}$ es semicontinua inferiormente (resp. superiormente) entonces F es *σ-fragmentable* mediante conjuntos $\mathcal{F}\mathcal{G}$. Esto es claro pues $\mathbb{R}$ se puede recubrir por una familia numerable de intervalos $(a_n,b_n]$ cuyas longitudes sean menores que un $\varepsilon > 0$ dado, la sucesión $X_n = F^{-1}((a_n, b_n])$ recubre X, está formada por conjuntos $\mathcal{F}\mathcal{G}$ y cumple la condición F_ε.

b) Si $F : X \longrightarrow C_p(K)$ es t_p-continua con K compacto y F(X) es $\|\ \|$-separable entonces F es *σ-fragmentable* mediante conjuntos cerrados. Para ello es suficiente con observar que F(X) se puede cubrir con bolas cerradas (por tanto t_p-cerradas) de radio ε y centradas en los puntos de un conjunto numerable denso en F(X). Las anti-imágenes de esta familia numerable de bolas nos proporciona un cubrimiento de X mediante una sucesión de cerrados que cumple la condición (F_ε).

c) Si $F \in B_1(X,E)$ (e.d. si existen una sucesión de funciones continuas $F_n : X \longrightarrow E$ tal que $d(F_n(x),F(x)) \longrightarrow 0$ para todo $x \in X$) entonces F es *σ-fragmentable* mediante conjuntos cerrados. Esto se deduce de que para un $\varepsilon > 0$ dado se tiene $X = \bigcup X_m$ donde cada $X_m = \bigcap \{\{ x \in X \ ; \ d(F_n(x),F_m(x)) \leq \varepsilon/3 \},\ n \geq m\}$ es un cerrado. La sucesión X_m cumple (F_ε). En efecto, dado $C \subseteq X_n$ como F_n es continua existe un abierto V tal que $\emptyset \neq C \cap V$ y d-diam(F_n(V $\cap$ C)) < $\varepsilon/3$. Puesto que d(F(x),F_n(x)) $\leq \varepsilon/3$ $\forall$ x $\in$ X_n se sigue que d-diam(F(V $\cap$ C)) $\leq \varepsilon$.

d) Sea (E,$\|\ \|$) un espacio de Banach y F : X $\longrightarrow$ E una aplicación tal que existe una sucesión F_n de funciones continuas verificando que para todo x $\in$ X $F_n(x) \longrightarrow F(x)$ débilmente. Entonces F es *σ-fragmentable* mediante conjuntos cerrados. La clave de la prueba consiste en tener en cuenta que si en un espacio de Banach una sucesión (x_n) converge débilmente hacia x, entonces existe una sucesión (z_n) en la envoltura convexa de $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ que converge hacia x en norma. Como consecuencia, fijado $\varepsilon > 0$, si $\{G_n ; n \in \mathbb{N}\}$ es el conjunto numerable de todas las combinaciones convexas racionales de las funciones F_n entonces $X_n = \{x \in X; \| F(x)-G_n(x) \| \leq \varepsilon/3\}$ es una sucesión de cerrados que cubre X. Razonando como en c), la continuidad de cada G_n permite asegurar que la sucesión X_n cumple (F_ε).

En cada uno de los ejemplos anteriores se sigue de **1.9** que si además X es un espacio de Baire entonces d-cont(F) es un $\mathcal{G}_\delta$-denso.

2 FUNCIONES SEPARADAMENTE CONTINUAS CON LA PROPIEDAD DE NAMIOKA. PRIMEROS RESULTADOS SOBRE ESPACIOS DE NAMIOKA Y CO-NAMIOKA.

Dada una función $f : X\mathrm{x}Y \longrightarrow \mathbb{R}$ donde X es un espacio Hausdorff (frecuentemente X será completamente regular e Y será un compacto), definimos para cada $x \in X$ la función $f_x : Y \longrightarrow \mathbb{R}$ como $f_x(y) = f(x,y)$ y análogamente definimos $f^y : X \longrightarrow \mathbb{R}$ como $f^y(x) = f(x,y)$. Diremos que la función f es *separadamente continua* (s.c.) si para cualquier $x \in X$ y cualquier $y \in Y$ las funciones f_x y f^y son continuas.

Dada una función s.c. $f : X\mathrm{x}Y \longrightarrow \mathbb{R}$ en lo que sigue consideraremos frecuentemente los conjuntos $X_f \subset Cp(Y)$ y $Y_f \subset C_p(X)$ definidos como $X_f = \{ f_x ; x \in X \}$ e $Y_f = \{ f^y ; y \in Y \}$.

A partir de una función $f : X\mathrm{x}Y \longrightarrow \mathbb{R}$ continua en la segunda variable podemos construir una nueva función $F: X \longrightarrow C_p(Y)$ definida como $F(x) = f_x$. Recíprocamente a partir de una función $F : X \longrightarrow C_p(Y)$ se puede obtener otra función $f : X\mathrm{x}Y \longrightarrow \mathbb{R}$ continua en la variable $y \in Y$ definida como $f(x,y) = F(x)(y)$. Es claro que f es s.c. si y solo si F es t_p-continua.

2.1 Lema.

Si Y es compacto, dada $f : X\mathrm{x}Y \longrightarrow \mathbb{R}$ s.c. y fijado $x_0 \in X$ son equivalentes:

(a) f es continua en cada punto de $\{x_0\}\mathrm{x}Y$.

(b) F es $\| \ \|$-continua en x_0.

(c) Y_f es equicontinuo en x_0.

En particular, F es $\| \ \|$-continua si y solo si Y_f es equicontinuo, si y solo si f es continua.

Demostración:

(b) $\Leftrightarrow$ (c) y (b) $\Rightarrow$ (a) son evidentes.

(a) $\Rightarrow$ (b) Dados $\varepsilon > 0$ e $y \in Y$ existen entornos $A(x_0)$ y $B(y)$ de x_0 e y respectivamente tales que para todo $x \in A(x_0)$ y para todo $y' \in B(y)$ se tiene que $|f(x,y')-f(x_0,y)| < \varepsilon$. La familia $\{ B(y); y \in Y \}$ es un cubrimiento de Y compacto, del cual se puede extraer uno finito $\{ B(y_i); i = 1,\dots,n \}$. Consideremos los correspondientes $A_i(x_0)$ $i = 1,\dots,n$ y sea $U(x_0) = \bigcap \{ A_i(x_0), i = 1,\dots,n \}$. Es claro que si $x \in U(x_0)$ entonces $\| F(x)-F(x_0) \| < 2\varepsilon$, de donde se tiene la continuidad de F en x_0.

2.2 Ejemplo.

Si $H \subset C_p(X)$ es t_p-compacto, se le puede asociar la función s.c. $f : XxH \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x,h) = h(x)$, y la función t_p-continua $F : X \longrightarrow C_p(H)$, $F(x) = \delta_x$ $(\delta_x(h) = h(x)$ si $h \in H)$. El conjunto H es equicontinuo si y solo si F es $\| \ \|$-continuo si y solo si f es continua .

2.3 Observaciones.

El estudio de bastantes cuestiones relativas a funciones s.c. $f : XxY \longrightarrow \mathbb{R}$, cuando Y es compacto, se reduce frecuentemente al caso de funciones del tipo considerado en el ejemplo **2.2** habida cuenta de las siguientes observaciones:

Una función $f : XxY \longrightarrow \mathbb{R}$ se puede factorizar de las siguientes formas:

a) $f = f^* \circ \varphi^*$ donde $f^* : XxY_f \longrightarrow \mathbb{R}$ definida como $f^*(x,h) = h(x)$ y $\varphi^* : XxY \longrightarrow XxY_f$ definida por $\varphi^*(x,y) = (x,f^y)$.

b) $f = f_* \circ \varphi_*$ donde $f_* : X_f xY \longrightarrow \mathbb{R}$ definida como $f_*(\varphi,y) = \varphi(y)$ y $\varphi_* : XxY \longrightarrow X_f xY$ definida como $\varphi_*(x,y) = (f_x,y)$.

c) $f = \overline{f} \circ \overline{\varphi}$ donde $\overline{f} : X_f xY_f \longrightarrow \mathbb{R}$ definida como $\overline{f}(f_x,f^y) = f(x,y)$ y $\overline{\varphi} : XxY \longrightarrow X_f xY_f$ definida como $\overline{\varphi}(x,y) = (f_x,f^y)$.

Si la función f es s.c. entonces φ_*, φ^* y $\overline{\varphi}$ son continuas; f_*, f^* y $\overline{f}$ son s.c. y en f^*(resp. f_*) la primera (resp. segunda) variable distingue puntos de la segunda (resp. primera). En $\overline{f}$ cada variable distingue puntos de la otra.

Luego si Y es compacto, tenemos que $f = f^* \circ \varphi^*$ donde $f^* : XxH \longrightarrow \mathbb{R}$ y $H = Y_f$ es t_p-compacto. Quedando establecida así una correspondencia entre subconjuntos t_p-compactos de $C_p(X)$ y funciones s.c. $f : XxY \longrightarrow \mathbb{R}$ con Y compacto en la cual, los conjuntos t_p-compactos equicontinuos son los que corresponden a las funciones conjuntamente continuas.

Las funciones s.c. acotadas $f : XxY \longrightarrow [-1,1]$ se corresponden con t_p-compactos $H \subset C_p(X)$ uniformemente acotados ($\|h\|_\infty \leq 1 \ \forall \ h \in H$), y con las funciones $F : X \longrightarrow C_p(Y)$ con valores en la bola unidad $\{ \varphi \in C(Y); \|\varphi\|_\infty \leq 1 \}$. En el tipo de resultados que se van a considerar (relativos a existencia de puntos de continuidad conjunta de funciones reales s.c.) no será restrictiva la limitación al caso de funciones s.c. f con valores en $[-1,1]$ pues en el caso de que la función s.c. $f : XxY \longrightarrow \mathbb{R}$

no sea acotada, podemos considerar $\alpha\circ f$ donde $\alpha : \mathbb{R} \longrightarrow (-1,1)$ es un homeomorfismo. Según esto, cada t_p-compacto $H \subset C_p(X)$ es homeomorfo a un t_p-compacto uniformemente acotado $H_1 = \{ \alpha\circ h \ ; \ h \in H \} \subset C_p(X)$.

2.4 Lema.

Sea $f : XxY \longrightarrow \mathbb{R}$ s.c. donde Y es compacto. Son equivalentes:

(a) Y_f es t_p-metrizable.

(b) X_f es $\|\ \|$-separable.

(c) X_f es t_p-separable.

Demostración:

Desde luego como Y es compacto entonces Y_f es t_p-compacto y si se cumple (a) el espacio $C(Y_f)$ es un Banach separable (para la norma del supremo). Definimos en X la siguiente relación de equivalencia: $x_1\ x_2 \Leftrightarrow f(x_1,y) = f(x_2,y)\ \forall\ y \in Y$. El conjunto de las clases de equivalencia $\overline{X}$ es un espacio métrico con la métrica ρ definida como $\rho(\overline{x}_1,\overline{x}_2) = \sup\{ \ |f(x_1,y)-f(x_2,y)| ; \ y \in Y \ \}$.

Como $(\overline{X},\rho)$ es isométrico a un subconjunto de $C(Y_f)$, tenemos que $(\overline{X},\rho)$ es separable. Ahora consideramos la aplicación continua $\varphi : (\overline{X},\rho) \longrightarrow (C(Y),\|\ \|_\infty)$ definida por $\varphi(\overline{x}) = f_x$ y tenemos que $\varphi(\overline{X}) = X_f$ es separable en norma. Con esto hemos probado que (a) $\Rightarrow$ (b).

Es evidente que (b) $\Rightarrow$ (c), veamos que (c) $\Rightarrow$ (a).

Si $\{ x_n ; \ n \in \mathbb{N} \}$ es un subconjunto numerable de X tal que $\{ f_{x_n} ; \ n \in \mathbb{N} \}$ es t_p-denso en X_f, la métrica $d(h_1,h_2) = \sum \min \{ \ 1,2^{-n}|h_1(x_n)-h_2(x_n)| \ \}$ describe la topología del espacio compacto (Y_f,t_p).

Este lema, que es la versión topológica de un resultado bien conocido de la teoría de la dualidad en espacios vectoriales localmente convexos, nos va a permitir simplificar la demostración de algunos resultados. Su demostración aparece explicitamente en [V1] y como primera consecuencia importante podemos obtener una sencilla demostración del siguiente teorema de Troallic [T1].

2.5 Corolario:

Si Y es compacto, los conjuntos t_p-separables y $\| \|$-separables en $C_p(Y)$ coinciden.

Demostración:

Si $M \subset C_p(Y)$, donde Y es un compacto, podemos considerar la aplicación s.c. $f : MxY \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(\varphi,y) = \varphi(y)$ y como evidentemente $M_f = M$ la equivalencia de (b) y (c) en el lema **2.4** nos da el resultado.

Otra consecuencia de **2.4** es que si X es separable entonces cada t_p-compacto $H \subset C_p(X)$ es metrizable (considerese $f : XxH \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x,h) = h(x)$, donde $X_f = F(X)$ es t_p-separable y $H = H_f$). Será conveniente decir que un espacio topológico X posee la *propiedad P.C.M.* si cada t_p-compacto $H \subset C_p(X)$ es metrizable. En el tercer capítulo se estudiará con detenimiento esta clase de espacios topológicos que es bastante más amplia que la de los espacios separables.

2.6 Definición.

Si X e Y son dos espacios topológicos representaremos, siguiendo una terminología introducida por R. Deville [D2], por

$\mathcal{N}(X,Y)$ la siguiente propiedad:

Para toda aplicación s.c. $f : XxY \longrightarrow [-1,1]$ existe un subconjunto $X_0 \subset X$ que es un $\mathcal{G}_\delta$-denso y tal que f es continua (conjuntamente continua) en cada punto de X_0xY.

Un espacio X se dirá de *Namioka* si se verifica la propiedad $\mathcal{N}(X,Y)$ para cualquier compacto Y. La clase de los espacios de Namioka se representará por $\mathcal{N}$.

Un espacio Y se dirá de *co-Namioka* si para cualquier espacio de Baire X se cumple la propiedad $\mathcal{N}(X,Y)$. La clase de los espacios de co-Namioka se representará por $\mathcal{N}^*$.

Cuando Y es compacto de acuerdo con el lema **2.1** y con lo anteriormente observado la condición $\mathcal{N}(X,Y)$ la podemos enunciar del siguiente modo:

Para cualquier compacto Y y cada función $F : X \longrightarrow C_p(Y)$ t_p-continua y acotada existe un subconjunto $X_0 \subset X$ que es un $\mathcal{G}_\delta$-denso y tal que F es $\| \ \|$-continua en cada punto de X_0.

Un primer resultado estructural relativo a los espacios de la clase $\mathcal{N}$ lo obtenemos de las proposiciones **1.5** y **1.1** que nos dicen:

Un espacio topológico X que contenga un subespacio denso de Namioka y de Baire es él mismo de Namioka (obviamente X es Baire).

A continuación obtenemos dos primeros ejemplos concretos de espacios de las clases $\mathcal{N}$ y $\mathcal{N}^*$.

2.7 Teorema.

(a) Todo espacio de Baire separable X es de la clase $\mathcal{N}$.

(b) Todo compacto metrizable Y es de la clase $\mathcal{N}^*$.

Demostración:

Si consideramos una función $F : X \longrightarrow C_p(Y)$ t_p-continua y acotada en ambos casos tenemos que $F(X) = X_f$ es $\| \ \|$-separable. En el primer caso por **2.4** y en el segundo porque $C(Y)$ es separable en norma. Según **1.10-b** F es *σ-fragmentable*, y aplicando **1.9** resulta que $\| \ \|$-cont(F) es un $\mathcal{G}_\delta$-denso.

El siguiente teorema nos proporciona una nueva clase de espacios de Namioka.

2.8 Teorema.

Sea X un espacio topológico hereditariamente Baire y supongamos que existe un subconjunto denso $X_0 \subset X$ que tiene la propiedad de Kaplansky. Entonces X es un espacio de Namioka.

Demostración:

Consideremos una aplicación t_p-continua y acotada $F : X \longrightarrow C_p(Y)$ siendo Y un espacio compacto.

Sea $C \subset X$ un conjunto numerable, entonces, $\overline{C}$ es un espacio de Baire separable luego por **2.7-a** y **1.1** tendremos que $F|_{\overline{C}}$ es *huskable* y también $F|_C$. La proposición **1.6** nos dice que F es *huskable* y al ser X un espacio de Baire, tendremos que X es un espacio de Namioka.

Observación:

Si en el teorema anterior, restringimos "un poco" las hipótesis, obtenemos un resultado algo más potente, esto es:

Si X es un espacio topológico hereditariamente Baire con la propiedad de Kaplansky. Entonces cada aplicación t_p-continua $F : X \longrightarrow C_p(Y)$ es *fragmentable*. En efecto:

Si $F : X \longrightarrow C_p(Y)$ es t_p-continua y acotada, por **2.7-a** $F|_Z$ es *huskable* para cada cerrado separable Z. Por **1.7** tendremos que F es *fragmentable*.

Observemos que en la prueba del teorema anterior sólo se usa que X sea Baire y que cada subespacio separable lo sea. Esto es equivalente a que el espacio X sea hereditariamente Baire cuando es regular y primer axioma de numerabilidad como demuestra G. Debs en [Db1].

Notemos también que en **2.8** se ha obtenido que la aplicación F es *fragmentable*, un resultado "más fino" que el de afirmar que el espacio es de Namioka. Además como la restricción de F a cualquier subespacio cerrado de X sigue siendo *fragmentable* obtenemos que si X es hereditariamente Baire con la propiedad de Kaplansky entonces todo subespacio cerrado es de Namioka. Esta afirmación es una respuesta parcial a un *problema* planteado por R. W. Hansell [Pt2] en el que se pregunta si los subespacios cerrados en un espacio de Namioka hereditariamente Baire son de Namioka. Otro problema abierto hasta ahora, que allí se plantea, es el de si un $\mathcal{G}_\delta$ en un espacio de Namioka será o no de Namioka.

2.9 Teorema.

Todo espacio localmente compacto es un espacio de Namioka.

Demostración:

Sea Y compacto, y $F : X \longrightarrow C_p(Y)$ una función t_p-continua.

Supongamos primero que X es compacto, entonces $F(X) \subset C_p(Y)$ es un compacto de Eberlein, y es bien conocido que estos compactos tienen la propiedad de Kaplansky. Aplicando **2.8** la aplicación identidad $i : (F(X),t_p) \longrightarrow C_p(Y)$ es *fragmentable* y se sigue que $F : X \longrightarrow C_p(Y)$ es *fragmentable*. Aplicando **1.1** tenemos que X es un espacio de Namioka.

Si X es localmente compacto y $U \subset X$ es un abierto no vacío podemos considerar $W \subset U$ otro abierto no vacío con $\overline{W}$ compacto. Por lo anterior la aplicación $F : X \longrightarrow C_p(Y)$ tendrá puntos de $\| \ \|$-continuidad en $\overline{W}$ luego existe $V \subset W$ abierto no vacío con $\| \ \|$ $-\text{diam}(F(V)) < \varepsilon$ para un $\varepsilon > 0$ dado. Por lo tanto F es *huskable* y como X es un espacio de Baire (por ser localmente compacto) **1.1** nos dice que X está en la clase $\mathcal{N}$.

A continuación vamos a ver un teorema de W. Rudin [Ru] cuya demostración está basada en el hecho de que los espacios métricos son paracompactos.

2.10 Teorema.

Sea $f : X\text{x}Y \longrightarrow \mathbb{R}$ una función s.c. donde Y es un espacio topológico y X un espacio métrico. Entonces $f \in B_1(X\text{x}Y,\mathbb{R})$.

Demostración:

Como X es métrico, será paracompacto y para cada n consideramos $\{h_{\alpha,n}\}$ una partición de la unidad en X, localmente finita, de modo que el soporte de cada $h_{\alpha,n}$ tenga diámetro inferior a $1/n$. Sea D un subconjunto denso de X y sea $x_{\alpha,n} \in D$ tal que $h_{\alpha,n}(x_{\alpha,n}) > 0$. Para cada $n \in \mathbb{N}$ consideremos la función $F_n : X\text{x}Y \longrightarrow \mathbb{R}$ definida como $F_n(x,y) = \sum_{\alpha} h_{\alpha,n}(x)f(x_{\alpha,n},y)$ que es continua debido a que la partición es localmente finita.

Fijamos $(x_0,y_0) \in X\text{x}Y$, entonces como f es s.c. podemos encontrar un $n_0 \in \mathbb{N}$ de modo que para todo x tal que $d(x,x_0) < 1/n_0$

(d es la métrica en X) entonces $|f(x,y_0)-f(x_0,y_0)| < \varepsilon$ para un $\varepsilon > 0$ dado. Si $n > n_0$ y α es un índice tal que $h_{\alpha,n}(x_0) > 0$ se tendrá que $d(x_{\alpha,n},x_0) < 1/n_0$ y por tanto $|f(x_{\alpha,n},y_0)-f(x_0,y_0)| < \varepsilon$. Como $\sum_{\alpha} h_{\alpha,n}(x) = 1$ para todo $x \in X$ se tiene que $|Fn(x_0,y_0)-f(x_0,y_0)| < \varepsilon$ si $n > n_0$ como queríamos demostrar.

2.11 Corolario:

Si Y es compacto, X metrizable y $F : X \longrightarrow C_p(Y)$ es t_p-continua entonces F es *σ-fragmentable* mediante conjuntos cerrados..

Demostración:

Para ello consideremos una función t_p-continua $F : X \longrightarrow C_p(Y)$ con $\| F(x)\| \leq 1 \ \forall \ x \in X$ (que como sabemos no es restrictivo). Aplicando **2.10** a la función s.c. $f : XxY \longrightarrow [-1,1]$ definida como $f(x,y) = F(x)y$, se obtiene una sucesión de funciones conjuntamente continuas $f_n : XxY \longrightarrow [-1,1]$ que converge puntualmente hacia f. Sea $F_n : X \longrightarrow C_p(Y)$ la sucesión de funciones $\| \ \|$-continuas asociada. Para cada $x \in X$ $F_n(x) \longrightarrow F(x)$ en la topología t_p, luego $F_n(x) \longrightarrow F(x)$ en la topología débil (esto es el teorema de la convergencia dominada de Lebesgue). Finalmente aplicando **1.10-c)** tenemos el resultado.

2.12 Corolario:

Todo espacio de Baire metrizable es un espacio de Namioka.

Demostración:

Consecuencia de **2.11** y **1.9.**

2.13 Definición.

Sean X e Y dos espacios topológicos representaremos por $\mathcal{M}(X,Y)$ la siguiente propiedad :

Para cada función s.c. $f : XxY \longrightarrow \mathbb{R}$ existe una sucesión de funciones continuas $fn : XxY \longrightarrow \mathbb{R}$ que convergen puntualmente hacia f. En la definición es claro que se puede sustituir $\mathbb{R}$ por $[-1,1]$ de modo equivalente.

Diremos que un espacio X es de la clase $\mathcal{M}$ si se cumple la condición $\mathcal{M}(X,Y)$ para todo espacio compacto Y.

Esta clase de espacios son introducidos por G. Vera en [V1] con el nombre de espacios de Morán motivado por los resultados obtenidos por éste con respecto a la clase $\mathcal{M}(X,Y)$ en [Mo].

La clase de los espacios $\mathcal{M}$ contiene según **2.10** a los espacios metrizables y recordando las factorizaciones consideradas en **2.3** (en particular $f = f^{*}\circ\varphi^{*}$) se tiene fácilmente que la clase $\mathcal{M}$ también contiene a los espacios X con la propiedad P.C.M. En efecto, si X tiene la propiedad P.C.M. y tenemos una función s.c. $f : XxY \longrightarrow \mathbb{R}$ con Y compacto, sabemos que $f = f^{*}\circ\varphi^{*}$ donde $f^{*} : XxY_f \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función s.c. definida como $f^{*}(x,y) = h(x)$ y $\varphi^{*} : XxY \longrightarrow XxY_f$ es una función continua dada por $\varphi^{*}(x,y) = (x,f^{y})$; como Y_f es un t_p-compacto en $C_p(X)$, será metrizable luego por **2.10** y por la continuidad de φ^{*} resulta que X está en la clase $\mathcal{M}$.

En particular, la clase $\mathcal{M}$ contiene todos los espacios separables. Es evidente que la prueba del corolario **2.12** se puede extender al caso en que $X \in \mathcal{M}$. Se obtiene así el siguiente resultado que extiende 2.7-(a) y 2.12.

2.14 Proposición.

Todo espacio de Baire de la clase $\mathcal{M}$ es un espacio de Namioka. En particular, todo espacio de Baire con la propiedad P.C.M. es un espacio de Namioka.

Demostración:

Análoga a la de **2.12.**

Si Y es un compacto metrizable entonces tiene una base numerable de su topología y así **2.7-(b)** está incluido en el siguiente resultado más general de Calbrix-Troallic [CT] que nos permite obtener una clase más amplia de espacios en $\mathcal{N}^*$.

2.15 Teorema.

Si X es un espacio de Baire y si Y tiene una base numerable de su topología, entonces se cumple $\mathcal{N}(X,Y)$.

Demostración:

Sea $f : X\text{x}Y \longrightarrow \mathbb{R}$ una aplicación s.c. Sea $\{ \Omega_n ;\ n \in \mathbb{N} \}$ una base numerable de abiertos para la topología de Y. Sobre $\mathbb{R}$ consideraremos una métrica equivalente a la usual acotada. Para cada $n \in \mathbb{N}$ sea $D_n : C_p(Y) \longrightarrow \mathbb{R}$ la aplicación semicontinua inferiormente definida por $D_n(\varphi) = \text{diam}(\varphi(\Omega_n))$.

La aplicación $F : X \longrightarrow C_p(Y)$ asociada a f en la forma usual es continua, luego para todo $n \in \mathbb{N}$, $D_n \circ F : X \longrightarrow \mathbb{R}$ es una aplicación semicontinua inferiormente.

Sea A_n el conjunto de puntos de continuidad de $D_n \circ F$, cada A_n es un $\mathcal{G}_\delta$-denso en X por **1.10-(a)** pues X es un espacio de Baire. Se sigue que $A = \bigcap A_n$ es un $\mathcal{G}_\delta$-denso en X.

Veamos que f es continua en todo punto de AxY. Dados

$(a,y) \in AxY$ y $\varepsilon > 0$ sea $p \in \mathbb{N}$ tal que $y \in \Omega_p$ y tal que $|f_a(y)-f_a(v)| < \varepsilon/4$ para todo $v \in \Omega_p$ (continuidad de f_a en y). Sea Ω un entorno de a en X tal que para todo $u \in \Omega$ $|f^y(a)-f^y(u)| < \varepsilon/4$ y $|D_p \circ F(a)-D_p \circ F(u)| < \varepsilon/4$ (continuidad de f^y y de $D_p \circ F$ en el punto a). Tenemos que

$$D_p \circ F(a) = \operatorname{diam}(f_a(\Omega_p)) < \varepsilon/2 \text{ pues}$$

$$|f_a(v)-f_a(v')| \leq |f_a(v)-f_a(y)|+|f_a(y)-f_a(v')| \ \forall \ v,v' \in \Omega_p.$$

Se obtiene entonces que $D_p \circ F(u) < \varepsilon/4+\varepsilon/4 < \varepsilon/2 \ \forall \ u \in \Omega$ luego $|f_u(y)-f_u(v)| < \varepsilon$ para cada $v \in \Omega_p$. $\Omega x \Omega_p$ es un entorno de (a,y) en XxY y para todo elemento (u,v) de este entorno tenemos que $|f(a,y)-f(u,v)| \leq |f^y(a)-f^y(u)|+|f_u(y)-f_u(v)| < \varepsilon$.

Entonces f es continua en (a,y).

2.16 Proposición.

Si X es un espacio topológico con la propiedad de que cada t_p-compacto $H \subset C_p(X)$ es de la clase $\mathcal{N}^*$, entonces X es de la clase $\mathcal{N}$.

Demostración:

En efecto, recordando que si $f : XxY \longrightarrow [-1,1]$ es s.c. se puede factorizar como $f = f^* \circ \varphi^*$ donde $\varphi^* : XxY \longrightarrow XxY_f$ es continua y $f^* : XxY_f \longrightarrow [-1,1]$ es s.c., (véase **2.3**) como por hipótesis, Y_f está en $\mathcal{N}^*$ existe un $\mathcal{G}_\delta$-denso $X_0 \subseteq X$ tal que f^* es conjuntamente continua en cada punto de $X_0 x Y_f$, luego $f = f^* \circ \varphi^*$ es conjuntamente continua en cada punto de $X_0 x Y$, es decir se cumple $\mathcal{N}(X,Y)$ para todo compacto Y y X está en la clase $\mathcal{N}$.

El hecho de que los espacios de Baire separables (o más generalmente de que los espacios de Baire con la propiedad P.C.M.)

son espacios de Namioka se puede obtener como una consecuencia directa de **2.15** pues como se ha indicado antes cada t_p-compacto $H \subset C_p(X)$ está en $\mathcal{N}^*$ porque es metrizable y por tanto tiene una base numerable.

El siguiente lema basado en una observación de Christensen [Ch1] nos permitirá probar que en la definición de espacio de Namioka, como espacio de llegada de las aplicaciones s.c. es equivalente poner $[-1,1]$ o cualquier espacio métrico (Z,d). Sin embargo, no podemos obtener un resultado semejante para los espacios de Co-Namioka, aunque si se pueden obtener algunas respuestas parciales en esa misma dirección.

Dado un espacio métrico (Z,d) consideramos el siguiente conjunto:

$$Y = \{y : Z \longrightarrow [-1,1];\ \forall\ z_1,z_2 \in Z,\ |y(z_1)-y(z_2)| \leq d(z_1,z_2)\ \}$$

que es un compacto en la topología de la convergencia puntual de $C(Z)$.

2.17 Lema.

Sea X un espacio topológico, (Z,d) un espacio métrico e Y el conjunto t_p-compacto asociado anteriormente a Z, y supongamos que K es un espacio topológico de modo que se cumple la condición $\mathcal{N}(X,KxY)$, entonces para cada aplicación s.c. $f : XxK \longrightarrow Z$ existe un $\mathcal{G}_\delta$-denso $X_0 \subseteq X$ de modo que f es continua en cada punto de X_0xK.

Demostración:

Para ello definimos una función $g : Xx(KxY) \longrightarrow [-1,1]$ como $g(x,(k,y)) = y(f(x,k))$ que es una función s.c. suponiendo que lo es f. Por cumplirse la condición $\mathcal{N}(X,KxY)$ existe $X_0 \subset X$ de modo que g es continua en cada punto de $X_0x(KxY)$ y entonces f es continua en cada punto de X_0xK. En efecto si $(x_\alpha,k_\alpha) \longrightarrow (x_0,k_0)$ es una red convergente en XxK es claro que $\forall$ y $\in$ Y

$$(x_\alpha,(k_\alpha,y)) \longrightarrow (x_0,(k_0,y)) \text{ luego}$$
$$g(x_\alpha,(k_\alpha,y)) \longrightarrow g(x_0,(k_0,y)) \text{ y entonces}$$
$$y(f(x_\alpha,k_\alpha)) \longrightarrow y(f(x_0,k_0)).$$

Si consideramos $y(z) = \min \{ d(z,f(x_0,y_0)),1 \}$ entonces es claro que $y \in Y$ y que $f(x_\alpha,k_\alpha) \longrightarrow f(x_0,k_0)$ como queríamos demostrar.

2.18 Proposición.

Si X es un espacio de Namioka, K compacto y (Z,d) métrico, para cada función s.c. $f : XxK \longrightarrow Z$ se cumple que existe un $\mathcal{G}_\delta$-denso $X_0 \subset X$ tal que f es continua en cada punto de X_0xK.

Demostración:

Es una consecuencia inmediata del lema **2.17**, pues como KxY es compacto y X es un espacio de Namioka se cumple la condición $\mathcal{N}(X,KxY)$.

2.19 Proposición.

Sea (Z,d) un espacio métrico y supongamos que K es un espacio topológico de modo que KxY es un espacio de co-Namioka (donde Y es el espacio antes asociado a Z), entonces para cualquier espacio de Baire X y para cualquier aplicación s.c. $f : XxK \longrightarrow Z$ existe un $\mathcal{G}_\delta$-denso $X_0 \subseteq X$ tal que f es continua en cada punto de X_0xK.

Demostración:

Se deduce del lema **2.17** pues al ser X un espacio de Baire y KxY un espacio de co-Namioka se cumple la condición $\mathcal{N}(X,KxY)$.

Observación:

Indicar que en la proposición, el hecho de que $KxY \in \mathcal{N}^*$ implica que $Y \in \mathcal{N}^*$ y $K \in \mathcal{N}^*$, pues la clase $\mathcal{N}^*$ es invariante por aplicaciones continuas.

Es importante indicar que recientemente I.Namioka y R.Pol [NP] han demostrado el siguiente teorema relativo a este tipo de cuestiones:

Si K es un compacto de Co-Namioka (es suficiente con que verifique la condición $\mathcal{N}(X,Y)$ para cualquier T_1-espacio X que sea Baire y completamente regular), (Z,d) un espacio métrico y X un espacio de Baire, entonces para aplicación s.c. $f : XxK \longrightarrow Z$ existe un $\mathcal{G}_\delta$-denso $X_o \subseteq X$ tal que f es continua en cada punto de $X_o xK$.

2.20 Ejemplo.

Según **2.18** el rango de las aplicaciones consideradas en los teoremas de Namioka puede ser [-1,1] o, equivalentemente, cualquier espacio métrico. Sin embargo, no parece probable que esta condición pueda rebajarse y seguir obteniendo buenos resultados, como lo demuestra el siguiente ejemplo de Hoffman-Jorgensen [Ch2].

Para ello, sean $X = Y = [-1,1]$, $Z = C_p([-1,1]^2,[-1,1])$ que es un compacto y $f : XxY \longrightarrow Z$ definida del siguiente modo:

Para cada $(x,y) \in XxY$,$f(x,y)$ es una función de $(a,b) \in [-1,1]^2$ dada por:

$$f(x,y)\ (a,b) = 2\cdot(x-a)\cdot(y-b)/((x-a)^2+(y-b)^2)$$

y por cero en los puntos en los que el cociente no esté definido. Es fácil ver que f es separadamente continua pero no conjuntamente continua en ningún punto.

La siguiente proposición es un sencillo resultado de I. Namioka [Na1].

2.21 Proposición.

Sean X un espacio Baire de Namioka, Y localmente compacto σ-compacto y (Z,d) un espacio métrico entonces si $f : XxY \longrightarrow Z$ es s.c. existe un $\mathcal{G}_\delta$-denso $X_0 \subset X$ tal que f es continua en cada punto de X_0xY.

Demostración:

Por hipótesis existe una sucesión $\{ Y_i;\ i = 1,2,\ldots\}$ de compactos de modo que Y se puede expresar como unión de sus interiores. Por **2.18** y ser X de Namioka para cada i existe A_i, $\mathcal{G}_\delta$-denso en X, de modo que $f|_{XxY_i}$ es continua en cada punto de A_ixY_i. Entonces f es continua en cada punto de $(\bigcap A_i)xY$ y $\bigcap A_i$ es un $\mathcal{G}_\delta$-denso en X por ser éste un espacio de Baire.

En la proposición anterior al espacio X le hemos exigido ser Baire y de Namioka; en general los espacios de Namioka no son de Baire como veremos en un ejemplo posteriormente. Sin embargo existe una clase muy amplia de espacios en la que esto si se verifica como demostró J.Saint-Raymond [Sa] en el siguiente resultado.

2.22 Lema.

Sea F un cerrado raro en un espacio completamente regular X. Existe un compacto Y y una función $f : XxY \longrightarrow [0,1]$ s.c. tal que $\forall\ x \in F\ \exists\ y \in Y$ de modo que f es discontinua en (x,y).

Demostración:

Sea $\{\varphi_i; i \in I\}$ una familia maximal de funciones continuas de X en [0,1] nulas sobre F y que cumplen $\varphi_i \varphi_j = 0$ si $i \neq j$; en el caso en que X fuese metrizable se puede coger $I = \{\varnothing\}$ y $\varphi_{\varnothing}(x) = \inf(1, d(x,F))$.

En cualquier caso el abierto $\Omega = \cup \{\{x; \varphi_i(x) \neq 0\}\ i \in I\}$ es denso en X. En efecto, si W es un abierto no vacío disjunto de Ω, $W \setminus F$ sería no vacío y contendría un punto a de X; existiría pues una función continua $\varphi : X \longrightarrow [0,1]$ que valdría 1 en a y 0 fuera de $W \setminus F$. Esta función podría añadirse a la familia $\{\varphi_i;\ i \in I\}$ en contra de su maximalidad.

Dotamos a I de la topología discreta y tomamos como Y el compactificado de Alexandroff de $I \times [0,1]$ obtenido añadiendo el punto del infinito λ. Definimos:

$$f(x,\lambda) = 0$$

$$f(x,i,t) = 2t\varphi_i(x)/(t^2+\varphi_i^2(x)) \text{ si } t \neq 0$$

$$f(x,i,0) = 0$$

Se ve fácilmente que f es s.c., que $f(x,y)$ es nula para todo $y \in Y$ si x está en F y que si $x_1 \in \Omega$ existe $i \in I$ y $t = \varphi_i(x_1) \neq 0$ tal que $f(x_1,i,t) = 1$. Esto nos demuestra el lema pues todo punto de F es adherente a Ω.

2.23 Teorema.

Si X es un espacio de Namioka completamente regular entonces es un espacio de Baire.

Demostración:

Razonamos por reducción al absurdo. Si X no es un espacio de Baire, contendría un abierto magro no vacío Ω, unión de una

3 ESPACIOS CON LA PROPIEDAD P.C.M.

En este epígrafe, como aplicación de los resultados obtenidos hasta ahora, se van a obtener algunas consecuencias relativas a los espacios completamente regulares X tales que $C_p(X)$ posee subconjuntos puntualmente compactos metrizables. Algunos resultados previos han puesto de manifiesto como interviene esta propiedad en relación con los problemas que estamos considerando (véase **2.14**). Se recogen en este epígrafe resultados de Morán [Mo], Rudin [Ru] y G. Vera [V1].

3.1 Definición.

Si X es un espacio topológico diremos que una *familia* de subconjuntos de X es *discreta* cuando cada punto de X tiene un entorno que corta a lo sumo a un miembro de la familia.

Un espacio topológico X tiene la *propiedad D.C.C.C.* si cualquier familia discreta de abiertos no vacíos es a lo sumo numerable.

Un espacio topológico X tiene la *propiedad C.C.C.* si cualquier familia disjunta de abiertos no vacíos es a lo sumo numerable. Evidentemente C.C.C. implica D.C.C.C.

Todo espacio metrizable X con D.C.C.C. es separable. Pues si $\{ B(x_\alpha,1/n);\ \alpha \in A_n \}$ es una familia discreta maximal de bolas abiertas de radio 1/n entonces es numerable por lo que $\{ x_\alpha;\ \alpha \in \cup A_n \}$ es numerable y denso en X.

También es inmediato que la imagen continua de un espacio topológico con la C.C.C. (resp. D.C.C.C.) tiene la misma propiedad.

El siguiente resultado, aparece de modo implícito en [W] y explícitamente en [CO].

3.2 Proposición.

Si X es un espacio completamente regular entonces son equivalentes:

(a) X posee la D.C.C.C.

(b) Cada t_p-compacto equicontínuo $H \subset C_p(X)$ es t_p-metrizable.

Demostración:

(a) $\Rightarrow$ (b) Si H es equicontinuo y t_p-compacto, la función $F : X \longrightarrow C_p(H)$, $F(x) = \delta_x$ es $\| \ \|$-continua (ver **2.2**), luego su imagen $X_f = F(X)$ cumple D.C.C.C. con la topología de la norma y por lo tanto es separable. Según el lema **2.4**, $H = H_f$ es t_p-metrizable.

(b) $\Rightarrow$ (a) Sea $\{ G_\alpha; \alpha \in A \}$ una familia de abiertos discreta que supondremos no numerable. Para cada $\alpha \in A$ sea $\varphi_\alpha \in C(X)$ tal que $\|\varphi_\alpha\| \leq 1$ $\varphi_\alpha(x_\alpha) = 1$ con $x_\alpha \in G_\alpha$ y $sop(\varphi_\alpha) \subset G_\alpha$ (Usamos que X es completamente regular). $H = \{\varphi_\alpha; \alpha \in A\} \cup \{0\}$ es un t_p-compacto equicontinuo que no es metrizable para t_p. En efecto, si fuese t_p-metrizable, aplicando **2.4** se tendría que $\{\delta_x; x \in X\} \subset C(H)$ es separable en norma. Pero esto no es cierto porque si $\alpha,\beta \in A$ y $\alpha \neq \beta$ entonces $\|\delta_{x_\alpha} - \delta_{x_\beta}\| \geq |\varphi_\alpha(x_\alpha) - \varphi_\alpha(x_\beta)| = 1.$

Con el mismo razonamiento de la prueba de (a) $\Rightarrow$ (b) en **3.2** se deduce que si X es Lindelöf se cumple la condición (b) de **3.2**. Por lo tanto todo espacio Lindelöf cumple la D.C.C.C.

3.3 Proposición.

Sea X un espacio completamente regular. Consideremos las siguientes condiciones:

(a) X posee la C.C.C.

(b) Cada t_p-compacto $H \subset C_p(X)$ es t_p-metrizable (es decir, X posee la propiedad P.C.M.).

Entonces (b) $\Rightarrow$ (a). Si X es un espacio de Namioka entonces (a) $\Rightarrow$ (b).

Demostración:

La prueba de (b) $\Rightarrow$ (a) es análoga a la de (b) $\Rightarrow$ (a) en **3.2** observando que cuando $\{G_\alpha;\ \alpha \in A\}$ es una familia de abiertos disjuntos entonces la familia $H = \{\varphi_\alpha;\ \alpha \in A\} \cup \{0\}$ considerada en la prueba de **3.2** es t_p-compacta.

(a) $\Rightarrow$ (b) Sea $H \subset C_p(X)$ t_p-compacto y $F : X \longrightarrow C_p(H)$ la función t_p-continua asociada $(F(x) = \delta_x)$. Por hipótesis existe un $\mathcal{G}_\delta$-denso $X_0 \subset X$ tal que $F : X_0 \longrightarrow C_p(H)$ es $\|\ \|$-continua. Como X_0 es denso en X, X_0 cumple C.C.C. y entonces $(F(X_0), \|\ \|)$ cumple C.C.C. y por tanto es $\|\ \|$-separable ($\Leftrightarrow$ t_p-separable). Como F es t_p-continua $F(X) = F(\overline{X_0}) \subset \overline{F(X_0)}^{t_p} = M$, donde M es $\|\ \|$-separable. Según **2.4** si $F(X)$ es $\|\ \|$-separable entonces H es t_p-metrizable.

3.4 Observación.

Razonando como en (a) $\Rightarrow$ (b) de la proposición anterior se obtiene la siguiente generalización de un clásico teorema de Johnson [JH].

Si $F : X \longrightarrow C_p(Y)$ es t_p-continua, Y compacto y X es de Namioka con la propiedad C.C.C. entonces $F(X)$ es $\|\ \|$-separable.

3.5 Corolario.

Si X es un espacio completamente regular son equivalentes :

(a) X es un espacio de Baire con la propiedad P.C.M.

(b) X es un espacio de Namioka que cumple C.C.C.

Demostración:

(a) ⇒ (b) es consecuencia inmediata de **2.14** y **3.3**.

(b) ⇒ (a) es consecuencia inmediata de **2.23** y **3.3**.

3.6 Ejemplo.

En la observación **3.4** la necesidad de que X posea la propiedad C.C.C. queda clara a la vista de **3.5**, pues si X es un compacto que no cumple C.C.C., entonces existe un $H \subset C_p(X)$ que es puntualmente compacto no metrizable. Si consideramos la aplicación separadamente continua $f : XxH \longrightarrow \mathbb{R}$ definida como $f(x,h) = h(x)$, y la aplicación inducida a la manera usual, $F : X \longrightarrow C_p(H)$ vemos que $F(X) = X_f$ no es $\| \|$-separable, pues si lo fuese, H sería t_p-metrizable (**2.4**). A continuación veamos un ejemplo concreto de esta situación [JH]:

Sea X = Y el compactificado por un punto (∞) de un espacio no numerable y discreto. Sea $f : XxY \longrightarrow [0,1]$, la función característica de la diagonal sin el punto (∞,∞) que claramente es separadamente continua, pero sin embargo $\{f_x : x \in X\}$ es un conjunto no numerable de funciones que están separadas una unidad en la norma del supremo de C(Y).

El siguiente resultado es de G. Vera [V1].

3.7 Proposición.

Si X es un espacio completamente regular son equivalentes :

(a) X posee la propiedad P.C.M.

(b) X es de la clase $\mathcal{M}$ y cumple D.C.C.C.

(c) X es de la clase $\mathcal{M}$ y cumple C.C.C.

Demostración:

(a) $\Rightarrow$ (c) Se deduce de **3.3** y de que como ya hemos visto los espacios con la propiedad P.C.M. están en la clase $\mathcal{M}$ (pag. 22).

(c) $\Rightarrow$ (b) Evidente.

(b) $\Rightarrow$ (a) Sea $H \subset C_p(X)$ t_p-compacto y sea $F : X \longrightarrow C_p(H)$ la función t_p-continua asociada a la función s.c. $f : XxH \longrightarrow \mathbb{R}$ $f(x,h) = h(x)$. Por hipótesis $f(x,h) = \lim_n f_n(x,h)$ donde $f_n : XxH \longrightarrow \mathbb{R}$ son continuas. Sean $F_n : X \longrightarrow C(H)$ las funciones $\|\ \|$-continuas inducidas por f_n, entonces $(F_n(X), \|\ \|)$ cumple D.C.C.C., luego es $\|\ \|$-separable por lo que $F(X) \subset M$ donde $M = \overline{\cup Fn(X)}^{t_p}$ es t_p-separable en C(H) y por lo tanto $\|\ \|$-separable. Como $F(X) = X_f$ es separable el lema **2.4** nos dice que H es t_p-metrizable.

Resulta de **3.5** y **3.7** que si X es un espacio completamente regular de la clase $\mathcal{M}$ o de la clase $\mathcal{N}$ entonces:

X cumple C.C.C. $\Leftrightarrow$ X cumple P.C.M.

El siguiente teorema es un resultado bien conocido que se debe a Morán [Mo] y Rosenthal [Ro].

3.8 Teorema.

Sea Y compacto y $H \subset C_p(Y)$ tp-compacto, son equivalentes:

(a) H es t_p-metrizable.

(b) H es t_p-separable.

(c) H verifica C.C.C.

Demostración:

(a) $\Rightarrow$ (b) $\Rightarrow$ (c) es evidente.

(c) $\Rightarrow$ (a) H es Namioka por **2.9** y aplicando **3.5** resulta que H posee P.C.M. Si consideramos $f : HxY \longrightarrow \mathbb{R}$ $f(h,y) = h(y)$ que es s.c. se tiene que Y_f es metrizable para t_p luego t_p-separable y entonces $H_f = H$ es t_p-metrizable por **2.4**.

3.9 Teorema.

Sea X un espacio de Namioka que verifica D.C.C.C. Son equivalentes:

(a) X es de la clase $\mathcal{M}$.

(b) X verifica la propiedad C.C.C.

Demostración:

(a) $\Rightarrow$ (b) En virtud de **3.7**.

(b) $\Rightarrow$ (a) Por **3.5** X cumple la propiedad P.C.M. lo que nos dice que está en la clase $\mathcal{M}$.

Los espacios compactos son de Namioka y cumplen D.C.C.C. (por ser Lindelöf) y a ellos se les puede aplicar **3.9**. Así resulta que **3.9** es una mejora de un resultado de Morán y Rosenthal [Mo] y [Ro], en el que se afirma que para un espacio compacto es equivalente tener la propiedad C.C.C. o pertenecer a la clase $\mathcal{M}$. Se verá en otro capítulo que los espacios de Baire K-analíticos (en particular los espacios Čech-completos) son de Namioka; a estos espacios también se les puede aplicar **3.9** porque son Lindelöf.

El siguiente resultado de D. Helmer [Hr] relativo a espacios de Namioka es también consecuencia sencilla de los resultados de este capítulo. De hecho, obtenemos un resultado "más fino" ya que se demuestra que el espacio X tiene la propiedad P.C.M.

3.10 Teorema.

Sea X un espacio de Baire tal que $X = \overline{\cup X_n}$ donde X_n es una sucesión de conjuntos que son de Namioka y verifican la propiedad C.C.C. Entonces X es un espacio de Namioka.

Demostración:

Basta demostrar que como cada X_n posee la propiedad P.C.M. entonces X también la posee. En efecto, por **3.3** cada X_n posee la propiedad P.C.M. y si $H \subset C_p(X)$ es un t_p-compacto podemos considerar la función t_p-continua asociada $F : X \longrightarrow C_p(H)$ definida como $F(x) = \delta_x$. Por **3.4** $F(X_n)$ es $\| \ \|$-separable (si y sólo si t_p-separable) y $F(X) = F(\overline{\cup X_n}) \subset \overline{F(\cup X_n)}^{t_p}$ será t_p-separable por lo que usando **2.4** tendremos que H es t_p-metrizable. X posee la propiedad P.C.M. y por **2.14** es de Namioka.