4. ESPACIOS DE LA CLASE $\mathcal{N}^*$.

En el capítulo primero nos hemos encontrado los primeros ejemplos de espacios de la clase $\mathcal{N}^*$, en (2.7-b) hemos visto que los compactos metrizables se encuentran en ella, y más generalmente en (2.15) que los espacios con una base numerable en su topología también están en $\mathcal{N}^*$. A partir de estos primeros resultados podríamos preguntarnos si los espacios de Lindelöf o los espacios separables son espacios de co-Namioka, sin embargo, los dos siguientes ejemplos debidos a J.P.Lee y Z.Piotrowski [LP] dan una respuesta negativa a estas suposiciones y además prueban que tampoco los espacios métricos completos ni los localmente compactos son clases incluidas en la clase $\mathcal{N}^*$.

4.1 Ejemplo.

Existe un espacio hereditariamente Lindelöf y hereditariamente separable, que no pertenece a la clase $\mathcal{N}^*$.

Sea $X = [0,1]$, $Y = C_p([0,1],[0,1])$ y $f : X\text{x}Y \longrightarrow [0,1]$ la aplicación separadamente continua definida como $f(x,y) = y(x)$. La aplicación f no es conjuntamente continua en ningún punto, y, sin embargo, el espacio Y posee una *network* numerable, por lo que es hereditariamente Lindelöf y hereditariamente separable ([E],pag. 270 y 248).

4.2 Ejemplo.

Existe un espacio métrico completo y localmente compacto que no pertenece a la clase $\mathcal{N}^*$.

Sea $X = [0,1]$, $Y = \{ \dot{\bigcup} Y_\alpha \ ; \ \alpha \in [0,1] \}$ (unión disjunta) siendo $Y_\alpha = [0,1]$. $X \times Y$ es la unión disjunta de los compactos $X \times Y_\alpha$ con $\alpha \in [0,1]$.

Para cada $\alpha \in [0,1]$ consideremos una función separadamente continua $f_\alpha : X \times Y_\alpha \longrightarrow \mathbb{R}$ y que tenga algún punto de discontinuidad en $\{\alpha\} \times Y_\alpha$. Definiendo $f : X \times Y \longrightarrow \mathbb{R}$ como $f(x,y) = f_\alpha(x,y)$ para cada $(x,y) \in X \times Y_\alpha$ tenemos claramente una función separadamente continua que nos dice que Y no está en $\mathcal{N}^*$.

En este capítulo nos proponemos hacer un estudio de la clase $\mathcal{N}^*$; en especial de los conjuntos compactos que se encuentran en ella. Para ello, en primer lugar hacemos una pequeña incursión en la teoría de juegos topológicos.

Definimos un juego topológico que llamaremos G (juego de Choquet); para ello consideramos un espacio topológico X y dos jugadores α y β. El jugador β inicia el juego y en la enésima jugada, escoge un abierto no vacío U_n, el jugador α responde eligiendo un subconjunto abierto no vacío V_n de modo que $V_n \subset U_n$. A continuación β elige un abierto U_{n+1} tal que $U_{n+1} \subset V_n$ y así sucesivamente. Diremos que el jugador α gana la partida cuando

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} U_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} V_n \neq \emptyset.$$

Diremos que el espacio X es α-favorable (respectivamente β-favorable) si el jugador α (resp. β) tiene para este juego una estrategia ganadora. Como en principio ninguno de los jugadores tiene porqué tener una estrategia ganadora, tiene sentido considerar la clase más amplia de los espacios β-desfavorables (resp. α-desfavorables) definida como la de aquellos espacios X para los que β (resp. α) no tiene una estrategia ganadora para el juego G.

Los espacios de Baire se pueden caracterizar en términos de juegos topológicos como lo demuestra el siguiente resultado de J.Saint-Raymond [Sa].

4.3 Proposición.

Un espacio topológico X es β-desfavorable para el juego G si y solamente si X es un espacio de Baire.

Demostración:

Supongamos que X es un espacio β-desfavorable, es suficiente probar que si X no es de Baire, entonces β tiene una estrategia ganadora para el juego G. En este caso existe un abierto no vacío W que es de primera categoría, es decir, que W está contenido en $\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$ siendo los F_n conjuntos cerrados raros. Una estrategia t ganadora para β es, entonces, la definida por $t_1 = W$, $t_{n+1}(V_1,V_2,\ldots,V_n) = V_n \setminus F_n$ $n \geq 1$. Esto es, β empieza jugando W y responde al movimiento V_n de α mediante $V_n \setminus F_n$.

Si β juega con la estrategia t, los abiertos V_n elegidos por α verifican:

$$V_1 \subset W,\ V_{n+1} \subset V_n \setminus F_n \text{ para } n \geq 1, \text{ luego}$$

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} V_n \subset W \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n = \emptyset$$

lo que nos asegura la victoria del jugador β.

A continuación vamos a demostrar que si β posee una estrategia ganadora t para el juego G, entonces X no es un espacio de Baire. Más exactamente, el abierto $\Omega_1 = t_1$ es de primera categoría.

Pondremos $I_1 = \{\emptyset\}$, $U^1_\emptyset = \Omega_1$ y se construye por recurrencia para todo $n \geq 2$ una familia maximal $(U^n_i, V^{n-1}_i)_{i \in I_n}$ de parejas de abiertos no vacíos de X que satisfacen las siguientes condiciones:

Los $(U^n_i)_{i \in I_n}$ son dos a dos disjuntos.

$\forall\, n \geq 1$ y $\forall\, i \in I_{n+1}$ $\exists\, j \in I_n$ tal que $V^n_i \subset U^n_j$

$U^1_{i_1} \supset U^2_{i_2} \supset \ldots \supset U^n_{i_n} \Rightarrow U^n_{i_n} = tn\left(V^1_{i_2}, \ldots, V^{n-1}_{i_n} \right)$

Sea $\Omega_n = \bigcup \{U^n_i;\ i \in I_n\}$ y vamos a demostrar por recurrencia que Ω_n es denso en Ω_1, lo que es evidente para $n = 1$. Si la propiedad es válida para n y si W es un abierto no vacío disjunto con Ω_{n+1}, $W \cap \Omega_n$ será no vacío, luego existe $i_n \in I_n$ tal que $W \cap U^n_{i_n} \neq \emptyset$. Existirá entonces un único

$$(i_1, i_2, \ldots, i_n) \in I_1 x I_2 x \ldots x I_n \text{ tal que}$$

$$U^n_{i_n} \subset V^{n-1}_{i_n} \subset U^{n-1}_{i_{n-1}} \subset \ldots \subset V^1_{i_2} \subset U^1_{i_1}$$

Poniendo $V^n = W \cap U^n_{i_n}$ y $U^{n+1} = t_{n+1}\left(V^1_{i_2}, \ldots, V^{n-1}_{i_2}, V^n \right)$ se tendría que $U^{n+1} \subset V^n \subset W$, lo que demuestra que se podría añadir (U^{n+1}, V^{n+1}) a la familia $\left\{(U^{n+1}_i, V^n_i);\ i \in In\right\}$ contrariamente a su maximalidad.

Es suficiente demostrar que $\bigcap_{n=1}^{\infty} \Omega_n = \emptyset$ para probar que Ω_1 es de primera categoría (magro). Si "a" es un punto de $\bigcap_{n=1}^{\infty} \Omega_n$, existe una única sucesión $(i_n) \in \prod_{n=1}^{\infty} I_n$ tal que $a \in \bigcap_{n=1}^{\infty} U^n_{i_n}$. Pero entonces $\left[\left(V^n_{i_{n+1}} \right), \left(U^n_{i_n} \right) \right]$ es una partida del juego G compatible con la estrategia t, lo que nos indica que $\bigcap_{n=1}^{\infty} U^n_{i_n} = \emptyset$ contrariamente a la definición de a y de (i_n). Por lo tanto $\bigcap_{n=1}^{\infty} \Omega_n = \emptyset$ y concluimos la demostración.

Ahora estamos en condiciones de ver un ejemplo de M. Talagrand [Tal], que aparte de ponernos de manifiesto que no todos los espacios de Baire se encuentran en la clase $\mathcal{N}$, nos proporciona un espacio compacto que no se encuentra en la clase $\mathcal{N}^*$.

4.4 Ejemplo.

Existe un espacio α-favorable (por tanto Baire) que no está en la clase $\mathcal{N}$.

Demostración:

Sea I un conjunto no numerable fijado. Sea X el conjunto de funciones de I en {0,1} que tienen soporte numerable. Dotamos a X de la topología de la convergencia uniforme sobre las partes numerables. Es decir, los conjuntos de la forma $\{h \in X: h|_J = g|_J\}$ para $g \in X$ y J numerable, forman una base de abiertos para la topología de X.

Sea $\beta I = Y$ la compactificación de Stone-Čech de I. Podemos identificar X con un subconjunto de C(Y). Se considera la función f sobre XxY dada por $f(x,y) = x(y)$. Esta función es continua en X. En efecto, si y es adherente a una parte numerable J de I, el conjunto $U = \{h \in X; h|_J = x|_J\}$ es un entorno de x y $x'(y) = x(y)$ para todo $x' \in U$. En otro caso $f(x,y) = 0$ para todo x.

Veamos que el espacio X es α-favorable. Como estrategia de α fijamos una aplicación t que a cada abierto U de X asocia un conjunto V(U) del tipo $W(g,J) = \{h \in X: h|_J = g|_J\}$ tal que $W(g,J) \subset U$, donde $J \subset I$ es numerable y $g \in X$. Veamos que esta estrategia es ganadora, para ello hemos de ver que la sucesión $V(U_n)$ construida en una partida tiene intersección no vacía. Cada $V(U_n)$ es del tipo $W(g_n, J_n)$, como la sucesión $W(g_n, J_n)$ es decreciente, se tiene que $J_n \subset J_{n+1}$ y que g_n es la restricción de g_{n+1} a J_n. Sea $J = \bigcup_n J_n$, entonces existe g, nula fuera de J y tal que $g|_{J_n} = g_n$ para cada n, luego $g \in \bigcap V(U_n)$.

Finalmente, veamos que este espacio no es de Namioka, para lo que es suficiente con demostrar que para cualquier punto $h \in X$, f no es continua en algún punto de $\{h\}xY$, en otro caso, existe un entorno de h, que se puede suponer del tipo $W = W(h,J)$ tal que para todo $g,g' \in W$ y para cualquier $y \in Y$ se tiene que $|f(g,y)-f(g',y)| < 1/2$. Pero esto es imposible, pues si se considera $j \in I\setminus J$ existen $g \in W$ con $g(j) = f(g,j) = 0$ y $g' \in W$ con $g'(j) = f(g',j) = 1$ con lo que concluimos la demostración.

En este ejemplo el compacto tiene muchos puntos aislados por lo que f tiene muchos puntos de continuidad. Sin embargo, no se sabe si una función separadamente continua $f : XxY \longrightarrow \mathbb{R}$ con X un espacio de Baire e Y compacto ha de tener algún punto de continuidad conjunta. Este problema aparece planteado por M. Talagrand en [Ta1] y no parece de fácil solución.

El ejemplo anterior anima a intentar encontrar la mayor clase de compactos que se encuentra contenida en la clase $\mathcal{N}^*$. El siguiente ejemplo, obtenido también con la ayuda de juegos topológicos, inspirado en las mismas ideas que el ejemplo anterior se debe a R. Deville [D2] y nos dice que una clase tan amplia como la de los compactos separables no se encuentra contenida en $\mathcal{N}^*$.

4.5 Ejemplo.

El compactificado de Stone-Čech del conjunto de los números naturales, $\beta\mathbb{N}$, no está contenido en la clase $\mathcal{N}^*$.

Demostración:

Para ver esto, sea $\mathcal{U}$ un ultrafiltro no trivial en $\mathbb{N}$ y sea Y el conjunto de las sucesiones infinitas de ceros y unos considerado como subconjunto de $\ell^\infty(\mathbb{N})$. Dotamos a Y de la topología de la convergencia uniforme sobre las partes $A \subset \mathbb{N}$ tales que $A \notin \mathcal{U}$. Una base de abiertos para Y será, pues, la formada por los conjuntos $W(g,A) = \{f \in Y;\ f|_A = g|_A\}$ donde $g \in Y$, $A \subset \mathbb{N}$ y $A \notin \mathcal{U}$.

El espacio Y es separado y α-favorable, pues una táctica ganadora para el jugador α es, claramente, jugar con los abiertos de la forma $W(g,A)$. En efecto, hemos de ver que la sucesión $V(g_n,A_n)$ construida en una partida jugada con esta estrategia tiene intersección no vacia. Como la sucesión es decreciente, se tiene que $A_n \subseteq A_{n+1}$ y que g_n es la restricción de g_{n+1} a A_n, así, si g es tal que $g|_{A_n}$ coincide con g_n para todo $n \in \mathbb{N}$ es claro que $g \in \bigcap V(g_n,A_n)$.

Es claro que $Y = Y_0 \cup Y_1$ donde $Y_0 = \{f \in \mathcal{U}: \lim_{\mathcal{U}} f = 0\}$ e $Y_1 = \{f \in \mathcal{U}: \lim_{\mathcal{U}} f = 1\}$ son homeomorfos mediante la aplicación θ definida como $\theta((x_n)_{n\in\mathbb{N}}) = ((1-(x_n)_{n\in\mathbb{N}})$, siendo entonces Y_0 e Y_1 no magros. Sea $X = W(g,A) \cap Y_0$ (donde $g \in Y$, $A \subset \mathbb{N}$ y $A \notin \mathcal{U}$) un abierto relativo de Y_0, que será un espacio de Baire y consideremos, la inyección canónica $i : X \longrightarrow C(\beta\mathbb{N})$. Como en el ejemplo anterior se comprueba que i es continua si en $C(\beta\mathbb{N})$ se considera la topología t_p, pero no es continua en ningún punto si se considera la topología de la norma.

Desde luego, es evidente que la clase $\mathcal{N}^*$ es invariante para aplicaciones continuas, pero no es hereditaria, pues como después veremos, $[0,1]^I$ con I no numerable se encuentra en la clase $\mathcal{N}^*$ y los ejemplos anteriores nos proporcionan compactos que no están en $\mathcal{N}^*$. Otra propiedad genérica sobre los compactos que se encuentran en esta clase, es que si el conjunto de los puntos de acumulación de un compacto se encuentra en la clase $\mathcal{N}^*$, dicho compacto también lo está [D2].

A continuación hacemos un pequeño resumen de los resultados más importantes que se han ido obteniendo en los últimos años para centrar la cuestión.

Uno de los primeros resultados en sentido positivo relativo a los compactos de la clase $\mathcal{N}^*$ lo demostró R. Deville [D1] probando que los compactos de Eberlein se encuentran en dicha clase. K es un compacto de Eberlein si y sólo si C(K) es débilmente compactamente generado [AL].

Recordamos que un conjunto en un espacio Hausdorff X se dice *K-analítico (resp. numerablemente determinado)* si se puede expresar en la forma $\bigcup_{\sigma} K(\sigma)$ donde K es una aplicación semicontinua superiormente de $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ (resp. un subconjunto de $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$) en la familia de los subconjuntos compactos de X ($\{\sigma \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}: K(\sigma) \subset U\}$ es un abierto en $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ cuando U es abierto en X).

G. Debs demuestra en [Db3] ([Db4]) que si Y es un compacto tal que $C_p(Y)$ es K-analítico (numerablemente determinado) entonces $Y \in \mathcal{N}^*$. Estos tipos de compactos han sido estudiados por Talagrand [Ta2] y L. Vašák [Va], en particular es bien conocido que el espacio C(Y) puede ser numerablemente determinado sin ser

K-analítico.

Un espacio *compacto* K se dice *Corson* si se puede sumergir en algún cubo infinito $[0,1]^I$ tal que para cualquier $x \in K$, el conjunto $\{i \in I, x(i) > 0\}$ es a lo sumo numerable. Simplemente indicar que según un importante teorema de Gul'ko [G] los compactos antes descritos son Corson. Nuevamente G. Debs [Db1] demuestra que los compactos de Corson se encuentran incluidos en la clase $\mathcal{N}^*$.

Un *compacto* K se dirá de *Valdivia* si existe un conjunto I tal que K es homeomorfo a un subconjunto cerrado F de $[0,1]^I$ tal que $F \cap \Sigma(I)$ es denso en F, donde $\Sigma(I)$ representa el subconjunto de $[0,1]^I$ formado por las funciones x(i) que son nulas salvo a lo sumo en un conjunto numerable de I. En [AMN], S. Argyros, S. Mercourakis y S. Negropontis introducen este tipo de compactos que han sido ampliamente estudiados por M. Valdivia [VL] por lo que en [DG] ya aparecen con el nombre de compactos de Valdivia.

Todo compacto de Corson es un compacto de Valdivia, pues es homeomorfo a un subconjunto cerrado de $\Sigma(I)$ y además, los cubos $[0,1]^I$ con I no numerable son ejemplos de compactos Valdivia que no son Corson. En [DG] R. Deville y G. Godefroy demuestran que los compactos de Valdivia están en la clase $\mathcal{N}^*$. Como los compactos $\{0,1\}^I$ son de Valdivia tenemos que los compactos diádicos están en la clase $\mathcal{N}^*$ y en particular, los grupos topológicos compactos.

En otra dirección, R. Deville [D2] prueba que si η es un ordinal, el compacto $[0,\eta]$ de los ordinales que son menores o iguales que η dotado de la topología del orden usual también se encuentra en la clase $\mathcal{N}^*$. Si ω_1 es el primer ordinal no numerable y si ω_2 representa el primer ordinal de cardinalidad estrictamente mayor que ω_1, entonces $[0,\omega_1]$ es un compacto de Valdivia que no es Corson y $[0,\omega_2]$ no es un compacto de Valdivia [DG].

Con la ayuda de los juegos topológicos vamos a poder demostrar que una clase de compactos que engloba a todos los anteriormente mencionados, está incluida en la clase $\mathcal{N}^*$. En primer lugar introduzcamos la citada clase de compactos.

4.6 Definición.

Dado un compacto K diremos que verifica la *condición* $\mathcal{C}$ si existe una familia dirigida $\mathcal{H}$ de subconjuntos compactos de K cumpliendo:

(i) Cada $H \in \mathcal{H}$ es metrizable, $K = \overline{\bigcup \{H, H \in \mathcal{H}\}}$

(ii) Para cada $H \in \mathcal{H}$ existe una retracción continua $r_H : K \longrightarrow H$.

(iii) Si $H_1 \subset H_2 \subset \dots \subset H_n \subset \dots$ es una sucesión creciente en $\mathcal{H}$ entonces $H = \overline{\bigcup_{n\in\mathbb{N}} H_n}$ es un compacto de $\mathcal{H}$ y $r_H(x) = \lim_n r_{H_n}(x)$ para todo $x \in H$.

En esta situación, los espacios C(H) con $H \in \mathcal{H}$ se pueden identificar también con subespacios de C(K) complementados mediante proyecciones $\Pi_H : C(K) \longrightarrow C(H)$ definidas como $\Pi_H(f) = f|_H$. Cada $\varphi \in C(H)$ se puede identificar con la función $\hat{\varphi} \in C(K)$ definida por $\hat{\varphi} = \varphi \circ r_H$.

Si H_n es una sucesión como en (iii) es claro que $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} C(H_n)$ es un álgebra de funciones que distingue puntos en H, luego $C(H) = \overline{\bigcup_n C(H_n)}$. Aquí estamos identificando, de la misma manera que antes, a cada $C(H_n)$ con un subespacio complementado de C(H).

4.7 Lema.

Sea K un compacto que cumple la condición $\mathscr{C}$, X un espacio de Baire y $F : X \longrightarrow C_p(K)$ una aplicación de modo que existe un $\varepsilon > 0$ con $\operatorname{diam}(F(U)) > \varepsilon$ para cada abierto no vacío $U \subset X$.

Entonces dado un conjunto finito $\mathfrak{F} \subset C(K)$ y un abierto no vacío $U \subset X$ es posible encontrar un $H \in \mathscr{H}$ y un abierto no vacío $V \subset U$ verificando :

$$\forall\ x \in V,\ \forall\ g \in \mathfrak{F},\ \| \Pi_H(F(x)-g) \| > \varepsilon/3.$$

Demostración:

Los conjuntos $C_g = F^{-1}(\overline{B(g,\varepsilon/3)})$ son cerrados de interior vacío, luego $U \setminus \bigcup \{C_g : g \in \mathfrak{F}\}$ es no vacío.

Fijado un punto $a \in U \setminus \bigcup \{C_g : g \in \mathfrak{F}\}$ se cumple que $\| F(a)-g \| > \varepsilon/3 \ \ \forall\ g \in \mathfrak{F}$. Para cada $g \in \mathfrak{F}$, en virtud de (i), existe un $y_g \in \bigcup H$ tal que $| F(a)(y_g)-g(y_g)| > \varepsilon/3$ y como la familia $\mathscr{H}$ es dirigida, podemos encontrar $H \in \mathscr{H}$ con $\{y_g : g \in \mathfrak{F}\} \subset H$.

El abierto $V = \bigcap_{g\in\mathfrak{F}} \{x \in U : |F(x)(y_g)-g(y_g)| > \varepsilon/3\}$ es no vacío, $a \in V$ y cumple la condición pedida.

4.8 Teorema.

Si K es un compacto que cumple la condición $\mathscr{C}$ entonces pertenece a la clase $\mathcal{N}^*$.

Demostración:

Empezamos fijando en cada C(H), $(H \in \mathscr{H})$ un conjunto denso numerable $\{\psi_H^i : i \in \mathbb{N}\}$. Sea X un espacio de Baire y consideremos una función continua $F : X \longrightarrow C_p(K)$. Supongamos que F no es *huskable*, entonces existirán un $\varepsilon > 0$ y un abierto no vacío $W \subset X$

tal que diam(F(U)) > ε para cada abierto no vacío $U \subset W$.

Vamos a definir una estrategia para el jugador β en el juego G.

Como β empieza la partida, elige $V_0 = W$ y α responde con $U_0 \subset V_0$ y $U_0 \neq \emptyset$. Entonces β fija $H_0 \in \mathcal{H}$, fija $\mathfrak{F}_0 = \{\psi^1_{H_0}\}$, aplica el lema anterior y obtiene $H_1 \in \mathcal{H}$, $H_0 \subset H_1$ y un abierto $V_1 \subset U_0$, $V_1 \neq \emptyset$ verificando:

$$\forall\ x \in V_1\ ,\ \forall\ g \in \mathfrak{F}_0\ ,\ \| \Pi_{H_1}(F(x)-g) \| > \varepsilon/3.$$

Ahora el jugador α responde con $U_1 \subset V_1$ y $U_1 \neq \emptyset$, y entonces β considera el conjunto $\mathfrak{F}_1 = \{\psi^1_{H_0}, \psi^2_{H_0}, \psi^1_{H_1}, \psi^2_{H_1}\} \supset \mathfrak{F}_0$, y aplicando el lema anterior obtiene un $H_2 \in \mathcal{H}$, $H_1 \subset H_2$ y un abierto $V_2 \subset U_1$ no vacío verificando:

$$\forall\ x \in V_2\ ,\ \forall\ g \in \mathfrak{F}_1\ ,\ \| \Pi_{H_2}(F(x)-g) \| > \varepsilon/3.$$

La partida continúa según la estrategia así definida y se obtienen sucesiones $\mathfrak{F}_0 \subset \mathfrak{F}_1 \subset \mathfrak{F}_2 \subset \dots$, $H_0 \subset H_1 \subset H_2 \subset \dots$, y $V_0 \supset V_1 \supset V_2 \supset \dots$ de tal modo que

$$\mathfrak{F}_n = \{\psi^1_{H_0}, \dots, \psi^{n+1}_{H_0}, \psi^1_{H_1}, \dots, \psi^{n+1}_{H_1}, \dots, \psi^1_{H_n}, \dots, \psi^{n+1}_{H_n}\} \text{ y,}$$

$$\forall\ x \in V_{n+1}\ ,\ \forall\ g \in \mathfrak{F}_n\ ,\ \| \Pi_{H_n}(F(x)-g) \| > \varepsilon/3.$$

Como X es un espacio de Baire, el jugador α conoce una estrategia ganadora y, jugando con ella obtendrá que $\bigcap V_n \neq \emptyset$. Sea $x \in \bigcap V_n$ y $H = \overline{\bigcup H_n} \in \mathcal{H}$ entonces, $C(H) = \overline{\bigcup C(H_n)}$ y el conjunto $\mathfrak{F} = \bigcup \mathfrak{F}_n$ es denso en $\bigcup C(H_n)$ luego la clausura de $\mathfrak{F}$ es $C(H)$.

Ahora bien, para todo $g \in \mathfrak{F}$ tenemos que existe un $n \in \mathbb{N}$ de modo que $g \in \mathfrak{F}_{n-1}$ luego

$$\| \Pi_H (F(x)-g) \| \geq \| \Pi_{H_n} (F(x)-g) \| > \varepsilon/3$$

con lo que obtenemos una contradicción y concluimos así la demostración del teorema.

Si K es un compacto de Valdivia, para cada $M \subset I$ sea $r_M : [0,1]^I \longrightarrow [0,1]^I$ definida por $r_M(x) = x \cdot \aleph_M$ ($r_M(x)_j = x_j$ si $j \in M$ y $r_M(x)_j = 0$ si $j \in I \setminus M$). Desde luego, no parece claro que si $x \in K$ entonces $r_M(x)$ deba pertenecer a K, por esto, diremos que el conjunto M es *bueno* si $r_M(K) \subset K$. El lema siguiente nos asegura la existencia de muchos conjuntos buenos.

4.9 Lema.

Sea M un conjunto numerable, entonces existe un conjunto numerable bueno $M^* \subset I$ con $M \subset M^*$.

Demostración:

Sea $M_0 = M$. Supongamos definidos $M_0 \subset M_1 \subset \dots \subset M_n$, M_j numerable y $0 \le j \le n$. $r_{M_n}(K) \subset K$ es un compacto separable puesto que es metrizable ($r_{M_n}(K) = \{x \in [0,1]^I ; \operatorname{sop}(x) \subset M_n\}$) y es fácil ver que es posible fijar $\{ x_k^n : k \in \mathbb{N} \} \subset K \cap \Sigma(I)$ siendo $\{ r_{M_n}(x_k^n) : k \in \mathbb{N} \}$ denso en $r_{M_n}(K)$. Se define entonces $M_{n+1} = M_n \cup \bigcup_{k=1}^{\infty} \operatorname{sop}(x_k^n)$. De este modo $M^* = \bigcup M_n$ es bueno, pues si $x \in K$, $r_{M^*}(x)$ es adherente a $\{ x_k^n : k \in \mathbb{N}, n \in \mathbb{N} \}$ y por lo tanto $r_{M^*}(x) \in K$.

4.10 Proposición.

Si K es un compacto de Valdivia entonces cumple la condición $\mathscr{C}$.

Demostración:

Si M es un conjunto bueno, entonces $r_M : K \longrightarrow K$ es una retracción continua, y su imagen es el compacto $K_M = \{x \in K : \mathrm{sop}(x) \subset M\}$ que será metrizable si M es numerable.

Desde luego si $M_1 \subset M_2 \subset \dots \subset M_n \subset \dots$ es una sucesión creciente de subconjuntos buenos con $M_j \subset I$ entonces su unión $M = \bigcup_{j=1}^{\infty} M_j$ también es bueno, pues es claro que $r_M(x) = \lim_j r_{M_j}(x)$, y si $r_M(x) \in K$ se sigue que $r_M(x) \in K$, verificándose además que $K_M = \overline{\bigcup_j K_{M_j}}$.

Si consideramos $\mathcal{H}$ el conjunto dirigido de los compactos K_M con $M \subset I$ numerable y bueno, tendremos que se cumplen las condiciones de la definición **4.6** y además se tiene que $C(K) = \bigcup \left\{C(K_M) : K_M \in \mathcal{H}\right\}$ pues si $f \in C(K)$ existirá un $M \subset I$ numerable de modo que f sólo depende de las coordenadas en M. Con lo que concluimos la demostración.

La siguiente proposición nos dice que los compactos de ordinales, que como ya hemos indicado son una clase distinta a los compactos de Valdivia, también verifican la condición $\mathcal{C}$.

4.11 Proposición.

Si $K = [0,\Gamma]$ donde Γ es un ordinal, entonces verifica la condición $\mathcal{C}$.

Demostración:

Consideremos la familia $\mathcal{H}$ de los compactos metrizables de K, que coincide con la de los compactos numerables (pues si $H \subseteq K$ es un compacto metrizable entonces es separable y por **4.12** será numerable, y de otro modo, todo compacto numerable es segundo axioma de numerabilidad [E,3.1.21] y en consecuencia es metrizable). En este caso, la retracción que consideramos es la aplicación $r_H : K \longrightarrow H$ definida por:

$$r_H(x) = \min \{H \cap [x,\Gamma]\}$$

Como los subconjuntos separables de K son numerables, (4.12) se puede asegurar que dada una sucesión creciente (H_n) en $\mathcal{H}$ se tiene que $H = \overline{\bigcup_n H_n} \in \mathcal{H}$. Y por último, en este caso se puede probar fácilmente que $r_H(x) = \lim_n r_{H_n}(x)$, con lo que terminamos la demostración.

4.12 Lema.

Si $H \subset [0,\Gamma]$ es numerable entonces $\overline{H}$ es numerable.

Demostración:

Será suficiente con demostrar que H', conjunto de los puntos de acumulación de H, es numerable pues $\overline{H} = H \cup H'$. En efecto, por el principio de buena ordenación, para algún ordinal β se puede poner $H' = \{h_\alpha : 0 \le \alpha < \beta\}$, y $\alpha_1 < \alpha_2$ si y sólo si $h_{\alpha_1} < h_{\alpha_2}$. Ahora, para cada $\alpha \in [0,\beta)$ $h_{\alpha+1}$ es punto de acumulación de H luego existe $x_\alpha \in H$ tal que $h_\alpha < x_\alpha < h_{\alpha+1}$.

Entonces la aplicación $h_\alpha \longleftrightarrow x_\alpha$ es una biyección de $[0,\beta)$ sobre una parte de H. Luego $[0,\beta)$ es numerable.

La siguiente proposición es una sencilla caracterización de los espacios de Baire [Dbl].

4.13 Proposición.

Para un espacio X completamente regular son equivalentes:

(a) X es un espacio de Baire.

(b) Verifica $\mathcal{N}(X,K)$ para cualquier espacio compacto K que sea Corson.

Demostración:

Veamos que (b) $\Rightarrow$ (a). Esto lo vamos a demostrar a partir de **2.17** y **2.23**. En efecto, en el teorema **2.23**, dado un espacio X completamente regular que no es un espacio de Baire se obtiene, un compacto K, un espacio métrico compacto Z, un abierto no vacío $\Omega \subseteq X$ y una función separadamente continua $\varphi : XxK \longrightarrow Z$ de modo que φ no es continua en ningún punto de $\{a\}xK$ para cualquier $a \in \Omega$. El compacto K que se obtiene es $K = \prod_{n\in\mathbb{N}} Y_n$ donde Y_n es la compactificación de Alexandroff del producto de un espacio discreto I_n con el intervalo $[0,1]$ $(Y_n = (I_n x[0,1]) \cup \{\infty\})$. Notar que si I_n es un conjunto discreto, entonces su compactificado de Alexandroff por un punto $H = I_n \cup \{\infty\}$ es un compacto de Eberlein, pues se puede demostrar que es homeomorfo al subconjunto débil-compacto $\check{H} \subseteq C_0(I_n)$ definido como $\check{H} = \{e_\gamma : \gamma \in I_n\} \cup \{0\}$ donde $e_\gamma(\xi) = 1$ si $\xi = \gamma$ y $e_\gamma(\xi) = 0$ si $\xi \neq \gamma$. Por otra parte la aplicación $\varphi : (I_n \cup \{\infty\})x[0,1] \longrightarrow (I_n x[0,1]) \cup \{\infty\}$ definida como $\varphi(\alpha,x) = (\alpha,x)$ si $\alpha \neq \infty$ y $\varphi(\infty,x) = \infty$ para todo $x \in [0,1]$ es continua y sobreyectiva. Como la clase de los compactos de Corson engloba a la de los compactos de Eberlein y además es estable por aplicaciones continuas y productos numerables tendremos que K es un compacto de Corson.

Por otra parte, nos encontramos en las condiciones del lema **2.17** pues al ser el espacio métrico Z compacto, el t_p-compacto Y que allí se considera, es un compacto de Eberlein y como K es de Corson, KxY será un compacto de Corson y al suponer (b) tenemos que se cumple la condición $\mathcal{N}(X,KxY)$. El lema **2.17** nos asegura que para cualquier aplicación separadamente continua $\varphi : XxK \longrightarrow Z$ existe un $\mathcal{G}_\delta$-denso $X_0 \subseteq X$ de modo que φ es continua en cada punto de X_0xK.

De esta contradicción obtenemos que el espacio X tiene que ser un espacio de Baire.

La implicación (a) $\Rightarrow$ (b) se obtiene recordando que los compactos de Corson verifican la condición $\mathcal{C}$ y por lo tanto se encuentran en la clase $\mathcal{N}^*$.

La siguiente proposición es otro resultado estructural, recientemente obtenido por R. Deville [D2], relativo a espacios de la clase $\mathcal{N}^*$ que nos va a permitir obtener nuevos compactos que se encuentran en ella.

4.14 Proposición.

Sea K un espacio compacto y M un cerrado de K. Sea $L = K\backslash M \cup (\infty)$ el compactificado de Alexandroff de $K\backslash M$. Si L y M están en $\mathcal{N}^*$, entonces también lo estará K.

Demostración:

Sea X un espacio de Baire y $F : X \longrightarrow C_p(K)$ una aplicación continua, veamos que F es *huskable*; para ello supongamos dados un $\varepsilon > 0$ y un abierto no vacío $W \subset X$.

Sea $R : C_p(K) \longrightarrow C_p(M)$ la aplicación restricción definida como $R(f) = f|_M$, que evidentemente es continua, y la aplicación $G = R\circ F : X \longrightarrow C_p(M)$ lo será también. Como $M \in \mathcal{N}^*$, entonces existirá un abierto no vacío $U \subset W$ tal que $\|\ \|$-diam$(G(U)) < \varepsilon$.

Sea $x_0 \in U$ y consideremos la función $h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por:

$h(t) = t+\varepsilon \quad$ si $t \leq -\varepsilon$.

$h(t) = 0 \quad$ si $-\varepsilon \leq t \leq \varepsilon$.

$h(t) = t-\varepsilon \quad$ si $t \geq \varepsilon$.

La aplicación $\psi : U \longrightarrow C_p(K)$ definida por:

$$\psi(x)(z) = h[F(x)(z)-F(x_0)(z)]$$

con $x \in U$ y $z \in K$ es continua y $\psi(U) \subset \{f \in C(K) : R(f) = 0\}$ (pues si $z \in K$ entonces $|F(x)(z)-F(x_0)(z)| < \varepsilon$ para cualquier $x \in U$) que es isométrico a $\{f \in C_p(L) ; f(\infty) = 0\}$. Como $L \in \mathcal{N}^*$ y U es un espacio de Baire, tenemos que existe un abierto no vacío $V \subset U$ de modo que $\| \ \|$-diam$(\psi(V)) \leq \varepsilon$.

Si $x,x' \in V$ y $z \in K$ tenemos:

$$|h[F(x)(z)-F(x_0)(z)]-h[F(x')(z)-F(x_0)(z)]| \leq \varepsilon$$

Como evidentemente si $|h(u)-h(u')| \leq \varepsilon \Rightarrow |u-u'| \leq 3\varepsilon$ tenemos que

$$|F(x)(z)-F(x')(z)| \leq 3\varepsilon.$$

Así hemos encontrado un abierto no vacío $V \subset W$ con $\| \ \|$-diam$(F(V)) \leq 3\varepsilon$, por lo tanto F es *huskable* y $K \in \mathcal{N}^*$.

Seguidamente vamos a estudiar los compactos dispersos en la clase $\mathcal{N}^*$. Recordemos la definición:

Si K es un compacto, definimos $K^{(\xi)}$ para todo ordinal ξ por recurrencia transfinita. Para todo ordinal ξ, $K^{(\xi+1)}$ es el conjunto de los puntos de acumulación de $K^{(\xi)}$. Si ξ es un ordinal límite, entonces $K^{(\xi)} = \bigcap_{\eta<\xi} K^{(\eta)}$. La familia $K^{(\xi)}$ es una familia decreciente de compactos y se dice que el *compacto* K es *disperso* si existe un ordinal ξ tal que $K^{(\xi)} = \emptyset$.

La siguiente proposición de R.Deville [D2] prueba que una parte de los compactos dispersos se encuentran en la clase $\mathcal{N}^*$.

4.15 Proposición.

Si ω_1 es menor ordinal no numerable, y si K es un compacto disperso tal que $K^{(\omega_1)} = \emptyset$ entonces $K \in \mathcal{N}^*$.

Demostración:

Sea ξ el menor ordinal tal que $K^{(\xi)} = \emptyset$. Por compacidad de los $K^{(\xi)}$, ξ no es un ordinal límite, sea α tal que $\xi = \alpha+1$, α es numerable y $K^{(\alpha)}$ tiene que ser un conjunto finito que podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que se reduce a un punto que representaremos por ∞.

Demostraremos el resultado por recurrencia transfinita sobre α. Veamos en primer lugar el paso de α a $\alpha+1$, es decir, suponemos que todo compacto L tal que $L^{(\alpha)} = \{\infty\}$, se encuentra en la clase $\mathcal{N}^*$ y queremos demostrar que si K es un compacto tal que $K^{(\alpha+1)} = \{\infty\}$, éste, también se encuentra en la clase $\mathcal{N}^*$. Para ello, sea $M = K^{(\alpha)}$, M será el compactificado de Alexandroff de un conjunto discreto, luego es un compacto de Eberlein (si Γ es un conjunto discreto, entonces su compactificado de Alexandroff por un punto $H = \Gamma \cup \{\infty\}$ es un compacto de Eberlein, pues se puede demostrar que es homeomorfo al subconjunto débil-compacto $\check{H} \subseteq C_0(\Gamma)$ definido como $\check{H} = \{e_\gamma : \gamma \in \Gamma\} \cup \{0\}$ donde $e_\gamma(\xi) = 1$ si $\xi = \gamma$ y $e_\gamma(\xi) = 0$ si $\xi \neq \gamma$), que como sabemos se encuentra en la clase $\mathcal{N}^*$. Si llamamos L al compactificado de Alexandroff de $K \setminus M$, se tiene que $L^{(\alpha)} = \emptyset$, luego por hipótesis $L \in \mathcal{N}^*$ y aplicando la proposición anterior $K \in \mathcal{N}^*$.

Supongamos que α es un ordinal límite, queremos demostrar que si todo compacto L con $L^{(\eta)} = \emptyset$ y $\eta < \alpha$ pertenece a la clase $\mathcal{N}^*$, entonces un compacto K tal que $K^{(\alpha)} = \emptyset$ también pertenece a dicha clase. Es decir, que si X es un espacio de Baire, cualquier aplicación continua $F : X \longrightarrow C_p(K)$ es *huskable*.

Notemos en primer lugar, que para cualquier $\varepsilon > 0$ y para cualquier $f \in C(K)$, existe $\eta < \alpha$ tal que, para todo $x \in K^{(\eta)}$ se cumple $|f(x)-f(\infty)| < \varepsilon/2$. En efecto, puesto que si $\bigcap_{\eta<\alpha} K^{(\alpha)}$ se reduce al punto ∞, si damos un entorno abierto de este punto $V = \{x;\ |f(x)-f(\infty)| < \varepsilon/2\}$, por compacidad tendremos que existe un $\eta < \alpha$ de modo que $K^{(\eta)} \subseteq V$. Si ponemos:

$$F_\eta = \{y \in X;\ \forall\ x \in K^{(\eta)}:\ |F(y)(x)-F(y)(\infty)| \le \varepsilon/2\}$$

F_η es un cerrado de X y $X = \bigcup_{\eta<\alpha} F_\eta$; como X es un espacio de Baire y α numerable existe $\eta < \alpha$ tal que F_η es de interior V no vacío.

Si para cualquier número racional p, escribimos:

$$A_p = \{y \in V;\ \forall\ x \in K^{(\eta)}:\ |F(y)(x)-p| \le \varepsilon\}$$

V es un espacio de Baire cubierto por una familia numerable de cerrados A_p, por lo que podemos encontrar un número racional p de modo que A_p tenga interior W no vacío. Tenemos pues, para todo $y \in W$ y para todo $x \in K^{(\eta)}$ que $|F(y)(x)-p| < \varepsilon$.

Consideremos la función $h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por:

$$h(x) = x-p+\varepsilon \quad \text{si } x \le p-\varepsilon.$$

$$h(x) = 0 \quad \text{si } p-\varepsilon \le x \le p+\varepsilon.$$

$$h(x) = x-p-\varepsilon \quad \text{si } x \ge p+\varepsilon.$$

La función $G : W \longrightarrow C_p(K)$ definida por $G(x) = h \circ F(x)$ es continua y $G(W)$ está incluido en M, conjunto de las funciones continuas de $C(K)$ que se anulan sobre $K^{(\eta)}$. M es isométrico al conjunto de las funciones continuas sobre el compactificado de Alexandroff L de $K \setminus K^{(\eta)}$, nulas en el punto del infinito de L y $L^{(\eta)}$ se reduce a un punto. Aplicando la hipótesis de recurrencia a

L, existe un abierto $U \subset W$ de modo que $diam(G(U)) < \varepsilon$ y tendremos que $diam(F(U)) < 3\varepsilon$ (pues si $|h(u)-h(u')| < \varepsilon$ entonces $|u-u'| < 3\varepsilon$). Por lo tanto tendremos que F es *huskable* y con esto concluímos la demostración.

Este resultado nos permite preguntarnos si todos los compactos dispersos están en $\mathcal{N}^*$. La respuesta es negativa y además, en esta dirección no se pueden obtener mejores resultados como lo demuestra el siguiente contraejemplo debido a R. Haydon [H1] en el que se obtiene un compacto disperso de manera que $K^{(\omega_1)}$ se reduce a un sólo punto y no pertenece a la clase $\mathcal{N}^*$.

4.16 Ejemplo.

Hay un compacto disperso tal que $K^{(\omega_1)}$ se reduce a un sólo punto y no pertenece a la clase $\mathcal{N}^*$.

Demostración:

La demostración la haremos en varias fases:

Primera parte: Definición del espacio L.

Definimos L como la siguiente unión $L = \bigcup_{\alpha\in\omega} \omega_1^{\alpha}$. Entonces un elemento de L es una función t cuyo dominio, domt es algún ordinal numerable α y cuyo codominio es ω_1. Cuando $\alpha = 0$ hay un elemento de ω_1^{α}, a saber la "aplicación vacía" de $\emptyset$ a ω_1; representaremos por 0 este objeto trivial. Podemos mirar L como un árbol con un número no numerable de ramas de longitud ω_1. El orden-árbol en L viene dado por:

$$s \leq t \Leftrightarrow \mathrm{dom}s \leq \mathrm{dom}t \text{ y } t|_{\mathrm{dom}s} = s$$

si $t \in \omega_1^{\alpha}$ y $\xi \in \omega_1$ se define el elemento $t\cdot\xi \in \omega_1^{\alpha+1}$ por $(t\cdot\xi)|_{\alpha} = t$, $(t\cdot\xi)(\alpha) = \xi$.

Recordemos que el ordinal $\alpha+1$ es exactamente $\alpha \cup \{\alpha\}$. Los elementos $(t\cdot\xi)$ son los sucesores de t en el orden-árbol. Los predecesores de t son naturalmente las restricciones $t|_\gamma$ de t a ordinales $\gamma <$ domt. Definimos intervalos en L de la manera obvia; es decir $(s,t]$ se define como $\{r \in L: s < r \leq t\}$.

Dotamos a L de la topología del orden de manera usual. Declaramos a 0 como punto aislado, y como base de entornos del punto $t > 0$ los intervalos $(s,t]$ con $s < t$. Notar que si domt es un ordinal sucesor $\alpha+1$ entonces $\{t\} = (t|_\alpha,t]$ es un entorno de t, por lo tanto t es un punto aislado. Con mayor generalidad, cualquier intervalo $(s,t]$ en L es homeomorfo a un intervalo cerrado de ordinales, por lo tanto cada elemento t tiene un entorno abierto que es compacto y disperso. Así el espacio topológico L es disperso y localmente compacto.

Segunda parte: La propiedad de Namioka.

Vamos a demostrar que existe un espacio de Baire (B,τ) y una aplicación continua $\aleph : (B,\tau) \longrightarrow (C_0(L),t_p)$ tal que no hay ningún punto de continuidad de $\aleph : (B,\tau) \longrightarrow (C_0(L),\| \ \|)$.

Definimos B como el conjunto de todos los intervalos no vacíos $(s,t]$ en L y sea $\aleph(s,t]$ la función característica $1_{(s,t]}$, como cada $(s,t]$ es abierto y compacto en L, su función característica está en $C_0(L)$. Dotamos a B de la topología τ de modo que los abiertos de la base son de la forma:

$$\{I \in B: s_1,\dots,s_m \in I \text{ y } t_1,\dots,t_n \notin I\}$$

con $s_1,\dots,s_m$ y $t_1,\dots,t_n \in L$. Naturalmente, esto hace que la aplicación $\aleph : (B,\tau) \longrightarrow (C_0(L),t_p)$ sea una inyección continua. Desde luego $\aleph : (B,\tau) \longrightarrow (C_0(L),\| \ \|)$ es continua en I si y sólo si I es un punto aislado de B. Vamos a demostrar que L no tiene la propiedad de Namioka probando que B no tiene puntos aislados y que es un espacio de Baire.

Vamos a utilizar una notación especial para una clase de abiertos en B. Si $I = (s,t] \in B$ escribimos

$$E(I) = \{J \in B: s \notin J,\ t \in J \text{ y } t|_{(doms+1)} \in J\}$$

Desde luego es un conjunto abierto conteniendo a I y es fácil ver que admite la siguiente descripción algo más clara:

$$E(I) = \{(s,u] : u \in L \text{ y } u \geq t\}$$

Entonces E(I) debe leerse como el conjunto de todas las "extensiones de I".

Lema.

Una base de entornos de (s,t] en B está formada por los conjuntos

$$\text{§1} \qquad E((s,t],F) = \{(s,t]\} \cup \{(s,u]: u > t \text{ y } u(domt+1) \notin F\}$$

siendo F un subconjunto finito de ω_1.

Demostración:

Sea $G = \{J \in B : s_1,\ldots,s_m \in J \text{ y } t_1,\ldots,t_n \notin J\}$ un abierto de la base, entorno de $I = (s,t]$. Entonces $E(I) \cap G$ es también abierto y las restricciones impuestas a J con la condición $J \in E(I)$ fuerzan siempre a que $s_i \in J$ para todo i, mientras que $t_j \notin J$ siempre que $t_j \leq t$. Entonces podemos escribir

$$E(I) \cap G = \{J \in E(I): t'_1, t'_2, \ldots, t'_l \notin J\}$$

donde $domt'_j > domt$ para todo j. Entonces el entorno más pequeño de t dado por

$$\{J \in E(I): \text{para } 1 \leq j \leq l,\ t'_j|_{(domt+1)} \notin J\}$$

es del tipo especificado en §1.

Corolario.

Si I está en B y G es un entorno abierto de I entonces existe $J \in B$ tal que $E(J) \subseteq G$. En particular B no tiene puntos aislados.

Demostración:

Por el lema anterior sabemos que G contiene un conjunto abierto de la forma $E((s,t],F)$. Si tomamos $\xi \in \omega_1 \setminus F$ entonces $E(s,t\cdot\xi] \subset G$.

Lema.

Sea I_n $(n \in \omega)$ una sucesión en B tal que $E(I_0) \supseteq E(I_1) \supseteq \ldots$ Entonces existe $I \in B$ tal que $\bigcap_{n\in\omega} E(I_n) = E(I)$.

Demostración:

Los intervalos I_n pueden ser de la forma $(s,t_n]$ con $t_0 \leq t_1 \leq \ldots$ Si $t = \lim t_n$ (esto es, si $\mathrm{dom}t = \bigcup_{n\in\omega} \mathrm{dom}t_n$ y $t|_{\mathrm{dom}t_n} = t_n$ $\forall n$) entonces un intervalo extiende a $(s,t]$ si y sólo si extiende a todos los $(s,t_n]$.

Proposición.

El espacio B es un espacio de Baire.

Demostración:

Se sigue fácilmente del corolario y lema anteriores que una intersección numerable de abiertos densos en B contiene un abierto denso.

Finalmente, decir que si K es la compactificación por un punto del espacio L, entonces $K^{(\omega_1)}$ se reduce a un punto y por todo lo anterior obtenemos que no pertenece a la clase $\mathcal{N}^*$.

5 ESPACIOS DE LA CLASE $\mathcal{N}$

En primer lugar antes de obtener nuevos resultados relativos a espacios de la clase $\mathcal{N}$ necesitamos recordar algunas definiciones.

Un espacio Hausdorff X se dice "*fuertemente numerablemente completo y regular*" (F.N.C.) si es regular y cumple la condición P:

Existe una sucesión $\mathcal{A}_n$ (es conveniente hacer $\mathcal{A}_0 = \{X\}$) de cubrimientos abiertos de X con la propiedad de que cualquier sucesión de conjuntos cerrados no vacíos $F_0 \supseteq F_1 \supseteq F_2 \supseteq \ldots$ con $F_n \subseteq U_n \in \mathcal{A}_n$ para cada n se tiene que $\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n \neq \emptyset$. Un espacio localmente numerablemente compacto es F.N.C. Desde luego un subespacio cerrado de un espacio F.N.C. sigue siendo F.N.C., sin embargo el producto de dos espacios F.N.C. no es, en general, un espacio F.N.C. [F].

Un espacio completamente regular que cumple la condición P se dice Čech-completo. Los espacios métricos completos ($\mathcal{A}_n$ familia de abiertos con diámetro menor que 1/n) y los localmente compactos ($\mathcal{A}_n$ familia de abiertos relativamente compactos) son Čech-completos. Todo subespacio cerrado y todo $\mathcal{G}_\delta$ en un espacio Čech-completo sigue siendo Čech-completo, y el producto numerable también resulta un espacio Čech-completo. Estos espacios son de Baire y se caracterizan por ser un G_δ en alguna (todas) compactificación [E]. Evidentemente un espacio Čech-completo es F.N.C.

A continuación necesitamos otro juego topológico al que llamaremos (G_σ), juego introducido por Christensen y Saint-Raymond, que es algo más restrictivo que el juego (G) que estudiamos en el tema 4. En este juego se enfrentan dos jugadores α y β; el jugador β escoge un primer abierto no vacío U_1 y en la enésima tirada cuando β ha escogido el abierto no vacío U_n entonces α escoge un abierto no vacío $V_n \subseteq U_n$ y un punto $x_n \in X$, es decir, la tirada del jugador α es el par (V_n,x_n).

El jugador α gana la partida en G_σ si la sucesión (x_n) tiene al menos un punto adherente en $\bigcap_{n=1}^{\infty} V_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} U_n$. Las nociones de $(\alpha$-$\sigma)$-favorables, $(\beta$-$\sigma)$-favorables, $(\alpha$-$\sigma)$-desfavorables y $(\beta$-$\sigma)$-desfavorables para el juego de G_σ se definen como hicimos para el juego G.

La siguiente proposición nos establece una primera relación entre los espacios introducidos hasta ahora.

5.1 Proposición.

Si X es un espacio F.N.C. entonces es un espacio $(\alpha$-$\sigma)$-favorable.

Demostración:

Será suficiente con demostrar la existencia de una estrategia ganadora Δ para el jugador α en el juego G_σ en el espacio X.

Si A es un subconjunto de X, sea

$$n(A) = \sup \{k : \forall\, n \leq k,\ \exists\, U_n \in \mathcal{A}_n \text{ con } A \subseteq U_n\}.$$

Si U es un abierto no vacío en X la primera coordenada V de $\Delta(U) = (V,x)$ viene dada por un conjunto cualquiera abierto no vacío V de U con $\overline{V} \subseteq U$ y $n(\overline{V}) \geq n(\overline{U})+1$ y, elegimos cualquier punto

$x \in V$ como segunda coordenada de $\sigma(U)$. Entonces la estrategia σ así construida es ganadora. En efecto, si suponemos jugada la partida de modo que α ha llevado esta estrategia obtenemos una sucesión (U_n, V_n) con $\sigma(U_n) = (V_n, x_n)$ y es claro que $\bigcap_{n=1}^{\infty} U_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} V_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{V}_n \neq \emptyset$ pues por construcción los conjuntos $\overline{V}_n$ forman una sucesión decreciente de cerrados que están incluidos en algún abierto del cubrimiento $\mathcal{A}_n$ lo que nos asegura que la intersección sea no vacía al ser el espacio F.N.C. Además es claro que los puntos adherentes de la sucesión de los x_n se encuentran en dicha intersección.

I. Namioka demuestra en [Na1] que los espacios F.N.C. están en la clase $\mathcal{N}$ (es el primer artículo relevante sobre este tema y por el que los espacios de la clase $\mathcal{N}$ reciben su nombre). Posteriormente J.P.R.Christesen [Ch1] aplicando las técnicas de juegos topológicos generalizó este resultado a espacios $(\alpha\text{-}\sigma)$-favorables como vemos en la siguiente proposición.

5.2 Proposición.

Si X es un espacio $(\alpha\text{-}\sigma)$-favorable entonces X está en la clase $\mathcal{N}$.

Demostración:

Supongamos que Y es un espacio compacto y $F : X \longrightarrow C_p(Y)$ una aplicación continua. El conjunto de puntos de X en los que la aplicación F es continua en la norma de C(Y) lo podemos escribir como:

$$\mathrm{Cont}(F) = \bigcap_{n=1}^{\infty} O_n(F); \quad O_n(F) = \bigcup \{V \text{ abierto de } X \text{ y } \operatorname{diam} F(V) < 1/n\}$$

Como el espacio X es $(\alpha\text{-}\sigma)$-favorable será desde luego favorable para el juego G y por tanto será un espacio de Baire (4.3). Así, si cont(F) no es denso es porque algún abierto $O_n(F)$ no es denso, luego existe un abierto no vacío W y un $n_0 \in \mathbb{N}$ tales que $O_n(F) \cap W = \emptyset$, es decir, que para cualquier subconjunto abierto no vacío $V \subseteq W$ tenemos que $diam(F(V)) > 1/n_0$.

De este modo, restringiéndonos a W, podemos reducirnos al caso de un espacio X para el que existe un número $k > 0$ de manera que la imagen por F de todos sus abiertos no vacíos tiene diámetro mayor que k.

Empezamos el juego topológico entre los jugadores α y β. Naturalmente α juega de acuerdo con una estrategia ganadora, mientras que el jugador β lo hace del siguiente modo:

En el primer movimiento β elige como U_1 el espacio X y α le responde $\Delta(U_1) = (V_1, x_1)$. Supongamos que en la (n-1)-sima (con $n \geq 2$) tirada β elige U_{n-1} y α elige $\Delta(U_{n-1}) = (V_{n-1}, x_{n-1})$ siempre de acuerdo con su estrategia ganadora. Para el enésimo movimiento de β consideramos el compacto:

$$H_n = conv(\{F(x_1), F(x_2), \ldots, F(x_{n-1})\}).$$

Vamos a demostrar que $C_n = \{x \in X \ / \ d(F(x), H_n) \leq k/3\}$ tiene interior vacío en X (desde luego es cerrado). Para ver esto notemos que $\check{H}_n = \{f \in C(Y) \ / \ d(f, H_n) \leq k/3\}$ puede ser cubierto por un número finito de bolas cerradas centradas en H_n y de radio $5k/12$ mediante un sencillo argumento de compacidad (H_n por ser compacto, puede ser cubierto por un número finito de bolas cerradas centradas en puntos de H_n y de radio $k/12$; las bolas cerradas centradas en esos puntos y de radio $5k/12$ es claro que cubren $\check{H}_n$). La imagen inversa de estas bolas da un cubrimiento finito de C_n mediante conjuntos cerrados. Si el interior de C_n

fuese no vacío, alguno de estos cerrados tendría interior no vacío, lo que es imposible, pues su imagen mediante F tendría diámetro inferior a 10k/12, lo que es contradictorio. Entonces β escoge su abierto disjunto con C_n.

Escogemos $x_\infty \in \bigcap_{n=1}^{\infty} V_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} U_n$ adherente a los x_n (el conjunto de puntos elegidos por α usando su estrategia ganadora Δ). Así, $F(x_\infty)$ será adherente a los $F(x_n)$ en la topología t_p de C(Y) y podemos escoger una subsucesión $F(x_{n_p})$ que tiende débilmente a $F(x_\infty)$. En este caso sabemos que existe una sucesión formada por combinaciones convexas de $F(x_{n_p})$ que converge a $F(x_\infty)$. Pero la distancia de $F(x_\infty)$ a cualquier combinación convexa de los $F(x_n)$ es al menos k/3. Esta contradicción termina la demostración de la proposición.

Observación:

En la demostración anterior es claro que lo único que se necesita es que la estrategia empleada por β no sea ganadora, es decir, que existe una partida, donde β juega con la estrategia descrita, y que gana α, por lo que es suficiente con que el espacio X sea $(\beta\text{-}\sigma)$-desfavorable.

A continuación podemos ver dos nuevos ejemplos de espacios que se encuentran en la clase $\mathcal{N}$.

5.3 Ejemplo.

Los espacios casi-Čech-completos son espacios de Namioka.

Empezamos recordando que una pseudobase en un espacio topológico X, es una colección $\mathcal{P}$ de subconjuntos abiertos de manera que cualquier abierto no vacio contiene un elemento de $\mathcal{P}$. Un espacio topológico se dice *casi-Čech-completo* si y sólo si admite una sucesión completa de pseudobases $(\mathcal{U}_n)$ donde la completitud se define del siguiente modo:

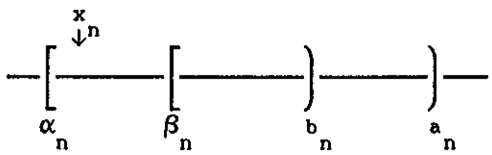
Si F_n es una sucesión decreciente de cerrados no vacios en X de modo que para cada $n \in \mathbb{N}$ existe $U_n \in \mathcal{U}_n$ con $F_n \subseteq U_n$, entonces $\bigcap_n F_n \neq \emptyset$.

Un espacio topológico X es casi-Čech-completo si y sólo si admite un subconjunto $\mathcal{G}_\delta$-denso que es Čech-completo [AaL]. Así los espacios casi-Čech-completos son espacios de Baire.

Como por **5.1** y **5.2** los espacios Čech-completos (que son Baire) son espacios de Namioka, entonces las proposiciones **1.5** y **1.1** nos aseguran que también los espacios casi-Čech-completos son espacios de Namioka.

5.4 Ejemplo.

Recordemos que la *recta de Sorgenfrey* es la recta real dotada de la topología generada por los intervalos semiabiertos por la derecha $[a,b)$. Es sencillo probar que este espacio es α-favorable (juego G) y por tanto un espacio de Baire. Sin embargo, no es un espacio $(\alpha$-$\sigma)$-favorable (juego G_σ). En efecto, pues si suponemos que el jugador α en la enésima tirada elige el par (x_n, I_n) donde $x_n \in I_n = [\alpha_n, a_n)$ entonces, el jugador β podrá elegir el conjunto $J_n = [\beta_n, b_n)$ del siguiente modo:



Entonces para cualquier $x \in \bigcap I_n = \bigcap J_n \neq \emptyset$ se tendrá que $x_n < x$ por lo que x no puede ser un punto adherente a los x_n en esta topología.

Este espacio, sin embargo, es un espacio de Namioka por ser Baire y separable (**2.7 a**).

Antes de seguir adelante recordemos un par de definiciones. Si $\mathcal{S}$ es una familia de conjuntos en un espacio topológico X, decimos que un subconjunto de X es un *$\mathcal{S}$-Souslin* si se puede expresar como $\bigcup \{ \bigcap_{n=1}^{\infty} S(\sigma|n);\ \sigma \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \}$ con $S(\sigma|n) \in \mathcal{S}$ para toda sucesión finita de números naturales $\sigma|n$.

Un conjunto $M \subset X$ se dice que tiene la *propiedad de Baire* (P.B.) si existe un subconjunto abierto G de modo que $M\Delta G = (M\setminus G) \cup (G\setminus M)$ es de primera categoría en X. La clase de los subconjuntos de un espacio topológico que tiene la propiedad de Baire es cerrada bajo la operación de Souslin y desde luego, contiene a los conjuntos $\mathcal{F}\cup\mathcal{G}$. Además, un conjunto M tiene la P.B. si y sólo si $M = G \cup P$ donde G es un $\mathcal{G}_\delta$ y P es de primera categoría [A].

Un espacio completamente regular X se dice *Čech-analítico* si existe un compacto Hausdorff K tal que X es homeomorfo a un $(\mathcal{F}\cup\mathcal{G})$-Souslin de K. Según un importante teorema de D.H.Fremlin, relativo a este tipo de espacios, esto es equivalente a que el espacio X sea un $(\mathcal{F}\cup\mathcal{G})$-Souslin de βX (Una demostración de este teorema se puede encontrar en [JNR1]). Un espacio Čech-completo es un $\mathcal{G}_\delta$ en un espacio Hausdorff compacto luego es Čech-analítico.

El siguiente teorema de tipo Namioka es un teorema de G. Debs, del que damos una sencilla demostración utilizando aplicaciones *fragmentables*.

5.5 Teorema.

Sea X un espacio completamente regular. $F : X \longrightarrow C_p(K)$ una función t_p-continua donde K es un compacto y $\|F(x)\|_\infty \leq 1 \ \forall\ x \in X$.

Sea $\hat{F} : \beta X \longrightarrow [-1,1]^K$ la extensión al compactificado de Stone-Čech de X. Se supone que existe un conjunto A tal que $X \subset A \subset \beta X$ con la propiedad de Baire (P.B.) y tal que $\hat{F}(A) \subset C_p(K)$.

Entonces Cont(F) es un $\mathcal{G}_\delta$-denso.

Demostración:

Como A tiene P.B. entonces existe un $\mathcal{G}_\delta$ $T \subset \beta X$ tal que $T \subset A$ y $A \setminus T$ es de primera categoría en βX. Si consideramos la restricción $\hat{F}|_T : T \longrightarrow C_p(K)$, como T es Čech-completo (es un $\mathcal{G}_\delta$ en el compacto βX) es un espacio de Baire y de la clase $\mathcal{N}$ por **5.1** y **5.2**, además cada subespacio cerrado relativo a T también es Čech-completo, así $\hat{F}|_T$ tiene la propiedad P.C. en un espacio hereditariamente Baire y por **1.2** tendremos que es *fragmentable* luego $\hat{F}|_{T\cap X}$ también será *fragmentable* y, en consecuencia, *huskable*. Como $T \cap X$ es denso en X (porque $T \cap X$ es un conjunto residual en un espacio de Baire) la proposición **1.5** nos dice que la aplicación $F : X \longrightarrow C_p(K)$ es *huskable* y como X es Baire, el conjunto de los puntos de continuidad de F en norma es un $\mathcal{G}_\delta$-denso (**1.1**).

5.6 Corolario.

Si X es un espacio de Baire Čech-analítico entonces, está en la clase $\mathcal{N}$.

Demostración:

Es consecuencia del teorema anterior tomando X = A pues X, al ser Čech-analítico, es un $(\mathcal{F}\cup\mathcal{G})$-Souslin de βX y por tanto tiene la propiedad de Baire en βX.

5.7 Ejemplo.

Un espacio Web-compacto de Baire es de Namioka.

Recordemos que un espacio topológico se dice *Web-compacto* si existe un subconjunto no vacio Σ de $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ y una familia $\{A_\alpha : \alpha \in \Sigma\}$ de subconjuntos de X de modo que si $\alpha = (a_n) \in \Sigma$, $m \in \mathbb{N}$ y ponemos

$$C_{a_1,a_2,\ldots,a_m} = \bigcup \{A_\alpha : \beta \in \Sigma \text{ y } \beta|_m = \alpha|_m\}$$

entonces se satisfacen las siguientes condiciones:

(i) $\overline{\bigcup \{A_\alpha : \alpha \in \Sigma\}} = X$.

(ii) Si $\alpha = (a_n) \in \Sigma$ y $x_m \in C_{a_1,a_2,\ldots,a_m}$, $m = 1,2,\ldots$ entonces la sucesión (x_n) tiene un punto adherente en X.

Esta clase de espacios fue introducida por J.Orihuela en [O] y en [CO] B.Cascales y J.Orihuela demuestran que si $K \subset C_p(X)$ es un compacto entonces K es un compacto de Gul'ko y por tanto es un compacto de Corson [G]. La clase de los espacios Web-compactos engloba a la de los numerablemente determinados [O].

Los compactos de Corson se encuentran en la clase $\mathcal{N}^*$ (**4.8** y **4.10**) y por **2.16** tenemos que si X es un espacio Web-compacto de Baire entonces pertenece a la clase $\mathcal{N}$.

Observación.

Queda claro que los espacios topológicos X de Baire, que son

K-analíticos o numerablemente determinados, son espacios de Namioka (p.e. son Čech-analíticos). Indicar aquí, que después del trabajo de Christensen relativo a espacios de Namioka y juegos topológicos [Ch1], la herramienta de los juegos ha sido ampliamente utilizada por un buen número de autores para el estudio de los espacios de la clase $\mathcal{N}$. Y en este punto es importante recordar los trabajos de G.Debs en los que demuestra que los espacios K-analíticos (resp. numerablemente determinados) son $(\alpha$-$\sigma)$-favorables (resp. $(\beta$-$\sigma)$-desfavorables) [Db3] y [Db4], dando de este modo la primera prueba de que estas clases de espacios se encuentran en la clase $\mathcal{N}$ (5.2).

6 σ-FRAGMENTABILIDAD.

En los capítulos anteriores, hemos estudiado tipos de espacios que están en las clases $\mathcal{N}$ y $\mathcal{N}^*$. En este capítulo obtendremos un refinamiento de los resultados anteriores, en un sentido que precisamos a continuación.

Diremos que un espacio X pertenece a la *clase* $\mathcal{A}$ si para cualquier compacto K se tiene que cualquier aplicación t_p-continua $F : X \longrightarrow C_p(K)$ es *σ-fragmentable.*

Diremos que un espacio compacto K pertenece a la *clase* $\mathcal{B}$ si la aplicación identidad $i : (C(K),t_p) \longrightarrow (C(K),\| \ \|)$ es *σ-fragmentable.*

Es claro que si $X \in \mathcal{A}$ siendo un espacio de Baire entonces por **(1.9)** está en la clase $\mathcal{N}$; mientras que si K es compacto que pertenece a la clase $\mathcal{B}$ tendremos que para cualquier espacio de Baire X las aplicaciones t_p-continuas $F : X \longrightarrow C_p(K)$ serán *σ-fragmentables* ($F : X \longrightarrow (C(K),\| \ \|)$ es *σ-fragmentable* al ser composición de una aplicación *σ-fragmentable* –i– con una aplicación continua) y de nuevo **(1.9)** nos dice que el compacto K pertenece a la clase $\mathcal{N}^*$.

En el capítulo 2 tenemos algunos ejemplos de espacios que se encuentran en la clase $\mathcal{A}$, como son:

–Los espacios de Baire separables **(2.7-a)**.

–Los espacios hereditariamente Baire con la propiedad de Kaplansky **(2.8)**.

–Los espacios compactos **(2.9)**.

-Los espacios metrizables (2.11) y más generalmente, los espacios de la clase $\mathcal{M}$ (2.14).

Los resultados correspondientes a la primera parte de este capítulo son pequeñas adaptaciones de dos importantes teoremas que aparecen en [JNR1] y [JNR2]. Los cuales nos van a proporcionar nuevos ejemplos de espacios de las clases $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$. Apoyándonos en ésto, en la última parte del capítulo se propone un nuevo modo de obtener resultados de tipo Namioka y co-Namioka.

En este capítulo estudiamos detenidamente las clases $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$, obteniendo algunos resultados nuevos de tipo Namioka. Empezamos introduciendo un nuevo concepto que utilizaremos frecuentemente en el presente capítulo.

Sea $D = 2^{(\mathbb{N})} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{0,1\}^n$ el conjunto de las sucesiones finitas de ceros y unos, y sea $p : D \longrightarrow X$ una aplicación con $p(D) = H$. Dada $\sigma \in D$ de longitud n ($|\sigma| = n$) se definen:

$H(\sigma,0) = \{p(\tau) : |\tau| > n,\ \tau_1 = \sigma_1,\dots,\tau_n = \sigma_n,\ \tau_{n+1} = 0\}$

$H(\sigma,1) = \{p(\tau) : |\tau| > n,\ \tau_1 = \sigma_1,\dots,\tau_n = \sigma_n,\ \tau_{n+1} = 1\}$

Si $F : X \longrightarrow (E,d)$ es una función continua de manera que para cada $x \in \overline{H(\sigma,0)}$ y cada $y \in \overline{H(\sigma,1)}$ se verifica que $d(F(x),F(y)) \geq \varepsilon$ entonces diremos que $\{p(\sigma) : \sigma \in D\}$ es un $(\varepsilon\text{-}F)$-árbol para la distancia d.

En lo que sigue la distancia d se supone siempre semicontinua inferiormente respecto a una topología η dada en E.

6.1 Lema.

Supongamos que $F : X \longrightarrow (E,\eta)$ es una aplicación continua, si existe un $(\varepsilon\text{-}F)$-árbol relativamente compacto $\{p(\sigma) : \sigma \in D\}$ en X, entonces existe un compacto perfecto $\Delta \subset X$ y una función continua sobreyectiva $\varphi : \Delta \longrightarrow 2^{\mathbb{N}}$ verificando que si $\sigma,\tau \in 2^{\mathbb{N}}$, $\sigma \neq \tau$, $\varphi(x) = \sigma$, $\varphi(y) = \tau$ entonces $d(F(x),F(y)) \geq \varepsilon$.

Demostración:

Supongamos que $F : X \longrightarrow (E,\eta)$ es continua y que d es semicontinua inferiormente respecto a la topología η. Supongamos que $\{p(\sigma) : \sigma \in D\}$ es un $(\varepsilon\text{-}F)$-árbol relativamente compacto. Para cada $\sigma \in D$ consideremos el compacto $H(\sigma) = \overline{\{p(\tau) : \tau \geq \sigma\}}$ donde $\tau \geq \sigma$ significa que $|\tau| \geq |\sigma| = n$ y $\tau_1 = \sigma_1,\ldots,\tau_n = \sigma_n$.

Como $p(\sigma) \in H(\sigma)$, $H(\sigma)$ es no vacío y el conjunto $\Delta = \bigcap \{\{\bigcup H(\sigma) : |\sigma| = n\} : n \geq 1\}$ es compacto. En efecto, pues los conjuntos $\{H(\sigma) : |\sigma| = n\}$ son compactos disjuntos al tener imágenes mediante F ε-separadas para la distancia d. Para cada $x \in \Delta$, sea $\sigma \in 2^{\mathbb{N}}$ la única sucesión de ceros y unos tal que $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} H(\sigma_1,\sigma_2,\ldots,\sigma_n)$. Definimos $\varphi(x) = \sigma$. Para cada $\sigma \in 2^{\mathbb{N}}$ el conjunto $\varphi^{-1}(\sigma) = \bigcap_{n=1}^{\infty} H(\sigma_1,\sigma_2,\ldots,\sigma_n)$ es un compacto no vacío, luego $\varphi : \Delta \longrightarrow 2^{\mathbb{N}}$ es sobreyectiva.

Es fácil ver que φ es continua, pues si $(\sigma_1,\sigma_2,\ldots,\sigma_r) = \sigma|_r$ es una sucesión finita y si

$$I(\sigma|_r) = \{\tau \in 2^{\mathbb{N}} \ ; \ \tau_1 = \sigma_1,\ldots,\tau_r = \sigma_r\}$$

la continuidad de φ la obtendremos simplemente probando que $\varphi^{-1}(I(\sigma|_r))$ es un abierto relativo a Δ. Pero $\varphi^{-1}(I(\sigma|_r))$ coincide con el conjunto compacto $\bigcap_{s=r}^{\infty} \bigcup \{ H(\tau|_s) : \tau|_r = \sigma|_r \}$ luego $\varphi^{-1}(I(\sigma|_r))$ es el complementario en H de los 2^r-1 subconjuntos compactos $\varphi^{-1}(I(\tau|_r))$ con $\tau|_r \neq \sigma|_r$ y por tanto es un abierto relativo en Δ.

Se verifica que $\sigma,\tau \in 2^{\mathbb{N}}$; $\sigma \neq \tau$ y $n = \min \{j : \sigma|_j \neq \tau|_j\}$ entonces $\varphi^{-1}(\sigma)$ y $\varphi^{-1}(\tau)$ son subconjuntos de $H(\sigma|_n)$, $H(\tau|_n)$ por lo que sus imágemes mediante F están ε-separadas para la distancia d.

Si $\{L_\gamma : 0 \le \gamma < \Gamma\}$ es una familia bien ordenada decreciente de subconjuntos compactos que satisfacen $\varphi(L_\gamma) = 2^{\mathbb{N}}$ para $0 \le \gamma < \Gamma$ entonces el conjunto $L = \bigcap \{L_\gamma : 0 \le \gamma < \Gamma\}$ es un compacto cumpliendo $\varphi(L) = 2^{\mathbb{N}}$. Entonces el lema de Zorn nos permite elegir un compacto minimal Δ con la condición de que $\varphi(\Delta) = 2^{\mathbb{N}}$. Probaremos que Δ es perfecto. Si x fuese un punto aislado de Δ entonces, $\Delta\setminus\{x\}$ sería un subconjunto compacto propio de Δ. Como Δ es minimal $\varphi(\Delta\setminus\{x\}) \neq 2^{\mathbb{N}}$ y por lo tanto el punto $\{\varphi(x)\}$ sería el complementario en $2^{\mathbb{N}}$ del compacto $\varphi(\Delta\setminus\{x\})$. Así $\varphi(x)$ sería un punto aislado en el conjunto perfecto $2^{\mathbb{N}}$. Esta contradicción nos prueba que Δ es perfecto.

6.2 Proposición.

Sea $F : X \longrightarrow (E,\eta)$ continua y d una métrica semicontinua inferiormente respecto a η. Entonces son equivalentes:

(a) $F|_K$ es *huskable* para cada compacto $K \subset X$.

(b) para cada $\varepsilon > 0$ no existe un $(\varepsilon\text{-}F)$-árbol relativamente compacto.

(c) Para cada $\varepsilon > 0$ no existe un compacto $\Delta \subset X$ y una aplicación continua sobreyectiva $\varphi : \Delta \longrightarrow 2^{\mathbb{N}}$ verificando que dadas $\sigma,\tau \in 2^{\mathbb{N}}$, $\sigma \neq \tau$ con $\varphi(x) = \sigma$ y $\varphi(y) = \tau$ entonces $d(F(x),F(y)) \ge \varepsilon$.

Demostración:

Por el lema anterior tenemos que **(c)** $\Rightarrow$ **(b)**. Para ver que **(a)** $\Rightarrow$ **(c)** supongamos que no se cumple (c), entonces existen, un $\varepsilon > 0$, un compacto perfecto $\Delta \subset X$ y una aplicación continua sobreyectiva $\varphi : \Delta \longrightarrow 2^{\mathbb{N}}$ con las propiedades indicadas. Es claro que $F|_{\Delta}$ no es *huskable*, pues cada abierto V con $V \cap \Delta \neq \emptyset$ cumple que $\mathrm{Card}(V \cap \Delta) \geq 2$. Finalmente veamos que **(b)** $\Rightarrow$ **(a)**, si (a) es falso podemos encontrar un $\varepsilon > 0$, un compacto K y un abierto no vacío U(K) de modo que para cualquier abierto no vacío $V \subset U$ d-diam(F(V)) $> \varepsilon$. Esto nos va a permitir construir un (ε-F)-árbol relativamente compacto, lo que contradice (b).

Tomamos $U(\emptyset) = U$. Suponemos que U(s) es un abierto no vacío incluido en U, siendo s una sucesión finita de ceros y unos. Por hipótesis, d-diam(F(U(s))) $> \varepsilon$ luego podemos escoger puntos x(s,o), x(s,1) en U(s) con $d(F(x(s,o)),F(x(s,1))) > \varepsilon$ y como F es η-continua y d es semicontinua inferiormente respecto a η, podemos escoger entornos V(s,o) y V(s,1) de x(s,o) y x(s,1) en X de modo que $d(F(x),F(y)) > \varepsilon$ para todo $x \in V(s,o)$ y todo $y \in V(s,1)$. Como X es regular, podemos escoger entornos abiertos W(s,i) de x(s,i) con $\overline{W(s,i)} \subset V(s,i)$ para i = 0,1. Sea $U(s,i) = U(s) \cap W(s,i)$ para i = 0,1. Así, hemos construido familias x(s), U(s) de modo que:

(i) $x(s) \in U(s)$.

(ii) $U(s,i) \subset U(s)$ i = 0,1.

(iii) $\overline{U(s,o)}$ y $\overline{U(s,1)}$ tienen imágenes mediante F ε-separadas.

De este modo hemos construido un (ε-F)-árbol relativamente compacto para la distancia d, con lo que concluimos la demostración.

Recordamos a continuación una terminología necesaria para el siguiente lema.

Si X es un espacio topológico, (E,d) un espacio métrico, $F : X \longrightarrow (E,d)$ una aplicación cualquiera y $\varepsilon > 0$, diremos que X verifica la propiedad F_ε si existe una sucesión Xn de subconjuntos de X con $X = \bigcup Xn$ de modo que cada X_n cumple la siguiente condición:

(F_ε^*) Para cualquier $C \subset X_n$ no vacío, existe un abierto no vacío $W \subset X$ con $W \cap C \neq \emptyset$ y d-diam$(F(W \cap C) < \varepsilon$.

Un subconjunto $A \subset X$ tiene la propiedad F_ε, cuando la cumple considerando la aplicación $F|_A : A \longrightarrow (E,d)$.

Es claro que la aplicación F es *σ-fragmentable* si y sólo si X verifica la propiedad F_ε para todo $\varepsilon > 0$.

6.3 Lema.

En las condiciones anteriores, sea $A \subset X$ y $\mathcal{V}$ la familia de todos los abiertos V para los que $A \cap V$ verifica F_ε. Ponemos $K = A \setminus \bigcup \{V : V \in \mathcal{V}\}$. Entonces $A \setminus K$ tiene la propiedad F_ε. Si A no tiene la propiedad F_ε, entonces K es un subconjunto cerrado relativo de A, no vacío, de modo que cualquier abierto relativo de K no verifica F_ε.

Demostración:

Sea $W = \bigcup \{V : V \in \mathcal{V}\}$. Demostraremos en primer lugar, que $A \cap W = A \setminus K$ tiene la propiedad F_ε.

Sea $V_0, V_1, \ldots, V_\alpha, \ldots$ con $0 \le \alpha < \Gamma$ un buen orden para los subconjuntos de $\mathcal{V}$ y sea $\Delta_0 = V_0$,

$$\Delta_\alpha = V_\alpha \setminus \bigcup \{V_\beta \, , \; 0 \le \beta < \alpha\}; \; 0 < \alpha < \Gamma$$

Entonces $\Delta_0, \Delta_1, \ldots, \Delta_\alpha, \ldots \; 0 \le \alpha < \Gamma$ es una familia disjunta de conjuntos de modo que:

$$\bigcup \{A_\alpha \, , \; 0 \le \alpha < \Gamma\} = \bigcup \{V_\alpha \, , \; 0 \le \alpha < \Gamma\} = W$$

Como cada conjunto $A \cap V_\alpha$, $0 \le \alpha < \Gamma$, tiene la propiedad F_ε entonces, cada conjunto $A \cap \Delta_\alpha$, $0 \le \alpha < \Gamma$ también la tiene, luego podemos elegir una sucesión $B_\alpha^{(n)}$, $n = 1,2,\ldots$ para cada α con $0 \le \alpha < \Gamma$, tal que, cada $B_\alpha^{(n)}$ tiene la propiedad F_ε^* y $A \cap \Delta_\alpha = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_\alpha^{(n)}$ $0 \le \alpha < \Gamma$.

Para cada $n \ge 1$ escribimos $B^{(n)} = \bigcup \{B_\alpha^{(n)};\ 0 \le \alpha < \Gamma\}$, entonces $\bigcup_{n=1}^{\infty} B^{(n)} = \bigcup \{A \cap \Delta_\alpha,\ 0 \le \alpha < \Gamma\} = A \cap W$.

Será suficiente con demostrar que $B^{(n)}$ tiene la propiedad F_ε^* para cada $n \ge 1$. Si para algún n ocurre lo contrario, existiría $C \subset B^{(n)}$ de modo que para cualquier U abierto con $U \cap C \neq \emptyset$. Se tiene que d-diam $F(U \cap C) > \varepsilon$. Pero, $C \subset B^{(n)} \subset \bigcup \{V_\alpha,\ 0 \le \alpha < \Gamma\}$. Sea γ el primer ordinal para el cual $C \cap V_\gamma \neq \emptyset$, entonces $C \cap V_\alpha = \emptyset$ para $0 \le \alpha < \gamma$ y $C \cap V_\gamma = C \cap \Delta_\gamma = C \cap B_\gamma^{(n)}$.

Como $C \cap \Delta_\gamma$ es un subconjunto no vacío del conjunto $B_\gamma^{(n)}$ y éste tiene la propiedad F_ε^*, tenemos que $C \cap V_\gamma = C \cap \Delta_\gamma$ es un subconjunto no vacío de manera que existe un abierto relativo tal que su imagen mediante F tiene diámetro menor que ε. Como V_γ es un abierto, estamos diciendo que C tiene un abierto relativo, tal que su imagen por F tiene diámetro menor que ε lo que contradice la elección de C. De todo lo anterior se deduce que $A \cap W$ tiene la propiedad F_ε.

Finalmente, si A no tiene la propiedad F_ε, entonces A no coincide con $A \cap W$ y, K es no vacío. Si $K \cap U$ tiene la propiedad F_ε entonces $A \cap U = (K \cap U) \cup (A \cap W \cap U)$ tendría la propiedad F_ε por lo que $U \in \mathcal{V}$ de modo que $K \cap U$ sería vacío. Por lo tanto $K \cap U$ no tiene la propiedad F_ε con lo que concluímos la demostración del lema.

6.4 Proposición.

Si X es un espacio Čech-analítico, $F : X \longrightarrow (E,\eta)$ una aplicación continua y d una métrica en E semicontinua inferiormente respecto a η, entonces si F no es *σ-fragmentable* existe en X un (ε-F)-árbol para la distancia d que es relativamente compacto.

Demostración:

Como el espacio X es Čech-analítico, entonces es un $\mathcal{F} \cup \mathcal{G}$-Souslin en algún $\hat{X}$ compacto Hausdorff. Trabajando en $\hat{X}$ escribimos $\mathcal{A} = \mathcal{F} \cup \mathcal{G}$ y podemos poner

$$X = \bigcup \{ \bigcap \{S(\sigma|n) : n \geq 1\} : \sigma \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \}$$

donde cada $S(\sigma|n)$ está en $\mathcal{A}$. Escribimos

$$A(\sigma|n) = \bigcup \{ \bigcap \{ S(\tau|m) : m \geq 1 \} : \tau \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}} ; \tau|n = \sigma|n \}$$

para cada sucesión finita $\sigma|n = \sigma_1,\dots,\sigma_n$ de enteros positivos, y convenimos en escribir $A(\emptyset) = X$ donde $\emptyset$ es la sucesión vacía de longitud cero.

Si suponemos que la aplicación F no es *σ-fragmentable*, será porque existe un $\varepsilon > 0$ para el que F no verifica la propiedad $F_{2\varepsilon}$ con la terminología antes introducida.

Vamos a construir familias $\{B(\gamma|r)\}$ de subconjuntos de X y $\{\mathcal{S}(\gamma|r)\}$ de sucesiones finitas de enteros positivos, cuyos subíndices son sucesiones finitas $\gamma|r = \gamma_1,\dots\gamma_r$ con $\gamma_i = 0$ ó 1 para $1 \leq i \leq r$ y que satisfacen las siguientes condiciones :

(i) $B(\emptyset) = A(\emptyset)$.

(ii) $B(\gamma|r)$ es un subconjunto cerrado relativo de $A(\mathcal{S}(\gamma|r))$ que está contenido en $B(\gamma|r-1)$.

(iii) $B(\gamma|r)$ no tiene la propiedad $F_{2\varepsilon}$.

(iv) $\mathcal{S}(\gamma|r)$ tiene longitud r.

(v) $\mathcal{S}(\gamma|r+1)|r = \mathcal{S}(\gamma|r)$.

(vi) $\emptyset \neq B(\gamma|r) \subset \overline{B(\gamma|r)} \subset S(\mathcal{S}(\gamma|r))$.

(vii) Los conjuntos $\overline{B(\gamma|r,0)}$ y $\overline{B(\gamma|r,1)}$ son disjuntos y las imágenes mediante F de sus intersecciones con X están separadas por una distancia superior a ε.

Aquí las clausuras se toman en $\hat{X}$.

En primer lugar tomemos $B(\emptyset) = A(\emptyset)$ para asegurar que (i) se cumple. Supongamos que $r \geq 0$ y que $B(\gamma|t)$ y $\mathcal{S}(\gamma|t)$ están bien definidos verificando las condiciones (ii) a (vi) con $0 \leq t \leq r$. Como por (iii) $B(\gamma|r)$ no tiene la propiedad $F_{2\varepsilon}$ aplicando el lema precedente obtenemos la existencia de un conjunto no vacío $C(\gamma|r)$ cerrado relativo de $B(\gamma|r)$ con la propiedad de que cualquier abierto relativo de $C(\gamma|r)$ que sea no vacío no goza de la propiedad $F_{2\varepsilon}$. En particular, tenemos que la imagen de $C(\gamma|r)$ mediante F tiene diámetro superior a 2ε. Elegimos puntos $c(\gamma|r,0)$ y $c(\gamma|r,1)$ de $C(\gamma|r)$ de manera que sus imágenes mediante F se encuentran separadas más de ε.

Como la distancia d es semicontinua inferiormente respecto a η y la aplicación $F : X \longrightarrow (E,\eta)$ es continua, podemos elegir, abiertos $U(\gamma|r,0)$ y $U(\gamma|r,1)$ en $\hat{X}$ entornos de $c(\gamma|r,0)$ y $c(\gamma|r,1)$ tales que $U(\gamma|r,0) \cap X$ y $U(\gamma|r,1) \cap X$ tengan sus imágenes mediante F separadas más que ε. Como $\hat{X}$ es un compacto Hausdorff, entonces podemos elegir cerrados $V(\gamma|r,0)$ y $V(\gamma|r,1)$ subconjuntos de $U(\gamma|r,0)$ y $U(\gamma|r,1)$ con $c(\gamma|r,0)$ y $c(\gamma|r,1)$ en sus interiores. Ahora, los conjuntos $C(\gamma|r) \cap \text{int}(V(\gamma|r,0))$ y $C(\gamma|r) \cap \text{int}(V(\gamma|r,1))$ y también los conjuntos

$$D(\gamma|r,0) = C(\gamma|r) \cap V(\gamma|r,0) \text{ y}$$
$$D(\gamma|r,1) = C(\gamma|r) \cap V(\gamma|r,1)$$

no tienen la propiedad $F_{2\varepsilon}$.

Para $\gamma_{r+1} = 0$ ó 1 tenemos que:

$$D(\gamma|r+1) = D(\gamma|r,\gamma_{r+1}) \subset C(\gamma|r) \subset B(\gamma|r) \subset A(\mathscr{S}(\gamma|r))$$

donde $\mathscr{S}(\gamma|r)$ es una sucesión finita de enteros positivos de longitud r. Entonces,

$$D(\gamma|r+1) = \bigcup \{ D(\gamma|r+1) \cap A(\mathscr{S}(\gamma|r),\sigma_{r+1}) \ ; \ \sigma_{r+1} = 1,2,\ldots,\}$$

y como $D(\gamma|r+1)$ no tiene la propiedad $F_{2\varepsilon}$, elegimos $\sigma_{r+1} = \sigma_{r+1}(\gamma|r+1)$ tal que $D(\gamma|r+1) \cap A(\mathscr{S}(\gamma|r),\sigma_{r+1}(\gamma|r+1))$ no tenga la propiedad $F_{2\varepsilon}$. Escribimos $\mathscr{S}(\gamma|r+1) = (\mathscr{S}(\gamma|r),\sigma_{r+1}(\gamma|r+1))$ para $\gamma_{r+1} = 0$ ó 1. Entonces $E(\gamma|r+1) = D(\gamma|r+1) \cap A(\mathscr{S}(\gamma|r+1))$ no tiene la propiedad $F_{2\varepsilon}$.

Recordando la $\mathscr{A}$-Souslin representación de X, tenemos que: $E(\gamma|r+1) \subset A(\mathscr{S}(\gamma|r+1)) \subset S(\mathscr{S}(\gamma|r+1))$ con $S(\mathscr{S}(\gamma|r+1)) \in \mathscr{A} = \mathscr{F} \cup \mathscr{G}$. Si $S(\mathscr{S}(\gamma|r+1)) \in \mathscr{F}$ y ponemos $B(\gamma|r+1) = E(\gamma|r+1)$ tenemos que $\overline{B(\gamma|r+1)} \subset S(\mathscr{S}(\gamma|r+1))$. Si $S(\mathscr{S}(\gamma|r+1)) \in \mathscr{G}$ necesitamos algo más. Usando de nuevo nuestro lema, podemos elegir un subconjunto cerrado relativo, no vacío, $H(\gamma|r+1)$ de $E(\gamma|r+1)$ tal que cada subconjunto abierto de $\hat{X}$ que corta a $H(\gamma|r+1)$ lo hace en un conjunto que no tiene la propiedad $F_{2\varepsilon}$. Elegimos un punto $h(\gamma|r+1) \in H(\gamma|r+1)$, este punto está en el abierto $S(\mathscr{S}(\gamma|r+1))$ y podemos elegir un entorno cerrado $P(\gamma|r+1)$ de $h(\gamma|r+1)$ contenido en $S(\mathscr{S}(\gamma|r+1))$. Entonces, el conjunto

$B(\gamma|r+1) = H(\gamma|r+1) \cap P(\gamma|r+1)$ no tiene la propiedad $F_{2\varepsilon}$ y,

$$\overline{B(\gamma|r+1)} \subset P(\gamma|r+1) \subset S(\mathscr{S}(\gamma|r+1)).$$

Entonces, en cada caso, $B(\gamma|r+1)$ es un cerrado relativo de $A(\mathscr{S}(\gamma|r+1))$ contenido en $V(\gamma|r+1)$, su clausura está contenida en

$S(\mathscr{S}(\gamma|r+1))$ y no tiene la propiedad $F_{2\varepsilon}$. Luego se satisfacen las condiciones (ii)-(vi) reemplazando r por r+1 y desde luego, también la condición (vii). La construcción finaliza por inducción.

Si $\gamma \in \{0,1\}^{\mathbb{N}} = 2^{\mathbb{N}}$ tenemos $\emptyset \neq \bigcap_{r=1}^{\infty} \overline{B(\gamma|r)} \subset \bigcap_{r=1}^{\infty} S(\mathscr{S}(\gamma|r)) \subset X$. Para cada $r \geq 1$ fijado, los 2^r conjuntos $\overline{B(\gamma|r)}$ con $\gamma|r \in \{0,1\}^r$ son compactos disjuntos, cuya intersección con X tiene imágenes mediante F separadas una distancia superior a ε.

Para cada $s \in \{0,1\}^r$ escribimos:

$$M(s) = \bigcap_{l=1}^{\infty} \bigcup \{\overline{B(\gamma|l)} : \gamma \in 2^{\mathbb{N}},\ \gamma|r = s\} =$$
$$= \bigcup \{ \bigcap_{l=1}^{\infty} \overline{B(\gamma|l)} : \gamma \in 2^{\mathbb{N}},\ \gamma|r = s\} \subset$$
$$\subset \bigcup \{ \bigcap_{l=1}^{\infty} S(\mathscr{S}(\gamma|l)) : \gamma \in 2^{\mathbb{N}}\} \subset X.$$

Entonces, cada M(s) es un subconjunto compacto, no vacío de X. Para s, elegimos $x(s) \in M(s)$, la familia $\{x(s)\}$ es un $(\varepsilon$-F$)$-árbol relativamente compacto para la métrica d.

6.5 Teorema.

Si X es un espacio Čech-analítico, $F : X \longrightarrow (E,\eta)$ una aplicación continua y d una métrica en E, semicontinua inferiormente respecto a η, entonces son equivalentes:

(a) F es *σ-fragmentable.*

(b) Para cada compacto $K \subset X$, la restricción $F|_K$ es *huskable.*

Demostración:

Si F es *σ-fragmentable*, entonces, evidentemente, $F|_K$ lo es, y como los compactos son espacios de Baire, tenemos que $F|_K$ es *huskable* y, en consecuencia, **(a)** $\Rightarrow$ **(b)**.

Para ver la otra implicación, si suponemos que F no es *σ-fragmentable*, por la proposición anterior, podemos construir en X un (ε-F)-árbol relativamente compacto para la distancia d, lo que contradice **6.2** si suponemos (b) cierto.

6.6 Corolario.

Si X es un espacio Čech-analítico, entonces pertenece a la clase $\mathcal{A}$.

Demostración:

Si $F : X \longrightarrow Cp(Y)$ es una aplicación tp-continua, entonces para cada compacto $K \subset X$, $F|_K$ es *huskable* pues, por **(2.9)** los compactos están en la clase $\mathcal{N}$. El teorema anterior nos dice que F es *σ-fragmentable*.

A continuación vamos a demostrar un resultado que nos va a permitir obtener algunos tipos de compactos que se encuentran en la clase $\mathcal{B}$.

Recordemos que la *esfera unidad* en un espacio C(K) es el conjunto dado por $S_{C(K)} = \{f \in C(K) \; ; \; \| f \| = 1\}$.

6.7 Proposición.

Sea K un compacto, y supongamos que en C(K) existe una norma de modo que sobre la esfera unidad coinciden la topología de la norma y la topología t_p, entonces, $i : (C(K),t_p) \longrightarrow (C(K),\| \;\|)$ es *σ-fragmentable* mediante conjuntos de la familia $\mathcal{FG}$.

Demostración:

Sea $S = \{f, \; \| f \| = 1\}$, $B = \{f, \; \| f \| \leq 1\}$, $g \in S$, $\varepsilon > 0$, demostraremos en primer lugar, que existe un t_p-entorno de g, W_3, con $\| \|$-diam$(B \cap W_3) \leq \varepsilon$. Para ello consideremos B_g la bola cerrada de centro g y radio $\varepsilon/4$, W_1 un t_p-entorno de g tal que $W_1 \cap S \subset B_g$, $0 < \delta < \varepsilon/4$ y W_2 un t_p-entorno de g tal que $S \cap (W_2+\delta B) \subset S \cap W_1$. Puesto que B es un t_p-cerrado y $g \in (1-\delta)\cdot B$, el conjunto $W_3 = W_2 \setminus (1-\delta)\cdot B$ es un t_p-entorno de g y vamos a ver que $\| \|$-diam$(W_3 \cap B) < \varepsilon$.

Sea $f \in B \cap W_3$, como $(1-\delta) < \| f \| \leq 1$ si consideramos $h = f/\| f \|$ entonces $\| h-f \| = \| f \| \cdot |1-\frac{1}{\|f\|}| = 1-\| f \| < \delta$. Puesto que $f \in W_3$, como $h \in (W_3+\delta\cdot B) \cap S \subset (W_2+\delta\cdot B) \cap S \subset W_1 \cap S \subset B_g$ tenemos que $\| h-g \| \leq \varepsilon/4$ de donde

$$\| f-g \| \leq \| h-g \|+\| f-h \| \leq \varepsilon/4+\delta < \varepsilon/2$$

por lo que $\| \|$-diam$(B \cap W_3) \leq \varepsilon$.

Para ver que la identidad es *σ-fragmentable* es suficiente con hacerlo restringiéndonos a B. Dado $\varepsilon > 0$ y $g \in S$, sea W(g) un t_p-entorno de g con $\| \|$-diam$(B \cap W(g)) < \varepsilon$, entonces $W = \bigcup \{W(g) : g \in S\}$ es un t_p-abierto y $D = B \cap W$ es un conjunto de la familia $\mathcal{FG}$ en la topología t_p. Si $g \in S$, D contiene un segmento $(f,g]$ con $\| f \| < 1$, así $\{r\cdot D;\ r \in \mathbb{Q},\ 0 \leq r \leq 1\}$ cubre B.

Si $C \subset D$ es no vacío, consideremos $f \in C$ y $g \in S$ de modo que, $f \in W(g)$ pues $C \subset D = B \cap W$. Así W(g) es un abierto para t_p con $\emptyset \neq C \cap W(g) \subset B \cap W(g)$ y $\| \|$-diam$(C \cap W(g)) < \varepsilon$. Como el mismo resultado se puede tener para cada $r\cdot D$ concluimos la demostración.

Nota.

Observar que la demostración es igualmente válida para la aplicación identidad $i : (E,\text{débil}) \longrightarrow (E,\| \|)$ en un espacio de Banach $(E,\| \|)$ que admite una norma Kadec equivalente [JNR2].

6.8 Observación.

De la proposición anterior deducimos que si K es un compacto, de modo que en C(K) existe una norma, tal que sobre la esfera unidad coinciden la topología de la norma y la topología t_p y que es equivalente a la norma del supremo, entonces el compacto K está en la clase $\mathcal{B}$.

En [JNR2] se prueba que si K es un compacto de Eberlein (homeomorfo a un débil compacto de un Banach) entonces K pertenece a la clase $\mathcal{B}$. También se demuestra que si K es un compacto, de modo que Cp(K) es Čech-analítico, también pertenece a la clase $\mathcal{B}$.

Recientemente, Deville y Godefroy, han demostrado que si K es un compacto de Valdivia entonces, C(K) tiene una norma equivalente de modo que sobre la esfera unidad coinciden la topología de la norma y la t_p, por lo que esta clase de compactos está incluida en la clase $\mathcal{B}$ [DG].

Del mismo modo, Haydon y Rogers, han demostrado que si K es un compacto disperso, de manera que $K^{(\omega_1)} = \emptyset$, entonces C(K) admite una norma equivalente de modo que sobre la esfera unidad coinciden la topología de la norma y la t_p. Estos compactos también están incluidos en la clase $\mathcal{B}$ [HR].

Haydon proporciona un ejemplo de un espacio compacto disperso K con $K^{(\omega_1)} \neq \emptyset$ para el que la aplicación $i : (C(K),t_p) \longrightarrow (C(K),\|\ \|)$ no es *σ-fragmentable.* Este compacto, es el que estudiamos en **(4.16)**, que no pertenece a la clase $\mathcal{N}^*$, tal y como probamos [H1].

En este punto conviene indicar que las demostraciones, que han hecho los distintos autores, para probar que estas clases de compactos se encuentran incluidas en la clase $\mathcal{B}$, se basan en técnicas de renormamiento bastante complicadas, y sería interesante obtener pruebas directas de estos resultados (es decir, del hecho de que la aplicación identidad $i : (C(K),t_p) \longrightarrow (C(K),\| \|)$ es *σ-fragmentable*) sin usar renormamientos.

Como sabemos, la clase $\mathcal{B}$ está incluida en la clase $\mathcal{N}^*$, y después de los comentarios que hemos hecho, parece razonable preguntarnos si todos los compactos de la clase $\mathcal{N}^*$ están en la clase $\mathcal{B}$. Sin embargo, recientemente I.Namioka y R.Pol [NP], asumiendo una hipótesis adicional sobre el intervalo [0,1], que es independiente de los axiomas ZFC sobre teoría de conjuntos, han demostrado la existencia de un compacto disperso K, que está incluido en la clase $\mathcal{N}^*$, y tal que el espacio C(K) no admite una norma Kadec equivalente a la norma del supremo. Además, la aplicación identidad $i : (C(K),t_p) \longrightarrow (C(K),\| \|)$ no es *σ-fragmentable* (el compacto K no pertenece a la clase $\mathcal{B}$).

Buena parte de los teoremas de tipo Namioka y co-Namioka responden al siguiente esquema:

6.9 Proposición.

Sea X un espacio de Baire y K un compacto, si $F : X \longrightarrow C_p(K)$ es t_p-continua y se puede factorizar en la forma $F = \psi \circ \varphi$, $\varphi : X \longrightarrow Z$ y $\psi : Z \longrightarrow C_p(K)$ donde Z es un espacio Čech-analítico, y las aplicaciones φ y ψ continuas. Entonces, existe un subconjunto $X_0 \subset X$, que es un $\mathcal{G}_\delta$-denso, tal que F es continua en norma en cada punto de X_0.

Demostración:

Esto es claro, pues por el corolario 6.6 y ser Z un espacio Čech-analítico, tenemos que ψ es *σ-fragmentable* y como φ es continua, resulta que F es *σ-fragmentable*. El teorema 1.9 nos dice que F es continua en norma en los puntos de un subconjunto $X_0 \subset X$ que es un $\mathcal{G}_\delta$-denso.

6.10 Corolario.

(a) Todo espacio de Baire Čech-analítico está en la clase $\mathcal{N}$.

(b) Si K es un compacto de modo que, en C(K) existe una norma equivalente a la norma del supremo, tal que sobre la esfera unidad coinciden la topología de la norma y la t_p, entonces el compacto K está incluido en la clase $\mathcal{N}^*$ [Ha2].

Demostración:

Para tener (a) es suficiente con hacer Z = X en la proposición anterior.

Para el apartado (b) basta con hacer $Z = C_p(K)$ que es un espacio Čech-analítico.

En el capítulo 4 ya hemos introducido los espacios K-analíticos. La familia de los subconjuntos K-analíticos de un espacio topológico completamente regular X está incluida en la de los $\mathcal{F}$-Souslin, es invariante por aplicaciones continuas, es cerrada para productos numerables y está incluida en la clase de los espacios de Lindelöf [A].

A continuación mostramos como los resultados anteriores engloban el siguiente corolario, que es una mejora de un resultado de G.Debs [Db4].

6.11 Corolario.

Sea X un espacio completamente regular de Baire. Si K es un compacto, $F : X \longrightarrow C_p(K)$ una aplicación continua y suponemos que existe una parte Čech-analítica $Z \subset C_p(K)$ tal que $F(X) \subset Z$, entonces, el conjunto de los puntos de continuidad de F en norma es un $\mathcal{G}_\delta$-denso.

Demostración:

Es una consecuencia inmediata de la proposición 6.9.

6.12 Lema.

Sea $Z \subset C_p(K)$ una parte K-analítica y $A \subset C_p(K)$ el álgebra t_p-cerrada engendrada por Z y las constantes. Entonces A es K-analítico para t_p.

Demostración:

Z^n es K-analítico, pues el producto finito de espacios K-analíticos es K-analítico. Entonces

$$\{z_1 \cdot z_2 \cdot \ldots z_n \ ; \ (z_i) \in Z^n \} = H_n$$

es K-analítico por ser imagen continua de Z^n. Como la unión numerable de conjuntos K-analíticos es K-analítica, $H = \mathbb{R} \cup \{ \bigcup_{n\in\mathbb{N}} H_n \}$ es K-analítico y

$$\bigcup_n \left\{\alpha + \sum_{j=1}^{n} \alpha_j h_j \ : \ \alpha \in \mathbb{R}, \ (\alpha_j) \in \mathbb{R}^n, \ (h_j) \in H^n \right\} \equiv E$$

que es álgebra engendrada por Z y las constantes también es K-analítico. Finalmente $A \equiv \overline{E}^{t_p}$ es K-analítico pues A es la imagen continua de $ExB_E^{\mathbb{N}}$ mediante la función

$$(x,(x_n)) \longrightarrow x+\sum (x_n/2^n)$$

considerando en $B_E^{\mathbb{N}}$ la topología producto de (B_E, t_p) y, en E consideramos la topología t_p.

6.13 Teorema.

Sea $X_0 \subset X$ una parte K-analítica densa en un espacio de Baire X. Entonces X está en la clase $\mathcal{N}$.

Demostración:

Si $F : X \longrightarrow C_p(K)$ es continua, tenemos que $Z = F(X_0)$ es K-analítico, y también lo es A, el álgebra t_p-cerrada engendrada por Z y las constantes. Entonces $F(X) \subset A$ y por el corolario **6.11** tenemos el resultado.

Observación.

El teorema **6.13** es un resultado obtenido por G.Debs en [Db3] utilizando juegos topológicos.

Notar que si el espacio topológico X no es un espacio de Baire, en **6.13** lo que obtenemos es que el espacio X encuentra en la clase $\mathcal{A}$ (**6.9** y **6.11**).

En esta situación parece razonable plantear el siguiente problema:

6.14 Problema:

Sea X un espacio de Baire y $X_0 \subset X$ una parte Čech-analítica densa. Estudiar si X está en la clase $\mathcal{N}$.

7. APLICACIONES

7.1 *Funciones de la primera clase de Baire.*

Recordemos que si X es un espacio topológico, (E,d) un espacio métrico, se dice que una función $F : X \longrightarrow E$ es de la *primera clase de Baire* ($F \in B_1(X,E)$) si existe una sucesión de funciones continuas $F_n : X \longrightarrow E$ verificando:

$$d(F_n(x),F(x)) \longrightarrow 0 \text{ para todo } x \in X$$

Una familia $\mathcal{H}$ de subconjuntos de X se dice *discreta* si cada punto de X tiene un entorno que corta a lo sumo a un miembro de $\mathcal{H}$. La familia $\mathcal{H}$ se llama *σ-dicreta* cuando es una unión numerable de familias discretas.

A partir de Hansell [Ha3], una familia $\{ H_i : i \in I \}$ de subconjuntos de X se dice *discretamente σ-descomponible* si para cada $i \in I$ tenemos que $H_i = \{ H_{i,n} : n \in \mathbb{N} \}$ donde cada familia $\{ H_{i,n} : i \in I \}$ es discreta.

El espacio X satisface el lema de Montgomery si para cualquier sucesión transfinita de conjuntos abiertos en X, $\{ G_\gamma : \gamma < \Gamma \}$ (Γ es un número ordinal) resulta que la familia $\{ M_\gamma : \gamma < \Gamma \}$ definida como $M_\gamma = G_\gamma \setminus \bigcup \{ G_\mu : \mu < \gamma \}$ es una familia discretamente σ-descomponible de subconjuntos $\mathcal{F}_\sigma$ de X. En [CZ] y [J] se demuestra que la condición de Montgomery es equivalente a la siguiente: Todo conjunto abierto es un $\mathcal{F}_\sigma$ y de todo cubrimiento abierto de X se puede extraer un refinamiento cerrado que es σ-discreto (Un tal espacio se dice *perfectamente subparacompacto*).

Recordemos también que un espacio topológico X se dice *perfectamente paracompacto* si es paracompacto y todo subconjunto abierto de X es un $\mathcal{F}_\sigma$.

7.1.1 Lema.

Si $(E,\|\ \|)$ es espacio de Banach y $F : X \longrightarrow E$ es límite uniforme de funciones que se encuentran en $B_1(X,E)$, entonces $F \in B_1(X,E)$.

Demostración.

Sea $F_n \in B_1(X,E)$ una sucesión de funciones que convergen uniformemente hacia F. Después de extraer una subsucesión, podemos suponer que $\| F_n(x)-F(x) \| \leq 1/2^{n+2}$ para todo $x \in X$ y $n \in \mathbb{N}$. Sea $H_1 = F_1$, $H_n = F_n-F_{n-1}$ si $n \geq 2$ y así, $F = H_1+\sum_{n=2}^{\infty} H_n$ con $\|H_n(x)\| \leq 1/2^n$ para todo $x \in X$ y $n \in \mathbb{N}$. Como $H_n \in B_1(X,E)$ tenemos que $H_n(x) = \lim_j H_{n_j}(x)$ donde $H_{n_j} \in C(X,E)$. Sea $\alpha_n : [0,\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ definida como:

$$\alpha_n(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \leq t \leq 1/2^n \\ 1/2^n t & \text{si } 1/2^n \leq t \end{cases}$$

Sea $\varphi_{n_j}(x) = \alpha(\|H_{n_j}(x)\|)H_{n_j}(x)$, entonces $\varphi_{n_j} \in C(X,E)$ y $\|\varphi_{n_j}(x)\| \leq 1/2^n$ para todo $x \in X$. Es claro que:

$$\|H_{n_j}(x)\| \leq 1/2^n \Rightarrow H_{n_j}(x) = \varphi_{n_j}(x)$$

$$\|H_{n_j}(x)\| > 1/2^n \Rightarrow \varphi_{n_j}(x) = \frac{1}{2^n}\,\frac{H_{nj}(x)}{\|H_{n_j}(x)\|}$$

Cuando j tiende a ∞ se tiene que $\varphi_{n_j}(x) \longrightarrow \alpha(H_n(x))H_n(x) = H_n(x)$ y la serie $\sum_{n=2}^{\infty} \varphi_{n_j}(x)$ converge uniformemente respecto de (x,j), luego su suma $g_j(x)$ es una función continua para todo j. Como

$\operatorname{Lim}_j g_j(x) = \sum_{n=2}^{\infty} \operatorname{Lim}_j \varphi_{n_j}(x) = \sum_{n=2}^{\infty} H_n(x) = g(x)$ entonces $g \in B_1(X,E)$ y en consecuencia $F = g+H_1 \in B_1(X,E)$.

7.1.2 Lema.

Sea X un espacio perfectamente paracompacto, $(E,\|\ \|)$ un espacio de Banach y $F : X \longrightarrow E$ una aplicación de modo que existe una partición numerable $\{ X_n : n \in \mathbb{N} \}$ de X, donde los conjuntos X_n son $\mathcal{F}_\sigma$ tales que $F|_{X_n} \in B_1(X,E)$. Entonces $F \in B_1(X,E)$.

Demostración.

Empezaremos suponiendo que la restricción de F a cada X_n es continua. Para cada $n \in \mathbb{N}$ sea $\{ A_{n,k} : k \in \mathbb{N} \}$ una sucesión creciente de cerrados hacia X_n y C_n la unión de los conjuntos disjuntos $A_{i,n}$ para $1 \le i \le n$. Como la restricción de F a C_n es continua, entonces existe una sucesión de funciones continuas $F_n : X \longrightarrow E$ de manera que cada F_n coincide con F sobre C_n (esto es debido a que los espacios de Banach tienen la propiedad de la extensión respecto a los espacios paracompactos ([Ar] y [Do]); es decir, que si X es paracompacto y $C \subset X$ es un subconjunto cerrado, entonces toda función continua $F : C \longrightarrow E$ admite una extensión continua a todo el espacio X). Así F es el límite puntual de la sucesión F_n y tenemos el resulado en este caso particular.

Ahora, supongamos que para cada $n \in \mathbb{N}$ existe una sucesión de funciones continuas $g_{n,l} : X_n \longrightarrow E$ tal que $F(x) = \operatorname{Lim}_l g_{n,l}(x)$ para cada $x \in X_n$. Entonces la familia numerable de conjuntos $\mathcal{F}_\sigma$ $X_{n,i} = \{ x \in X : \forall\ j \ge i,\ \| g_{n,i}(x)-g_{n,j}(x) \| \le \varepsilon \}$ cubre X y como los conjuntos abiertos son conjuntos $\mathcal{F}_\sigma$, podemos obtener una partición numerable de X mediante una familia de conjuntos

$\{ D_{i,n} : i \in \mathbb{N} \}$ que son $\mathcal{F}_\sigma$ y tales que $D_{n,i}$ está incluido en $X_{n,i}$. Ahora construimos una aplicación $g : X \longrightarrow E$ definida como $g(x) = g_{n,i}(x)$ si $x \in D_{n,i}$. Por nuestro caso particular sabemos que $g \in B_1(X,E)$, y como es claro que $\| g(x)-F(x) \| \leq \varepsilon$ para todo $x \in X$ por el lema **7.1.1** completamos la demostración.

Estamos en condiciones de demostrar un importante teorema que nos relaciona la σ-fragmentabilidad con las funciones de la primera clase de Baire [V2].

7.1.3 Teorema.

Si X es un espacio perfectamente paracompacto (por ejemplo un espacio métrico), E un espacio de Banach y $F : X \longrightarrow E$, entonces son equivalentes:

a) F es *σ-fragmentable* mediante conjuntos cerrados.

b) Para cada $\varepsilon > 0$ existe una sucesión de cerrados $\{ X_j : j \in \mathbb{N} \}$ que cubre X y que tiene la siguiente propiedad:

Dado $a \in X_j$ existe un entorno abierto V_a de a tal que $\operatorname{diam} F(V_a \cap X_j) < \varepsilon$.

c) $F \in B_1(X,E)$.

Demostración.

En el ejemplo 1.10-c ya veíamos la implicación más sencilla c) $\Rightarrow$ a).

c) $\Rightarrow$ b).

Basta considerar una sucesión de funciones continuas $F_j : X \longrightarrow E$ tal que $\| F(x)-F_j(x) \| \longrightarrow 0$ para todo $x \in X$ y definir $X_j = \bigcap_{n \geq j} \{ x \in X : \| F_n(x)-F_j(x) \| \leq \varepsilon/3 \}$. Obviamente $\| F(x)-F_j(x) \| \leq \varepsilon/3$ para todo $x \in X_j$ y si $a \in X_j$ y V_a es un entorno abierto de a tal que diam $F_j(X_j \cap V_a) \leq \varepsilon/3$ tenemos que diam $F(X_j \cap V_a) \leq \varepsilon$.

b) $\Rightarrow$ c).

Probaremos que, dado $\varepsilon > 0$, la existencia de una sucesión $\{ X_j : j \in \mathbb{N} \}$ con las propiedades especificadas en b) implica que existe una función $F_\varepsilon \in B_1(X,E)$ verificando $\| F(x)-F_\varepsilon(x) \| \leq \varepsilon$ y por el lema **7.1.1** tenemos el resultado.

Sea $X = \bigcup \{ A_n : n \in \mathbb{N} \}$ una unión disjunta donde cada A_n es un $\mathcal{F}_\sigma$ (y por tanto un $\mathcal{G}_\delta$) con la misma propiedad que tenian los X_j ($A_1 = X_1$, $A_2 = X_1 \setminus X_2, \ldots,$ $A_n = X_n \setminus \bigcup \{ X_j : 1 \leq j \leq n \}, \ldots$). Cada A_n, con la topología inducida es paracompacto [E], y posee un cubrimiento abierto $\{ G_i : i \in I_n \}$ donde cada $G_i \subset A_n$ es un abierto relativo con diam $F(G_i) \leq \varepsilon$. Por la paracompacidad podemos suponer que este cubrimiento es localmente finito. Sea $\{ \varphi_i^n : i \in I_n \}$ una partición de la unidad subordinada a este cubrimiento. Para cada $i \in I_n$ elegimos un punto $x_i^n \in \{ x \in X : \varphi_i^n(x) > 0 \} \subset G_i$. Sobre A_n se tiene definida una función continua $h_n(x) = \sum_{i \in I_n} \varphi_i^n(x) F(x_i^n)$ que cumple $\| F(x)-h_n(x) \| \leq \varepsilon$ para todo $x \in A_n$. La función $F_\varepsilon : X \longrightarrow E$ definida por $F|_{A_n} = h_n$ es un elemento de $B_1(X,E)$ por el lema **7.1.2** y cumple que $\| F(x)-F_\varepsilon(x) \| \leq \varepsilon$ para todo $x \in X$.

b) $\Rightarrow$ a) Es evidente.

a) $\Rightarrow$ ~~c).~~ b)

Supongamos que F es ε-*fragmentable* (e.d. que para cada conjunto no vacio $C \subset X$, existe un abierto $U \subset X$ de modo que $C \cap U \neq \emptyset$ y diam$F(C \cap U) < \varepsilon$). Probaremos que para este $\varepsilon > 0$ dado se puede obtener una sucesión $\{ X_j : j \in \mathbb{N} \}$ con la propiedad indicada en b), y por tanto una función $F_\varepsilon : X \longrightarrow E$ que pertenece a $B_1(X,E)$ verificando $\| F_\varepsilon(x)-F(x) \| \le \varepsilon$ para todo $x \in X$.

Si F es *ε-fragmentable*, existe un abierto no vacio $G_0 \subset X$ con $\operatorname{diam}F(G_0) \le \varepsilon$. Si el cerrado $X\setminus G_0$ no es vacio existe otro $G_1 \subset X$ con $\operatorname{diam}F(G_1 \cap (X\setminus G_0)) \le \varepsilon$. Sea γ un ordinal tal que para cada ordinal $\xi < \gamma$ se tienen definidos abiertos G_ξ verificando:

$$M_\xi = G_\xi \cap (X \setminus \bigcup_{\mu<\xi} G_\mu) \neq \emptyset \text{ y } \operatorname{diam}F(M_\xi) \le \varepsilon.$$

Prosiguiendo de esta forma, para algún ordinal Γ se tiene que $X = \bigcup_{\xi<\Gamma} G_\xi = \bigcup_{\xi<\Gamma} M_\xi$. La familia $\{ M_\xi : \xi < \Gamma \}$ es discretamente σ-descomponible y cada M_ξ es un $\mathcal{F}_\sigma$ pues el espacio X satisface el lema de Montgomery. Sea $M_\xi = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_{\xi,n}$ donde cada $F_{\xi,n}$ es un cerrado. También se tiene que $M_\xi = \bigcup_{m\in\mathbb{N}} M_{\xi,m}$, donde para cada m la familia $\{ M_{\xi,m} : \xi < \Gamma \}$ es discreta. Se tiene que:

$$X = \bigcup_n \bigcup_m \{ \bigcup_{\xi<\Gamma} (\overline{M_{\xi,m}} \cap F_{\xi,n}) \} = \bigcup_n \bigcup_m D_{nm}$$

donde $D_{nm} = \bigcup_{\xi<\Gamma} \{ \overline{M_{\xi,m}} \cap F_{\xi,n} \}$ es un cerrado (unión discreta de cerrados). Dado $a \in D_{nm}$, sea $\gamma < \Gamma$ tal que $a \in \overline{M_{\gamma,m}} \cap F_{\gamma,n} \subset G_\gamma$ y V_a un entorno de a que cumple $Va \subset G_\gamma$. Entonces

$$V_a \cap D_{nm} = V_a \cap \{ \overline{M_{\gamma,m}} \cap F_{\gamma,n} \} G_\gamma \cap M_\gamma = M_\gamma$$

luego $\operatorname{diam}F(V_a \cap D_{nm}) \le \varepsilon$. Así hemos obtenido una sucesión de cerrados con la propiedad indicada en b).

En el caso general, supongamos que F es *σ-fragmentable* mediante conjuntos cerrados, entonces dado $\varepsilon > 0$ sea $\{ Z_j : j \in \mathbb{N} \}$ una sucesión de cerrados que cubre X de modo que $F|_{Z_j}$ es *ε-fragmentable*. Como cada Z_j tiene las mismas propiedades topológicas que se le han exigido a X, para cada $j \in \mathbb{N}$ existe una función $g_j : Z_j \longrightarrow E$ con $g_j \in B_1(Z_j,E)$ tal que $\| g_j(x)-F(x) \| < \varepsilon$.

Sea $X_1 = Z_1$, $X_2 = Z_2 \setminus Z_1, \ldots, X_n = Z_n \setminus \bigcup \{Z_j : 1 \le j \le n\}, \ldots$ entonces la sucesión $\{ X_j : j \in \mathbb{N} \}$ es una partición numerable de X, donde cada X_j es un $\mathcal{F}_\sigma$. La función $g : X \longrightarrow E$ definida por $g|_{X_j} = g_j|_{X_j}$ pertenece a $B_1(X,E)$ por el lema **7.1.2** y además cumple que $\| g(x)-F(x) \| \le \varepsilon$ y el lema **7.1.1** nos asegura que $F \in B_1(X,E)$.

Nota.

Se sigue del teorema que si $Z \subset E$ es un subespacio cerrado tal que $F(X) \subset Z$ y $F \in B_1(X,E)$ entonces también $F \in B_1(X,Z)$.

Como primera consecuencia obtenemos que si X es un espacio perfectamente paracompacto y F pertenece a la primera clase de Baire débil, $F \in B_1^W(X,E)$, (es decir, si existe una sucesión de funciones continuas $F_n : X \longrightarrow E$ de modo que $F_n(x)$ converge a $F(x)$ débilmente para todo $x \in X$), entonces $F \in B_1(X,E)$, pues por **1.10-d** esta aplicación es *σ-fragmentable* mediante conjuntos cerrados.

En los siguientes resultados obtenemos condiciones suficientes para que una función débilmente continua sea de la primera clase de Baire. El siguiente resultado que se debe a Srivatsa [Sr], es poco conocido porque aún no ha sido recogido en la literatura.

7.1.4 Proposición.

Si $F : X \longrightarrow E$ es una aplicación débil-continua de un espacio métrico X con valores en un espacio de Banach E, entonces $F \in B_1(X,E)$.

Demostración:

Si representamos por B^* la bola unidad cerrada, del espacio dual E^*, dotada de la topología débil*, entonces la aplicación dada la podemos considerar como una aplicación t_p-continua $F : X \longrightarrow C_p(B^*)$ y por **2.11** tenemos que la aplicación F es *σ-fragmentable* mediante conjuntos cerrados y así, la aplicación $F : X \longrightarrow E$ es *σ-fragmentable* mediante conjuntos cerrados. Por el teorema **7.1.3** $F \in B_1(X,E)$.

El siguiente es un resultado clásico y bien conocido.

7.1.5 Proposición.

Si X es un espacio topológico y E es un espacio de Banach. Si $F : X \longrightarrow E$ es una aplicación débil-continua tal que F(X) es un subconjunto separable de E, entonces $F \in B_1(X,E)$.

Demostración:

Podemos suponer que E es un espacio de Banach separable. Observemos que en este caso la aplicación identidad $i : (E,\text{débil}) \longrightarrow (E,\|\ \|)$ es *σ-fragmentable* mediante conjuntos cerrados (se razona como en **1.10-b**). El espacio topológico (E,débil) es paracompacto (por ser Lindelöff) y cada abierto débil $G \subseteq E$ es un $\mathcal{F}_\sigma$ (G es la unión de una familia numerable de bolas cerradas). Así la aplicación identidad i es de la primera clase de Baire, y de ello se sigue que $F \in B_1(X,E)$.

Observación.

Nótese que si el espacio topológico X verifica la D.C.C.C. (cada familia de abiertos no vacios en X es a lo sumo numerable), y si $F \in B_1(X,E)$ entonces F(X) es un subconjunto separable de E en norma, pues F(X) está contenido en la clausura de una unión numerable de subconjuntos separables de E.

7.1.6 Proposición.

Sea X un espacio topológico perfectamente paracompacto, $(E,\| \ \|)$ un espacio de Banach y $F : X \longrightarrow E$ una aplicación débilmente continua. Entonces $F \in B_1(X,E)$ en los siguientes casos:

(a) X es hereditariamente Namioka, es decir, un espacio de Namioka en el que cada subespacio cerrado sigue siendo de Namioka (p.e. herditariamente Baire con la propiedad de Kaplansky).

(b) E es un espacio de Banach con la propiedad P.C., o más generalmente, un espacio σ-fragmentable mediante conjuntos $\mathcal{FG}$ (p.e. con una norma Kadec equivalente (6.4)).

(c) $(B^*,\text{débil}^*)$ es un compacto de Valdivia.

(d) X es hereditariamente Baire y E es un espacio de Banach σ-fragmentable.

(e) X tiene la propiedad de que cada t_p-compacto $H \subset C(X)$ es un compacto de Valdivia.

(f) X es un espacio metrizable, o más generalmente, un espacio de Moran.

Demostración.

a) Si representamos por B^* la bola unidad cerrada del espacio dual E^*, dotada de la topología débil*, la aplicación F se puede considerar como una aplicación t_p-continua $F : X \longrightarrow C_p(B^*)$ que será *fragmentable*, pues al restringirla a cada cerrado es *huskable* al ser X un espacio hereditariamente Namioka. Así la aplicación F dada será *fragmentable* y por el teorema **7.1.3** se tiene el resultado.

b) Como la aplicación $i : (E,\text{débil}) \longrightarrow (E,\| \ \|)$ es σ-*fragmentable* mediante conjuntos $\mathcal{FG}$ también lo será la aplicación F dada (1.8) y el resultado se sigue de **7.1.3.**

c) Como $K = (B^*,\text{débil}^*)$ es un compacto de Valdivia, entonces C(K) admite una norma equivalente de modo que sobre su esfera unidad coinciden la topología de la norma y la t_p [DG], luego por **6.7** la aplicación identidad $i : (C(K),t_p) \longrightarrow (C(K),\| \ \|)$ es σ-*fragmentable* mediante conjuntos cerrados por lo que lo es $F : X \longrightarrow C_p(K)$ y en consecuencia $F : X \longrightarrow E$. Por **7.1.3** se concluye la demostración.

d) La aplicación $F : X \longrightarrow E$ será σ-*fragmentable* en el espacio hereditariamente Baire X, luego por **1.8** y **1.2** la aplicación F es *fragmentable* y le podemos aplicar el teorema **7.1.3.**

e) Como ya hemos comentado la aplicación F la podemos considerar como una aplicación t_p-continua $F : X \longrightarrow C_p(K)$ donde $K = (B^*,\text{débil}^*)$. De acuerdo con la observación **2.3** el espacio C(K) lo podemos identificar con $C_p(K_f)$ donde K_f es un t_p-compacto de C(X) y razonando como en el apartado (c) tenemos el resultado.

f) Es consecuencia de **7.1.3** y de que la aplicación $F : X \longrightarrow C_p((B^*,\text{débil}^*)$ es σ-*fragmentable* mediante conjuntos cerrados por **2.14**.

7.1.7 Proposición.

Sea X un espacio topológico perfectamente paracompacto, K un espacio compacto y $F : X \longrightarrow C_p(K)$ una aplicación t_p-continua. Entonces $F \in B_1(X,C(K))$ en los siguientes casos:

(a) X es hereditariamente Namioka (p.e. herditariamente Baire con la propiedad de Kaplansky).

(b) K es un espacio compacto de modo que la aplicación identidad $i : (C(K),t_p) \longrightarrow (C(K),\| \ \|)$ es σ-fragmentable mediante conjuntos de la familia $\mathcal{FG}$ (p.e. si sobre la esfera unidad de C(K) coinciden la toplogía t_p y la de la norma (6.7)).

(c) K es un compacto de Valdivia.

(d) X es hereditariamente Baire y K es un compacto de modo que la aplicación identidad $i : (C(K),t_p) \longrightarrow (C(K),\| \ \|)$ es σ-fragmentable.

(e) X tiene la propiedad de que cada t_p-compacto $H \subset C(X)$ es un compacto de Valdivia.

(f) X es un espacio metrizable, o más generalmente, un espacio de Moran.

Demostración.

Las demostraciones son análogas a los correspodientes apartados de la proposición anterior.

7.1.8 Proposición.

En los casos que recogemos a continuación dada una aplicación $F : X \longrightarrow E$ débil-continua podremos afirmar que pertenece a $B_1(X,E)$ porque se puede probar que F(X) es $\| \ \|$-separable (7.1.5).

(a) Si X es un espacio topológico que cumple la propiedad P.C.M.

Demostración.

En efecto, pues podemos considerar la función separadamente continua $f : XxK \longrightarrow \mathbb{R}$, donde $K = (B^*, \text{débil}^*)$, asociada a la función F y que viene definida como $f(t,y) = y(F(t))$. Como X posee la propiedad P.C.M. el t_p-compacto $K_f \subset C(X)$ (Ver **2.3**) es metrizable y por **2.4** y **2.5** $X_f = F(X) \subset C(K)$ es un subconjunto $\| \|$-separable. Hemos obtenido así que F(X) es un subconjunto $\| \|$-separable de E.

A continuación mostramos algunos ejemplos en los que el espacio X posee la propiedad P.C.M.

*- Si X es un espacio de Moran que cumple la propiedad D.C.C.C. (***3.7***).*

*- Si X es un espacio de Namioka que cumple la propiedad C.C.C. (***3.5***).*

- Si X es un espacio K-analítico en el que cada conjunto abierto es un $\mathcal{F}_\sigma$ *[V2].*

En efecto, pues si $H \subset C(X)$ es un t_p-compacto, será un compacto de Talagrand [Ta2], y por tanto un compacto de Valdivia (como ya comentamos en el capítulo cuatro). La aplicación $i : (C(K),t_p) \longrightarrow (C(K),\| \|)$ es *σ-fragmentable* mediante conjuntos de la familia $\mathcal{FG}$ (Ver **6.7** y **6.8**) y en consecuencia la aplicación t_p-continua $F : X \longrightarrow C(H)$, definida como $F(x)(h) = h(x)$ si $h \in H$, será *σ-fragmentable* mediante conjuntos de la familia $\mathcal{FG}$. Como el espacio X es Lindelöf por ser K-analítico [A], el teorema **7.1.3** nos dice que $F \in B_1(X,C(K))$. Como los espacios Lindelöf cumplen la condición D.C.C.C. (**3.2**) tendremos que F(X) es $\| \|$-separable (**7.1.5**) y en consecuencia H es t_p-metrizable (**2.4**).

*- Si X es un espacio Web-compacto (***5.7***) y perfectamente*

paracompacto.

Se razona como en el caso anterior pues los t_p-compactos de $C(X)$ son compactos de Gul'ko (luego de Valdivia) y el espacio X posee la propiedad D.C.C.C. [CO].

- *Si* $X = \overline{\cup X_n}$ *donde cada* X_n *posee la propiedad P.C.M.*

Si $H \subset C(X)$ es t_p-compacto y consideramos la aplicación t_p-continua $F : X \longrightarrow C(H)$, definida como $F(x)(h) = h(x)$, entonces $F(X_n)$ es t_p-separable por *(a)* (Ver **2.5**) y como $F(X) = F(\overline{\cup X_n}) \subset \overline{\cup F(X_n)}^{t_p}$ tendremos que $F(X)$ es t_p-separable y entonces H será t_p-metrizable (**2.4**).

(b) Si X es un espacio de Baire con la propiedad C.C.C. y E es un espacio de Banach σ-fragmentable.

Demostración.

la aplicación débil-continua $F : X \longrightarrow E$ es *σ-fragmentable* y por **1.9** existe un $\mathcal{G}_\delta$-denso $X_0 \subset X$ de modo que F es continua en cada punto de X_0. La aplicación F la podemos considerar como una aplicación t_p-continua $F : X \longrightarrow C(K)$, donde $K = (B^*, \text{débil}^*)$ y tendremos que $F : X_0 \longrightarrow C(K)$, es $\| \ \|$-continua. Como X_0 es denso en X entonces cumple la C.C.C. y resulta que $(F(X_0), \| \ \|)$ cumple la C.C.C. por lo que será $\| \ \|$-separable ($\Leftrightarrow$ t_p-separable). Como F es t_p-continua $F(X) = F(\overline{X_0}) \subset \overline{F(X_0)}^{t_p}$ por lo que $F(X)$ es $\| \ \|$-separable.

Un espacio de Banach E se dice que tiene la *propiedad de Radon-Nikodym* (P.R.N.) si para cada espacio de probabilidad (Ω, Φ, μ) y para cada medida vectorial numerablemente aditiva $\xi : \Phi \longrightarrow E$ que sea absolutamente continua respecto a μ y de variación acotada, existe una función $x : \Omega \longrightarrow E$ que es integrable Bochner respecto a μ y tal que $\xi(A) = \int_A x d\mu$ si $A \in \Phi$.

En este contexto sólo nos interesa recordar la siguiente caracterización de un espacio E^* que tiene la P.R.N. ([NaP], [St1]):

Sea E un espacio de Banach. Entonces, el espacio dual E^* tiene la P.R.N. si y sólo si para cada subconjunto débil*-compacto $K \subset E^*$ la aplicación identidad $i : (K,\text{débil}^*) \longrightarrow (K,\| \ \|)$ es fragmentable.

7.1.9 Proposición.

Sea X un espacio topológico, E^* el dual de un espacio de Banach E y $F : X \longrightarrow E^*$ una aplicación débil*-continua. Si X es perfectamente paracompacto y E^* tiene la P.R.N. entonces $F \in B_1(X,E^*)$.

Demostración.

Como las bolas cerradas en E^* son conjuntos débil*-compactos por el resultado indicado anteriormente la aplicación identidad $i : (E^*,\text{débil}^*) \longrightarrow (E^*,\| \ \|)$ es *σ-fragmentable* mediante conjuntos cerrados y en consecuencia lo será la aplicación F. El teorema **7.1.3** nos da el resultado.

7.2 *Subconjuntos de Namioka en un espacio de Banach con la topología débil.*

Vamos a caracterizar los subconjuntos acotados y débilmente cerrados de un espacio de Banach $(E, \| \ \|)$ que son de Namioka (en la topología débil).

Recordemos que en el ejemplo (5.3) hemos introducido los espacios casi-Čech-completos y hemos probado que son de Namioka. La siguiente proposición es una extensión de 3.10 en [EW].

7.2.1 Proposición.

Sea A un subconjunto débil cerrado y acotado en un espacio de Banach E. Entonces son equivalentes:

a) La aplicación identidad $i : (A, \text{débil}) \longrightarrow (A, \| \ \|)$ es *huskable*.

b) (A,débil) es casi-Čech-completo.

c) (A,débil) es de Namioka.

Además si (A,débil) es hereditariamente Baire entonces se verifican las tres afirmaciones anteriores.

Demostración:

a) $\Rightarrow$ b) De la definición de aplicación *huskable* se deduce que

$\mathcal{U}_n = \{U \subseteq A,$ U es relativamente abierto (débil) y $\operatorname{diam}(U) < 1/n\}$

es una pseudobase para cada $n \in \mathbb{N}$. Además si $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión decreciente de cerrados débiles de modo que para cada $n \in \mathbb{N}$ existe $U_n \in \mathcal{U}_n$ con $F_n \subseteq U_n$ se tendrá que $\bigcap F_n \neq \emptyset$; en efecto $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ será una sucesión decreciente de cerrados (en norma) cuyos diámetros tienen límite cero y al estar en un espacio de Banach tenemos que su intersección es no vacía.

Deducimos de todo esto que $\{\mathcal{U}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión completa de pseudobases y por tanto (A,débil) es casi-Čech-completo (ver ejemplo (5.3)).

b) $\Rightarrow$ c) Ejemplo (5.3).

c) $\Rightarrow$ a) Consideremos la aplicación:

$$F : (A,\text{débil}) \longrightarrow C(B^*,\text{débil}^*)$$

definida como $F(a)(x^*) = x^*(a)$ con $a \in A$ y $x^* \in B^*$ donde B^* es la bola unidad del espacio dual de E, que como sabemos es débil*-compacto. Es claro que la aplicación F es t_p-continua y si suponemos que (A,débil) es de Namioka entonces existe un $\mathcal{G}_\delta$-denso de puntos de continuidad en norma (la norma del supremo en $C(B^*,\text{débil}^*)$), pero estos son los mismos puntos de continuidad que los de la aplicación identidad $i : (A,\text{débil}) \longrightarrow (A,\| \ \|)$, y por la proposición 1.1 tendremos que esta aplicación es *huskable*.

Para terminar si suponemos que (A,débil) es hereditariamente Baire, como la topología débil en un espacio de Banach tiene la propiedad de Kaplansky, el teorema **2.8** nos asegura que (A,débil) es un espacio de Namioka.

7.2.2 Corolario.

Sea $(E,\| \ \|)$ un espacio de Banach, las siguientes afirmaciones son equivalentes:

a) Para todo $A \subset E$ débil cerrado y acotado la aplicación identidad $i : (A,\text{débil}) \longrightarrow (A,\| \ \|)$ tiene algún punto de continuidad (X tiene la propiedad P.C.).

b) Para todo $A \subset E$ débil cerrado y acotado la aplicación identidad $i : (A,\text{débil}) \longrightarrow (A,\|\ \|)$ es *huskable*.

c) Todo $A \subset E$ débil cerrado y acotado es casi-Čech-completo.

d) Todo $A \subset E$ débil cerrado y acotado es de Namioka.

e) Todo $A \subset E$ débil cerrado y acotado es de Baire.

Demostración:

La proposición anterior nos da la equivalencia de las condiciones b), c) y d).

Es evidente que si una aplicación tiene la propiedad P.C. entonces es *fragmentable* y en consecuencia *huskable* **(1.2)** por lo que tenemos que a) $\Rightarrow$ b).

b) $\Rightarrow$ a) Por la proposición anterior (A,débil) es de Namioka y de Baire (es casi-Čech-completo) luego por la proposición **1.1** la aplicación identidad $i : (A,\text{débil}) \longrightarrow (A,\|\ \|)$ tiene un $\mathcal{G}_\delta$-denso de puntos de continuidad y en particular tenemos a).

Como los espacios casi-Čech-completos son de Baire entonces c) $\Rightarrow$ e).

e) $\Rightarrow$ d) (A,débil) si suponemos e), es un espacio hereditariamente Baire, y por la proposición anterior será de Namioka.

7.2.3 Ejemplos.

Veamos algunos ejemplos que completan los resultados anteriores, para ello consideramos un espacio de Banach $(E,\|\ \|)$ con una norma Kadec y sin la propiedad P.C. El ejemplo **2.26** nos asegura que la bola unidad de E dotada de la topología débil, $(B_E,\text{débil})$, es un espacio de Namioka y Baire que por la proposición **7.2.1** también es casi-Čech-completo pero que no es Čech-completo al no ser hereditariamente Baire según el corolario

7.2.2. Observemos que esto nos proporciona un ejemplo de una aplicación *huskable* que al restringirla a un subconjunto cerrado ya no lo es.

Un ejemplo de esta situación es el espacio C_0 dotado de una norma Kadec $\| \ \|_0$ equivalente a la usual. La bola unidad cerrada de su norma usual $B(C_0)$ no es de Baire para la topología débil pues se puede expresar como $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ donde:

$$A_n = \{x \in B(C_0), \ |x_k| \leq 1/2 \ \forall \ k \geq n\}$$

que es un débil cerrado nunca denso. Por tanto:

$$X = \{x \in C_0, \ \|x\|_0 \leq 1\}$$

con la topología débil inducida no es hereditariamente Baire, pero desde luego si es Namioka.

Otro ejemplo es el espacio $(l^\infty)^*$ en el cual falla la propiedad P.C. porque contiene a $L^1[0,1]$ y la bola unidad de éste $B(L^1[0,1])$ con la topología débil es de primera categoría por ser unión de los cerrados débiles nunca densos

$$A_k = \{f \in B(L^1[0,1]), \ \left|\int f(t)r_n(t)dt\right| \leq 1/4 \ \forall \ n \geq k \}$$

donde (r_n) es la sucesión de funciones de Rademacher. Sin embargo, $(l^\infty)^*$ admite una norma Kadec equivalente $\| \ \|$, luego

$$X = \{\mu \in (l^\infty)^* , \ \|\mu\| \leq 1\}$$

con la topología débil es otro ejemplo de un espacio de Namioka (no separable) que no es hereditariamente Baire.

7.3 *La propiedad de Namioka para funciones con valores en un espacio de Banach.*

Vemos a continuación algunos resultados sobre puntos de continuidad de aplicaciones que toman valores en espacios de Banach.

7.3.1 Proposición.

Sea X un espacio de Namioka y $(E,\|\ \|)$ un espacio de Banach, si $F : X \longrightarrow (E,\text{débil})$ es continua, entonces existe un subconjunto $X_0 \subseteq X$ que es un $\mathcal{G}_\delta$-denso de modo que F es continua en cada punto de X_0 cuando sobre E se considera la topología de la norma.

Demostración:

Si B^* es la bola unidad del espacio dual E^*, sabemos que es débil*-compacta, y además, el espacio E se puede considerar sumergido en $C((B^*,\text{débil}^*))$ de modo que la topología t_p de este espacio induce sobre E la topología débil, mientras que la de la norma del supremo induce la topología de la norma sobre E. Así, la aplicación dada la podemos considerar como una aplicación t_p-continua $F : X \longrightarrow C((B^*,\text{débil}^*))$ y como por hipótesis X es un espacio de Namioka existe un subconjunto $X_0 \subseteq X$, $\mathcal{G}_\delta$-denso, tal que F es continua en norma en cada punto de X_0 y tenemos el resultado.

7.3.2 Corolario.

Sea K un débil compacto en un espacio de Banach $(E,\| \ \|)$, entonces existe un $\mathcal{G}_\delta$-denso en (K,débil) de modo que para cada punto de este conjunto y cada entorno en norma de dicho punto relativo a K existe un entorno débil relativo a K contenido en él, es decir, la aplicación identidad $i : (K,\text{débil}) \longrightarrow (K,\| \ \|)$ tiene un $\mathcal{G}_\delta$-denso de puntos de continuidad.

Demostración:

Como (K,débil) es un compacto, entonces es un espacio de Namioka **(2.9)** y el corolario es una consecuencia inmediata de la proposición anterior.

En particular, del corolario anterior, se deduce que cada punto de un $\mathcal{G}_\delta$-denso en (K,débil) es un $\mathcal{G}_\delta$ (en (K,débil)), con lo que demostramos así un resultado de Amir y Lindenstrauss [AL] en el que se afirma que en un compacto de Eberlein el conjunto de los puntos que son un $\mathcal{G}_\delta$ es un conjunto denso.

De manera similar se puede intentar considerar la topología débil* en el dual E^* de un espacio de Banach E. En este caso la situación es mucho más compleja, así dado un subconjunto débil*-compacto $K \subset E^*$ puede no existir ningún punto de continuidad de la aplicación identidad:

$$i : (K,\text{débil}^*) \longrightarrow (K,\| \ \|).$$

Pero si E^* es un espacio separable entonces para toda aplicación continua $F : X \longrightarrow (E^*,\text{débil}^*)$, F(X) se puede cubrir mediante una cantidad numerable de bolas cerradas (por tanto débil* cerradas) de radio $\varepsilon > 0$ y así F será *σ-fragmentable* mediante conjuntos $\mathcal{FG}$, y si X es un espacio de Baire tendremos un subconjunto $X_0 \subset X$ $\mathcal{G}_\delta$-denso de modo que F es continua, en la norma de E, en cada punto de X_0 (1.9). En particular la aplicación

$$i : (K,\text{débil}^*) \longrightarrow (K,\|\ \|)$$

tiene un $\mathcal{G}_\delta$-denso de puntos de continuidad. I. Namioka extendió este resultado al caso en que el espacio E^* es débilmente compactamente generado [Na1]. Mientras que P. Kenderov [Kn] demostró que se obtenía el mismo resultado si todo subespacio separable de E tiene dual separable, lo que es equivalente a que el espacio dual E^* tenga la P.R.N. Aquí podemos obtener este resultado sin más que observar que cualquier aplicación $F : X \longrightarrow E^*$ que sea débil*-continua es *σ-fragmentable* mediante conjuntos cerrados si el espacio E^* tiene la P.R.N. (Ver 7.1.9). Con lo que demostramos el mencionado resultado de Kenderov:

7.3.3 Proposición.

Si X es un espacio de Baire y $(E,\|\ \|)$ un espacio de Banach de modo que E^* tiene la P.R.N. entonces para cualquier aplicación débil*-continua $F : X \longrightarrow E^*$ existe un subconjunto $X_0 \subset X$ que es un $\mathcal{G}_\delta$-denso y tal que F es continua, en la norma de E^*, en cada punto de X_0.

Veamos por último una generalización de un resultado de Stegall [St2] así como algún nuevo caso no considerado por éste. Para ello consideramos sobre el espacio de Banach E la topología τ inducida por los puntos extremales de la bola del dual, $\tau = \sigma(E,\text{ext}B(E^*))$.

La cuestión que se plantea, es cuando una aplicación continua $F : X \longrightarrow (E,\tau)$ es continua, en la norma de E, en cada punto de un subconjunto de X que sea un $\mathcal{G}_\delta$-denso.

Ch.Stegall prueba en [St2] que esto es cierto cuando el espacio X es Čech-completo.

G.Vera prueba en [V2] que el resultado también es cierto cuando X es un espacio métrico de Baire.

Ahora necesitamos recordar un teorema de J.Bourgain y M.Talagrand [BT]. En [St] se puede encontrar otra demostración de este resultado.

7.3.4 Teorema.

Sea F un subconjunto acotado de un espacio de Banach E. Si F es relativamente numerablemente compacto en la topología $\tau = \sigma(E,\mathrm{ext}B(E^*))$ entonces F es relativamente compacto en la topología débil.

7.3.5 Proposición.

Supongamos que X es un espacio compacto y que $F : X \longrightarrow (E,\tau)$ es una aplicación continua, entonces, F es continua, en la norma de E, en cada punto de un subconjunto $X_0 \subset X$ que es un $\mathcal{G}_\delta$-denso.

Demostración.

F(X) será un subconjunto τ-compacto (en particular τ-cerrado) de E y desde luego relativamente numerablemente compacto en la topología τ. Por el teorema **7.3.4** será relativamente compacto en la topología débil y como es débil-cerrado (por ser τ-cerrado) entonces (F(X),débil) es compacto. Indicar que como consecuencia sobre F(X) coinciden las dos topologías. Por **7.3.2** y **1.2** tenemos que la aplicación identidad $i : (F(X).\text{débil}) \longrightarrow (F(X),\|\ \|)$ es *fragmentable* y como desde luego X es un espacio de Baire el teorema **1.9** nos da el resultado.

7.3.6 Proposición.

Supongamos que X es un espacio Čech-analítico de Baire y que $F : X \longrightarrow (E,\tau)$ es una aplicación continua. Entonces F es continua, en la norma de E, en cada punto de un subconjunto $X_0 \subset X$ que es un $\mathcal{G}_\delta$-denso.

Demostración.

Si $K \subset X$ es un conjunto compacto, entonces por **7.3.5** $F|_K$ será *huskable* **(1.1)** y como la métrica asociada a la norma es semi-continua inferiormente respecto a la topología τ, por el teorema **6.5**, la aplicación F es *σ-fragmentable.* Como el espacio X es de Baire por **1.9** se obtiene la demostración.

7.3.7 Corolario.

Sea $(E,\| \|)$ un espacio de Banach, Čech-analítico para la topología $\tau = \sigma(E,\mathrm{ext}B(E^*))$, y sea $F : X \longrightarrow (E,\tau)$ una aplicación continua siendo X un espacio de Baire. Entonces F es continua, en la norma de E, en cada punto de un subconjunto $X_0 \subset X$ que es un $\mathcal{G}_\delta$-denso.

Demostración:

Por **7.3.6** la aplicación identidad $i : (E,\tau) \longrightarrow (E,\| \|)$ es *σ-fragmentable* luego lo es la aplicación F y por **1.9** tenemos la demostración.

7.4 *Grupos topológicos. Teorema de Ellis.*

Recordemos que un *grupo topológico* es un grupo $(G,\cdot)$ dotado de una topología Hausdorff de modo que la aplicación de $G\times G \longrightarrow G$ definida como $(x,y) \longrightarrow xy^{-1}$ es continua.

Se dice que un grupo G actúa sobre un espacio topológico X si existe una aplicación de $G\times X$ en X (la representaremos por $(g,x) \longrightarrow g\cdot x$) que satisface las siguientes condiciones:

(a) La aplicación $x \longrightarrow g\cdot x$ es continua para cada $g \in G$.

(b) $g\cdot(h\cdot x) = (gh)\cdot x$ $\forall g,h \in G$ y $x \in X$.

(c) Si e representa el elemento neutro de G entonces $e\cdot x = x$ $\forall x \in X$.

Naturalmente de las condiciones anteriores se deduce que para cada $g \in G$ la aplicación $x \longrightarrow g\cdot x$ es un homeomorfismo del espacio X sobre sí mismo.

La siguiente proposición es de I. Namioka [Na1].

7.4.1 Proposición.

Sea X un espacio regular localmente compacto y sea G un grupo actuando sobre X. Supongamos que en G existe una topología tal que:

i) G es un espacio de Namioka.

ii) La aplicación $(g,x) \longrightarrow g\cdot x$ es separadamente continua.

iii) La aplicación de G en G dada por $h \longrightarrow hg$ es continua para cada $g \in G$.

Entonces la aplicación que aparece en ii) es conjuntamente continua en la topología producto.

Demostración:

Sea X^* la compactificación de Alexandroff del espacio X mediante el punto del infinito, ∞. La acción de G sobre X se puede extender a X^* definiendo $g\cdot\infty = \infty$ $\forall\, g \in G$. La condición ii) se cumple reemplazando X por X^*, por lo tanto sin pérdida de generalidad podemos suponer que el espacio X es compacto y regular.

Como X es completamente regular para demostrar que la aplicación $(g,x) \longrightarrow g\cdot x$ es continua es suficiente con demostrar que la aplicación $(g,x) \longrightarrow \Phi(g\cdot x)$ es continua para cualquier función real $\Phi : X \longrightarrow \mathbb{R}$.

Sea $F : G \longrightarrow C(X)$ la aplicación definida como $F(g)(x) = \Phi(g\cdot x)$, y para cada $\alpha \in C(X)$ y $g \in G$ definimos un elemento de $C(X)$ por $(\alpha\cdot g)(x) = \alpha(g\cdot x)$. Esta aplicación así definida verifica:

-$\alpha \longrightarrow \alpha\cdot g : C(X) \longrightarrow C(X)$ es lineal.

-$\|\alpha\cdot g\| = \|\alpha\|$ siendo $\|\ \|$ la norma del supremo.

-$(\alpha\cdot g)\cdot h = \alpha\cdot(gh)$.

-$F(gh) = F(g)\cdot h$ $\forall\, \alpha \in C(X)$ y $\forall\, g,h \in G$.

Desde luego F es una aplicación continua respecto a la topología de la convergencia puntual luego habrá algún punto $a \in G$ (de hecho hay un $\mathcal{G}_\delta$-denso por ser G de Namioka) donde la función F será continua en la norma de $C(X)$. Sea $b \in G$ y $\{g_\gamma\}$ una red en G convergente hacia b. Entonces por iii) $g_\gamma b^{-1}a \longrightarrow a$ y por lo tanto $\| F(g_\gamma b^{-1}a)-F(a) \| \longrightarrow 0$. Pero

$$\| F(g_\gamma)-F(b) \| = \| F(g_\gamma b^{-1}a)\cdot(a^{-1}b)-F(a)\cdot(a^{-1}b) \| =$$

$$\| (F(g_\gamma b^{-1}a)-F(a))\cdot(a^{-1}b) \| = \| F(g_\gamma b^{-1}a)-F(a) \|.$$

Se sigue que $\| F(g_\gamma)-F(b) \| \longrightarrow 0$, luego la aplicación F es continua en la norma de C(X) lo que nos dice que la aplicación $(g,x) \longrightarrow F(g)(x) = \Phi(g\cdot x)$ es continua.

De la proposición anterior se sigue una generalización de un teorema de R. Ellis [El].

7.4.2 Corolario.

Supongamos que $(G,\cdot)$ es un grupo sobre el que existe una topología localmente compacta y regular de modo que la aplicación $(g,h) \longrightarrow g\cdot h$ definida de $G\times G$ en G es separadamente continua. Entonces $(G,\cdot)$ es un grupo topológico.

Demostración:

Si G^* es el compactificado de Alexandroff del grupo G mediante el punto del infinito, ∞, es claro que la aplicación "producto" se puede extender y considerarla como una aplicación de $G\times G^*$ en G^* sin más que definir $g\cdot\infty = \infty \ \forall\ g \in G$. La aplicación es conjuntamente continua por la proposición **7.4.1**, como el conjunto $F = \{(g,h) \in G\times G^*;\ g\cdot h = e\}$ es claramente cerrado en $G\times G^*$ y es el grafo de la aplicación $x \longrightarrow x^{-1}$, definida de G en G^*, tendremos que esta aplicación es continua (una función que toma valores en un compacto es continua si tiene su grafo cerrado).

De todo lo anterior deducimos que la aplicación $(x,y) \longrightarrow x\cdot y^{-1}$ definida de $G\times G$ en G es conjuntamente continua y por tanto $(G,\cdot)$ es un grupo topológico.

BIBLIOGRAFIA.

[A] VARIOS AUTORES.

Analytic sets. Academic press Inc. (London).

[AaL] J. AARTS-D. LUTZER.

Completeness properties designed for recognizing Baire space. Dissertationes Math. 116 (1974).

[AL] D. AMIR-J.LINDENSTRAUSS.

The estructure of weakly compact sets in Banach spaces. Ann. of Math. 88 (1968), 35-46.

[AMN] S. ARGYROS-S. MERCOURAKIS-S. NEGROPONTIS.

Functional-analytic properties of Corson-compact spaces. Studia Math. 89 (1988), 197-229.

[Ar] R. ARENS.

Extension of functions on fully normal spaces. Pacific J. Math. 2 (1952), 11-22.

[B] J. BOURGAIN.

Functions of the fist Baire class on metric spaces.

[Ba] R. BAIRE.

Sur les fonctions des variables réelles. Ann. Mat. Pura Appl. 3 (1899), 1-122.

[BT] J. BOURGAIN-M. TALAGRAND.

Compacité extrèmale. Proc. Amer. Math. Soc. 80 (1980), 68-70.

[Ch1] J.P.R. CHRISTENSEN.

Joint continuity of separately continuous functions. Proc. Amer. Math. Soc. 82 (1981), 455-461.

[Ch2] J.P.R. CHRISTENSEN

Remarks on Namioka spaces and R.E. Jonhson's theorem on the norm separability of the range of certain mappings. Math. Scand. 52 (1983), 112-116.

[Ch3] J.P.R. CHRISTENSEN.

Theorems of Namioka and R.E. Johnson type for upper semicontinuous and compact valued set-valued mappings. Proc. Amer. Math. Soc. Vol 86 nº 4 Diciembre 1982.

[ChK] J.P.R. CHRISTENSEN-P. KENDEROV.

Dense strong continuity of mappings and the Radon-Nikodym property. Math. Scand. 54 (1984), 70-78.

[CK] F.W. CARROLL-F.S. KOEHL.

Separately continuous Banach-valued functions on compact groups. J. London Math. Soc. 2,4 (1971), 100-102.

[CO] B. CASCALES-J. ORIHUELA.

On pointwise and weak compactness in spaces of continuous functions. Bull. Soc. Math. Belg. 40 (1988) 2 ser. B 331-351.

[CT] J. CALBRIX-J.P. TROALLIC.

Aplications séparément continues. C.R.A.S. Paris 288A (1979), 647-648.

[CZ] J. CHABER-P. ZENOR.

On perfect subparacompactness and a metrization theorem for Moore spaces. Topology Proceedings 2 (1957), 401-407.

[D1] R. DEVILLE.

Parties faiblement de Baire dans les espaces de Banach. Applications à la dentablite et l'etude de certains preduaux. C.R.A.S. Paris Serie I Math. 298 (1984), n° 7, 129-132.

[D2] R. DEVILLE.

Convergence ponctuelle et uniforme sur un espace compact. Bull. Acad. Polon. Sci. Vol 37; n° 7-12, 1989.

[Db1] G. DEBS.

Espaces héréditairement de Baire. Fundamenta Mathematicae 129 (1988), 199-206.

[Db2] G. DEBS.

Pointwise and uniform convergence on a Corson compact space. Topology and its Applications. 23 (1986), 299-303.

[Db3] G. DEBS.

Points de continuité d'une fonction séparément continues. Proc. Amer. Soc. 97 (1986), 167-176.

[Db4] G. DEBS.

Points de continuité d'une fonction séparément continues II. Proc. Amer. Soc. 99 (1987), 777-782.

[Db5] G. DEBS.

Fonctions séparément continues et de première classe sur un espace produit. Math. Scand. 59 (1986), 122-130.

[Db6] G. DEBS.

Espaces K-analitiques et espaces de Baire de fonctions continues.

[DG] R. DEVILLE-G. GODEFROY.

Some applications of projective resolutions of identity. Preprint.

[Di1] J. DIESTEL.

Geometry of Banach spaces.Selected topics. Springer-Verlag.

[Di2] J. DIESTEL.

Sequences and series in Banach spaces. Springer-Verlag.

[Do] C. H. DOWKER.

On a theorem of Hanner. Ark. Math. 2 (1952),307-313.

[E] R.ENGELKING.

General topology. Varsaw 1977.

[El] R. ELLIS.

Locally compact transformation groups. Duke Math. J., 24 (1957),119-125.

[EW] G.A. EDGAR-R.F. WHEELER.

Topological properties of Banach spaces. Pacific Journal of Mathematics 115 (1984), 317-349.

[F] Z. FROLIK.

Baire spaces and some generalizations of complete metric spaces. Czech. Math. J. 11 (1961), 237-238.

[G] S.P. GUL'KO.

On properties of functions spaces in: Seminar on general Topology. Moscow University, 1981.

[Gl] I. GLIKSBERG.

Weak compactness and separate continuity. Pacific Journal Math. 11 (1961), 205-214.

[H1] R.G. HAYDON.

A counterexample of several questions about scattered compact spaces. Bull. London Math. Soc. 22 (1990), 261-268.

[H2] R.G. HAYDON.

Boolean rings that are Baire space.

[Ha1] R.W. HANSELL.

Sums, products and continuity of Borel maps in nonseparable metric spaces. Proc. Amer. Math. Soc.Vol 104, nº 2 Octubre 1988.

[Ha2] R. W. HANSELL.

Descriptive sets and the topology of nonseparable Banach spaces. Preprint.

[Ha3] R. W. HANSELL.

Borel measurable mapping for nonseparable metric spaces. Trans. Amer. Math. Soc. 161 (1971), 145-169.

[HF] D. HINRICHSEN-J.L. FERNANDEZ.

Topología general. Ed. Urmo 1977.

[Hr] HELMER, D.

Criteria for Eberlein compactness in spaces of continuous functions. Manuscripta Math. 35 (1981), 27-51.

[HR] R.G. HAYDON-C.A. ROGERS.

A locally uniformly convex renorming for certain C(K). Mathematika, 37 (1990), 1-8.

[J] H.J.K. JUNILA.

Three covering properties. Surveys in General Topology, Ed. by G.M. Reed, London-New York-San Francisco, 1980 195-245.

[Jh] R.E. JOHNSON.

Separate continuity and measurability. Proc. Amer. Math. Soc. 20 (1969), 420-422.

[JNR1] J.E. JAYNE-I. NAMIOKA-C.A. ROGERS.

Properties like the Radon-Nikodym property.

[JNR2] J.E. JAYNE-I. NAMIOKA-C.A. ROGERS.

σ-Fragmented Banach spaces.

[JOPV] J.E. JAYNE-J. ORIHUELA-A.J.PALLARES-G.VERA.

σ-fragmentability of multivalued maps and selection theorems. Preprint.

[JR] J.E. JAYNE-C.A. ROGERS.

Borel selectors for upper semi-continuous set-valued maps. Acta Math. 155 (1985), 41-79 y 149-152.

[K] G. KOUMOULLIS.

Topological spaces containing compact perfect sets and Prohorov spaces. Topology and its applications 21 (1985) 59-71

[Ke] J.L. KELLEY.

Topologia general. EUDEBA 1975.

[Kn] P. KENDEROV.

Denuse strong continuity of pointwise continuous mappings. Pacific Journal of Math. Vol 89 nº 1, 1980.

[KN] J.L. KELLEY-I. NAMIOKA y al.

Linear topological spaces. Springer-Verlag.

[L] I. LABUDA.

Multi-valued Namioka theorems. Math. Scand. 58 (1986), 227-235.

[La] J.D. LAWSON.

Joint continuity in semitopological semigroups. Illinois Journal Math. 18 (1974), 275-285.

[LP] J.P. LEE-Z. PIOTROWSKI.

A note on spaces related to Namioka spaces. Bull. Austral. Math. Soc. 31 (1985), 285-292.

[Mo] W.MORAN.

Separate continiuty and supports of measures. J. London. Math. Soc. 44 (1969), 320-324.

[Na1] I. NAMIOKA.

Separate continuity and joint continuity. Pacific J. Math. 51 (1974),515-531.

[Na2] I. NAMIOKA.

Radon-Nikodym compact spaces and fragmentability. Mathematica, 34 (1987), 258-281.

[NP] I.NAMIOKA-R.POL.

Mappings of Baire spaces into function spaces and Kadec renorming. Sin publicar.

[NaP] I. NAMIOKA-R.R. PHELPS.

Banach spaces which are Asplund spaces. Duke Math. J. 42 (1975), 735-750.

[O] J. ORIHUELA.

Pointwise compactness in spaces of continuous functions. J. London Math. Soc. (2) 36 (1987), 143-152.

[Pt1] Z. PIOTROWSKI.

Separate and joint continuity. Real analysis Exchange, 11 (1985-86), 293-322.

[Pt2] Z. PIOTROWSKI.

Separate and joint continuity II.

[Ro] H.P. ROSENTHAL.

On injective Banach spaces and the $L^{\infty}(\mu)$ for finite measure μ. Acta Math. 124 (1970), 205-247.

[Ru] W. RUDIN.

Lebesgue first theorem. Math. Analysis and Applications, part B. Edited by L. Nachbin. Adv. in Math. Supplem. studies 7B. Academic Press (1981), 741-747.

[Sa] J. SAINT-RAYMOND.

Jeux topologiques et espaces de Namioka. Proc. Amer. Math. Soc. 87 (1983), 499-504.

[Sr] V.V. SRIVATSA.

Baire class 1 selectors for upper semicontinuous set-valued maps. Sin publicar.

[St1] CH. STEGALL.

The duality between Asplund spaces and spaces with R.N.P. Israel J. Math. 29 (1978), 408-412.

[St2] CH. STEGALL.

Generalizations of a theorem of Namioka. Proc. Amer. Math. Soc. 102(1988) 559-564.

[SS] L.A. STEEN-J.A. SEEBACH Jr.

Counterexamples in topology. Springer-Verlag.

[T1] J.P.TROALLIC.

Fonctions à valeurs dans des espaces fonctionnels généraux: theorèmes de R. Ellis et de I. Namioka. C.R.A.S. Paris 287A (1978), 63-66.

[T2] J.P. TROALLIC.

Espaces fonctionnels el théorèmes de I. Namioka. Bull. Soc. Math. France. 107, (1979), 127-137.

[Ta1] M. TALAGRAND.

Espaces de Baire et espaces de Namioka. Math. Annalen 270 (1985), 159-164.

[Ta2] M. TALAGRAND.

Espaces de Banach faiblement K-analitiques. Ann. of Math. (2). 110 (1979), 407-438.

[Ta3] M. TALAGRAND.

Deux generalisations d'un theorem de I. Namioka. Pacific Journal of Math. Vol 81 nº 1 (1979), 239-251.

[V1] G. VERA.

Baire mesurability of separately continuous functions. Quart. J. Math. 39 (1988), 109-116.

[V2] G. VERA.

Vector valued first Baire class functions. Preprint.

[Va] L. VĂSĂK.

On a generalization of weakly compactly generated Banach spaces. Studia Math. 70 (1981), 11-19.

[VL] M. VALDIVIA.

Projective resolution of identity in C(K) spaces.

[W] R.F. WHEELER.

Weak and pointwise compactness in the space of bounded continuous functions. Trans. Amer. Math. Soc., vol. 206, n$^{\underline{0}}$ 2 (1981), 515–530.