Departamento de Matemáticas

Funciones de la primera clase

David Huerta Lorenzo

Trabajo de investigación realizado en el Departamento de Matemáticas bajo la dirección del Doctor D. Gabriel Vera Botí y que se presenta como Tesina de Licenciatura.

Murcia, Septiembre de 2000.

Facultad de Matemáticas

Universidad de Murcia

Índice general

AGRADECIMIENTOS

Quisiera agradecer al profesor D. Gabriel Vera Botí la posibilidad que me ha ofrecido de poder realizar este trabajo así como la paciencia que ha tenido conmigo.

A mis padres y M.ª Carmen

Capítulo 1

Introducción

Contexto histórico y origen de la teoría: A finales del siglo XIX y principios del XX la teoría de funciones reales, impulsada por la teoría de conjuntos de Cantor, ocupaba un lugar destacado en las matemáticas y estaba experimentando un notable desarrollo (como ejemplo de este impulso se puede citar la clasificación de las funciones reales, donde los números transfinitos jugaban un papel importante).

Un punto central en las discusiones de la época era la cuestión del significado de lo que se debía entender por una *buena función*. Las funciones patológicas, que ni siquiera eran continuas, empezaron a ser objetos dignos de estudio y entre los matemáticos que impulsaron el estudio en profundidad de las funciones discontinuas ocupan un lugar destacado R. Baire, É. Borel y H. Lebesgue.

La tesis de Baire [4] *Sur les fonctions de variables réelles* (1899) y su libro [6] *Leçons sur les fonctions discontinues* (1905) son referencias clásicas sobre el tema. En la introducción de este libro, para motivar la conveniencia de estudiar funciones discontinuas, dice Baire que en el análisis clásico, después de introducir las nociones fundamentales mediante definiciones muy generales, inmediatamente se suelen imponer restricciones a las definiciones con el fin de poder proseguir el estudio y construir las diferentes teorías; por ello es legítimo investigar, remontándose a las definiciones iniciales, la posibilidad de sacar consecuencias interesantes conservando, tanto como sea posible, la generalidad. Así propone Baire desarrollar una rama del Análisis que, siguiendo la pauta del análisis clásico, aunque contenga menos cantidad de resultados, tenga la ventaja de suministrar enunciados más completos y más generales.

É. Borel también se preocupó de asuntos similares. Su tesis *Sur quelques points de la théorie des fonctions* data de 1892, y hacia 1912 hizo algunos comentarios interesantes en relación con la actitud simplista de limitar las matemáticas al estudio de clases determinadas de funciones como las continuas, derivables, analíticas, etc. La imposibilidad de establecer una demarcación precisa entre los entes analíticos considerados *simples* y los otros es lo que, según Borel, había impulsado investigaciones importantes que habían incrementado el conocimiento del Análisis. Por ello seguía siendo de interés el ocuparse de las patologías de las funciones con la finalidad de delimitar las que debían ser consideradas *sanas*.

Alrededor de 1900, por iniciativa de Borel, empezó a publicarse una serie de libros titulada *Collection de monographies sur le théorie des functions*, donde además de las obras de Borel *Leçons sur le théorie des fonctions* (1898 y 1914) y *Méthodes et problèmes de théorie des fonctions* (1922), se publicaron otras obras de gran trascendencia como el famoso libro de Lebesgue *Leçons sur l'integration el la recherche des fonctions primitives* (1903) y el tratado de De la Vallé Poussin *Intégrales de Lebesgue, fonctions d'ensemble, classes de Baire* (1916) en el que ya aparece una excelente exposición del método que había ideado Baire para clasificar las funciones discontinuas. El método es el siguiente:

La clase 0 es la formada por las funciones continuas, la clase 1 la formada por los límites de sucesiones de funciones continuas que no pertenecen a la clase 0 y de modo recurrente definía Baire las funciones de clase n. Después de haber definido las clases para los ordinales finitos definía la clase de orden ω como el conjunto de las funciones que son límites puntuales de sucesiones de funciones que están en las clases anteriores (de orden finito) supuesto que el límite no pertenece a ninguna clase de orden finito. El método continúa de modo transfinito y se van obteniendo clases de funciones, cada vez más amplias, para cada ordinal numerable α, finito o transfinito. Las clases de funciones así obtenidas se llaman *clases de Baire* y las funciones *funciones de Baire*. (Poco después se modificaría la definición original de las clases de Baire de modo que en la definición de cada clase no quedasen excluidas las funciones de las clases anteriores).

El problema central en esta teoría, que estudiaron Baire, Borel, Lebesgue y De La Vallé Poussin, era el siguiente: Dado un ordinal numerable α, ¿existe una función de clase α?. La respuesta que se obtuvo fue que para cada α existe una función de clase α. Lebesgue demostró incluso que existía una función no clasificable y que las funciones de Baire coincidían con las medibles Borel. El problema de la existencia de funciones que no pertenecían a ninguna clase, finita o infinita, era equivalente al problema de la existencia de conjuntos que no son de Borel. En 1905 Lebesgue dio un ejemplo de un conjunto medible que no era de Borel y dejó planteado el problema de encontrar un conjunto no medible.

En este contexto clásico se enmarca el tema de esta tesina que se ocupa esencialmente del estudio de las funciones de la primera clase, con especial atención a los resultados recientes que conciernen a funciones con valores en un espacio normado no separable. Empecemos recordando los resultados clásicos relativos a funciones de una o varias variables reales.

Resultados clásicos: El estudio de las funciones de la primera clase, definidas como *límites puntuales de sucesiones convergentes de funciones continuas*, se inició en 1899 cuando René Baire las introdujo en sus tesis [4] y en [3]. Aparecían en la primera etapa de su proceso de clasificación transfinita de las funciones reales y las caracterizó mediante la propiedad del punto de continuidad:

(PC) *La restricción de la función a cada conjunto perfecto no vacío de su dominio tiene al menos un punto de continuidad* (véase [3]).

En 1899 Lebesgue dio una indicación para extender esta caracterización al caso de funciones de varias variables reales [42], y en 1900 Baire demostró este caso más general [5]. En 1904, en el mismo contexto de las funciones reales de varias variables reales, obtuvo Lebesgue otra caracterización de las funciones de la primera clase ([44, pág. 154] y [9]):

(L) *Si f es una función real definida sobre un intervalo $X \subset \mathbb{R}^n$, entonces f es de la primera clase de Baire sí y sólo sí para cada $\varepsilon > 0$ existe una sucesión de conjuntos cerrados F_n tal que*

$$X = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n \quad \text{y} \quad o(f, F_n) < \varepsilon \quad n = 1, 2, ... \tag{1.1}$$

donde $o(f, H)$ denota la oscilación de f sobre el conjunto H.

En este artículo y en [45] Lebesgue observó también que la condición anterior 1.1 equivale a que para cada par de números reales $a < b$ el conjunto $\{x \in I : a < f(x) < b\}$ sea unión numerable de conjuntos cerrados. Motivado por este hecho Lebesgue introdujo la clasificación transfinita de los conjuntos de Borel y mostró su relación con la clasificación de las funciones introducida por Baire [45]. Así aparecieron las *funciones de la primera clase de Borel como aquellas que tienen la propiedad de que la anti-imagen de cualquier abierto es un conjunto $\mathcal{F}_\sigma$* (una unión numerable de conjuntos cerrados).

En definitiva, para el caso de funciones reales de una variable real definidas en un intervalo $X \subset \mathbb{R}$, combinando el teorema de Baire con el de Lebesgue, a principios del siglo XX, se había logrado establecer la igualdad

$$B_1(X) = F_\sigma(X) = PC(X)$$

donde $B_1(X)$ es el conjunto de las funciones de la primera clase de Baire, $F_\sigma(X)$ el conjunto de las funciones de la primera clase de Borel y $PC(X)$ el de las funciones con la propiedad del punto de continuidad. (Referencias más accesibles para estos resultados clásicos son [31, pág. 289], [23], [38, pág. 391-394] y [14, pág. 67]).

Por otra parte, casi al mismo tiempo que fueron obtenidos estos resultados, estaban cristalizando las principales ideas de la topología general: La noción de espacio métrico fue introducida por Fréchet en 1906 [21], y los primeros pasos de las nociones topológicas los había dado el propio Baire cuando en 1899 introdujo la definición de límite puntual, conjunto cerrado y conjunto de primera y segunda categoría (véase [2] y [3]). Conforme los matemáticos de la época se fueron interesando en espacios abstractos más generales se fue planteando de modo natural la pregunta de si los resultados de Baire y Lebesgue se podían extender a funciones entre clases más generales de espacios.

En 1927 Hausdorff demostró que las funciones reales de la primera clase de Baire coinciden con las de la primera clase de Borel cuando el dominio X es un espacio métrico, que las funciones con la propiedad del punto de continuidad son de la primera clase de Borel si dicho espacio es separable y que el recíproco es cierto cuando X es completo, aunque esta última implicación no es cierta en general [31].

En 1935 Kuratowsky preguntó si alguno de los resultados de Baire, Lebesgue y Hausdorff se seguían cumpliendo cuando X era un espacio metrizable arbitrario [37]. El primer progreso significativo en esta dirección lo llevó a cabo Montgomery [49] en 1935 cuando puso de manifiesto que la separabilidad del dominio X había sido asumida de modo innecesario en la prueba de ciertos teoremas sobre funciones reales; en particular demostró que la igualdad $PC(X) = B_1(X)$ seguía siendo cierta cuando X era un espacio métrico completo arbitrario (después del lema de Montgomery, la demostración dada por Kuratowsky en [38, pág. 190] sigue funcionando en este caso más general). Sin embargo, Montgomery no fue capaz de resolver el siguiente problema: Si X es un espacio métrico completo y E espacio métrico arbitrario, ¿se puede asegurar que cada función de la primera clase de Borel $f : X \to E$, tiene algún punto de continuidad?.

Antes de comentar cómo estos resultados se han ido generalizando para funciones con valores en espacios más generales conviene introducir las notaciones $B_1(X,E)$, $F_\sigma(X,E)$ y $PC(X,E)$ para designar los correspondientes espacios de funciones con valores en un espacio métrico E.

La primera extensión la proporcionó el hoy llamado teorema de Lebesgue-Hausdorff [38, pág 391-393] que dice que si X es un espacio métrico separable y $E = [0,1]^n$ un cubo n-dimensional o el cubo de Hilbert $[0,1]^\omega$, entonces

$B_1(X, E) = F_\sigma(X, E)$. En [7] y [1] ya se había indicado que el resultado se seguía cumpliendo cuando X era un espacio métrico separable y E un espacio de Banach separable (un ingrediente fundamental en la prueba de este tipo de resultados ha sido casi siempre el teorema de extensión de Tietze (véase [38, 31.VIII, pág. 391 Th.7 y 31.IX, pág. 393]).

En 1958 Rolewicz [53] demostró que si X es un espacio métrico y E un subconjunto convexo y separable de un espacio normado entonces $F_\sigma(X, E) = B_1(X, E)$.

Resultados recientes sobre la teoría no separable: En [25] y [26] Hansell puso de manifiesto que la consideración de funciones con base σ-discreta, también llamadas σ-discretas, permitía extender al caso de un espacio métrico no separable E algunos de los métodos que se venían empleando para espacios separables ya que las bases σ-discretas de las funciones reemplazaban satisfactoriamente a las bases numerables que aparecen en los argumentos clásicos. El papel protagonista de las funciones σ-discretas en la teoría no separable había sido puesto de manifiesto inicialmente por Stone en [58] y [57]. Una familia $\mathcal{H}$ de subconjuntos de X se dice que es *σ-discreta* cuando $\mathcal{H}$ es unión numerable de familias discretas y, *una función $f : X \to E$ se dice que tiene base σ-discreta o que es σ-discreta si la antiimagen de cualquier abierto de E se puede expresar como unión de elementos de una familia σ-discreta de subconjuntos de X*. Las funciones con valores en un espacio métrico separable son σ-discretas ya que tienen base numerable y Hansell demostró que son σ-discretas todas las funciones medibles Borel cuyo dominio es un espacio métrico completo, o más generalmente un espacio métrico absolutamente analítico [25] (lo que significa que es un conjunto $\mathcal{F}$-Souslin en su compleción). Por otra parte Fleissner [19] demostró que es relativamente consistente, con los axiomas de la teoría de conjuntos, asumir que cada función de la primera clase de Borel en un espacio métrico es σ-discreta.

Hansell también observó que las funciones de $B_1(X, E)$ son σ-discretas viendo que las funciones continuas son σ-discretas y que la clase de las funciones σ-discretas es estable frente a límites de sucesiones puntualmente convergentes (véase [28]). Utilizando la noción de aplicación σ-discreta Hansell [25] había obtenido la primera generalización, para espacios métricos arbitrarios X y E, del teorema de Baire sobre los puntos de continuidad de una función de la primera clase. En [26] Hansell dio una extensión del teorema de Lebesgue-Hausdorff para el caso de aplicaciones σ-discretas con recorrido no separable, demostrando que si E tiene la propiedad de extensión respecto al espacio X entonces cada función σ-discreta de la primera clase de Borel es de la primera clase de Baire. Garg [22] observó que la demostración de

Hansell de este último resultado era incompleta, aunque la prueba se podía corregir cuando E era un subconjunto convexo de un espacio normado. Las versión corregida del teorema de Hansell que dio Rogers [52] afirma que *si E tiene la propiedad de extensión respecto al espacio métrico X y además se cumple otra propiedad de extensión local que se cumple cuando E es un subconjunto convexo de un espacio normado o un retracto absoluto para espacios métricos, entonces cada función σ-discreta de la primera clase de Borel $f : X \to E$ es de la primera clase de Baire.*

Así quedó definitivamente establecido el resultado que afirma que *cuando X es un espacio métrico arbitrario y E un subconjunto convexo de un espacio normado entonces las funciones de la primera clase de Baire coinciden con las de la primera clase de Borel que son σ-discretas. Si además X es un espacio métrico completo (o más generalmente un conjunto $\mathcal{F}$-Souslin en su compleción) entonces $B_1(X, E) = F_\sigma(X, E)$* (ya que por el resultado de Hansell comentado anteriormente, en este caso todas las funciones de la primera clase de Borel son σ-discretas) (véase también [52], [25], [29], [27] y [28]).

Este resultado, cuando X es un espacio métrico completo y E un espacio normado, fue demostrado con otras técnicas y de modo independiente por Stegall en [56].

Fosgerau extendió el resultado anterior a espacios de llegada más generales probando en su tesis [20] que las funciones de la primera clase de Baire también coinciden con las de la primera clase de Borel que son σ-discretas cuando el espacio métrico completo E es arcoconexo y localmente arcoconexo.

Por otra parte, Hansell dio otra extensión del mismo resultado al caso de dominios X más generales que los metrizables [28] demostrando que *las funciones de la primera clase de Baire también coinciden con las de la primera clase de Borel σ-discretas cuando E es un subconjunto cerrado convexo de un espacio Banach y X un espacio topológico colectivamente normal*, una clase de espacios que contiene a los paracompactos y por tanto a los metrizables. La prueba de Hansell de esta generalización está basada en la posibilidad de que E tenga la propiedad de la extensión respecto a X (toda función continua $f : C \to E$ definida en un cerrado $C \subset X$ admite una extensión continua a todo X). Hansell usa el hecho de que todo subconjunto cerrado convexo E de un espacio normado (resp. de Banach) E tiene la propiedad de extensión respecto a los espacios metrizables (resp. colectivamente normales).

L. Vesely [60] logró extender y unificar los resultados de Fosgerau y Hansell analizando las propiedades del par (X, E) que implican la igualdad

$$B_1(X, E) = F_\sigma(X, E) \cap \Sigma^*(X, E)$$

donde $\Sigma^*(X, E)$ es el conjunto de las funciones fuertemente σ-discretas. Vesely observa que las funciones de $B_1(X,E)$ no sólo son σ-discretas sino que son fuertemente σ-discretas. La consideración de estas funciones, que coinciden con las σ-discretas cuando X es colectivamente normal, es lo que le permite a Vesely extender el resultado de Hansell al caso en que X sólo sea normal. Vesely extiende al mismo tiempo los resultados de Fosgerau [20] demostrando que *cuando X es normal y E es arcoconexo y localmente arcoconexo entonces las funciones de la primera clase de Baire coinciden con las fuertemente σ-discretas de la primera clase de Borel.*

En estos trabajos recientes de Hansell [28, Th. 1.2] y Vesely [60] se pueden encontrar aportaciones interesantes incluso en el ámbito de las funciones con valores reales. Merece la pena citar el hecho de que se ha conseguido eliminar la hipótesis, que se venía exigiendo habitualmente en las pruebas del teorema de Lebesgue-Hausdorff, de que cada abierto de X sea un $\mathcal{F}_\sigma$. Para conseguir que las funciones de la primera clase de Baire coincidan con las de la primera clase de Borel basta suponer que el dominio X es normal y que E es un subconjunto convexo de un espacio de normado separable. Hansell demostró este resultado utilizando que cuando X es normal toda función de la primera clase de Borel $f : X \to \mathbb{R}$ tiene una base numerable formada por cerrados $\mathcal{G}_\delta$. Este resultado también lo había observado, de modo independiente, Laczkowich [40] (véase [46, Ejer. 3.A.1]). Laczkowich también hizo notar que no se podía llegar mucho más lejos pues el resultado ya fallaba cuando X era completamente regular. El contraejemplo lo proporciona la recta real dotada de la topología de la densidad. Para esta topología, completamente regular y no normal, las funciones de la primera clase de Baire son de la segunda clase de Baire para la topología usual, mientras que las funciones de la primera clase de Borel coinciden con las funciones medibles Lebesgue (véase [46]).

Por otra parte, la importancia de algunos resultados recientes sobre selectores de aplicaciones vectoriales semicontinuas superiormente con valores en espacios de Banach (véase [35], [33], [34], [30], [27], [56] y [32]) ha impulsado el estudio de la teoría no separable de las funciones de la primera clase (véase [52], [20], [28], [56] y [60]). Cuando E es un espacio Banach y X un espacio topológico perfectamente paracompacto (es decir, un espacio paracompacto tal que los conjuntos abiertos son $\mathcal{F}_\sigma$) en [32] se obtuvo una caracterización de las funciones de la primera clase de Baire donde se reemplaza la propiedad del punto de continuidad por una condición de oscilaciones pequeñas similar a la dada por Lebesgue en [43], [44] y [45] (véase 1.1). Esta condición, que ha desempeñado un papel importante a la hora de obtener selectores de la primera clase de Baire de multi-funciones semicontinuas superiormente con valores en espacios de Banach se formula mediante la definición de aplicación σ-fragmentable por cerrados:

Si X es un espacio topológico y (E,ρ) un espacio métrico, se dice que $f : X \to E$ es σ-fragmentable mediante conjuntos cerrados si para cada $\varepsilon > 0$ existe una sucesión de conjuntos cerrados $\{X_n : n \in \mathbb{N}\}$ que cubre X y cumple:

(F_ϵ) *Fijado $n \in \mathbb{N}$ y $\emptyset \neq C \subset X_n$, existe un abierto $V \subset X$ con $V \cap C \neq \emptyset$ y $diam_\rho\ f(V \cap C) < \varepsilon$.*

Esta noción coincide con la propiedad del punto de continuidad cuando X es hereditariamente Baire y la reemplaza satisfactoriamente cuando X es un espacio métrico no completo o un espacio topológico que no es hereditariamente Baire.

Descripción del trabajo realizado: En este trabajo, que toma como base resultados recientes sobre funciones de la primera clase contenidos en [28], [60] y [32], se realiza una síntesis y se presentan de modo organizado los principales resultados que sobre este asunto han sido comentados en el párrafo anterior. Al mismo tiempo se explican con detalle las ideas principales que subyacen en los principales resultados indicando, para cada uno de ellos, la situación más general que hace que siga siendo cierto.

Dado un espacio topológico X un espacio métrico E y una función $f : X \to E$, el énfasis se ha puesto en dar el mayor alcance posible, desde el punto de vista del dominio X, a los resultados que relacionan las tres propiedades que intervienen en los teoremas clásicos de Baire y Lebesgue:

a) f es de la primera clase de Baire, $f \in B_1(X,E)$.

b) f es de la primera clase de Borel, $f \in F_\sigma(X,E)$.

c) f tiene la propiedad del punto de continuidad, $f \in PC(X,E)$.

En general, es fácil ver que siempre se cumple a) $\Rightarrow$ b), pero el recíproco puede fallar (basta tomar $X = [0,1]$ y $E = \{0,1\}$ un espacio métrico discreto con dos puntos y considerar la función característica de un punto de X; en este caso es fácil ver que $B_1(X,E)$ sólo contiene a las funciones constantes). La validez de este recíproco impone restricciones, tanto al dominio X como a la la imagen $f(X) \subset E$ y uno de los objetivos de este trabajo es mostrar las condiciones más generales bajo las que este recíproco es cierto.

La problemática que se presenta por la consideración de un dominio X lo más general posible es de distinta naturaleza que la que surge por considerar como espacio de llegada E un espacio métrico general. Esta última, que tiene que ver con propiedades de conexión de E, no la hemos considerado en profundidad y nos hemos restringido al caso particularmente interesante de que E sea un espacio normado o un subconjunto convexo de un espacio normado. El caso de un espacio métrico general, que ha sido estudiado en profundidad en [20] conduce a otro tipo de problemas que no ha parecido oportuno considerar aquí.

Cuando E es un espacio normado y X un espacio métrico completo los resultados desarrollados en este trabajo se concretan para proporcionar la equivalencia de las tres propiedades anteriores (Teorema 3.16, [56] y [28]):

$$\text{a)} \;\Leftrightarrow\; \text{b)} \;\Leftrightarrow\; \text{c)}$$

La dificultad de este resultado procede esencialmente de haber eliminado la hipótesis de que E sea un espacio métrico separable. La prueba, en el caso separable, no encierra mayor dificultad que la del caso de funciones con valores reales.

Capítulo 2: Este capítulo lo hemos dedicado a un estudio preliminar del caso separable. La intención ha sido la de realizar una exposición autocontenida de la teoría de las funciones de la primera clase, dirigida a los lectores que sólo estén interesados en este caso o en el caso algo más particular de las funciones con valores reales. El desarrollo del capítulo no es el habitual que se puede encontrar en los textos clásicos; lo que hemos hecho ha sido adaptar al caso separable las ideas que son útiles para tratar el caso no separable. De esta forma quedarán bien motivadas y se comprenderán mejor las técnicas más elaboradas que hay que desarrollar en el siguiente capítulo para abordar el caso general.

Por otra parte este capítulo incorpora algunos resultados recientes que no aparecen recogidos en los textos usuales sobre el tema. Uno de ellos es el que afirma que *cuando X es un espacio topológico normal y E un espacio normado separable se cumple la igualdad $B_1(X,E) = F_\sigma(X,E)$*. Tradicionalmente, para este resultado se asumía que X era un espacio perfecto (cada abierto de X es un $\mathcal{F}_\sigma$). La clave para eliminar esta hipótesis se basa en un hecho sencillo pero que había pasado desapercibido: Si X es un espacio topológico normal y $f : X \to E$ es medible Borel entonces la anti-imagen de un abierto $U \subset E$, no sólo es un conjunto $\mathcal{F}_\sigma$ sino que es $\mathcal{Z}_\sigma$ (donde $\mathcal{Z}$ es la familia de los conjuntos $Z \subset X$ que son ceros de funciones reales continuas). Si en vez de trabajar con cerrados y abiertos se trabaja con conjuntos ceros y sus complementos, $\mathcal{U} = \{X \setminus Z : Z \in \mathcal{Z}\}$, el hecho de que cada $U \in \mathcal{U}$ sea siempre un $\mathcal{Z}_\sigma$ es lo que permite eliminar la hipótesis de que cada abierto sea un $\mathcal{F}_\sigma$ (véase [40], [46], [28] y [60]).

Una de las dificultades más profundas que plantea la consideración de funciones de la primera clase con valores en un espacio métrico arbitrario es la siguiente: Mientras que el límite uniforme de funciones de la primera clase de

Borel es de la primera clase de Borel, no ocurre lo mismo cuando se consideran funciones de la primera clase de Baire (ejemplo 2.27). El límite uniforme de funciones de la primera clase de Baire es de la primera clase de Baire cuando E es un subconjunto convexo de un espacio normado y X cualquier espacio topológico (corolario 2.9). Un problema que aún no está resuelto es el de obtener una caracterización de los espacios métricos E para los que $B_1(X, E)$ es cerrado por convergencia uniforme.

Con el fin de que este problema no interfiera con el análisis que realizamos acerca de la relación entre las tres propiedades a), b) y c) enunciadas arriba, es útil introducir el espacio $\overline{B_1(X, E)}$ formado por las funciones que son límite uniforme de una sucesión de funciones de $B_1(X, E)$ y considerar la propiedad

a') $f \in \overline{B_1(X, E)}$

Para cualquier espacio métrico E y cualquier espacio topológico X siempre se verifica la inclusión $\overline{B_1(X, E)} \subset F_\sigma(X, E)$ (proposición 2.4).

Si X es un espacio topológico normal y E un espacio métrico separable conexo por caminos se cumple la igualdad $\overline{B_1(X, E)} = F_\sigma(X, E)$. Si además E es un subconjunto convexo de un espacio normado $B_1(X, E) = F_\sigma(X, E)$. Para demostrar la inclusión $F_\sigma(X, E) \subset \overline{B_1(X, E)}$ hemos hecho explícita una representación de las funciones de la primera clase de Borel como límites uniformes de un tipo especial de funciones, que hemos llamado *Z_σ-constantes* (constantes a trozos sobre los trozos de una partición numerable de X formada por conjuntos $\mathcal{Z}_\sigma$). Una vez que se ha probado que las funciones de $F_\sigma(X, E)$ se pueden aproximar uniformemente por funciones Z_σ-constantes basta conseguir que estas funciones estén en $B_1(X, E)$ y esto se logra cuando E es conexo por caminos ya que esta hipótesis permite extender un tipo muy especial de funciones continuas: Funciones definidas sobre una unión finita y disjunta de ceros C_k $(1 \leq k \leq m)$ que permanecen constantes sobre cada uno de los ceros de la familia. Para extender estas funciones de modo continuo, basta separar los ceros C_k mediante coceros disjuntos V_k, aplicar un lema tipo Uryshon a cada par $C_k \subset V_k$ y componer la función obtenida con un camino adecuado en E. Utilizando esta idea se prueba fácilmente que cuando E es conexo por arcos las funciones Z_σ-constantes son de la primera clase de Baire (proposiciones 2.12 y 2.13) y se llega así a la igualdad $\overline{B_1(X, E)} = F_\sigma(X, E)$. Finalmente, para obtener una extensión del clásico teorema de Lebesgue-Hausdorff relativo a la igualdad $B_1(X, E) = F_\sigma(X, E)$, basta pedir además que E tenga alguna propiedad que garantice la igualdad $\overline{B_1(X, E)} = B_1(X, E)$. Ya hemos indicado que esto ocurre cuando E es un subconjunto convexo de un espacio normado.

Las primeras pruebas de la generalización del teorema de Lebesgue-Hausdorff al caso de funciones con valores en un espacio métrico E solían requerir que

E tuviese la propiedad de extensión respecto a X para así poder construir una sucesión de funciones continuas puntualmente convergente hacia la función dada. Un análisis detallado de la cuestión le permitió a Vesely [60] poner de manifiesto que no hacía falta pedir que se pudiesen extender todas las funciones continuas, sino que bastaba con poder extender un tipo muy particular de funciones continuas.

Para analizar la relación existente entre los espacios $F_\sigma(X,E)$ y $PC(X,E)$, hemos introducido en este capítulo la noción de función *fragmentable*, una propiedad más débil que la propiedad del punto de continuidad (proposición 2.18), con la que coincide cuando X es un espacio hereditariamente Baire (proposición 2.18). Cuando X es metrizable, utilizando la técnica de las particiones de Montgomery se prueba fácilmente que *toda función fragmentable $f : X \to E$ es de la primera clase de Borel* (proposición 2.19). En particular, *si X es un espacio métrico, toda función con la propiedad del punto de continuidad $f : X \to E$ es de la primera clase de Borel y el recíproco es cierto cuando además X es hereditariamente Baire* (por ejemplo, un espacio métrico completo) *y el espacio de llegada E es separable* (corolario 2.23).

Este capítulo contiene también la caracterización de Lebesgue de las funciones de la primera clase mediante la existencia de una descomposición del dominio X en una sucesión de cerrados donde la función oscila poco (1.1) (proposición 2.21). Esta caracterización ha inspirado la noción más general de función σ-fragmentable por cerrados que se considera en el siguiente capítulo para obtener, en el caso no separable, una caracterización similar a la de Lebesgue.

Además de estos resultados positivos el capítulo 2 contiene algunos ejemplos interesantes que ponen de manifiesto el alcance de los resultados: Existe un espacio topológico X completamente regular X tal que $B_1(X) \neq F_\sigma(X)$ (ejemplo 2.24). Basta tomar $X = (\mathbb{R}, d)$ donde d es la topología de la densidad, que es completamente regular (apéndice B). Así mismo, se ponen ejemplos que muestran que, incluso cuando $E = \mathbb{R}$, si X no es hereditariamente Baire puede haber funciones de la primera clase de Borel sin la propiedad del punto de continuidad (ejemplo 2.25) y que si X es compacto no metrizable puede haber funciones con la propiedad del punto de continuidad que no son de la primera clase de Borel (ejemplo 2.26).

El capítulo 2 contiene también un ejemplo, debido D. Preiss, que pone de manifiesto que para un espacio métrico arbitrario E puede ocurrir que $\overline{B_1(X,E)} \neq B_1(X,E)$ incluso cuando $X = [-1,1]$ (ejemplo 2.27). La problemática que plantea la existencia de un ejemplo como este fue analizada con detalle en la tesis de Fosgerau [20].

El capítulo 2 finaliza considerando algunos resultados particulares que conciernen al caso especial de que el espacio de llegada sea $\mathbb{R}$ con su topología usual (Teorema 2.29).

Capítulo 3: En este capítulo, que es prácticamente autocontenido salvo algunos resultados muy concretos de topología general, se aborda el caso general de un espacio de llegada E que no se supone separable. Comenzamos con una serie de resultados técnicos relativos a las funciones σ-discretas y fuertemente σ-discretas que son las nociones que permitirán eliminar la separabilidad que se pedía al espacio de llegada en los resultados clásicos. Las dos nociones coinciden cuando X es un espacio topológico colectivamente normal, y en particular cuando X es paracompacto, o X es metrizable.

Para la extensión al caso no separable de los resultados conviene sustituir la propiedad b) $f \in F_\sigma(X,E)$ por la siguiente

b') $f \in F_\sigma(X,E) \cap \Sigma^*(X,E)$

donde $\Sigma^*(X,E)$ es el espacio de las funciones fuertemente σ-discretas.

Siempre se verifica $\overline{B_1(X,E)} \subset \Sigma^*(X,E) \cap F_\sigma(X,E)$ (proposición 3.18) y se puede garantizar la igualdad $\overline{B_1(X,E)} = \Sigma^*(X,E) \cap F_\sigma(X,E)$ *cuando X es normal y E un espacio métrico conexo por caminos*. Para probar que en este caso $\Sigma^*(X,E) \cap F_\sigma(X,E) \subset \overline{B_1(X,E)}$ se procede de forma similar a como se hizo en el capítulo anterior representando las funciones de $\Sigma^*(X,E) \cap F_\sigma(X,E)$ como límites uniformes de un tipo de funciones más sencillas, las funciones τ^*-constantes, que reemplazan a las Z_σ-constantes de aquél capítulo. Un razonamiento similar al que se hizo entonces permite probar que cuando E es conexo por caminos las funciones τ^*-constantes también son de la primera clase de Baire (proposición 3.25). Cuando además E es un subconjunto convexo de un espacio normado $B_1(X,E) = \overline{B_1(X,E)}$, y se sigue de esto que *cuando X es normal y E un subconjunto convexo de un espacio normado se da la igualdad $B_1(X,E) = \Sigma^*(X,E) \cap F_\sigma(X,E)$* (proposición 3.28).

Adaptando las pruebas realizadas en el caso normal, se prueba también que $\overline{B_1(X,E)} = \Sigma(X,E) \cap F_\sigma(X,E)$ *cuando X es perfecto y E tiene la propiedad de extensión respecto a X*, donde $\Sigma(X,E)$ es el espacio de las funciones σ-discretas. *Cuando además E es un extensor absoluto para espacios métricos se da la igualdad $B_1(X,E) = \Sigma(X,E) \cap F_\sigma(X,E)$.*

La extensión al caso no separable de la igualdad

$$\Sigma^*(X,E) \cap F_\sigma(X,E) = PC(X,E)$$

la hemos realizado considerando la propiedad

c') f es σ-fragmentable por cerrados.

que ha sido definida en la pág 47. Esta noción, más débil que la de función fragmentable dada en el capítulo anterior, equivale a la del punto de continuidad cuando X es hereditariamente Baire (proposición 3.32). Fue introducida en [32] donde se obtuvo una extensión, al ámbito no separable, de la caracterización clásica de Lebesgue.

Es fácil ver que las funciones σ-discretas de la primera clase de Borel son siempre σ-fragmentables por cerrados (proposición 3.33). El recíproco se cumple cuando X es perfectamente paracompacto (teorema 3.35). La demostración utiliza una generalización de un lema de Montgomery que permite expresar la función como límite uniforme de funciones τ-constantes. Se obtiene así que *si X es perfectamente paracompacto $b')$ $\Leftrightarrow$ $c')$*; *si además X es hereditariamente Baire $b')$ $\Leftrightarrow$ $c)$*.

Stegall [56] dio una prueba distinta de este resultado usando técnicas de particiones de la unidad. Hemos recogido en la página 59 las ideas de Stegall que proporcionan una prueba directa de que las aplicaciones fragmentables son de la primera clase de Baire.

Combinando estos resultados con los anteriores se obtiene un teorema, similar al Teorema 2.2, que asegura que *cuando E es un subconjunto convexo de un espacio normado y X es perfectamente paracompacto y hereditariamente Baire,* (en particular un espacio métrico completo) se cumple $a)$ $\Leftrightarrow$ $b')$ $\Leftrightarrow$ $c)$, es decir *las funciones de la primera clase de Baire coinciden con las σ-discretas de la primera clase de Borel y con las que tienen la propiedad del punto de continuidad* (Teorema 3.16).

Parece natural la cuestión de cuando en la equivalencia anterior se puede sustituir b') por b) de modo que se pueda suprimir la referencia a las funciones σ-discretas en el enunciado del teorema 3.16. En otros términos, ¿cuándo ocurre que las funciones de la primera clase de Borel son automáticamente σ-discretas?. Cuando esto ocurra se habrá logrado una extensión, al caso no separable, de la caracterización clásica

$$a) \Leftrightarrow b) \Leftrightarrow c)$$

Siguiendo a Hansell [28] demostramos que si X es hereditariamente Baire con la propiedad de Kaplansky entonces cada función de la primera clase de Borel tiene la propiedad del punto de continuidad (proposición 3.42). Se sigue de esto y de los resultados comentados anteriormente que si además X es perfectamente paracompacto entonces toda función de la primera clase de Borel es σ-discreta (Teorema 3.43). Los espacios métricos completos son hereditariamente Baire, perfectamente paracompactos y tienen la propiedad de Kaplansky, con lo cual *para todo espacio métrico completo X se cumple* $F_\sigma(X,E) = F_\sigma(X,E) \cap \Sigma(X,E)$ (corolario 3.44). Queda establecido así que *cuando E es un subconjunto convexo de un espacio normado y X un espacio métrico completo se da la igualdad:*

$$B_1(X,E) = F_\sigma(X,E) = PC(X,E)$$

Capítulo 4: Como aplicación de los resultados básicos de este trabajo, desarrollamos este capítulo de aplicaciones. El tratamiento de cuestiones relativas a la medibilidad de funciones separadamente continuas definidas en un espacio producto $X \times Y$ (ver [54], [50] y [59]) ha motivado el estudio de cuando estas funciones son de la primera clase.

En la sección 4.1 nos ocupamos de este problema y de otro directamente relacionado con él consistente en dar condiciones suficientes para que una función débilmente continua $f : X \to E$, con valores en un espacio de Banach E esté en $B_1(X,E)$.

Un teorema poco conocido de Lebesgue [41] y que aparece en su primera publicación, asegura que toda función separadamente continua $f : X \times Y \to \mathbb{R}$, donde X e Y son intervalos de la recta real, es de la primera clase de Baire. Entre las diversas demostraciones que dio Lebesgue de este teorema, hay una que se adapta fácilmente al caso de que X e Y sean espacios topológicos siendo uno de ellos metrizable y el espacio de llegada un espacio métrico arbitrario E. Siguiendo los pasos de la demostración de Lebesgue se llega a que en este caso f es de la primera clase de Borel (Teorema 4.1). Cuando un factor es metrizable y el otro es compacto, el producto $X \times Y$ es un espacio normal y como aplicación del corolario 4.2 se obtiene que en este caso $f : X \times Y \to \mathbb{R}$ también es de la primera clase de Baire.

Rudin [54] usando particiones de la unidad consiguió dar una versión más general del teorema de Lebesgue: *Sea E un espacio vectorial topológico, X o Y metrizable, entonces toda función separadamente continua $f : X \times Y \to E$ es de la primera clase de Baire. Si además E es metrizable, f es de la primera clase de Borel* (Teorema 4.7).

Utilizando el teorema de Rudin demostramos que toda función débilmente continua $f : X \to E$, definida en un espacio métrico X con valores en un espacio de Banach E, es σ-fragmentable por cerrados (aquí se usa el hecho de que los subconjuntos cerrados convexos de un espacio de Banach, para la topología débil y para la norma, son los mismos). Entonces, aplicando la proposición 4.4 se obtiene un resultado de Srivatsa que afirma que cuando X es metrizable y E un espacio de Banach toda función débilmente continua $f : X \to E$ pertenece a $B_1(X,E)$ (Teorema 4.9).

En la sección 4.2 nos ocupamos de ver cuándo dada en un espacio X otra topología τ más fina que la topología d dada inicialmente en X y un espacio métrico E, una función τ-continua $f : X \to E$ es de la primera clase sobre (X, d). Todas las definiciones y resultados presentados en esta sección han sido tomados del libro *"Fine Topology Methods in Real Analysis and Potential Theory"* de J. Lukes, J. Maly y L. Zajizek (ver [46]).

Introducimos una *propiedad de inserción* para espacios topológicos y probamos que es suficiente que la topología τ tenga la propiedad de $\mathcal{G}_\delta(d)$-inserción para que toda función τ-continua sea de la primera clase de Borel (proposición 4.13). Además, en el caso de espacios métricos, introducimos la *condición de radio esencial* más fuerte que la propiedad de inserción (proposición 4.17) y, por tanto, el resultado sigue siendo cierto.

Como aplicación de estos resultados damos otra prueba del Teorema de Rudin utilizando la propiedad de $\mathcal{G}_\delta$-inserción (proposición 4.19).

Terminamos el trabajo con dos apéndices en los que recogemos algunos resultados topológicos que se usan en el trabajo. En el apéndice A, aparecen propiedades de los ceros y coceros y los espacios métricos y paracompactos. En el apéndice B, introducimos la topología de la densidad sobre $\mathbb{R}$ y mostramos las principales propiedades de esta topología (ver [46]).

Capítulo 2

Funciones de la primera clase en un espacio separable

Denotamos por X un espacio topológico Hausdorff y por E un espacio métrico con métrica ρ. La familia de todos los cerrados (resp., abiertos) de X, se denotará por $\mathcal{F}(X)$ (resp., $\mathcal{G}(X)$). Denotaremos por $\mathcal{Z}(X)$ (resp., $\mathcal{U}(X)$) la subfamilia de $\mathcal{F}(X)$ (resp., $\mathcal{G}(X)$) formada por los conjuntos que son ceros (resp., coceros) de funciones reales continuas sobre X.

Si $\mathcal{H}$ es una familia de subconjuntos de X entonces $\mathcal{H}_\sigma$ (resp., $\mathcal{H}_\delta$) es la familia de uniones (resp., intersecciones) numerables de conjuntos de $\mathcal{H}$.

Definimos los siguientes espacios de funciones $f : X \to E$:

$C(X, E)$: espacio de las funciones continuas de X en E.

$B_1(X, E)$: espacio de las funciones de la primera clase de Baire, es decir, funciones que son límites puntuales de sucesiones en $C(X, E)$.

$F_\sigma(X, E)$: espacio de las funciones de la primera clase de Borel, es decir, funciones $f : X \to E$ tales que $f^{-1}(G) \in \mathcal{F}_\sigma(X)$ para cada $G \in \mathcal{G}(E)$.

$B_1(X)$ denota el espacio de funciones $B_1(X, \mathbb{R})$.

Diremos que una función $f : X \to E$ tiene la "propiedad del punto de continuidad" si para todo conjunto cerrado F de X, $f|_F$ tiene al menos un punto de continuidad. El espacio de las funciones $f : X \to E$ que tienen la propiedad del punto de continuidad se denotará por $PC(X, E)$.

Observación 2.1. *Es obvio que f tiene la propiedad del punto de continuidad sí y sólo sí $f|_C$ tiene al menos un punto de continuidad para cada conjunto perfecto $C \subset X$.*

El objetivo de este capítulo es demostrar el siguiente teorema y analizar la relación entre los espacios $B_1(X,E)$, $F_\sigma(X,E)$ y $PC(X,E)$.

Teorema 2.2. *Sea X un espacio métrico completo, E un espacio normado y $f: X \to E$ una función con $f(X)$ separable. Entonces son equivalentes:*

(a) f es de la primera clase de Baire.

(b) f es de la primera clase de Borel.

(c) f tiene la propiedad del punto de continuidad.

Observación 2.3. *Si X es un espacio topológico y (E,ρ) un espacio métrico, veremos que se cumple:*
a) $\Rightarrow$ b), es siempre cierto (proposición 2.4).
b) $\Rightarrow$ a), si X es normal y E un subconjunto convexo de un espacio vectorial normado (proposición 2.14); esta implicación es falsa en general, incluso cuando X es un espacio completamente regular y $E = \mathbb{R}$ (ejemplo 2.24).
b) $\Rightarrow$ c), si X es hereditariamente Baire (corolario 2.23) pero deja de ser cierto si X no es hereditariamente Baire (ejemplo 2.25).
c) $\Rightarrow$ b), si X es metrizable (o perfectamente paracompacto) (proposición 2.19) pero deja de ser cierto sin esta hipótesis, incluso con $E = \mathbb{R}$ (ejemplo 2.26).

En particular, si X es un espacio metrizable hereditariamente Baire y E un subconjunto convexo de un espacio vectorial normado, las tres condiciones son equivalentes.

2.1. Funciones de la primera clase de Baire y de la primera clase de Borel

Sea $Z_\sigma(X,E)$ la familia de las funciones $f: X \to E$ tales que $f^{-1}(G) \in \mathcal{Z}_\sigma(X)$ para cada $G \in \mathcal{G}(E)$. Es evidente que $Z_\sigma(X,E) \subset F_\sigma(X,E)$ y que ambos espacios coinciden cuando X es metrizable.

La implicación a) $\Rightarrow$ b) del teorema 2.2, es consecuencia de la siguiente proposición.

Proposición 2.4. *Sea X un espacio topológico arbitrario y (E,ρ) un espacio métrico*

$$B_1(X,E) \subset Z_\sigma(X,E) \subset F_\sigma(X,E)$$

<u>*Demostración*</u>. Sea $f \in B_1(X,E)$ y $\varphi_n \in C(X,E)$ una sucesión tal que $f(x) = \lim_n \varphi_n(x)$ $\forall x \in X$. Por la proposición A.5, si $G \in \mathcal{G}(E)$ $(= \mathcal{U}(E))$,

existe una sucesión $Z_k \in \mathcal{F}(E)$ $(= \mathcal{Z}(E))$ tal que

$$G = \bigcup_k Z_k \quad \text{y} \quad Z_k \subset \overset{\circ}{Z}_{k+1} \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

Como $\varphi_n^{-1}(Z_k) \in \mathcal{Z}(X)$ (lema. A.6), resulta que, por la proposición A.2,

$$F(k,m) = \bigcap_{n \geq m} \varphi_n^{-1}(Z_k) \in \mathcal{Z}(X) \qquad \text{para cada } m, k \in \mathbb{N}$$

Utilizando que $G = \cup_k \overset{\circ}{Z}_k$ y la definición de límite resulta $f^{-1}(G) = \bigcup_{k,m} F(k,m) \in \mathcal{Z}_\sigma(X)$, es decir, $f \in Z_\sigma(X,E)$. $\square$

La siguiente proposición da un condición suficiente para que los espacios de funciones $Z_\sigma(X,E)$ y $F_\sigma(X,E)$ coincidan.

Proposición 2.5. *Si X es normal, entonces*

$$Z_\sigma(X,E) = F_\sigma(X,E)$$

Demostración. Si $f \in F_\sigma(X,E)$, basta ver que $f^{-1}(F) \in \mathcal{U}_\delta(X)$ para cada $F \in \mathcal{F}(E)$.

Sea $\varphi \in C(E,[0,1])$ tal que $F = \varphi^{-1}(0)$. Es obvio que $\varphi \circ f \in F_\sigma(X,\mathbb{R})$ luego

$$A_n := \{x \in X : \ |\varphi(f(x))| < \frac{1}{n}\} \in \mathcal{F}_\sigma$$

$$B_n := \{x \in X : \ |\varphi(f(x))| \leq \frac{1}{n}\} \in \mathcal{G}_\delta$$

de modo que, por la proposición A.7, existe $H_n \in \mathcal{U}_\delta$ tal que $A_n \subset H_n \subset B_n$ y se obtiene que $f^{-1}(F) = (\varphi \circ f)^{-1}(0) = \bigcap_n A_n = \bigcap_n B_n = \bigcap_n H_n \in \mathcal{U}_\delta$. $\square$

La siguiente definición fue introducida por S. Rolewicz [53].

Definición 2.6. *Diremos que el espacio métrico (E,ρ) es retractil si para cada $r > 0$ existe una función continua $h_r : E \times E \to E$ que verifica*

i) $\rho(h_r(x,y),y) \leq r$ *para todo* $(x,y) \in E \times E$

ii) $h_r(x,y) = x$ *si* $\rho(x,y) \leq r$

es decir, $x \to h_r(x,y)$ es una retracción de E sobre la bola cerrada $\{x : \rho(x,y) \leq r\}$.

Observación 2.7. *Un ejemplo de espacio métrico retractil es un espacio normado. Basta con tomar las funciones h_r como sigue*

$$h_r(x,y) = \begin{cases} x & \text{si } \|x-y\| \leq r \\ y + r \cdot \frac{x-y}{\|x-y\|} & \text{si } \|x-y\| > r \end{cases}$$

En lo que sigue denotaremos por $\overline{B_1(X,E)}$ el conjunto de las funciones $f : X \to E$ que son límite uniforme de una sucesión de funciones $f_n \in B_1(X,E)$. Análogamente, se define $\overline{Z_\sigma(X,E)}$.

Proposición 2.8. *En general, se cumple siempre que*

$$\overline{Z_\sigma(X,E)} = Z_\sigma(X,E)$$

Si (E,ρ) es un espacio retractil, entonces

$$\overline{B_1(X,E)} = B_1(X,E)$$

Demostración. Sea $f \in \overline{Z_\sigma(X,E)}$ y $f_n \in Z_\sigma(X,E)$ una sucesión que converge uniformemente hacia f. Dado $\varepsilon > 0$, sea $n(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tal que

$$n \geq n(\varepsilon) \Rightarrow \rho(f_n(x), f(x)) < \varepsilon \quad \forall x \in X$$

Dado $F \in \mathcal{F}(E)$ se tiene que para todo $\varepsilon > 0$

$$C_{n\varepsilon} := \{x \in X : \rho(f_n(x), F) \leq \varepsilon\} \in \mathcal{U}_\delta(X)$$

y por la definición de límite uniforme y de $C_{n\varepsilon}$, se comprueba fácilmente que

$$f^{-1}(F) = \bigcap_{p \in \mathbb{N}} \bigcap_{n \geq n(\frac{1}{p})} C_{n\frac{1}{p}} \in \mathcal{U}_\delta(X)$$

Supongamos ahora que (E,ρ) es un espacio retractil.

Sea $f \in \overline{B_1(X,E)}$ y $f_n \in B_1(X,E)$ una sucesión que converge uniformemente hacia f. Extrayendo una subsucesión puede suponerse que

$$\rho(f_n(x), f(x)) < \frac{1}{2^{n+1}} \text{ para todo } x \in X$$

con lo cual

$$\rho(f_n(x), f_{n+1}(x)) < \frac{1}{2^n} \text{ para todo } x \in X$$

Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea φ_k^n una sucesión en $C(X,E)$ tal que $\lim_k \varphi_k^n(x) = f_n(x)$ para todo $x \in X$. Definimos por inducción las sucesiones

$$\psi_k^1(x) = \varphi_k^1(x) \qquad \psi_k^{n+1}(x) = h_{2^{-n}}(\varphi_k^{n+1}(x), \psi_k^n(x))$$

donde, para cada $n \in \mathbb{N}$, las funciones $h_{2^{-n}}$ son las de la definición 2.6 cuando $r = 2^{-n}$. Como $\rho(\varphi_k^2(x), \psi_k^1(x))$ converge hacia $\rho(f_2(x), f_1(x)) < 1/2$, existe $k_1(x) \in \mathbb{N}$ tal que para $k > k_1(x)$ se cumple $\rho(\varphi_k^2(x), \psi_k^1(x)) < 1/2$ con lo cual

$$\psi_k^2(x) = h_{2^{-1}}(\varphi_k^2(x), \psi_k^1(x)) = \varphi_k^2(x)$$

y se sigue que

$$\lim_k \psi_k^2(x) = \lim_k \varphi_k^2(x) = f_2(x)$$

De modo recurrente se prueba que para cada $n \in \mathbb{N}$, existe $k_n(x) \in \mathbb{N}$ tal que si $k > k_n(x)$ entonces $\psi_k^n(x) = \varphi_k^n(x)$ luego

$$\lim_k \psi_k^n(x) = f_n(x) \text{ para todo } x \in X$$

Por la construcción

$$\rho(\psi_k^{n+1}(x), \psi_k^n(x)) \leq 2^{-n} \text{ para todo } x \in X \text{ y todo } k \in \mathbb{N}$$

La sucesión de $\psi_k^k \in C(X, E)$ converge puntualmente hacia f. Efectivamente, dado $x \in X$ y $\varepsilon > 0$ sea $m \in \mathbb{N}$ tal que $1/2^{m-1} < \varepsilon/3$. Existe $p_m(x) \in \mathbb{N}$ tal que para $k > p_m(x)$ se cumple $\rho(f_m(x), \psi_k^m(x)) \leq \varepsilon/3$. Tomando $k > \max\{m, p_m(x)\}$ resulta

$$\begin{aligned}\rho(f(x), \psi_k^k(x)) &\leq \rho(f(x), f_m(x)) + \rho(f_m(x), \psi_k^m(x)) + \rho(\psi_k^m(x), \psi_k^k(x)) \leq \\ &\leq \varepsilon/3 + \varepsilon/3 + \rho(\psi_k^m(x), \psi_k^{m+1}(x)) + \cdots + \rho(\psi_k^{k-1}(x), \psi_k^k(x)) \leq \\ &\leq \varepsilon/3 + \varepsilon/3 + \left(\frac{1}{2^m} + \frac{1}{2^{m+1}} + \cdots + \frac{1}{2^{k-1}}\right) \leq \varepsilon/3 + \varepsilon/3 + \varepsilon/3 = \varepsilon.\end{aligned}$$

□

Corolario 2.9. *Sea E un espacio normado o un subconjunto convexo de un espacio vectorial normado, entonces*

$$\overline{B_1(X, E)} = B_1(X, E)$$

.

<u>*Demostración*</u>. Si E es un espacio normado, por la observación 2.7, es un espacio métrico retractil, luego basta aplicar la proposición anterior.

Por otra parte, todo espacio métrico (E, ρ) se puede sumergir isométricamente en un espacio normado $(B, \|.\|)$ como sigue

$$B = C_b(E),\ \|.\| = \|.\|_\infty,\ j : E \to B \text{ con } j(e) = \varphi_e \text{ donde}$$
$$\varphi_e(t) = \rho(t, e) - \rho(t, a),\ a \in E \text{ fijo}$$

además $\|\varphi_{e_1} - \varphi_{e_2}\|_\infty = \sup_{t\in E} |\rho(t, e_1) - \rho(t, e_2)| = \rho(e_1, e_2)$.

Entonces $\overline{B_1(X, E)} \subset \overline{B_1(X, B)} = B_1(X, B)$, luego dado $f \in \overline{B_1(X, E)}$, existe una sucesión de funciones continuas $g_n \in C(X, B)$ que converge puntualmente hacia f.

Cuando exista una retracción continua $r : B \to E$ se seguirá que $f_n = r \circ g_n \in C(X, E)$ es una sucesión de funciones continuas que converge puntualmente hacia f y se tendrá que $f \in B_1(X, E)$.

Si E se puede sumergir como un subconjunto convexo de algún espacio vectorial topológico localmente convexo es conocido que E se puede sumergir isométricamente como un subconjunto cerrado de un espacio normado B desde el que existe una retracción continua $r : B \to E$ ([8, corolario 5.3]).

Por tanto, la igualdad $B_1(X, E) = \overline{B_1(X, E)}$ también se cumple cuando E es un subconjunto convexo de un espacio normado. □

Observación 2.10. *La igualdad $\overline{B_1(X, E)} = B_1(X, E)$ no es cierta para un espacio métrico arbitrario (E, ρ), como veremos en el ejemplo 2.27.*

Ahora, vamos a aproximar las funciones de $F_\sigma(X, E)$ (o de $Z_\sigma(X, E)$), de modo uniforme, por un tipo más sencillo de funciones que será fácil ver que están en $B_1(X, E)$ (en el caso E espacio conexo por caminos).

Definición 2.11. *Diremos que una aplicación $f : X \to E$ es F_σ-constante (resp., Z_σ-constante) si existe una partición numerable $\{H_n : n \in \mathbb{N}\}$ de X tal que cada $H_n \in \mathcal{F}_\sigma(X)$ (resp., $H_n \in \mathcal{Z}_\sigma(X)$) y $f|_{H_n}$ es constante para cada $n \in \mathbb{N}$. Se dice que f es continua a trozos si X puede ser expresado como la unión de una sucesión creciente de conjuntos cerrados X_n tal que $f|_{X_n}$ es continua para cada $n \in \mathbb{N}$.*

Si f es F_σ-constante (resp., Z_σ-constante) entonces $f^{-1}(T) \in \mathcal{F}_\sigma \cap \mathcal{G}_\delta$ (resp., $\mathcal{Z}_\sigma \cap \mathcal{U}_\delta$) para cada subconjunto T de E, por tanto f está en la primera clase de Borel cuando consideremos E con la topología discreta. Debemos puntualizar que si f es F_σ-constante (resp., Z_σ-constante) entonces X puede ser expresado como la unión de una sucesión creciente de cerrados (resp., ceros) X_n tal que $f|_{X_n}$ es continua.

Se sigue de la prop. 2.5 que si X es normal entonces cada función F_σ-constante es Z_σ-constante.

Proposición 2.12. *Si $f \in Z_\sigma(X, E)$ y $f(X)$ es separable, existe una sucesión de funciones Z_σ-constantes $f_n : X \to E$ que converge uniformemente hacia f.*

Demostración. Dado $\varepsilon > 0$, sea $\{B_n : n \in \mathbb{N}\}$ un recubrimiento de $f(X)$ mediante bolas abiertas de radio menor que ε y, $X_n = f^{-1}(B_n) \in \mathcal{Z}_\sigma(X)$

$$X_n = \bigcup_k Z_{nk} \text{ donde } Z_{nk} \in \mathcal{Z}(X)$$

Sea $\{D_n: \ n \in \mathbb{N}\}$ una enumeración de $\{Z_{nk}: \ (n,k) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}\}$

$$H_1 = D_1, \ H_2 = D_2 \backslash D_1, \ldots\ldots, H_m = D_m \backslash \bigcup_{j<m} D_j$$

$H_m \in \mathcal{Z}_\sigma(X)$ ya que $\bigcup\limits_{j<m} D_j \in \mathcal{Z}(X) \subset \mathcal{U}_\delta(X)$ (ver lema A.4).

Además cada H_m está contenido en algún $X_{n(m)}$, luego $f(H_m)$ está contenido en alguna bola $B_{n(m)}$. Fijado $x_m \in H_m$, sea $f_\varepsilon : X \to E$ la función definida por $f_\varepsilon(x) = f(x_m)$ si $x \in H_m$ (recuérdese que $\{H_m : m \in \mathbb{N}\}$ es una partición de X). Evidentemente f_ε es Z_σ-constante y $\rho(f(x), f_\varepsilon(x)) < 2\varepsilon$ para todo $x \in X$.

Tomando $\varepsilon = 1/n$, se obtiene la sucesión deseada. □

Proposición 2.13. *Si (E, ρ) es conexo por caminos (en particular, si E es un subconjunto convexo de un espacio vectorial normado) y $f : X \to E$ es Z_σ-constante, entonces $f \in B_1(X, E)$. Más aún, existe una sucesión $\varphi_n \in C(X, E)$ tal que $\varphi_n(x) = f(x)$ si $n \geq n(x)$.*

Demostración. Observemos en primer lugar que si $Z_1, Z_2, \ldots, Z_n \in \mathcal{Z}(X)$ son disjuntos y $e_1, e_2, \ldots, e_n \in E$, existe una función continua $\varphi : X \to E$ tal que $\varphi(Z_k) = \{e_k\}$ para $1 \leq k \leq n$.

Efectivamente, por la prop. A.8, existen $U_1, U_2, \ldots, U_n \in \mathcal{U}(X)$ disjuntos con $Z_k \subset U_k$ para $1 \leq k \leq n$, y para cada $k \in \{1, \ldots, n\}$ existe una función continua $\alpha_k : X \to [0, 1]$ tal que

$$\alpha_k(Z_k) = \{1\} \qquad \alpha_k(U_k^c) = \{0\}$$

Sea $\gamma_k : [0, 1] \to E$ un camino continuo tal que $\gamma_k(0) = e$, $\gamma_k(1) = e_k$ ($e \in E$ fijado de antemano). La función $\varphi_k = \gamma_k \circ \alpha_k : X \to E$ es continua y

$$\varphi_k(Z_k) = \{e_k\} \quad \varphi_k(U_k^c) = \{e\} \qquad 1 \leq k \leq n$$

Evidentemente, la función $\varphi : X \to E$ que coincide con φ_k sobre cada U_k y vale e en $(\bigcup\limits_{k=1}^{n} U_k)^c$ cumple lo deseado.

Sea ahora $\{H_k : k \in \mathbb{N}\} \subset \mathcal{Z}_\sigma(X)$ una partición de X tal que cada $f|_{H_k}$ es constante y $f(x) = e_k \quad \forall x \in H_k$. Para cada k hay una sucesión creciente $Z_{nk} \nearrow H_k$ con $Z_{nk} \in \mathcal{Z}(X)$.

Para $m \in \mathbb{N}$ fijo, $Z_{m1}, Z_{m2}, \ldots, Z_{mm}$ son ceros disjuntos y por la observación preliminar, existe $\varphi_m \in C(X, E)$ tal que

$$\varphi_m(Z_{m1}) = e_1, \qquad \varphi_m(Z_{m2}) = e_2, \ldots\ldots, \qquad \varphi_m(Z_{mm}) = e_m$$

Dado $x \in X$, existe un único $k \in \mathbb{N}$ con $x \in H_k$ y, para este $k \in \mathbb{N}$ existe $n > k$ tal que $x \in Z_{nk}$ con lo que $m \geq n \Rightarrow x \in Z_{mk} \Rightarrow \varphi_m(x) = e_k = f(x)$. $\square$

Proposición 2.14. *Si E es un subconjunto convexo de un espacio vectorial normado, entonces $Z_\sigma(X, E) = B_1(X, E)$, y si además X es normal, se tiene que $F_\sigma(X, E) = B_1(X, E)$.*

Demostración. La igualdad $Z_\sigma(X, E) = B_1(X, E)$ se obtiene combinando las proposiciones 2.4, 2.12, 2.13 y el corolario 2.9.

La igualdad $F_\sigma(X, E) = B_1(X, E)$ se obtiene a partir de la proposición 2.5. $\square$

Observación 2.15. *Como consecuencia de la proposición anterior se tiene que si X es un compacto arbitrario y E es un subconjunto convexo de un espacio normado, entonces $B_1(X, E) = F_\sigma(X, E)$ ya que todo espacio compacto Hausdorff es normal.*

2.2. La fragmentabilidad y la propiedad del punto de continuidad

Para mostrar la relación que existe entre $F_\sigma(X, E)$ y $PC(X, E)$, es conveniente dar la definición de función *fragmentable*.

Definición 2.16. *Se dice que $f : X \to E$ es fragmentable si para cada conjunto $C \subset X$ no vacío y cada $\varepsilon > 0$, existe un abierto $V \subset X$ tal que $C \cap V \neq \emptyset$ y $diam_\rho\, f(V \cap C) < \varepsilon$.*

La noción de función fragmentable es más débil que la de función con la propiedad del punto de continuidad, como se pone de manifiesto con la siguiente proposición.

Observación 2.17. *Una cuestión interesante es ver cuándo podemos sustituir la condición de conjunto cerrado que aparece en la propiedad del punto de continuidad por conjunto compacto de manera que el teorema 2.2 siga siendo cierto. La siguiente proposición da respuesta a esta pregunta.*

Proposición 2.18. *Sea $f : X \to E$ donde X es un espacio topológico y (E, ρ) un espacio métrico. Consideramos las siguientes propiedades:*

a) f es fragmentable.

b) $f|_C$ tiene al menos un punto de continuidad para cada cerrado $C \subset X$.

c) $f|_K$ tiene al menos un punto de continuidad para cada compacto separable $K \subset X$.

Entonces b) $\Rightarrow$ a) y b) $\Rightarrow$ c). Si X es hereditariamente Baire, a) $\Leftrightarrow$ b) y si X es un espacio métrico completo, las tres propiedades son equivalentes.

Demostración. b) $\Rightarrow$ a) Sea C un conjunto de X, podemos suponer que C es cerrado (si C no fuese cerrado, se razona con la clausura de C) y $a \in C$ un punto de continuidad de $f|_C$.

Fijamos $\varepsilon > 0$ y tomamos la bola abierta $U = B(f(a), \varepsilon/2) \subset E$, entonces existe un abierto $V \subset X$ tal que $a \in C \cap V \subset f^{-1}(U)$ de donde $C \cap V \neq \emptyset$ y es claro que $diam_\rho\ f(C \cap V) < \varepsilon$.

b) $\Rightarrow$ c) es evidente.

Supongamos ahora que X es hereditariamente Baire y que f es fragmentable. Sea $Cont(f)$ el conjunto de puntos de continuidad de f, es claro que

$$Cont(f) = \cap\{O_n(f) : n \in \mathbb{N}\}$$

donde $O_n(f) = \cup\{V \subset X,\ V \text{ abierto y } diam_\rho\ f(V) < 1/n\}$. Como f es fragmentable, para cada $n \in \mathbb{N}$, $O_n(f)$ es abierto denso; por lo que al ser X un espacio Baire se tiene que $Cont(f)$ es un conjunto $\mathcal{G}_\delta$-denso.

Sea $C \subset X$ un conjunto cerrado, puesto que C es un espacio de Baire, por lo que se acaba de probar $Cont(f|_C)$ es no vacío, luego $f|_C$ tiene puntos de continuidad.

Si X es un espacio métrico completo, es claro que a) $\Leftrightarrow$ b) $\Rightarrow$ c); veamos que c) $\Rightarrow$ a).

En lo que sigue s representa una sucesión finita de ceros y unos, $|s|$ su longitud y $s, 0$ y $s, 1$ son las sucesiones obtenidas añadiendo un cero o un uno a la sucesión s.

Supongamos que f no es fragmentable, entonces existe $\varepsilon > 0$ y un conjunto $C \subset X$ no vacío tal que si $U \subset X$ es un abierto de modo que $C \cap U \neq \emptyset$, entonces $diam_\rho\ f(C \cap U) > \varepsilon$ (no hay problema en asumir que el conjunto C es abierto en X).

Fijado un punto $a \in C$ y un número real $r > 0$ tal que $B(a, r) \subset C$, como $diam_\rho\ f(B(a, r)) > \varepsilon$, existen x_0, $x_1 \in B(a, r)$ tales que $x_0 = a$ y $\rho(f(x_0), f(x_1)) > \varepsilon/2$. Tomamos $r_1 < r/2$ tal que $B(x_1, r_1) \subset B(a, r)$. Se repite la construcción con las bolas $B(x_0, r_1)$, $B(x_1, r_1)$ y, para $i = 0, 1$ y $k = 0, 1$ se obtienen bolas abiertas $B(x_{ik}, r_2) \subset B(x_i, r_1)$ con $x_{i0} = x_i$ y $r_2 < r_1/2$, verificando $\rho(f(x_{i0}), f(x_{i1})) > \varepsilon/2$; se repite sucesivamente esta construcción y se obtiene un conjunto precompacto numerable $P = \{x_s : |s| \geq 1\}$ y una familia numerable de bolas abiertas $\{B(x_s, r_n) : |s| = n \geq 1\}$, tal que para cada $y \in P$ hay una sucesión de bolas abiertas centradas en y en esta familia, cuyos radios tienden a cero.

Como X es métrico completo, $\overline{P}$ es compacto separable y la hipótesis implica que $f|_{\overline{P}}$ tiene la propiedad del punto de continuidad luego $f|_{\overline{P}}$ es fragmentable. Por otra parte, sea $V \subset X$ un conjunto abierto que tiene intersección no vacía con P, fijado un punto $y \in P \cap V$, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $B(y, r_n) \subset V$ siendo $y = x_s$ para algún s con $|s| = n$. Puesto que $x_{s,0}$, $x_{s,1}$ pertenecen ambos a $B(y, r_n) \cap P$ se tiene que $diam_\rho\ f(V \cap P) > \varepsilon/2$, por lo que se llega a una contradicción con el hecho de que $f|_{\overline{P}}$ sea fragmentable. $\square$

Proposición 2.19. *Si X es metrizable y $f : X \to E$ es fragmentable, $f \in F_\sigma(X, E)$, luego*

$$PC(X, E) \subset F_\sigma(X, E)$$

<u>*Demostración*</u>. Dado $\varepsilon > 0$, sea $V_0^\varepsilon \neq \emptyset$ abierto tal que $diam_\rho\ f(V_0^\varepsilon) < \varepsilon$. $C = X \setminus V_0^\varepsilon$ es cerrado y si no es vacío existe $V_1^\varepsilon \neq \emptyset$ abierto tal que $\emptyset \neq C \cap V_1^\varepsilon = V_1^\varepsilon \setminus V_0^\varepsilon = M_1^\varepsilon$ verifica $diam_\rho\ f(M_1^\varepsilon) < \varepsilon$.

Si $C = X \setminus (V_0^\varepsilon \cup V_1^\varepsilon)$ no es vacío, se encuentra $V_2^\varepsilon \neq \emptyset$ abierto tal que $\emptyset \neq C \cap V_2^\varepsilon = V_2^\varepsilon \setminus \bigcup\limits_{j<2} V_j^\varepsilon = M_2^\varepsilon$ verifica $diam_\rho\ f(M_2^\varepsilon) < \varepsilon$.

Siguiendo se obtiene que para algún ordinal $\gamma(\varepsilon)$ se cumple $X = \bigcup\limits_{\gamma<\gamma(\varepsilon)} M_\gamma^\varepsilon$ donde $diam_\rho\ f(M_\gamma^\varepsilon) < \varepsilon$.

$F_\gamma^\varepsilon = X \setminus \bigcup\limits_{\alpha<\gamma} V_\alpha^\varepsilon$ es cerrado en X. Los conjuntos

$$F_{\gamma n}^\varepsilon := \left\{ x \in F_\gamma^\varepsilon : d(x, (V_\gamma^\varepsilon)^c) \geq \frac{1}{n} \right\}$$

son cerrados y se comprueba que $M_\gamma^\varepsilon = \bigcup\limits_n F_{\gamma n}^\varepsilon$.

Fijados ε y n, la familia de cerrados $\{F_{\gamma n}^\varepsilon : \gamma < \gamma(\varepsilon)\}$ es discreta, luego la unión de cualquier subfamilia de ella es un cerrado (proposición A.9). Si $B \subset E$ es abierto, es fácil comprobar que

$$f^{-1}(B) = \bigcup_{\varepsilon,n,\gamma} \left\{F_{\gamma n}^\varepsilon : f(F_{\gamma n}^\varepsilon) \subset B\right\} = \bigcup_{n,\varepsilon} C_{n\varepsilon}$$

donde $C_{n\varepsilon} := \bigcup\limits_\gamma \left\{F_{\gamma n}^\varepsilon : f(F_{\gamma n}^\varepsilon) \subset B\right\}$ es cerrado por ser unión discreta de cerrados. Tomando $\varepsilon = \frac{1}{k}$

$$f^{-1}(B) = \bigcup_{k,n} C_{n\frac{1}{k}} \in \mathfrak{F}_\sigma(X)$$

□

Observación 2.20. *Veremos en el capítulo 3 que si X es perfectamente paracompacto, también se cumple*

$$PC(X, E) \subset F_\sigma(X, E)$$

Proposición 2.21. *Dada $f : X \to E$, son equivalentes:*

i) *$f \in F_\sigma(X, E)$ (resp. $f \in Z_\sigma(X, E)$) y $f(X)$ es separable.*

ii) *$\forall \varepsilon > 0\ \exists\{X_n : n \in \mathbb{N}\} \subset \mathcal{F}(X)$ (resp. en $\mathcal{Z}(X)$) tal que $X = \bigcup_n X_n$ y $diam_\rho\ f(X_n) < \varepsilon$.*

Demostración. i)$\Rightarrow$ ii) Sea $\{B_n : n \in \mathbb{N}\}$ un cubrimiento abierto de $f(X)$ con bolas de radio $\varepsilon/2$; además, $f^{-1}(B_n) = \bigcup_k F_{nk}$ con $F_{nk} \in \mathcal{F}(X)$. Por tanto, si $\{X_n : n \in \mathbb{N}\}$ es una enumeración de $\{F_{nk} : (n, k) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}\}$ se obtiene ii).

ii) $\Rightarrow$ i) Es inmediato que si se cumple ii) entonces $f(X)$ es separable. Para $\varepsilon = \frac{1}{k}$ sea $\{X_n^k : n \in \mathbb{N}\}$ que le corresponde verificando ii).

Se comprueba fácilmente que si $G \in \mathcal{G}(E)$, entonces

$$f^{-1}(G) = \bigcup \{X_n^k : f(X_n^k) \subset G\}$$

(si $a \in f^{-1}(G)$, entonces existe k con $B(f(a), \frac{1}{k}) \subset G$ y existe $n \in \mathbb{N}$ con $a \in X_n^k$, luego $f(X_n^k) \subset B(f(a), \frac{1}{k}) \subset G$). □

Proposición 2.22. *Sea X un espacio de Baire y $f : X \to E$ una aplicación tal que $f(X)$ es separable. Si $f \in F_\sigma(X, E)$ entonces el conjunto de puntos de continuidad de f, $Cont(f)$, es un conjunto $\mathcal{G}_\delta$-denso.*

Demostración. Dado $\varepsilon > 0$ sea $O_\varepsilon(f) := \cup\{V \in \mathcal{G}(X) : diam_\rho\ f(V) < \varepsilon\}$, entonces $O_\varepsilon(f)$ es denso en X.

En efecto, por la proposición 2.21 existe una sucesión $X_n \in \mathcal{F}(X)$ tal que $X = \bigcup_n X_n$ y $diam_\rho\ f(X_n) < \varepsilon$. Si $W \in \mathcal{G}(X)$, $W \neq \emptyset$ y suponemos $W \cap O_\varepsilon(f) = \emptyset$ se tendría que cada abierto no vacío $U \subset W$ cumpliría que $diam_\rho\ f(U) \geq \varepsilon$ con lo cual $H_n = W \cap X_n$ sería un cerrado relativo a W con interior vacío a W.

Como W es un espacio de Baire y $W = \bigcup_n H_n$ se llega a un absurdo. Queda probado que $O_\varepsilon(f)$ es un abierto denso. Como $Cont(f) = \bigcap_n O_{\frac{1}{n}}(f)$ y X es un espacio de Baire, resulta que $Cont(f)$ es un conjunto $\mathcal{G}_\delta$-denso. □

Corolario 2.23. *Si X es hereditariamente Baire y $f \in F_\sigma(X, E)$ con $f(X)$ separable, entonces f tiene la propiedad del punto de continuidad.*

Demostración. Como X es hereditariamente Baire, cada conjunto cerrado de X es un espacio de Baire. Por tanto, basta aplicar la proposición anterior para cada cerrado F de X y la restricción de f a F. $\square$

Una vez establecidos los resultados anteriores, es posible hacer una demostración del teorema inicial de este capítulo.

Dem. del Teorema 2.2.
a) $\Rightarrow$ b) es cierta siempre (ver proposición 2.4).
b) $\Rightarrow$ a) como todo espacio métrico es normal y E es espacio normado, basta aplicar la proposición 2.14.
b) $\Rightarrow$ c) como todo espacio métrico completo es hereditariamente Baire, basta aplicar el corolario 2.23.
c) $\Rightarrow$ b) como X es un espacio métrico, aplicamos la proposición corolario 2.19 y 2.18. $\square$

2.3. Ejemplos

Existe un espacio topológico X completamente regular tal que $B_1(X, \mathbb{R}) \neq F_\sigma(X, \mathbb{R})$, como se muestra en el siguiente ejemplo. Los resultados utilizados se ven con detalle en el apéndice B.

Ejemplo 2.24. *Si X es $\mathbb{R}$ con la topología de la densidad d (Apéndice B), se tiene que las funciones continuas en esta topología son de la primera clase de Baire en la topología ordinaria. Se sigue que una función de la primera clase de Baire en la topología de la densidad es una función de la segunda clase de Baire en la topología ordinaria (el inverso también es cierto por el teorema de Preiss [51]). Los conjuntos $\mathcal{F}_\sigma$ en la topología de la densidad son exactamente los conjuntos medibles Lebesgue y por tanto ser de la primera clase de Borel es, en esta topología de la densidad, equivalente a la medibilidad Lebesgue de la función en cuestión. Por otra parte, es bien conocida la existencia de funciones medibles Lebesgue que no son medibles Borel (ver [13]), por lo que*

$$B_1(X, \mathbb{R}) \subsetneq F_\sigma(X, \mathbb{R})$$

El siguiente ejemplo muestra que, si X no es hereditariamente Baire, ser de la primera clase de Borel no implica tener la propiedad del punto de continuidad.

Ejemplo 2.25. *Si $X = \mathbb{Q}$ con la topología usual, cada función definida sobre X es de la primera clase de Borel, pero existe una función $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$ que no tiene la propiedad del punto de continuidad (ver [38, remark 3, pág. 396]).*

Por otra parte, el recíproco tampoco es cierto en general, incluso con $E = \mathbb{R}$ y el espacio X compacto Hausdorff, como muestra el siguiente ejemplo.

Ejemplo 2.26. *Si X es el espacio ordinal $[0, \omega_1]$, entonces cada función real definida sobre X tiene la propiedad del punto de continuidad, ya que cada subconjunto no vacío de X contiene un punto aislado, pero no todas las funciones características sobre X son de la primera clase de Borel, ya que X contiene conjuntos que no son medibles Borel (ver [24, pág. 231]).*

Para un espacio métrico arbitrario E puede ocurrir que $\overline{B_1(X, E)} \neq B_1(X, E)$ incluso cuando $X = [-1, 1]$, como pone de manifiesto el siguiente ejemplo de D. Preiss.

Ejemplo 2.27. *Sea $g_k : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ definida por*

$$g_k(t) = \begin{cases} \sin \frac{\pi}{t} & si\ |t| \geq 1/k \\ 0 & si\ |t| < 1/k \end{cases}$$

Escogemos $h_{n,k} : [1, 2] \to [0, 1]$ funciones continuas tal que $h_{n,k}(1) = h_{n,k}(2) = 0$, $\lim_{k\to\infty} h_{n,k}(t) = 0$ y $\max\{h_{n,k}(I)\} = 1$ cuando $I \subset [1, 2]$ es un intervalo cumpliendo $|I| > 1/n$.

Sea e_1, e_2, e_3 la base canónica de $\mathbb{R}^3$. Definimos:

$E_\infty := \{te_1 + se_2 : t \in [-1, 1] \setminus \{0\}, s = \sin \frac{\pi}{t}\} \cup (\{0\} \times [-1, 1]) \cup ([1, 2] \times [0, 1])$

$E_n := \{x + 2^{-n}e_3 : x \in E_\infty\}$

$E_{n,k} := \{te_1 + g_k(t)e_2 + (2^{-n} + 2^{-n-k})e_3 : t \in [-1, 1]\} \cup \{te_1 + h_{n,k}(t)e_2 + (2^{-n} + 2^{-n-k})e_3 : t \in [1, 2]\}$

Finalmente, sea E un subespacio de $\mathbb{R}^3$ definido por

$$E := E_\infty \cup \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \cup \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=1}^{\infty} E_{n,k}$$

Preiss prueba que las funciones de la primera clase de Baire de $[0, 1]$ a E no son cerradas bajo convergencia uniforme.

Observación 2.28. *En el ejemplo anterior, que el espacio de llegada E no sea localmente arcoconexo desempeña un papel crucial en la demostración. De hecho, este ejemplo dio origen a la tesis de Fosgerau [20], el cual probó que esta propiedad era necesaria para que se diese la igualdad $B_1([0, 1], E) = F_\sigma([0, 1], E)$ y demostró que:*
"Si E es un espacio métrico completo, son equivalentes:

a) E es arcoconexo y locamente arcoconexo.

b) $B_1([0, 1], E) = F_\sigma([0, 1], E)$."

2.4. Resultados sobre funciones escalares

Es interesante estudiar que ocurre cuando consideramos como espacio de llegada $\mathbb{R}$ con la topología usual. Evidentemente, el teorema inicial del capítulo se cumple en este caso, pero se puede enunciar el siguiente teorema [46] que sólo tiene sentido cuando consideramos $\mathbb{R}$ como espacio de llegada:

Teorema 2.29. *Sea X un espacio métrico y $f : X \to \mathbb{R}$ una función:*

a) f es de la primera clase de Baire.

b) Para cada $a \in \mathbb{R}$, los conjuntos $[f \leq a]$, $[f \geq a] \in \mathcal{G}_\delta(X)$.

c) Para cada $a < b$ números reales, existen H_1, $H_2 \in \mathcal{G}_\delta(X)$ tal que $[f \leq a] \subset H_1 \subset [f \leq b]$ y $[f \geq b] \subset H_2 \subset [f \geq a]$.

d) f es fragmentable.

e) Para cada conjunto no vacío cerrado $F \subset X$ y para cada $a < b$ números reales, los conjuntos $[f \geq b]$ y $[f \leq a]$ no pueden ser densos en F simultáneamente.

Entonces, d) $\Rightarrow$ e) $\Rightarrow$ a) $\Leftrightarrow$ b) $\Leftrightarrow$ c), y todas estas propiedades son equivalentes si X es hereditariamente Baire.

Demostración. a) $\Rightarrow$ b) Si $f \in B_1(X, \mathbb{R})$, por la proposición 2.4, $f \in F_\sigma(X, \mathbb{R})$, luego, para cada $a \in \mathbb{R}$, $[f > a]$, $[f < a] \in \mathcal{F}_\sigma(X)$.

b) $\Rightarrow$ a) Cada intervalo abierto (a, b) en $\mathbb{R}$ es intersección de $(a, +\infty)$ y $(-\infty, b)$ por lo que $[a < f < b] \in \mathcal{F}_\sigma(X)$. Cada conjunto abierto $G \subset \mathbb{R}$ es unión numerable de intervalos abiertos, luego $f^{-1}(G) \in \mathcal{F}_\sigma(X)$.

b) $\Rightarrow$ c) Sean a, b números reales y $a < b$, existe $c \in \mathbb{R}$ tal que $a < c < b$

$$[f \leq a] \subset [f \leq c] \subset [f \leq b]$$

con $[f \leq c] \in \mathcal{G}_\delta(X)$.

c) $\Rightarrow$ b) Basta darse cuenta que

$$[f \geq a] = \bigcap_n [f \geq a - 1/n]$$

Entonces, para cada $n \in \mathbb{N}$, existe un conjunto $H_n \in \mathcal{G}_\delta(X)$ tal que

$$[f \geq a - 1/n] \subset H_n \subset [f \geq a - 1/n + 1]$$

Por tanto, se tiene que

$$[f \geq a] = \bigcap_n [f \geq a - 1/n] = \bigcap_n H_n \in \mathcal{G}_\delta(X)$$

e) $\Rightarrow$ c) Sean a, b números reales y $a < b$. Consideramos la familia $\mathcal{G}$ de todos los subconjuntos abiertos G de X para los que existe un conjunto $H_G \in \mathcal{G}_\delta(X)$ satisfaciendo

$$[f \leq a] \cap G \subset H_G \subset [f \leq b] \cap G$$

Es obvio que si $G \in \mathcal{G}$ y $G' \subset G$ es un conjunto abierto, entonces $G' \in \mathcal{G}$. Ponemos $\Gamma = \bigcup_{G \in \mathcal{G}} G$.

Como cada espacio métrico es paracompacto (ver corolario A.12), el cubrimiento abierto $\mathcal{G}$ de Γ tiene un refinamiento localmente finito $\mathcal{U}$. Entonces

$$[f \leq a] \cap \Gamma \subset \bigcup_{G \in \mathcal{U}} H_G \subset [f \leq b] \cap \Gamma$$

Puesto que la unión localmente finita de conjuntos $\mathcal{G}_\delta$ es un conjunto $\mathcal{G}_\delta$, se tiene que $\Gamma \in \mathcal{G}$.

Si $\Gamma = X$, se termina la prueba. Si $X \setminus \Gamma \neq \emptyset$, los conjuntos $[f \leq a]$, $[f \geq b]$ no pueden ser densos simultáneamente en el conjunto cerrado $X \setminus \Gamma$.

Por tanto, existe un conjunto abierto G con $G \setminus \Gamma \neq \emptyset$ y, o bien, $(G \setminus \Gamma) \cap [f \leq a] = \emptyset$ o bien, $(G \setminus \Gamma) \cap [f \geq b] = \emptyset$. En ambos casos, $G \in \mathcal{G}$ lo que contradice la maximalidad de Γ (en el primer caso, tomamos $H_G = G \cap H_\Gamma$; en el segundo caso, tomamos $H_G = (G \cap H_\Gamma) \cup (G \setminus \Gamma)$).

d) $\Rightarrow$ e) Sea $F \subset X$ un conjunto cerrado no vacío y $a < b$ números reales. Supongamos que los conjuntos $[f \leq a]$ y $[f \geq b]$ son densos simultáneamente en F. Entonces, es obvio que para $\varepsilon = b - a > 0$, no existe ningún conjunto abierto $V \subset X$ con $F \cap V \neq \emptyset$ tal que $diam_\rho f(F \cap V) < \varepsilon$.

Por último, si X es hereditariamente Baire a) y d) son equivalentes por el teorema 2.2, luego todas las propiedades son equivalentes. $\square$

Capítulo 3

Funciones de la primera clase en un espacio no separable

El objetivo de este capítulo es eliminar la hipótesis de que f tenga imagen separable en la caracterización de las funciones de la primera clase. Entre otras cosas veremos que el teorema 2.2 es cierto aunque la imagen $f(X)$ no se suponga separable.

El enfoque de este capítulo es similar al del capítulo 2. Se trata de dar el mayor alcance posible a los resultados del capítulo anterior sustituyendo la condición de que $f(X)$ sea separable por la condición de que f sea σ-discreta. La noción de función σ-discreta fue introducida por Hansell en [25, §3] y para justificar la necesidad de considerar este tipo de funciones aduce al siguiente hecho: "Con el axioma de Martin y la negación de la hipótesis del continuo, existe un subconjunto $X \subset \mathbb{R}$ no numerable con la propiedad de que cada subconjunto de X es un $\mathcal{F}_\sigma(X)$ (ver [48]). Si $f : X \to E$ es una función inyectiva sobre un conjunto discreto $f(X) \subset E$ del espacio de Banach no separable E entonces f es de la primera clase de Borel pero no es de la primera clase de Baire, pues toda función continua definida sobre X tiene imagen separable, y lo mismo le ocurre a f".

Por otra parte, esta condición de σ-discretitud no es demasiado restrictiva pues W. G. Fleissner [19] mostró que es relativamente consistente, con los axiomas de la teoría de conjuntos, asumir que cada función de la primera clase de Borel en un espacio métrico es σ-discreta, por lo que si quitamos la condición de función σ-discreta no es posible encontrar un contraejemplo que haga fallar el teorema. De hecho veremos, que como consecuencia de la proposición 3.42, si el espacio de partida es métrico completo, cada función de la primera clase de Borel en un espacio métrico es σ-discreta.

3.1. Funciones σ-discretas y fuertemente σ-discretas

En esta sección introducimos el concepto de función σ-discreta (resp., fuertemente σ-discreta) y recogemos algunos resultados de carácter técnico, relativos a este tipo de aplicaciones, que se requieren para lo que sigue.

Sea X un espacio topológico Hausdorff y (E, ρ) un espacio métrico. Diremos que una familia $\mathcal{H}$ de subconjuntos de X es *discreta* si cada punto de X tiene un entorno que interseca a lo más con un conjunto de dicha familia. La familia $\mathcal{H}$ se dice *fuertemente discreta* si existe una familia discreta $\{G_H : H \in \mathcal{H}\}$ de abiertos tal que $\overline{H} \subset G_H\ \forall H \in \mathcal{H}$.

Una familia $\mathcal{H}$ de subconjuntos de X se dice *σ-discreta* (resp., *fuertemente σ-discreta*) cuando $\mathcal{H}$ es la unión numerable de familias discretas (resp., *fuertemente discretas*). Toda familia numerable es fuertemente σ-discreta.

Una familia de conjuntos $\mathcal{B} \subset \mathcal{P}(X)$ se dice que es una *base para* $\mathcal{H}$ si cada $H \in \mathcal{H}$ es una unión de elementos de $\mathcal{B}$. La familia $\mathcal{B}$ se dice una *base para* $f : X \to E$ si $\mathcal{B}$ es una base para la familia $\{f^{-1}(G) : G \in \mathcal{G}(E)\}$. Una aplicación f se dice *σ-discreta* (resp., *fuertemente σ-discreta*) si existe una base σ-discreta (resp., fuertemente σ-discreta) $\mathcal{B}$ para f.

Es inmediato que toda función $f : X \to E$ con $f(X)$ separable es fuertemente σ-discreta pues sea $\mathcal{U}$ una base numerable de la topología de $f(X)$ con $\mathcal{U} = \{U_n : n \in \mathbb{N}\}$. Entonces, $\mathcal{V} = \{f^{-1}(U_n) : n \in \mathbb{N}\}$ es fuertemente σ-discreta por ser numerable.

La clase de las funciones σ-discretas (resp., fuertemente σ-discretas) $f : X \to E$ se denotará por $\Sigma(X, E)$ (resp., $\Sigma^*(X, E)$).

A partir de las definiciones anteriores, se pueden establecer las siguientes relaciones entre este tipo de familias y funciones.

Es inmediato que en un espacio topológico X, cada familia fuertemente discreta (resp., fuertemente σ-discreta) es discreta (resp., σ-discreta), por tanto, $\Sigma^*(X, E) \subset \Sigma(X, E)$.

Definición 3.1. *Un espacio Hausdorff X es paracompacto (resp. subparacompacto) si cada cubrimiento abierto de X tiene un refinamiento abierto localmente finito (resp., un refinamiento cerrado σ-finito).*

Un espacio topológico X se dice colectivamente normal si cada familia discreta $\mathcal{H}$ de subconjuntos de X es fuertemente discreta.

Por el corolario A.12, cada espacio métrico es paracompacto y, por la proposición A.14, cada espacio paracompacto es colectivamente normal. Como consecuencia inmediata de esto resulta:

Proposición 3.2. *Si X es colectivamente normal (en particular, si X es paracompacto o métrico)*

$$\Sigma(X, E) = \Sigma^*(X, E)$$

Un primer ejemplo de función fuertemente σ-discreta (por tanto, σ-discreta) lo proporcionan las funciones continuas, como se muestra en la siguiente proposición.

Proposición 3.3. *Sea X un espacio topológico y (E, ρ) un espacio métrico, entonces cada función $f : X \to E$ continua es fuertemente σ-discreta.*

Demostración. Por la proposición A.13, existe una base $\mathcal{U}$ σ-discreta de abiertos para E, entonces $\mathcal{U}$ es fuertemente σ-discreta (ver proposición 3.2). Usando la continuidad de f se demuestra fácilmente que f^{-1} transforma familias fuertemente discretas en familias fuertemente discretas. Por lo tanto $\{f^{-1}(V) : V \in \mathcal{U}\}$ es una base fuertemente σ-discreta para f. □

Las siguientes proposiciones establecen propiedades importantes sobre las familias y funciones σ-discretas y fuertemente σ-discretas, que servirán para demostrar el teorema principal de este capítulo.

Proposición 3.4. *Sea X un espacio topológico y (E, ρ) un espacio métrico. Entonces la clase de todas las funciones de X en E con una base σ-discreta (resp., fuertemente σ-discreta) es cerrada para límites puntuales de sucesiones convergentes, luego*

$$\Sigma(X, E) = \overline{\Sigma(X, E)}^{\,t_p} \qquad\qquad \Sigma^*(X, E) = \overline{\Sigma^*(X, E)}^{\,t_p}$$

Demostración. E tiene una base abierta de la forma $\mathcal{U} = \cup_n \mathcal{U}_n$ donde cada $\mathcal{U}_n$ es una familia discreta en E (ver proposición A.13).

Sea $f : X \to E$ el límite puntual de la sucesión de funciones f_n y supongamos que cada f_n tiene una base $\cup_m \mathcal{B}_{nm}$ donde cada familia $\mathcal{B}_{nm}$ es discreta en X.

Para cada conjunto B en $\cup_{n,m} \mathcal{B}_{nm}$ ($B \neq \emptyset$), podemos enumerar como una sucesión $U_B^{(1)}$, $U_B^{(2)}, \dots$ los miembros de

$$\{U \in \mathcal{U} : B \subset f_n^{-1}(U) \text{ para algún } n \geq 1\}$$

(ya que cada punto de E puede estar solamente en una cantidad numerable de miembros de $\mathcal{U}$).

Como cada familia

$$\Gamma_{nmk} = \{B \cap f^{-1}(U_B^{(k)}) : B \in \mathcal{B}_{nm}\} \qquad (n, m, k \geq 1)$$

es discreta en X sólo queda probar que $\Gamma = \cup_{n,m,k}\Gamma_{nmk}$ forma una base para f.

Sea $t \in f^{-1}(W)$ para algún abierto W en E y escogemos $U \in \mathcal{U}$ tal que $f(t) \in U$ y $U \subset W$, por ser $\mathcal{U}$ una base en E. Como $f_n(t) \to f(t)$, tenemos que $f_n(t) \in U$, para algún $n \in \mathbb{N}$. Por las propiedades de una base, podemos encontrar $m \geq 1$ y $B \in \mathcal{B}_{nm}$ tal que $t \in B$ y $B \subset f_n^{-1}(U)$.

Ahora, para algún $k \geq 1$, $U = U_B^{(k)}$ y por tanto

$$t \in B \cap f^{-1}(U_B^{(k)}) = f^{-1}(U) \subset f^{-1}(W)$$

La prueba sigue funcionando en el caso fuertemente σ-discreto. $\square$

Observación 3.5. *El resultado anterior se debe a Hansell y aparece en [28].*

La siguiente noción fue introducida por Hansell en [25] como una debilitación del concepto de familia σ-discreta.

Definición 3.6. *Una familia $\mathcal{H}$ de subconjuntos de X se dice σ-discretamente descomponible (abrev. σ-d.d.) si para cada $H \in \mathcal{H}$, $H = \cup\{G_{H,n} : n \in \mathbb{N}\}$ donde cada familia $\{G_{H,n} : H \in \mathcal{H}\}$ es discreta. Por otra parte, diremos que $\mathcal{H}$ es fuertemente σ-d.d. si cada $H \in \mathcal{H}$ puede ser escrito en la forma $H = \cup_n G_{H,n}$ y, para cada $n \in \mathbb{N}$, la familia $\{G_{H,n} : H \in \mathcal{H}\}$ es fuertemente discreta.*

Observación 3.7. *Es evidente que toda familia fuertemente σ-discreta es fuertemente σ-discretamente descomponible.*

El siguiente resultado se debe a Vesely y aparece en [60].

Lema 3.8. *Sea $\mathcal{M}$ una familia σ-d.d. (resp. fuertemente σ-d.d.) de subconjuntos $\mathcal{F}_\sigma$ (resp., $\mathcal{Z}_\sigma$) de un espacio topológico X arbitrario (resp., normal). Entonces, los conjuntos $G_{M,n}$ de la definición 3.6 pueden ser escogidos de forma que sean cerrados (resp., ceros).*

Demostración. Demostramos el caso X espacio normal y $\mathcal{M}$ una familia fuertemente σ-d.d. de conjuntos $\mathcal{Z}_\sigma$.

Por la definición 3.6, existen conjuntos $G_{M,n}$ y abiertos $V_{M,n}$ tal que $\overline{G_{M,n}} \subset V_{M,n}$ para cada $M \in \mathcal{M}$, $n \in \mathbb{N}$, y $M = \cup_n G_{M,n}$ para cada $M \in \mathcal{M}$ y la familia $\{V_{M,n} : M \in \mathcal{M}\}$ es discreta para cada $n \in \mathbb{N}$. Como X es normal, es posible encontrar conjuntos ceros tal que $\overline{G_{M,n}} \subset Z_{M,n} \subset V_{M,n}$ para cada $M \in \mathcal{M}$ y $n \in \mathbb{N}$.

Cada $M \in \mathcal{M}$ está en $\mathcal{Z}_\sigma(X)$, luego puede ser escrito como $M = \cup_k F_{M,k}$ con $F_{M,k} \in \mathcal{Z}(X)$ $\forall k \in \mathbb{N}$. Por tanto,

$$M = \bigcup_n G_{M,n} = \bigcup_n \bigcup_k (G_{M,n} \cap F_{M,k}) \subset \bigcup_n \bigcup_k (Z_{M,n} \cap F_{M,k}) \subset \bigcup_k F_{M,k} = M$$

luego, $M = \bigcup_n \bigcup_k (Z_{M,n} \cap F_{M,k})$.

Pero, los conjuntos de esta última unión son ceros y, para n, k fijos, $\{Z_{M,n} \cap F_{M,k} : M \in \mathcal{M}\}$ es fuertemente discreta ya que $Z_{M,n} \cap F_{M,k} \subset V_{M,n}$.

El otro caso es similar. El papel de los ceros $Z_{M,n}$ lo desempeñan los cerrados $\overline{G_{M,n}}$. □

Proposición 3.9. *Sea $\mathcal{H}$ una familia σ-discreta de abiertos en un espacio métrico E y f una función σ-discreta (resp., fuertemente σ-discreta). Entonces la familia $\{f^{-1}(H) : H \in \mathcal{H}\}$ es σ-d.d. (resp., fuertemente σ-d.d.).*

Demostración. Sea $\mathcal{B} = \bigcup_{m=1}^{\infty} \mathcal{B}_m$ una base para f tal que cada $\mathcal{B}_m$ es discreta y $\mathcal{H} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{H}_n$ donde cada $\mathcal{H}_n$ es una familia discreta formada por abiertos. Para cada $H \in \mathcal{H}$ y cada $m, n \in \mathbb{N}$, definimos

$$G_{H,m,n} = \begin{cases} \cup\{B \in \mathcal{B}_m : B \subset f^{-1}(H)\} & \text{si } H \in \mathcal{H}_n \\ \emptyset & \text{si } H \notin \mathcal{H}_n \end{cases}$$

Puesto que $\mathcal{B}$ es una base para f y H es abierto, $f^{-1}(H) = \bigcup_{m,n\in\mathbb{N}} G_{H,m,n}$.

Más aún, para $m, n \in \mathbb{N}$, la familia de abiertos $\{G_{H,m,n} : H \in \mathcal{H}\}$ es discreta ya que $\mathcal{B}_m$ es discreta y $\{f^{-1}(H) : H \in \mathcal{H}_n\}$ es disjunta.

La prueba para el caso alternativo es similar. □

Proposición 3.10. *Sea $f : X \to E$ una función σ-discreta en $F_\sigma(X, E)$ y $\mathcal{V} \subset \mathcal{G}(E)$ una familia σ-discreta, entonces $f^{-1}(\mathcal{V})$ tiene una base σ-discreta de cerrados. Si X es normal y f es fuertemente σ-discreta, entonces $f^{-1}(\mathcal{V})$ tiene una base fuertemente σ-discreta formada por ceros.*

Demostración. Como $\mathcal{V}$ es una familia σ-discreta de abiertos y f es σ-discreta de la primera clase de Borel, por la proposición 3.9, $f^{-1}(\mathcal{V})$ es una familia σ-d.d. de conjuntos $\mathcal{F}_\sigma(X)$, luego existen familias discretas $\{G_{V,n} : V \in \mathcal{V}\}$ tal que $f^{-1}(V) = \cup\{G_{V,n} : n \in \mathbb{N}\}$ para cada $V \in \mathcal{V}$. Por el lema 3.8, los conjuntos $G_{V,n}$ se pueden tomar cerrados para cada $V \in \mathcal{V}$ y $n \in \mathbb{N}$, por tanto, la familia $\{G_{V,n} : V \in \mathcal{V},\ n \in \mathbb{N}\}$ es una base σ-discreta de $f^{-1}(\mathcal{V})$ formada por cerrados.

La prueba para el otro caso es similar ya que si X es normal, $F_\sigma(X, E) = Z_\sigma(X, E)$ (proposición 2.5) y los conjuntos $G_{V,n}$ se pueden tomar ceros. □

La siguiente definición introduce un concepto de partición más fuerte que el habitual, al mismo tiempo que permite definir un nuevo tipo de funciones que juegan un papel similar a las funciones Z_σ-constantes del capítulo anterior.

Definición 3.11. *Decimos que una partición $\{H_i : i \in I\}$ de X es una buena partición (resp., una buena partición en el sentido fuerte) si es una familia σ-d.d. formada por subconjuntos $\mathcal{F}_\sigma(X)$ (resp., una familia fuertemente σ-d.d. formada por subconjuntos $\mathcal{Z}_\sigma(X)$).*

Una aplicación $f : X \to E$ se dice τ-constante (resp., τ^*-constante) si existe una buena partición (resp., una buena partición en el sentido fuerte) $\{H_i : i \in I\}$ de X tal que $f|_{H_i}$ es constante.

Cuando X es normal, si $\{H_i : i \in I\}$ es una buena partición de X, entonces necesariamente cada $H_i \in \mathcal{Z}_\sigma(X)$. Cuando X es colectivamente normal, las dos nociones coinciden.

Proposición 3.12. *Sea X un espacio topológico, $\{H_i : i \in I\}$ una buena partición de X y, para cada $i \in I$, sea $\{M_\alpha : \alpha \in A_i\}$ una buena partición relativa al subespacio H_i, donde los conjuntos indicados A_i son disjuntos dos a dos y $A = \cup\{A_i : i \in I\}$, entonces la familia $\{M_\alpha : \alpha \in A\}$ es una buena partición de X.*

Demostración. Ver [30, lema 5] □

El siguiente resultado es una generalización del lema de reducción. El caso perfecto es el Teorema 1 de [26] y el caso normal son los lemas 2.1 y 2.2 de [60].

Proposición 3.13. *Sea X un espacio normal y $\{M_j : j \in J\}$ una familia fuertemente σ-d.d. de conjuntos $\mathcal{Z}_\sigma(X)$ tal que $X = \cup\{M_j : j \in J\}$, entonces existe una buena partición en el sentido fuerte $\{H_j : j \in J\}$ de X tal que $H_j \subset M_j$ $\forall j \in J$.*

Si X es perfecto y $\{M_j : j \in J\}$ es una familia σ-d.d. de conjuntos $\mathcal{F}_\sigma(X)$ tal que $X = \cup\{M_j : j \in J\}$, entonces existe una buena partición $\{H_j : j \in J\}$ de X tal que $H_j \subset M_j$ $\forall j \in J$.

Demostración. Por el lema 3.8, podemos escribir $M_j = \cup_n M_{j,n}$ donde $M_{j,n}$ son ceros y, para cada n fijo, la familia $\{M_{j,n} : j \in J\}$ es fuertemente discreta. Definimos por inducción

$$H_{j,1} = M_{j,1} \quad \forall j \in J$$

$$H_{j,n+1} = M_{j,n+1} \setminus \bigcup_{k=1}^{n} \bigcup_{j \in J} M_{j,k} \quad \forall j \in J$$

Por la proposición A.10 y A.1, la última unión es un cero. Por tanto, por el lema A.4, $H_{j,n} \in \mathcal{Z}_\sigma(X)$ para cada $j \in J$, $n \in \mathbb{N}$. Es claro que $\{H_{j,n} : j \in$

J, $n \in \mathbb{N}\}$ es un cubrimiento disjunto de $\cup_j M_j$ y $H_{j,n} \subset M_{j,n}$ $\forall j$, n. Por tanto, la familia $\{H_j : j \in J\}$ con $H_j = \cup_n H_{j,n}$ es una buena partición en el sentido fuerte de X tal que $H_j \subset M_j$ $\forall j \in J$.

El caso $\{M_j : j \in J\}$ una familia σ-d.d. de conjuntos $\mathcal{F}_\sigma$, es similar pero utilizando que X es espacio perfecto y la proposición A.9. $\square$

El siguiente lema es de gran utilidad para demostrar cuándo una función con la propiedad del punto de continuidad es σ-discreta de la primera clase de Borel. Este resultado se debe a [12] y [36].

Lema 3.14. *Para un espacio Hausdorff X son equivalentes:*

a) X es perfectamente subparacompacto.

b) Si $\{G_\gamma : \gamma < \Gamma\}$ (Γ un número ordinal) es una sucesión transfinita de abiertos de X y consideramos los conjuntos $M_\gamma := G_\gamma \setminus \cup\{G_\mu : \mu < \gamma\}$, entonces $\{M_\gamma : \gamma < \Gamma\}$ es una familia σ-d.d. de conjuntos $\mathcal{F}_\sigma$ de X.

Observación 3.15. *En particular, si X es perfectamente paracompacto, sigue siendo cierta la implicación a) $\Rightarrow$ b) del lema anterior, ya que todo espacio paracompacto es subparacompacto (ver proposición A.14).*

3.2. Funciones de la primera clase

El objetivo central de este capítulo es demostrar el siguiente teorema que caracteriza las funciones de la primera clase de Baire.

Teorema 3.16. *Sea X un espacio perfectamente paracompacto hereditariamente Baire, E un espacio normado y $f : X \to E$. Son equivalentes:*

a) f es de la primera clase de Baire.

b) f es σ-discreta de la primera clase de Borel.

c) f tiene la propiedad del punto de continuidad.

Observación 3.17. *Si X es un espacio topológico y (E, ρ) un espacio métrico, veremos que:*
a) $\Rightarrow$ b), es siempre cierto (ver proposición 3.18).
b) $\Rightarrow$ a), si X es un espacio colectivamente normal y E es un subconjunto convexo de un espacio vectorial normado (ver proposición 3.28).

Preiss mostró que b) $\Rightarrow$ a) no es cierto para un espacio métrico E arbitrario y $X = [-1, 1]$ (ver ejemplo 2.27).
b) $\Rightarrow$ c), si X es hereditariamente Baire (ver corolario 3.34).

c) $\Rightarrow$ b), si X es perfectamente paracompacto (ver proposición 3.36).

Es más, si X es perfectamente paracompacto hereditariamente Baire con la propiedad de Kaplansky, veremos en el teorema 3.43 que $F_\sigma(X,E) = F_\sigma(X,E) \cap \Sigma(X,E)$, por lo que en este caso el teorema sigue siendo cierto con la condición de función σ-discreta eliminada en b).

3.2.1. Funciones de la primera clase de Baire y de la primera clase de Borel σ-discretas

La siguiente proposición permite probar que una función de la primera clase de Baire es siempre σ-discreta de la primera clase de Borel.

Proposición 3.18. *Sea X un espacio topológico arbitrario y (E,ρ) un espacio métrico*

$$\overline{B_1(X,E)} \subset Z_\sigma(X,E) \cap \Sigma^*(X,E) \subset F_\sigma(X,E) \cap \Sigma(X,E)$$

Demostración. Sea f el límite uniforme de una sucesión de funciones $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de la primera clase de Baire. Cada f_n es el límite puntual de una sucesión de funciones continuas $(g_{nm})_{m\in\mathbb{N}}$.

Por la proposición 3.3, cada g_{nm} es fuertemente σ-discreta. Por la proposición 3.4, el límite puntual de funciones fuertemente σ-discretas es fuertemente σ-discreta luego $f \in \Sigma^*(X,E)$. Hemos probado así

$$\overline{B_1(X,E)} \subset \Sigma^*(X,E)$$

Por otra parte, sabemos que $\overline{B_1(X,E)} \subset Z_\sigma(X,E)$ (ver capítulo 2), queda terminada la prueba de la primera inclusión.

La segunda inclusión $Z_\sigma(X,E) \cap \Sigma^*(X,E) \subset F_\sigma(X,E) \cap \Sigma(X,E)$ es inmediata. □

La prueba anterior contiene la prueba de la implicación a) $\Rightarrow$ b) en el teorema 3.16.

Para demostrar b) $\Rightarrow$ a) vamos a aproximar las funciones de $F_\sigma(X,E) \cap \Sigma(X,E)$ (resp. $Z_\sigma(X,E) \cap \Sigma^*(X,E)$), de modo uniforme, por funciones τ-constantes (resp., τ^*-constantes).

Proposición 3.19. *Sea X un espacio topológico y (E,ρ) un espacio métrico. Si X es normal (resp., X arbitrario) y $f : X \to E$ es una función τ^*-constante (resp., τ-constante), entonces f es fuertemente σ-discreta Z_σ-medible (resp., σ-discreta de la primera clase de Borel).*

<u>Demostración</u>. Sea $\{H_i : i \in I\}$ una buena partición en el sentido fuerte de X tal que $f|_{H_i} = \{e_i\}$ ($e_i \in E$) para cada $i \in I$.

Como $\{H_i : i \in I\}$ es fuertemente σ-d.d., $H_i = \cup_n H_{i,n}$, para cada $i \in I$, donde cada familia $\{H_{i,n} : i \in I\}$ es fuertemente discreta. Consideramos la familia $\mathcal{B} = \cup_n \mathcal{B}_n$ con $\mathcal{B}_n = \{H_{i,n} : i \in I\}$ fuertemente discreta.

Veamos que $\mathcal{B}$ es una base para f. Sea U un conjunto abierto de E, consideramos el conjunto $J = \{i \in I : e_i \in U\}$, entonces

$$f^{-1}(U) = \bigcup_{i \in J} H_i = \bigcup_{i \in J} \bigcup_{n \in \mathbb{N}} H_{i,n} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \bigcup_{i \in J} H_{i,n}$$

Por otra parte, los conjuntos $H_{i,n}$ se pueden tomar ceros (ver lema 3.8) y, por la proposición A.10, se tiene que $f^{-1}(U) \in \mathcal{Z}_\sigma(X)$.

En el caso alternativo hay que usar que la unión discreta de cerrados es un cerrado (proposición A.9) y que los conjuntos $H_{i,n}$ se pueden tomar cerrados (lema 3.8), por tanto, $f^{-1}(U) \in \mathcal{F}_\sigma(X)$. $\square$

Observación 3.20. *En la demostración de la proposición anterior no se ha usado que U es abierto. Realmente se ha probado que para todo $U \subset E$, se tiene $f^{-1}(U) \in \mathcal{Z}_\sigma$. Como también es $f^{-1}(U^c) \in \mathcal{Z}_\sigma$, resulta $f^{-1}(U) \in \mathcal{Z}_\sigma \cap \mathcal{U}_\delta$ $\forall U \subset E$ (resp., $f^{-1}(U) \in \mathcal{F}_\sigma \cap \mathcal{G}_\delta$ $\forall U \subset E$), es decir, f está en $Z_\sigma(X, E)$ (resp., en $F_\sigma(X, E)$) cuando en E consideramos la topología discreta.*

Proposición 3.21. *Sea X un espacio topológico y (E, ρ) un espacio métrico. Si X es normal (resp., X arbitrario) y $f : X \to E$ es el límite uniforme de una sucesión de funciones τ^*-constantes (resp., τ-constantes), entonces $f \in Z_\sigma(X, E) \cap \Sigma^*(X, E)$ (resp., $f \in F_\sigma(X, E) \cap \Sigma(X, E)$).*

<u>Demostración</u>. Por la proposición 3.19, cada función τ^*-constante es fuertemente σ-discreta y pertenece a $Z_\sigma(X, E)$. Basta tener en cuenta que el límite puntual de una sucesión de funciones fuertemente σ-discretas es fuertemente σ-discreta (proposición 3.4) y el límite uniforme de una sucesión de funciones en $Z_\sigma(X, E)$ está en $Z_\sigma(X, E)$ (proposición 2.8). $\square$

Los resultados siguientes se obtienen utilizando técnicas usuales de la caracterización de funciones de la primera clase de Borel. El caso de un espacio perfecto, es la extensión de Hansell de un teorema de Banach y, el caso de espacios colectivamente normales está implícito en [28] y [60].

Proposición 3.22. *Sea X un espacio topológico, (E, ρ) un espacio métrico y $f : X \to E$. Si X es normal y f es una función en $F_\sigma(X, E)$ fuertemente σ-discreta (resp., σ-discreta y X perfecto), entonces f es el límite uniforme de una sucesión de funciones $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ τ^*- constantes (resp., τ-constantes) tal que $f_n(X)$ es métricamente discreto y contenido en $f(X)$.*

Demostración. Dado $\varepsilon > 0$, sea $U_j = \{B(e_j, \varepsilon) : j \in J\}$ un cubrimiento abierto σ-discreto de $f(X)$ formado por bolas abiertas, donde $\{e_j : j \in J\}$ es un subconjunto métricamente discreto de $f(X)$ (Th. de Stone, proposición A.11). Como f es fuertemente σ-discreta, por la proposición 3.9, la familia $\{f^{-1}(U_j) : j \in J\}$ recubre a X y es fuertemente σ-d.d.. Como esta familia está formada por conjuntos $\mathcal{Z}_\sigma$ y X es normal, por la proposición 3.13, existe una buena partición en el sentido fuerte $\{H_j : j \in J\}$ de X tal que para cada $j \in J$, $f(H_j) \subset U_j$. Para cada $\varepsilon > 0$, definimos una función f_ε tal que $f_\varepsilon|_{H_j} = e_j$ $\forall j \in J$, entonces $\rho(f(x), f_\varepsilon(x)) < \varepsilon$ $\forall x \in X$. Tomando $\varepsilon = 1/n$, obtenemos sucesión de funciones τ^*-constantes que converge uniformemente a f.

La prueba del caso X espacio perfecto y f σ-discreta es similar. □

Corolario 3.23. *Sea X un espacio topológico y (E, ρ) un espacio métrico. Si X es normal (resp., perfecto), $f \in F_\sigma(X, E)$ es fuertemente σ-discreta (resp., σ-discreta) sí y sólo sí es el límite uniforme de una sucesión de funciones τ^*-constantes (resp., τ-constantes).*

Demostración. Es consecuencia de las proposiciones 3.21 y 3.22. □

Proposición 3.24. *Sea $f : X \to E$ una función τ^*-constante (resp., τ-constante) y $\{H_i : i \in I\}$ una buena partición en el sentido fuerte (resp., una buena partición) de X tal que $f|_{H_i}$ es constante $\forall i \in I$. Si X es normal (resp., perfecto), entonces existe una familia $\{Z_{i,m} : i \in I,\ m \in \mathbb{N}\}$ de conjuntos ceros (resp., cerrados) tal que:*

a) Para cada $m \in \mathbb{N}$, la familia $\{Z_{i,m} : i \in I\}$ es fuertemente discreta (resp., discreta).

b) Para cada $i \in I$, la sucesión $\{Z_{i,m} : m \in \mathbb{N}\}$ es creciente y

$$H_i = \cup\{Z_{i,m} : m \in \mathbb{N}\}$$

De aquí, $C_m = \cup\{Z_{i,m} : i \in I\}$ es una sucesión creciente de ceros (resp., cerrados) que cubre X tal que $f|_{C_m}$ es continua.

Demostración. Sea $\{H_i : i \in I\}$ una buena partición en el sentido fuerte de X tal que $f|_{H_i}$ es constante para cada $i \in I$. Entonces se tiene $H_i = \cup_n C_{in}$ donde $\{C_{in} : i \in I\} \subset \mathcal{Z}(X)$ es fuertemente discreta para cada $n \in \mathbb{N}$ (lema 3.8).

Fijamos $i \in I$ y definimos los conjuntos

$$D_{i1} = C_{i1} \qquad D_{in} = C_{in} \setminus \bigcup_{k=1}^{n-1} C_{ik} \qquad (n \geq 2)$$

Se tiene que $D_{in} \in \mathcal{Z}_\sigma(X)$, ya que $\mathcal{Z}(X) \subset \mathcal{U}_\delta(X)$ (ver proposición A.4). Por tanto, $D_{in} = \cup_k D_{ink}$ donde $\{D_{ink} : k \in \mathbb{N}\}$ es un sucesión creciente de ceros.

Si definimos $Z_{im} = \bigcup_{n=1}^{m} D_{inm}$ se cumplen los siguientes requisitos:

a) La familia $\{Z_{im} : i \in I\}$ es fuertemente discreta para cada $m \in \mathbb{N}$. Basta ver que $\{D_{inm} : i \in I, 1 \leq n \leq m\}$ es fuertemente discreta; esto es así porque, para cada n, $\{D_{inm} : i \in I\}$ es fuertemente discreta y, por el lema A.8, $Z_n = \cup_{i\in I} D_{inm}$ $(1 \leq n \leq m)$ es una sucesión finita de ceros disjuntos (ver Figura 1).

b) Para cada $i \in I$, la sucesión $\{Z_{im} : m \in \mathbb{N}\} \subset \mathcal{Z}(X)$ es creciente con $H_i = \cup_m Z_{im}$.

c) $C_m = \cup\{Z_{im} : i \in I\}$ es una sucesión creciente de ceros tal que $f|_{C_m}$ es continua.

La prueba en el caso X espacio perfecto y $f : X \to E$ una función τ-constante es similar, reemplazando $\mathcal{Z}(X)$ por $\mathcal{F}(X)$. Nótese que por hipótesis $\mathcal{F}(X) \subset \mathcal{G}_\delta(X)$, lo que sustituye la condición $\mathcal{Z}(X) \subset \mathcal{U}_\delta(X)$. □

La siguiente proposición es una generalización de la proposición 2.13.

Proposición 3.25. *Sea X un espacio normal y E un espacio métrico conexo por caminos. Si $f : X \to E$ es una función τ^*-constante, entonces f es de la primera clase de Baire. Más aún, existe una sucesión de funciones continuas $f_n : X \to E$ tal que $f_n(x) = f(x)$ si $n \geq n(x)$.*

Demostración. Por la proposición 3.24, existe una familia de conjuntos $\{Z_{im} : i \in I, m \in \mathbb{N}\} \subset \mathcal{Z}(X)$ tal que $\{Z_{im} : i \in I\}$ es fuertemente discreta para cada $m \in \mathbb{N}$ y $H_i = \cup_m Z_{im}$ es una unión creciente para cada $i \in I$.

Sea $\{W_{im} : i \in I\}$ una familia discreta de coceros de X con $Z_{im} \subset W_{im}$ para cada $i \in I$. Sea $\varphi_{im} \in C(X, [0, 1])$ tal que $\varphi_{im}(Z_{im}) = \{0\}$ y $\varphi_{im}(X \setminus W_{im}) = \{1\}$. Para cada $i \in I$, sea $\gamma_i : [0, 1] \to E$ un camino continuo con $\gamma_i(0) = e_i = f(H_i)$ y $\gamma_i(1) = e \in E$ (punto fijado de antemano).

Se define $f_m \in C(X, E)$ poniendo $f_m(x) = e$ si $x \notin \cup_{i\in I} W_{im}$ y $f_m(x) = \gamma_i(\varphi_{im}(x))$ si $x \in W_{im}$ para algún $i \in I$. Fijado $x \in X$, existe un único $i \in I$ con $x \in H_i$, por lo que existe $n(x) \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq n(x)$, $x \in Z_{in}$; de modo que si $n \geq n(x)$, se tiene $f_n(x) = \gamma_i(0) = e_i = f(x)$. □

Observación 3.26. *Si en la proposición anterior, se hubiese tomado E un subconjunto convexo de un espacio normado, entonces cada camino continuo γ_i se podía suponer un segmento, de modo que se puede conseguir $f_n(X) \subset co\,(f(X))$ para cada $n \in \mathbb{N}$.*

Observación 3.27. *Si X un espacio perfecto y f una función τ-constante, entonces f es de la primera clase de Baire si se cumple alguna de las siguientes condiciones:*

a) El espacio métrico E tiene la propiedad de extensión para el espacio X.

b) X es un espacio métrico y E es un subconjunto convexo de un espacio normado.

c) X es colectivamente normal y E es un subconjunto convexo cerrado de un espacio Banach.

De hecho, en estos casos, existe una sucesión de funciones continuas $f_n : X \to E$ tal que $f_n(x) = f(x)$ si $n \geq n(x)$.

Es claro que b) es consecuencia de a) pues el Th. de Dujundji-Borsuk ([8, Th. 3.1] y [16, Th. 4.1]) establece que cada subconjunto convexo de un espacio lineal localmente convexo tiene la propiedad de extensión para espacios métricos. Por el Th. de Dowker ([15, Th. 2]) cuando un espacio E tiene la propiedad de extensión para espacios metrizables y es topológicamente completo (es decir, E es homeomorfo a un subespacio cerrado de un producto de espacios métricos completos), entonces E tiene la propiedad de extensión para espacios colectivamente normal. En particular, si E es un subconjunto convexo cerrado de un espacio Banach, entonces E tiene la propiedad de extensión para espacios colectivamente normal ([28, remark 1.3]) y obtenemos c).

Para terminar basta recordar que si E es un subconjunto convexo de un espacio normado, $B_1(X,E) = \overline{B_1(X,E)}$ (ver corolario 2.9), por lo que obtenemos la siguiente proposición.

Proposición 3.28. *Si X es normal y E es conexo por caminos, entonces $Z_\sigma(X,E) \cap \Sigma^*(X,E) = F_\sigma(X,E) \cap \Sigma^*(X,E) = \overline{B_1(X,E)}$. Si además E es un subconjunto convexo de un espacio vectorial normado, entonces $Z_\sigma(X,E) \cap \Sigma^*(X,E) = F_\sigma(X,E) \cap \Sigma^*(X,E) = B_1(X,E)$ (cuando X es colectivamente normal, recuérdese que $\Sigma(X,E) = \Sigma^*(X,E)$).*

Demostración. La primera igualdad es obtiene combinando las proposiciones 2.5 , 3.22 y 3.25. Si además E es un subconjunto convexo de un espacio vectorial normado, por el corolario 2.9, $B_1(X,E) = \overline{B_1(X,E)}$, por lo se tiene la segunda igualdad. □

Observación 3.29. *Si X es perfecto y E tiene la propiedad de extensión respecto a X, por la proposición 3.22 y la observación 3.27, $F_\sigma(X,E) \cap \Sigma(X,E) = \overline{B_1(X,E)}$. Más aún, si E es un extensor absoluto para espacios métricos, entonces $F_\sigma(X,E) \cap \Sigma(X,E) = B_1(X,E)$.*

3.2.2. La σ-fragmentabilidad y la propiedad del punto de continuidad

A continuación vamos a estudiar la relación que existe entre las funciones σ-discretas de la primera clase de Borel y las funciones que tienen la propiedad del punto de continuidad. Para esto es conveniente dar la definición de función σ-fragmentable por conjuntos cerrados, noción que fue introducida en [32] .

Definición 3.30. *Sea X un espacio topológico y (E, ρ) un espacio métrico. Se dice que $f : X \to E$ es σ-fragmentable por conjuntos cerrados (resp., ceros) si para cada $\varepsilon > 0$ existe una sucesión de conjuntos $\{X_n : n \in \mathbb{N}\}$ cerrados (resp., ceros) que recubre X y cumple:*

(F_ε) 'Fijado $n \in \mathbb{N}$ y un subconjunto $C \subset X_n$, es posible encontrar un conjunto abierto no vacío $V \subset X$ con $V \cap C \neq \emptyset$ y $diam_\rho\ f(V \cap C) < \varepsilon$.'

Lema 3.31. *Sea X un espacio Baire y (E, ρ) un espacio métrico. Si $f : X \to E$ es σ-fragmentable por cerrados, el conjunto de puntos de continuidad de f, $Cont(f)$, es un conjunto $\mathcal{G}_\delta$-denso en X.*

<u>*Demostración*</u>. Para cada $\varepsilon > 0$, sea $O_\varepsilon(f)$ la unión de todas los subconjuntos abiertos V de X tal que $diam_\rho\ f(V) < \varepsilon$. Puesto que $\cap\{O_{1/n} : n \in \mathbb{N}\}$ es el conjunto de puntos de continuidad de f, basta probar que $O_\varepsilon(f)$ es un conjunto denso en X para cada $\varepsilon > 0$.

Supongamos que existe $\varepsilon > 0$ y un subconjunto abierto no vacío W de X tal que $W \cap O_\varepsilon(f) = \emptyset$. Como f es σ-fragmentable por cerrados, tenemos que X es la unión de una sucesión X_n de conjuntos cerrados de X tal que para cada X_n la propiedad (F_ε) se da. Para cada subconjunto abierto no vacío U de W, se tiene que $diam_\rho\ f(U) \geq \varepsilon$, y entonces $H_n = W \cap X_n$ es una sucesión de conjuntos cerrados relativos de W con interior vacío. Como la unión de esta sucesión es W y W es un espacio Baire, se llega a una contradicción. $\square$

La noción de función σ-fragmentable por cerrados (resp., ceros) es más débil que la de función fragmentable definida en el capítulo 2 como se pone de manifiesto en la siguiente proposición.

Proposición 3.32. *Sea X un espacio topológico, (E, ρ) un espacio métrico y $f : X \to E$ una aplicación. Consideramos las siguientes propiedades de f:*

a) f tiene la propiedad del punto de continuidad.

b) f es fragmentable.

c) f es σ-fragmentable por cerrados.

Entonces, a) $\Rightarrow$ b) $\Rightarrow$ c). Además, si X es hereditariamente Baire, todas las propiedades son equivalentes.

Demostración. a) $\Rightarrow$ b) está demostrado en la proposición 2.18 y, para demostrar b) $\Rightarrow$ c), basta tomar, para cada $\varepsilon > 0$, $X_n = X \ \forall n \in \mathbb{N}$.

Si X es hereditariamente Baire, b) $\Rightarrow$ a) está demostrado en la proposición 2.18; para demostrar que c) $\Rightarrow$ a), supongamos que f es σ-fragmentable por cerrados, por el lema 3.31 el conjunto de puntos de continuidad de f es un conjunto $\mathcal{G}_\delta$-denso, luego f tiene la propiedad del punto de continuidad, si X es hereditariamente Baire. $\square$

Proposición 3.33. *Sea X espacio topológico y (E, ρ) espacio métrico. Si $f : X \to E$ es una función σ-discreta en $F_\sigma(X, E)$, entonces f es σ-fragmentable por cerrados.*

Demostración. Sea f una función σ-discreta en $F_\sigma(X, E)$. Dado $\varepsilon > 0$, consideramos el cubrimiento abierto de E consistente en todas las bolas de radio $\varepsilon/2$. Por el Th. de Stone (ver proposición A.11), podemos obtener un refinamiento abierto σ-discreto $\mathcal{V}$ de E donde $diam_\rho\ V \leq \varepsilon$ para cada $V \in \mathcal{V}$. Se sigue de la proposición 3.10, que para cada $V \in \mathcal{V},\ f^{-1}(V) = \cup\{H(V, n) : n \in \mathbb{N}\}$ donde $\{H(V, n) : V \in \mathcal{V},\ n \in \mathbb{N}\}$ es una familia σ-discreta de cerrados. Entonces $X_n := \cup\{H(V, n) : V \in \mathcal{V}\}$ es una sucesión de cerrados tal que (F_ε) se da, ya que cada punto de X_n tiene un entorno que toca solamente a un conjunto $H(V, n)$ y $diam_\rho\ f(H(V, n)) < \varepsilon$. $\square$

Corolario 3.34. *Si X es hereditariamente Baire y $f : X \to E$ es σ-discreta de la primera clase de Borel, entonces f tiene la propiedad del punto de continuidad.*

Demostración. Es consecuencia de la proposición 3.33 y 3.32. $\square$

Para demostrar el recíproco, vamos dar una caracterización de la σ-fragmentabilidad en términos de aproximaciones uniformes por funciones τ-constantes (ver Teorema 5 de [32]).

Teorema 3.35. *Sea X perfectamente paracompacto, E espacio métrico y una función $f : X \to E$. Son equivalentes:*

a) f es σ-fragmentable por cerrados.

b) Para cada $\varepsilon > 0$, existe una función $f_\varepsilon : X \to E$ τ-constante tal que, para cada $x \in X$, $\rho(f_\varepsilon(x), f(x)) < \varepsilon$.

c) Para cada $\varepsilon > 0$ existe una sucesión de cerrados $\{X_n : n \in \mathbb{N}\}$ que cubre X y que tiene la siguiente propiedad: Dado $a \in X_n$ existe un entorno abierto V_a de a tal que $diam_\rho\ f(V_a \cap X_n) < \varepsilon$.

d) f es σ-discreta de la primera clase de Borel.

Si además E es un subconjunto convexo de un espacio vectorial normado, también es equivalente:

e) f es de la primera clase de Baire.

Demostración. a) $\Rightarrow$ b) Dado $\varepsilon > 0$, sea $\{X_n : n \in \mathbb{N}\}$ un cubrimiento numerable de X tal que cada X_n es cerrado con la propiedad (F_ε). Definimos los siguientes conjuntos

$$Y_1 = X_1 \qquad Y_n = X_n \setminus \bigcup_{i=1}^{n-1} X_i \qquad (n \geq 2)$$

Puesto que el espacio X es perfecto, $Y_n \in \mathcal{F}_\sigma(X)$ para cada $n \in \mathbb{N}$, además la familia $\{Y_n : n \in \mathbb{N}\}$ es σ-d.d. con la propiedad (F_ε) ya que cada Y_n está en X_n y la observación 3.7; por lo que tenemos que $\{Y_n : n \in \mathbb{N}\}$ es una buena partición de X con la propiedad (F_ε).

Probaremos que, para cada $n \in \mathbb{N}$, existe una función τ-constante $f_n : Y_n \to E$ tal que $\rho(f_n(x), f(x)) \leq \varepsilon$ para cada $x \in Y_n$. Por la proposición 3.12, la aplicación $f_\varepsilon : X \to E$ definida por $f_\varepsilon|_{Y_n} = f_n$ $(n \in \mathbb{N})$ es τ-constante satisfaciendo b).

Cada $Y_n = Y$ con la topología inducida es paracompacto, ya que es un conjunto $\mathcal{F}_\sigma$ de X (ver [18, pág. 383]).

Como Y tiene la propiedad (F_ε), existe un subconjunto abierto no vacío $G_0 \subset Y$ con $diam_\rho\ f(G_0) \leq \varepsilon$. Si el conjunto cerrado $Y \setminus G_0$ es no vacío, por la propiedad (F_ε), existe otro abierto no vacío $G_1 \subset Y$ tal que $M_1 = G_1 \cap (Y \setminus G_0)$ es no vacío y $diam_\rho f(M_1) \leq \varepsilon$.

Sea γ un ordinal, tal que para cada ordinal $\mu < \gamma$, existe un abierto no vacío $G_\mu \subset Y$ tal que $M_\mu = G_\mu \cap (Y \setminus \cup\{G_\xi : \xi < \mu\})$ es no vacío y $diam_\rho\ f(M_\mu) \leq \varepsilon$. Esta construcción continúa hasta algún ordinal Γ, se tiene $Y = \cup\{G_\gamma : \gamma < \Gamma\}$.

Por la observación 3.15 y el lema 3.14, la familia $\{M_\gamma : \gamma < \Gamma\}$ es una buena partición de Y, por lo que podemos definir una función $f_n : Y \to E$ que es constante sobre cada M_γ y tal que $\rho(f(x), f_n(x)) \leq \varepsilon$ para cada $x \in Y$.
b) $\Rightarrow$ a) Dado $\varepsilon > 0$, sea $f_\varepsilon : X \to E$ una función τ-constante tal que

$$\rho(f_\varepsilon(x), f(x)) < \frac{\varepsilon}{3} \quad \text{para cada} \quad x \in X$$

Por la proposición 3.24, existe un cubrimiento numerable $\{X_n : n \in \mathbb{N}\}$ de X tal que, para cada $n \in \mathbb{N}$, el conjunto X_n es cerrado y $f_\varepsilon|_{X_n}$ es continua. Si $\emptyset \neq C \subset X_n$, entonces existe un subconjunto abierto V de X tal que $V \cap C \neq \emptyset$ y $diam_\rho\ f(V \cap C) < \varepsilon$.
b) $\Rightarrow$ c) Para cada $a \in X_n$ existe un entorno abierto de a, $V_a \subset X$ tal que $\rho(f_\varepsilon(x), f_\varepsilon(a)) < \varepsilon/6$ para todo $x \in X_n \cap V_a$ luego, en virtud de la desigualdad triangular

$$\rho(f_\varepsilon(x), f_\varepsilon(y)) < \varepsilon/3 \text{ para todo par } x, y \in X_n \cap V_a$$

Se sigue que para cada par $x, y \in X_n \cap V_a$ se cumple

$$\rho(f(x), f(y)) \leq \rho(f(x), f_\varepsilon(x)) + \rho(f_\varepsilon(x), f_\varepsilon(y)) + \rho(f_\varepsilon(y), f(y)) < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$$

es decir, $diam_\rho\ f(X_n \cap V_a) \leq \varepsilon$.
c) $\Rightarrow$ a) es evidente.
b) $\Rightarrow$ d) es la proposición 3.21.
d) $\Rightarrow$ a) es la proposición 3.33. $\square$

A partir de los resultados anteriores es fácil demostrar cuando la propiedad del punto de continuidad implica ser σ-discreta de la primera clase de Borel.

Proposición 3.36. *Sea X perfectamente paracompacto, (E, ρ) espacio métrico. Si $f : X \to E$ tiene la propiedad del punto de continuidad, entonces f es σ-discreta de la primera clase de Borel*

$$PC(X, E) \subset F_\sigma(X, E) \cap \Sigma(X, E)$$

<u>*Demostración*</u>. Por la proposición 3.32, si $f \in PC(X, E)$, entonces f σ-fragmentable por cerrados y, por el teorema 3.35, se tiene que $f \in F_\sigma(X, E) \cap \Sigma(X, E)$. $\square$

Una vez establecidos los resultados anteriores, es posible hacer una demostración del teorema inicial de este capítulo.

<u>*Dem. del Teorema 3.16*</u>.
a) $\Rightarrow$ b) es siempre cierta (ver proposición 3.18)
b) $\Rightarrow$ a) como todo espacio paracompacto es colectivamente normal (ver proposición A.14) y E es un espacio normado, basta aplicar la proposición 3.28.
b) $\Rightarrow$ c) es el corolario 3.34.
c) $\Rightarrow$ b) es la proposición 3.36. $\square$

3.3. ¿Cuándo una función de la primera clase de Borel es σ-discreta?

Una cuestión interesante es ver cuando podemos eliminar la condición de función σ-discreta del teorema 3.16 de manera que siga siendo cierto. Bajo hipótesis apropiadas sobre X, cada función de la primera clase de Borel es σ-discreta, es decir, $F_\sigma(X,E) = F_\sigma(X,E)\cap\Sigma(X,E)$ y, se tiene que todos los resultados son ciertos con la referencia a funciones σ-discretas eliminada.

Los siguientes resultados permiten probar que si X es un espacio métrico completo

$$F_\sigma(X,E) = F_\sigma(X,E)\cap\Sigma(X,E)$$

Definición 3.37. *Un espacio topológico X se dice que tiene la propiedad de Kaplansky (ó countable tightness) si para cada subconjunto $M\subset X$ y cada $x\in\overline{M}$, existe un subconjunto numerable $C\subset M$ tal que $x\in\overline{C}$.*

Observación 3.38. *Un ejemplo de espacio topológico con la propiedad de Kaplansky es un espacio métrico.*

La siguiente proposición es una mejora del corolario 2.9 de [28] y está inspirado por la proposición 3.11 de [17] y el corolario 2.9 de [28]. Este resultado muestra que la fragmentabilidad está determinada por la restricción a subespacios separables.

Proposición 3.39. *Si X tiene la propiedad de Kaplansky y para cada conjunto cerrado separable $S\subset X$ y cada $\varepsilon>0$ existe un abierto W en X con $W\cap S\neq\emptyset$ y $diam_\rho\ f(W\cap S)<\varepsilon$, entonces f es fragmentable.*

En particular, si para cada cerrado separable $S\subset X$, se cumple que $f|_S$ tiene un punto de continuidad, entonces f es fragmentable.

<u>*Demostración*</u>. Si f no es fragmentable, existe un subconjunto cerrado Y de X y $\varepsilon>0$ tal que si V es un subconjunto abierto con $V\cap Y\neq\emptyset$, entonces $diam_\rho\ f(V\cap Y)>\varepsilon$. Dado $x\in Y$, para cada conjunto abierto V tal que $x\in V\cap Y$, tomamos $a_V\in V\cap Y$ tal que $\rho(f(x),f(a_V))>\varepsilon/3$ y sea M_x el conjunto formado por estos puntos

$$M_x := \{a_V : x\in V\cap Y,\ V \text{ abierto }\}$$

Como $x\in\overline{M_x}$, por la propiedad de Kaplansky, existe un subconjunto numerable $C_x\subset M_x$ tal que $x\in\overline{C_x}$ y, es claro que, $\rho(f(x),f(y))>\varepsilon/3$ para cada $y\in C_x$. Fijado un punto $a\in Y$, sea D_n la sucesión de conjuntos numerables definidos por

$$D_1 := \{a\} \qquad D_{n+1} := \cup\{C_x : x\in D_n\}$$

Entonces, $S = \overline{\cup D_n}$ es un conjunto cerrado separable de Y. Sea W un conjunto abierto en X tal que $W \cap S \neq \emptyset$, podemos escoger un punto $z \in W \cap S$, de aquí $z \in D_n$ para algún $n \in \mathbb{N}$. Como $z \in \overline{C_z}$, existe un punto $y \in C_z \cap W$. Este punto cumple $\rho(f(y), f(z)) > \varepsilon/3$, luego $diam_\rho\ f(W \cap S) > \varepsilon/3$ y se llega a una contradicción. □

Corolario 3.40. *Si X es hereditariamente Baire con la propiedad de Kaplansky y para cada subespacio cerrado separable $S \subset X$, $f|_S$ tiene un punto de continuidad, entonces f tiene la propiedad del punto de continuidad.*

Demostración. Es consecuencia de la proposición 3.39 y 3.32. □

Proposición 3.41. *Sea X es un espacio de Baire separable y (E, ρ) un espacio métrico. Si $f \in F_\sigma(X, E)$, entonces el conjunto de sus puntos de continuidad, $Cont(f)$, es denso en X.*

Demostración. Sea D un subconjunto denso numerable de X. Para cada conjunto abierto U en E, sea

$$f^{-1}(U) = \bigcup_m F_{Um} \text{ donde } F_{Um} \text{ es cerrado en } X \text{ para cada } m \geq 1$$

Entonces, $M_U = \bigcup_m [F_{Um} \backslash int(F_{Um})]$ es de primera categoría en X y $f^{-1}(U) \setminus M_U = \cup_m int(F_{Um})$ es abierto en X.

Sea Λ_n un cubrimiento localmente finito de E formado por conjuntos abiertos con diámetro a lo más $1/n$

$$M_n = \cup\{M_U : U \in \Lambda_n \text{ y } D \cap f^{-1}(U) \neq \emptyset\}$$

$$W_n = \cup\{U : U \in \Lambda_n \text{ y } D \cap f^{-1}(U) = \emptyset\}$$

Como D es numerable y Λ_n es localmente finito, se sigue que M_n es unión numerable de conjuntos de primera categoría, luego M_n es de primera categoría. Más aún, se tiene que $f^{-1}(W_n) = M_{W_n}$ pues en otro caso $f^{-1}(W_n) \setminus M_{W_n}$ sería un conjunto abierto no vacío en X que no corta al conjunto denso D.

Como X es un espacio Baire, $D_n := X \setminus (M_n \cup M_{W_n})$ es denso en X y está contenido en el abierto

$$V_n = \cup\{f^{-1}(U) \setminus M_U : U \in \Lambda_n \text{ y } D \cap f^{-1}(U) \neq \emptyset\}$$

En efecto, si $a \in D_n$, entonces $a \notin M_{W_n} \equiv f^{-1}(W_n)$ luego $f(a) \notin W_n$. Sea $U \in \Lambda_n$ con $f(a) \in U$, como $f(a) \notin W_n$ usando la definición de W_n, se sigue que $D \cap f^{-1}(U) \neq \emptyset$. Por otra parte, como $a \notin M_n$, debe ser $a \notin M_U$, luego $a \in f^{-1}(U) \setminus M_U \subset V_n$.

Se obtiene así que cada V_n es un conjunto denso abierto en X. Como X es un espacio Baire, $\cap_n V_n$ es un conjunto $\mathcal{G}_\delta$-denso en X y claramente cada punto de este conjunto es un punto de continuidad de f.

$\square$

Proposición 3.42. *Sea X un espacio topológico hereditariamente Baire con la propiedad de Kaplansky y (E, ρ) un espacio métrico. Si $f \in F_\sigma(X, E)$, entonces f tiene la propiedad del punto de continuidad, es decir:*

$$F_\sigma(X, E) \subset PC(X, E)$$

Demostración. Sea $f : X \to E$ una función de la primera clase de Borel. Por el corolario 3.40, basta demostrar que para cada subespacio cerrado separable $S \subset X$, $f|_S$ tiene un punto de continuidad.

Como X es hereditariamente Baire, S es un espacio de Baire, luego por la proposición 3.41, $f|_S$ tiene al menos un punto de continuidad. $\square$

A partir de los resultados anteriores, estamos en condiciones de demostrar el siguiente teorema

Teorema 3.43. *Sea X un espacio topológico y (E, ρ) un espacio métrico. Si X es perfectamente paracompacto hereditariamente Baire con la propiedad de Kaplansky, cada función $f : X \to E$ de la primera clase de Borel es σ-discreta*

$$F_\sigma(X, E) = F_\sigma(X, E) \cap \Sigma(X, E)$$

Demostración. Sea $f : X \to E$ de la primera clase de Borel, como X es hereditariamente Baire y tiene la propiedad de Kaplansky, por la proposición 3.42, f tiene la propiedad del punto de continuidad.

Como X es perfectamente paracompacto, por la proposición 3.36, f es σ-discreta de la primera clase de Borel. $\square$

Corolario 3.44. *Si X es un espacio métrico completo, cada función $f : X \to E$ de la primera clase de Borel es σ-discreta.*

Demostración. Como todo espacio métrico completo es perfectamente paracompacto hereditariamente Baire y tiene la propiedad de Kaplansky, basta aplicar el teorema anterior. $\square$

Proposición 3.45. *Sea X un espacio métrico y $f : X \to E$ una función de la primera clase de Borel. Consideramos las siguientes propiedades de f:*

a) f es σ-discreta.

b) $f(S)$ es separable para cada subconjunto S separable de X.

Entonces a) $\Rightarrow$ b) y, si X es hereditariamente Baire, a) $\Leftrightarrow$ b).

Demostración. a) $\Rightarrow$ b) Por la proposición 3.22 es suficiente considerar el caso de una función f τ-constante. Ahora bien, por la proposición 3.24, f es continua a trozos, por lo que se tiene b).

b) $\Rightarrow$ a) Si S es un subconjunto separable de X, por la proposición 2.21, $f|_S$ es σ-fragmentable por cerrados. Por la proposición 3.32, $f|_S$ es fragmentable y la proposición 3.39, nos dice que f es fragmentable, por tanto es σ-discreta por el teorema 3.35. $\square$

Una característica de las funciones de la primera clase de Borel, que relaciona el espacio $F_\sigma(X, E)$ con el espacio $F_\sigma(X, \mathbb{R})$, viene dada por la siguiente proposición.

Proposición 3.46. *Sea X un espacio topológico, (E, ρ) un espacio métrico y $f : X \to E$ una aplicación. Son equivalentes:*

a) $f \in F_\sigma(X, E)$.

b) $\varphi \circ f \in F_\sigma(X, \mathbb{R})$ para cada función continua $\varphi : E \to \mathbb{R}$.

Demostración. a) $\Rightarrow$ b) Sea $\varphi : E \to \mathbb{R}$ una función continua y G un conjunto abierto en $\mathbb{R}$, entonces $\varphi^{-1}(G)$ es abierto en E, de donde $(\varphi \circ f)^{-1}(G) = f^{-1}(\varphi^{-1}(G)) \in \mathcal{F}_\sigma(X)$.

b) $\Rightarrow$ a) Sea F un conjunto cerrado en E y tomamos la función continua $\varphi : E \to \mathbb{R}$ definida por $\varphi(x) = \rho(x, F)$, entonces

$$f^{-1}(F) = f^{-1}(\varphi^{-1}(0)) = (\varphi \circ f)^{-1}(0) \in \mathcal{G}_\delta(X)$$

$\square$

Observación 3.47. *La proposición anterior permite, bajo determinadas hipótesis, que propiedades que son ciertas para el espacio $F_\sigma(X, \mathbb{R})$ lo sean también para el espacio $F_\sigma(X, E)$.*

Destacar que si sustituimos primera clase de Borel por primera clase de Baire, la implicación b) $\Rightarrow$ a) de la proposición no es cierta pues esto implicaría, por las proposiciones 2.29 y 3.46, que $B_1(X, E) = F_\sigma(X, E)$ para X un espacio topológico arbitrario y (E, ρ) un espacio métrico; sin embargo, hemos visto en el ejemplo 2.27 que esta igualdad no es cierta en general. El problema sobre cuando es cierto este resultado para funciones de la primera clase de Baire está abierto, aunque es claro que bajo las hipótesis del teorema 3.16, es cierto. Además, la versión de este resultado para las funciones de la primera clase de Baire requiere que no tengamos problemas con la σ-discretitud de las funciones.

3.4. Comentarios y Observaciones

1. La noción de familia fuertemente discreta que se utiliza en este trabajo fue introducida por L. Vesely en [60], sin embargo, se puede dar una definición alternativa de familia fuertemente discreta más general que la dada por Vesely: Una familia $\mathcal{H}$ de subconjuntos de un espacio topológico X diremos que es *fuertemente discreta* si existen familias $\{Z_H : H \in \mathcal{H}\} \subseteq \mathcal{Z}(X)$, $\{V_H : H \in \mathcal{H}\} \subseteq \mathcal{U}(X)$ tal que $H \subseteq Z_H \subseteq V_H$ para cada $H \in \mathcal{H}$ y $\{V_H : H \in \mathcal{H}\}$ es discreta.

Esta noción de familia fuertemente discreta implica la utilizada por Vesely y ambas son equivalentes cuando el espacio X es normal. En efecto, sea X normal y $\mathcal{H}$ una familia fuertemente discreta en el sentido Vesely, luego existe una familia discreta de conjuntos abiertos $\{G_H : H \in \mathcal{H}\}$ tal que $\overline{H} \subset G_H$ para cada $H \in \mathcal{H}$. Por el lema de Uryshon, para cada $H \in \mathcal{H}$ existe una función $f_H \in C(X, [0,1])$ tal que

$$f_H(\overline{H}) = \{1\} \qquad f_H(X \setminus G_H) = \{0\}$$

de donde $V_H = \{x \in X : f_H(x) > 0\} \in \mathcal{U}(X)$ es discreta y $\overline{H} \subseteq V_H \subseteq G_H$.

Por otra parte, existe una función $g_H \in C(X, [0,1])$ tal que

$$g_H(\overline{H}) = \{0\} \qquad g_H(X \setminus V_H) = \{1\}$$

de donde $Z_H = \{x \in X : g_H(x) = 0\} \in \mathcal{Z}(X)$ y se cumple

$$H \subseteq Z_H \subseteq V_H$$

Por tanto, cabe preguntarse que alcance podemos dar a los resultados obtenidos en este trabajo cuando utilizamos esta noción de familia fuertemente discreta y prescindimos de la hipótesis de que el espacio de partida X sea normal.

La respuesta a esta pregunta viene dada por el siguiente resultado que se obtiene adaptando las pruebas realizadas en este trabajo con la noción de familia fuertemente discreta de Vesely:

"Sea X un espacio topológico y E un espacio métrico. Consideramos las siguientes propiedades para una función $f : X \to E$:

a) f es de la primera clase de Baire.

b) f es el límite uniforme de una sucesión de funciones de la primera clase de Baire.

c) f es fuertemente σ-discreta en $Z_\sigma(X, E)$.

d) f es σ-fragmentable por ceros.

e) f tiene la propiedad del punto de continuidad.

Entonces, se cumple que

- Si E es conexo por caminos, b) $\Leftrightarrow$ c).
- Si E es un subconjunto convexo de un espacio normado, a) $\Leftrightarrow$ b) $\Leftrightarrow$ c).
- Si X es hereditariamente Baire, c) $\Rightarrow$ d) $\Leftrightarrow$ e)."

2. Como se ha comentado al inicio de este capítulo, el concepto de función σ-discreta fue introducido por Hansell en [25]. Para caracterizar las funciones con la propiedad del punto de continuidad introduce un concepto substancialmente más débil que el de familia discreta: Una familia $\mathcal{H}$ de subconjuntos disjuntos de un espacio topológico X se dice *scattered* si para cada subconjunto no vacío $A \subset \cup\mathcal{H}$, algún conjunto de la forma $A \cap H$, con $H \in \mathcal{H}$, es no vacío y abierto relativo en A.

Utilizando esta noción, prueba el siguiente resultado que relaciona las funciones con la propiedad del punto continuidad y las funciones σ-discretas de la primera clase de Borel (ver [28, Th. 2.7 (b)]):

"Sea X un espacio Hausdorff, E un espacio métrico y $f \in PC(X, E)$. Si cada colección de conjuntos abiertos en X tiene un refinamiento σ-discreto de conjuntos cerrados, entonces f está en $F_\sigma(X, E)$ y tiene una base σ-discreta formada por conjuntos cerrados en X."

Además, Hansell encuentra condiciones sobre X para que una función $(F \cap G)_\sigma$-medible definida sobre X y con valores en un espacio métrico E, tenga la propiedad del punto de continuidad (ver [28, Th. 2.8]):

"Sea X hereditariamente Baire, E un espacio métrico y $f : X \to E$ una función $(F \cap G)_\sigma$-medible. Si E es separable o X tiene la propiedad de Kaplansky, entonces f tiene la propiedad del punto de continuidad."

Destacar que las pruebas de las proposiciones 3.39 y 3.41 de este trabajo son adaptaciones de este resultado de Hansell para el caso F_σ-medible y, aunque Hansell no utiliza la noción de función σ-fragmentable aparece de forma implícita en la prueba.

3. Como se comenta en la introducción, este trabajo se centra en dar el mayor alcance posible de los resultados desde el punto de vista del dominio X de las funciones, analizando con detalle el papel que desempeñan condiciones topológicas de X para lograr relaciones entre las distintas propiedades que intervienen en el teorema clásico sobre funciones de la primera clase.

Fosgerau en su tesis [20] se centra en el problema de que propiedades debe tener el espacio de llegada E para que las funciones de la primera clase de Baire coincidan con la funciones de la primera clase de Borel y, muestra que en general este resultado no se cumple si E es un espacio métrico arbitrario: "La función $f : [0,1] \to \{0,1\}$ definida por $f(1) = 1$ y $f(t) = 0$ si $t < 1$ es de la primera clase de Borel pero no es de la primera clase de Baire".

Fosgerau encuentra condiciones suficientes sobre E que permiten establecer la equivalencia entre $B_1(X,E)$ y $F_\sigma(X,E) \cap \Sigma(X,E)$ (ver [20, Th. 1]): "Sea X un espacio métrico y E un espacio métrico arcoconexo y localmente arcoconexo, entonces $B_1(X,E) = F_\sigma(X,E) \cap \Sigma(X,E)$". La importancia de su trabajo reside en probar que la condición de ser arcoconexo y localmente arcoconexo no es solamente suficiente sino también necesaria y prueba el siguiente resultado (ver [20, Th.2]):

Teorema. *Sea E un espacio métrico completo. Son equivalentes:*

a) E es conexo y localmente conexo.

b) $B_1([0,1],E) = F_\sigma([0,1],E)$.

c) $B_1(X,E) = F_\sigma(X,E) \cap \Sigma(X,E)$ para todo espacio métrico X.

Observación. *Un espacio métrico completo E es localmente arcoconexo (resp., arcoconexo) sí y sólo sí E es localmente conexo (resp., conexo) (ver [39, pág. 254]).*

Para terminar, muestra con ejemplos que los resultados anteriores no son ciertos cuando E es un espacio métrico arbitrario: "Consideramos el subconjunto de $\mathbb{R}^2$

$$E = \{(x, \sin\frac{\pi}{x}) : 0 < x \leq 1\} \cup (\{0\} \times [-1,2]) \cup ([0,1] \times \{2\}) \cup (\{1\} \times [0,2])$$

El conjunto E con la topología inducida es métrico completo, separable, compacto, arcoconexo pero no es localmente conexo, luego $B_1([0,1],E) \neq F_\sigma([0,1],E)$".

4. Una unificación de los resultados de Hansell [28] y de Fosgerau [20], fue realizada por L. Vesely en [60] donde muestra que la clase de las funciones de la primera clase de Baire coincide con la clase de las funciones σ-discretas de la primera clase de Borel cuando X es colectivamente normal y el espacio métrico E es arcoconexo y localmente arcoconexo.

Para probar este resultado, Vesely introduce la propiedad (ε) para un par de espacios (X,E): Un par (X,E) de espacios satisface la *propiedad* (ε) si

X es normal, E es espacio métrico y para cada conjunto cero $F \subset X$ existe un conjunto no vacío $\Phi(F) \subset C(X, E)$ tal que se satisfacen las siguientes propiedades:

I) $\Phi(F_1) \subset \Phi(F_2)$ cuando $F_2 \subset F_1$;

II) Existe $f_0 \in \Phi(X)$ tal que para cada par F_1, F_2 de conjuntos ceros disjuntos en X y cada abierto $V \subset E$, existe $f \in \Phi(F_1)$ con $f(F_1) \subset V$ y $f|_{F_2} = f_0|_{F_2}$;

III) Para cada $y \in E$ y $\varepsilon > 0$, existe un entorno U de y satisfaciendo: si F_1 F_2 son ceros disjuntos en X, $f \in \Phi(F_1)$, $f(F_1) \subset U$ y V es un abierto de U, entonces existe $g \in \Phi(F_1)$ con $g(F_1) \subset V$, $g|_{F_2} = f|_{F_2}$ y $\rho(f(x), g(x)) < \varepsilon$ para todo $x \in X$.

y prueba que si un par de espacios (X, E) tiene la propiedad (ε), entonces $B_1(X, E) = F_\sigma(X, E) \cap \Sigma^*(X, E)$ (ver [60, Th. 3.2]).

Por otra parte, es fácil ver que un espacio métrico (E, ρ) es localmente arcoconexo sí y sólo sí para cada $y \in E$ y $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que y, z pueden ser unidos con un arco de diámetro menor que ε cuando $\rho(y, z) < \delta$. Esta propiedad motiva a Vesely a introducir la siguiente noción: Un espacio métrico (E, ρ) se dice *uniformemente localmente arcoconexo* si para cada $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si y_1, $y_2 \in E$, $\rho(y_1, y_2) < \delta$, entonces y_1, y_2 pueden ser unidos con un arco de diámetro menor que ε.

Para terminar, prueba el siguiente resultado que es inmediato ya que bajo las hipótesis planteadas, se cumple la propiedad (ε) (ver [60, Th. 3.7]).

Recuérdese que dado un espacio topológico X y un espacio métrico E, se dice que

(a) E satisface la propiedad de Z-extensión para X si cada función continua de un cero (en X) en E tiene una extensión de $C(X, E)$.

(b) E satisface la propiedad local de Z-extensión para X si para cada $\varepsilon > 0$ e $y \in E$, existe un entorno U de y tal que cada función continua de un conjunto cero (en X) en U admite una extensión $f \in C(X, E)$ con *diam* $f(X) < \varepsilon$.

(c) E satisface la propiedad uniforme local de Z-extensión para X si para cada $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que cada función continua f de un conjunto cero $F \subset X$ en E con *diam* $f(F) < \delta$ admite una extensión $\overline{f} \in C(X, E)$ con *diam* $\overline{f}(X) < \varepsilon$.

Teorema. *Sea X un espacio normal y E un espacio métrico. Entonces la igualdad $B_1(X, E) = F_\sigma(X, E) \cap \Sigma^*(X, E)$ se da cuando se cumple al menos una de las siguientes condiciones:*

a) *E es arcoconexo y localmente arcoconexo.*

b) *E satisface la propiedad de Z-extensión para X y la propiedad local de Z-extensión para X.*

c) *E contiene un subespacio denso E_1 tal que E_1 es arcoconexo y uniformemente localmente arcoconexo (en la métrica generada por la métrica de E).*

d) *E contiene un subespacio denso E_1 tal que E_1 satisface la propiedad de Z-extensión para X y la propiedad uniforme local de Z-extensión para X.*

e) *E contiene un subespacio denso E_1 tal que todas las bolas abiertas en E_1 son arcoconexas.*

f) *E contiene un subespacio denso E_1 tal que todas las bolas abiertas en E_1 tienen la propiedad de Z-extensión para X.*

5. El siguiente resultado es una generalización de un teorema de Stegall (ver [56]) en el que se utilizan técnicas similares a las usadas con particiones de la unidad.

Teorema. *Sea X un espacio perfectamente paracompacto y E un subconjunto convexo de un espacio normado. Si $f : X \to E$ es fragmentable entonces $f \in B_1(X, E)$.*

<u>*Demostración*</u>. Fijamos $\varepsilon > 0$ y sea $\mathcal{U}_\varepsilon$ la familia de los abiertos no vacíos $V \subset X$ tales que existe una función $g_V \in B_1(X, E)$ verificando $\|f(x) - g_V(x)\| \leq \varepsilon$ para todo $x \in V$. Como f es fragmentable, existe un abierto no vacío V con $diam_\rho\, f(V) < \varepsilon$. Fijado $x_0 \in V$ se define $g_V(x) = \chi_V(x) f(x_0)$ y es claro que $g_V \in B_1(X, E)$ con $\|f(x) - g_V(x)\| \leq \varepsilon$ para todo $x \in V$. Entonces $V \in \mathcal{U}_\varepsilon$ y $\mathcal{U}_\varepsilon \neq \emptyset$.

a) Veamos que $W = \cup \mathcal{U}_\varepsilon$ pertenece a $\mathcal{U}_\varepsilon$. Puesto que la paracompacidad se hereda por conjuntos $\mathcal{F}_\sigma$ (ver [18, pág. 183]) y W es un $\mathcal{F}_\sigma(X)$, se tiene que W es paracompacto. Sea $\mathcal{V}_\varepsilon = \{V_\alpha : 1 \leq \alpha \leq \Gamma\}$ un refinamiento localmente finito de $\mathcal{U}_\varepsilon$; puesto que cada V_α está contenido en un $U_\alpha \in \mathcal{U}_\varepsilon$, se sigue que existe $g_\alpha \in B_1(X, E)$ con $\|f(x) - g_\alpha(x)\| \leq \varepsilon$ para todo $x \in V_\alpha$.

Consideramos la función $g : X \to E$ definida por

$$g = g_1 \chi_{V_1} + \cdots + g_\alpha \chi_{(V_\alpha \setminus \bigcup\limits_{\beta<\alpha} V_\beta)} + \cdots$$

como la suma es localmente finita, en un entorno de cada $x \in X$ sólo son no nulos una cantidad finita de sumandos. Por otra parte, si $t \in W$ es $g(t) =$

$g_\alpha(t)$ para algún α, luego $\|f(t) - g(t)\| \leq \varepsilon$, luego si se prueba que $g \in B_1(X,E)$, se concluirá que $W \in \mathcal{U}_\varepsilon$.

Es claro que, para cada α, la función $g_\alpha \chi_{(V_\alpha \setminus \bigcup_{\beta<\alpha} V_\beta)}$ es límite puntual de una sucesión g_α^n en $C(X,E)$, y tal que cada g_α^n se anula fuera de V_α. Este hecho, junto con la propiedad de ser $\{V_\alpha : 1 \leq \alpha \leq \Gamma\}$ localmente finita permite deducir que la función $g^n = g_1^n + g_2^n + \cdots + g_\alpha^n + \cdots$ es continua (localmente se expresa como una suma finita de funciones continuas). Evidentemente g^n converge puntualmente a g, por lo que $g \in B_1(X,E)$.

b) Veamos ahora que $W = X$. Si suponemos que $W \neq X$, considerando el conjunto cerrado $A = X \setminus W$ y la fragmentabilidad f se obtiene un abierto no vacío $V \subset X$ con $A \cap V \neq \emptyset$ y $\|f(s) - f(t)\| \leq \varepsilon$ para todo s, $t \in A \cap V$. La función $h = \chi_W g_W + \chi_{A\cap V} f(t_0)$ ($t_0 \in A \cap V$ fijo) está en $B_1(X,E)$ y se cumple que $\|h(t) - f(t)\| \leq \varepsilon$ para todo $t \in W \cup V$. Esto significa que $W \cup V \in \mathcal{U}_\varepsilon$ lo cual es absurdo pues $V \not\subset W$.

Por tanto, para cada $\varepsilon > 0$ hemos encontrado una función $g_\varepsilon \in B_1(X,E)$ verificando $\|f(x) - g_\varepsilon(x)\| \leq \varepsilon$ para todo $x \in X$, luego por el corolario 2.9, f es de la primera clase de Baire. $\square$

6. En lo relativo a la cuestión de cuándo podemos eliminar la condición de función σ-discreta del teorema 3.16, Hansell mostró en [25] que si X es un espacio métrico absolutamente analítico (es decir, X es un $\mathcal{F}$-conjunto Souslin en su compleción), entonces cada función de la primera clase de Borel de X en un espacio métrico es σ-discreta.

Capítulo 4

Aplicaciones

4.1. Funciones separadamente continuas y débilmente continuas

Nuestro objetivo ahora es ver cuando una función $f : X \times Y \to E$ separadamente continua (es decir, continua en x para cada $y \in Y$ y continua en y para cada $x \in X$) con X e Y espacios topológicos y (E, ρ) espacio métrico es de la primera clase.

En su primera publicación, Lebesgue [41] probó que este resultado era cierto cuando $X \times Y = \mathbb{R}^2$ y $E = \mathbb{R}$: "para cada $n \in \mathbb{N}$, se dibujan líneas verticales en el plano a distancia $1/n$ una de otra. Definimos $f_n(x, y)$ como $f(x, y)$ sobre la unión de estas líneas y determinamos $f_n(x, y)$ sobre el resto del plano por interpolación lineal en la variable x.

Como f es continua en la variable y, para cada x fijo, cada f_n es continua sobre $\mathbb{R}^2$. Puesto que f es continua en la variable x, para cada y fijo,

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x, y) = f(x, y) \qquad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

luego, f es de la primera clase de Baire".

Lebesgue dio varias demostraciones de este resultado. Una de ellas se puede adaptar directamente al caso de que uno de los factores X o Y sea metrizable y se obtiene el siguiente teorema:

Teorema 4.1. *Sea $f : X \times Y \to E$ una función separadamente continua donde X es metrizable, Y un espacio topológico y E un espacio métrico, entonces $f \in F_\sigma(X \times Y, E)$.*

Demostración. Sea $G \subset E$ un conjunto abierto, como E es metrizable, G se puede expresar en la forma $G = \bigcup_n V_n$ donde V_n es abierto con $\overline{V_n} \subset G$.

Sea $A_n = f^{-1}(V_n)$. Para cada $(x,y) \in A_n$, usando la continuidad de f^y en x, se obtiene un número real $r_n(x,y) > 0$ tal que si $d(t,x) < r_n(x,y)$, entonces $f^y(t) \in V_n$ (notar que $f^y(x) = f(x,y) \in V_n$). Definimos

$$A_{nk} := \left\{(x,y) \in A_n : r_n(x,y) > \frac{1}{k}\right\}$$

de donde $A_n = \bigcup\limits_k A_{nk}$, luego $f^{-1}(V_n) = \bigcup\limits_k A_{nk}$. Para terminar la prueba basta demostrar que $\overline{A_{nk}} \subset f^{-1}(G)$ pues entonces se tendrá que

$$f^{-1}(G) = \bigcup_n f^{-1}(V_n) = \bigcup_n \bigcup_k A_{nk} = \bigcup_{n,k} \overline{A_{nk}} \in \mathcal{F}_\sigma(X)$$

Sea $(x,y) \in \overline{A_{nk}}$ y, sea (x_α, y_α) una red en A_{nk} tal que $(x_\alpha, y_\alpha) \to (x,y)$. Como $x_\alpha \to x$, existe α_0 tal que si $\alpha \geq \alpha_0$, entonces $x_\alpha \in B(x, \frac{1}{k})$, es decir, $d(x, x_\alpha) < \frac{1}{k} < r_n(x_\alpha, y_\alpha)$. Por tanto, $f^{y_\alpha}(x) \in V_n$ cuando $\alpha \geq \alpha_0$. Pasando al límite, $f^y(x) \in \overline{V_n} \subset G$ luego, se cumple que $(x,y) \in f^{-1}(G)$. □

Corolario 4.2. *Sea $f : X \times Y \to E$ una función separadamente continua donde X es un espacio metrizable, Y un espacio compacto y E es un subconjunto convexo de un espacio normado separable, entonces $f \in B_1(X \times Y, E)$.*

Demostración. Como X es metrizable e Y es compacto, se tiene que $X \times Y$ es normal (ver [18, Th. 5.1.36 y 5.1.5]), luego por el teorema 4.1 y la proposición 2.14, f es de la primera clase de Baire. □

Corolario 4.3. *Sea $f : X \times Y \to E$ una función separadamente continua donde X e Y son espacios métricos completos y E es un subconjunto convexo de un espacio normado, entonces $f \in B_1(X \times Y, E)$.*

Demostración. Como X e Y son espacios métricos completos, $X \times Y$ es un espacio métrico completo, luego por el teorema 4.1 y el corolario 3.44, f es σ-discreta de la primera clase de Borel y, por la proposición 3.28, $f \in B_1(X \times Y, E)$. □

En lo que sigue, dado un conjunto K, denotaremos por $t_p(K)$ a la topología de convergencia puntual sobre $C(K)$.

Proposición 4.4. *Si $F : X \to C(K)$ es una función $t_p(K)$-continua y X es metrizable, entonces F es σ-fragmentable por cerrados y, en consecuencia, $F \in B_1(X, C(K))$ (K es compacto).*

Demostración. Supongamos que F es acotada.

Definimos una función $f : X \times K \to \mathbb{R}$ por $f(x, y) = F(x)(y)$ para cada $(x, y) \in X \times K$, entonces f es separadamente continua.

Como X es metrizable y K compacto, por el corolario 4.2, $f \in B_1(X\times K)$, luego existe una sucesión de funciones continuas $f_n : X \times K \to \mathbb{R}$ que convergen puntualmente a f.

Sea $F_n : X \to C(K)$ una sucesión de funciones definidas por $F_n(x) = f_n(x, .)$ para cada $x \in X$; utilizando que K es compacto se puede probar fácilmente que cada función F_n es $\|.\|$-continua. En efecto, sea $x_0 \in X$ y $\varepsilon > 0$, por la continuidad de f_n, para cada $(x_0, y) \in X \times K$ existe un entorno abierto $U_{x_0,y} \times V_{x_0,y} \subset X \times K$ tal que si $(x', y') \in U_{x_0,y} \times V_{x_0,y}$

$$|f_n(x', y') - f_n(x_0, y)| < \varepsilon$$

Ahora bien, la familia de entornos $\{V_{x_0,y} : y \in K\}$ forma un cubrimiento abierto de K, por lo que existen y_1, y_2, ..., $y_n \in K$ tal que $\{V_{x_0,y_j} : j = 1, \dots, n\}$ es un subcubrimiento finito de K. Consideramos el conjunto abierto $U = \cap_{j=1}^{n} U_{x_0,y_j}$ que contiene a x_0, es inmediato que para cada $x' \in U$, $\|F_n(x_0) - F_n(x')\| < \varepsilon$.

Como F es acotada, f también es acotada y se puede suponer que f_n está uniformemente acotada. Como $F_n(x)$ converge a $F(x)$ en $t_p(K)$ para cada $x \in X$, por el teorema de Riesz y el teorema de convergencia dominada de Lebesgue, $F_n(x)$ converge a $F(x)$ débilmente en $C(K)$ para cada $x \in X$.

Sea G_n la sucesión de las envolturas convexas de F_n formadas con coeficientes racionales.

Para cada $x \in X$, se tiene que $F(x) \in \overline{\{G_n(x) : n \in \mathbb{N}\}}^{\text{débil}}$ y, como la clausura débil de un conjunto convexo de un espacio de Banach coincide con la clausura en norma, $F(x) \in \overline{\{G_n(x) : n \in \mathbb{N}\}}^{\|.\|}$. De aquí, los conjuntos $X_n = \left\{x \in X : \|F(x) - G_n(x)\| \leq \frac{\varepsilon}{3}\right\}$ son cerrados y recubren X.

Obsérvese que cada G_n es continua para la norma, luego dado $\varepsilon > 0$ y $C \subset X_n$, existe un abierto $V \subset X$ tal que $G_n(C \cap V)$ tiene diámetro menor que $\varepsilon/3$. Utilizando la desigualdad triangular cuando x, $y \in C \cap V$

$$\|F(x)-F(y)\| \leq \|F(x)-G_n(x)\|+\|G_n(x)-G_n(y)\|+\|G_n(y)-F(y)\| \leq \frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$$

luego $diam_{\|.\|}\ F(C \cap V) \leq \varepsilon$ y queda probado que F es σ-fragmentable por cerrados. Además, como X es metrizable y $C(K)$ con la norma del supremo es un espacio de Banach, por el teorema 3.35, F es de la primera clase de Baire.

Cuando F no es acotada, se consideran los conjuntos cerrados $A_n = \{x \in X : \|F(x)\| \leq n\}$ en X y se razona con las restricciones $F|_{A_n}$. $\square$

Rudin [54] demostró un teorema similar al Teorema 4.1 pero utilizando particiones de la unidad y basándose en el hecho de que los espacios métricos son paracompactos (ver proposición A.12).

Definición 4.5. *Sea X un espacio metrizable, decimos que existe una partición localmente finita de la unidad sobre X de diámetro inferior a $1/n$ si existen funciones continuas $h_{\alpha,n} : X \to [0,1]$ tal que*

$$\sum_{\alpha} h_{\alpha,n}(x) = 1 \qquad \forall x \in X$$

cada elemento de X tiene un entorno sobre el que a lo más una cantidad finita de funciones $h_{\alpha,n}$ son iguales a 1 y el soporte de cada $h_{\alpha,n}$ tiene diámetro a lo más $1/n$.

Observación 4.6. *Por ser paracompacto, cada espacio métrico admite una partición localmente finita de la unidad de diámetro inferior a $1/n$ (ver [18, Th. 5.1.9]).*

Teorema 4.7 (Rudin). *Sea X un espacio métrico, Y un espacio topológico y E un espacio vectorial topológico localmente convexo.*

Para $n = 1, 2, 3, \dots$, sea $\{h_{\alpha,n}\}$ una partición localmente finita de la unidad sobre X de diámetro inferior a $1/n$, sea D un subconjunto denso de X y escogemos $x_{\alpha,n} \in D$ tal que $h_{\alpha,n}(x_{\alpha,n}) > 0$.

Si $f : X \times Y \to E$ satisface

(a) $f^y : X \to E$ es continua para cada $y \in Y$.

(b) $f_x : Y \to E$ es continua para cada $x \in D$ y definimos $F_n : X \times Y \to E$ por

$$F_n(x,y) = \sum_{\alpha} h_{\alpha,n}(x) f(x_{\alpha,n}, y) \tag{4.1}$$

entonces cada F_n es continua sobre $X \times Y$ y,

$$\lim_{n\to\infty} F_n(x,y) = f(x,y)$$

en cada punto $(x,y) \in X \times Y$.

Si E es metrizable, entonces f es de la primera clase de Borel.

Demostración. La continuidad de F_n es evidente debido a que la partición $\{h_{\alpha,n}\}$ es localmente finita y en un entorno de cada punto sólo hay una cantidad finita de sumandos no nulos.

Fijamos $(x, y) \in X \times Y$, sea V un entorno convexo de O en E. Por (a), existe un número natural n_0 tal que

$$f(\xi, y) - f(x, y) \in V$$

para todo $\xi \in X$ con $d(x, \xi) < 1/n_0$, donde d denota la métrica de X. Si $n > n_0$ y α es un índice para el cual $h_{\alpha,n}(x) > 0$, por la hipótesis sobre $\{h_{\alpha,n}\}$, se tiene que $d(x, x_{\alpha,n}) < 1/n_0$, luego

$$f(x_{\alpha,n}, y) \in f(x, y) + V$$

Por (4.1) y la convexidad de V

$$F_n(x, y) \in f(x, y) + V$$

para todo $n > n_0$. Por tanto, $F_n(x, y)$ converge a $f(x, y)$. □

Es importante destacar que las funciones separadamente continuas no son en general de la primera clase de Borel como se muestra con el siguiente ejemplo de Rudin [54].

Ejemplo 4.8. *Sea E el espacio vectorial de todas las funciones reales Borel acotadas sobre $\mathbb{R}$, con la topología de convergencia puntual. Definimos $g : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ por*

$$g(x, y) = \frac{2xy}{x^2 + y^2} \qquad \text{si } (x, y) \neq (0, 0)$$

y $g(0, 0) = 0$. Definimos $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to E$ por

$$f(x, y)(t) = g(x - t, y - t)$$

Como g es separadamente continua y la topología de E es la de la convergencia puntual, f es separadamente continua.

Para cada $t \in \mathbb{R}$, definimos

$$V_t := \{\varphi \in E : |\varphi(t)| < 1/2\}$$

entonces V_t es abierto en E y $f(x, y) \in V_t$ sí y sólo sí $|g(x - t, y - t)| < 1/2$. Sea Δ la diagonal de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, puesto que g es igual a 1 en $\Delta \setminus \{(0, 0)\}$ se sigue que

$$\Delta \cap f^{-1}(V_t) = \{(t, t)\}$$

Sea T un subconjunto no Borel de $\mathbb{R}$ y sea $V = \bigcup_{t \in T} V_t$, entonces V es abierto en E y

$$\Delta \cap f^{-1}(V) = \{(t, t) : t \in T\}$$

no es Borel, luego $f^{-1}(V)$ no es Borel en $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ y, por tanto, f no es de la primera clase de Borel.

Como aplicación del teorema de Rudin, vamos a probar el siguiente teorema de Srivatsa [55], que da condiciones suficientes para que una función débilmente continua sea de la primera clase.

Teorema 4.9. *Si $f : X \to E$ es una aplicación débil-continua de un espacio métrico X en un espacio de Banach E, entonces f es de la primera clase de Baire.*

Demostración. Si representamos por B^* la bola unidad cerrada del espacio dual E^*, dotada de la topología débil*, entonces la aplicación f la podemos considerar como una aplicación t_p-continua de X en $C(B^*)$. Como B^* es compacta, por proposición 4.4, la aplicación f es σ-fragmentable por cerrados y así, la aplicación $f : X \to E$ es σ-fragmentable por cerrados. Para terminar, como X es métrico y E espacio de Banach, por el teorema 3.35, f es de la primera clase de Baire. $\square$

El siguiente resultado es clásico y bien conocido.

Proposición 4.10. *Si $f : X \to E$ es una aplicación débil-continua de un espacio topológico X en un espacio de Banach E tal que $f(X)$ es un subconjunto separable de E, entonces f es de la primera clase de Baire.*

Demostración. Podemos suponer que E es un espacio de Banach separable.

Tomamos la aplicación identidad $i : (E, \text{débil}) \to (E, \|.\|)$ y cubrimos E con bolas cerradas de radio $\varepsilon > 0$ y centradas en los puntos de un conjunto numerable denso de E. Las anti-imágenes por la aplicación identidad de esta familia numerable de bolas, nos proporciona un cubrimiento de $(E, \text{débil})$ mediante una sucesión de cerrados que cumple la condición (F_ε), luego la aplicación i es σ-fragmentable por cerrados.

Como el espacio $(E, \text{débil})$ es perfectamente paracompacto y $(E, \|.\|)$ es un espacio de Banach, por el teorema 3.35, se tiene que la aplicación identidad es de la primera clase de Baire, y de ello se sigue que $f \in B_1(X, E)$. $\square$

4.2. Topologías finas

El problema que estudiaremos a continuación es el siguiente: Dada en X otra topología τ más fina que la topología d dada inicialmente en X y un espacio métrico E, ¿cuándo una función τ-continua $f : X \to E$ es de la primera clase sobre (X, d)?. Las topologías finas y, en particular la topología de la densidad (ver apéndice B), juegan un papel importante en el Análisis Real (ver [46]). Es importante destacar que estas topologías distan de tener una estructura métrica.

La siguiente noción fue introducida por J. Lukes y L. Zajizek (ver [47]).

Definición 4.11. *Sea τ una topología sobre X y $\mathcal{G}$ una familia de subconjuntos de X. Diremos que τ tiene la propiedad de $\mathcal{G}$-inserción si para cada $A \subset X$, existe un conjunto $G \in \mathcal{G}$ tal que*

$$int_\tau\ A \subset G \subset \overline{A}^{\tau}$$

Proposición 4.12. *Sea τ una topología sobre X. Son equivalentes:*

i) *τ tiene la propiedad de $\mathcal{G}$-inserción.*

ii) *Para cada conjunto τ-cerrado $F \subset X$ y cada conjunto τ-abierto U contenido en F, existe $G \in \mathcal{G}$ tal que $U \subset G \subset F$.*

iii) *Para cada conjunto τ-abierto U, existe $G \in \mathcal{G}$ tal que $U \subset G \subset \overline{U}^{\tau}$.*

iv) *Para cada conjunto τ-cerrado F, existe $G \in \mathcal{G}$ tal que $int_\tau\ F \subset G \subset F$.*

Demostración. Es evidente ii) $\Leftrightarrow$ iii) $\Leftrightarrow$ iv).

i) $\Rightarrow$ ii) Sea $F \subset X$ τ-cerrado y $U \subset X$ τ-abierto con $U \subset F$.

Es claro que $U \subset int_\tau\ F$ y que $F = \overline{F}^{\tau}$, luego existe $G \in \mathcal{G}$ tal que $int_\tau\ F \subset G \subset \overline{F}^{\tau} = F$. Por tanto

$$U \subset G \subset F$$

ii) $\Rightarrow$ i) Sea A un conjunto de X, como $int_\tau\ A$ es τ-abierto y $\overline{A}^{\tau}$ es τ-cerrado con $int_\tau\ A \subset \overline{A}^{\tau}$, por hipótesis existe $G \in \mathcal{G}$ tal que

$$int_\tau\ A \subset G \subset \overline{A}^{\tau}$$

□

La propiedad de $\mathcal{G}$-inserción, en el caso de que $\mathcal{G} = \mathcal{G}_\delta(d)$ (familia de conjuntos de X que son intersección numerable de conjuntos d-abiertos de X), da una condición suficiente para que una función τ-continua $f : X \to E$ sea de la primera clase sobre (X, d).

Proposición 4.13. *Sea (X, d) un espacio topológico, τ una topología más fina que la topología d de X y E un espacio métrico. Si τ tiene la propiedad de $\mathcal{G}_\delta(d)$-inserción, cada función τ-continua $f : X \to E$ es de la primera clase de Borel sobre (X, d).*

Demostración. Sea $F \subset (E, \rho)$ cerrado y $V_n = \{y \in E : \rho(y, F) < 1/n\}$, entonces

$$F = \bigcap_{n=1}^{\infty} V_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{V_n} \qquad f^{-1}(F) = \bigcap_{n=1}^{\infty} f^{-1}(V_n)$$

Para cada $n \in \mathbb{N}$, existe $G_n \in \mathcal{G}_\delta(d)$ tal que

$$int_\tau \ (f^{-1}(V_n)) \subset G_n \subset \overline{f^{-1}(V_n)}^{\,\tau}$$

De aquí se sigue que $f^{-1}(F) = \cap_n G_n \in \mathcal{G}_\delta(d)$. En efecto:

a) ($\subseteq$) Si $x \in f^{-1}(F)$, $f(x) \in V_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Fijado $n \in \mathbb{N}$, como f es τ-continua en x existe un τ-abierto W con $x \in W$, $f(W) \subset V_n$. Es decir $W \subset f^{-1}(V_n)$, luego $W \subset int_\tau \ (f^{-1}(V_n)) \subset G_n$. Se sigue que $x \in G_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

b) ($\supseteq$) Sea $x \in \cap_n G_n$, entonces $x \in \overline{f^{-1}(V_n)}^{\,\tau}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Fijado $n \in \mathbb{N}$, para cada W τ-entorno de x se cumple que $W \cap f^{-1}(V_n) \neq \emptyset$, luego existe $x_W \in W \cap f^{-1}(V_n)$. La red x_W converge hacia x en la topología τ, luego $\lim\limits_W f(x_W) = f(x)$ y, como $f(x_W) \in V_n$ se sigue que $f(x) \in \overline{V_n}$. Como este razonamiento vale para todo $n \in \mathbb{N}$, se sigue que $f(x) \in \cap_n \overline{V_n} = F$.

$\square$

Corolario 4.14. *Sea (X, d) un espacio normal, τ una topología más fina que la topología d de X y E un subconjunto convexo de un espacio normado separable. Si τ tiene la propiedad de $\mathcal{G}_\delta(d)$-inserción, cada función τ-continua $f : X \to E$ es de la primera clase de Baire sobre (X, d).*

Demostración. Es consecuencia de la proposición 4.13 y la proposición 2.14. $\square$

Corolario 4.15. *Sea (X, d) un espacio métrico completo, τ una topología más fina que la topología d de X y E un subconjunto convexo de un espacio normado. Si τ tiene la propiedad de $\mathcal{G}_\delta(d)$-inserción, cada función τ-continua $f : X \to E$ es de la primera clase de Baire sobre (X, d).*

Demostración. Por la proposición 4.13 y el corolario 3.44, f es σ-discreta de la primera clase de Borel sobre (X, d) y, por la proposición 3.28, f es de la primera clase de Baire sobre (X, d). $\square$

La siguiente definición nos da otra condición suficiente para que una función τ-continua $f : X \to E$ sea de la primera clase sobre un espacio métrico (X, d). De hecho esta definición implica la propiedad de $\mathcal{G}_\delta(d)$-inserción.

Definición 4.16. *Una topología τ sobre un espacio métrico X con métrica d se dice que satisface la condición del radio esencial si para cada $x \in X$ y cada τ-entorno U de x existe un 'radio esencial' $r(x, U) > 0$ tal que*

$$d(x, y) \leq \min\{r(x, U_x), r(y, U_y)\} \Rightarrow U_x \cap U_y \neq \emptyset \tag{4.2}$$

para cada pareja de τ-entornos, U_x, U_y de x e y, respectivamente.

Proposición 4.17. *Si (X, d) es un espacio métrico y τ es una topología sobre X que satisface la condición de radio esencial, entonces τ tiene la propiedad de $\mathcal{G}_\delta(d)$-inserción.*

<u>*Demostración*</u>. Sea G un conjunto τ-abierto en X, definimos

$$A_n := \{x \in G : r(x, G) \geq 1/n\} \qquad \text{para cada } n \in \mathbb{N}$$

de donde se tiene que $G = \cup_n A_n$ y $A_n \subset A_{n+1}$ para cada $n \in \mathbb{N}$.

Es evidente que $\cup_n \overline{A_n}$ es un conjunto $\mathcal{F}_\sigma(X)$ (en la topología métrica). Para terminar la prueba, veamos que $\cup_n \overline{A_n} \subset \overline{G}^{\,\tau}$.

Supongamos que $y \in \overline{A_n} \setminus \overline{G}^{\,\tau} \neq \emptyset$ para algún $n \in \mathbb{N}$, entonces

$$U_y \cap A_n \neq \emptyset \text{ para cada } d\text{-entorno } U_y \text{ de } y \tag{4.3}$$

$$\exists r(y, X \setminus \overline{G}^{\,\tau}) > 0 \text{ radio esencial} \tag{4.4}$$

Tomamos $\varepsilon = \text{mín}\{r(y, X \setminus \overline{G}^{\,\tau}), 1/n\} > 0$ y consideramos la bola abierta $B_d(y, \varepsilon)$; por (4.3), existe $x \in B_d(y, \varepsilon) \cap A_n$, es decir

$$x \in A_n \subset G \qquad d(x, y) \leq \varepsilon = \text{mín}\{r(y, X \setminus \overline{G}^{\,\tau}), 1/n\}$$

de donde

$$d(x, y) \leq \text{mín}\{r(y, X \setminus \overline{G}^{\,\tau}), r(x, G)\}$$

y por tanto $G \cap (X \setminus \overline{G}^{\,\tau}) \neq \emptyset$ (¡contradicción!) $\square$

Un ejemplo de topología fina se puede dar en $\mathbb{R}^2$, donde si consideramos la topología euclídea e y la topología de la cruz t, se tiene que t es una topología más fina que e sobre $\mathbb{R}^2$. Recuérdese que la topología de la cruz t en $\mathbb{R}^2$ se define como sigue, para cada $a = (a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2$ y para cada $\delta > 0$ consideramos los conjuntos

$$K(a, \delta) := \{x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x \in B_e(a, \delta),\ x_1 = a_1 \text{ o } x_2 = a_2\}$$

que forman una base en $\mathbb{R}^2$. Es fácil probar que las funciones reales separadamente continuas en la topología euclídea son continuas en la topología de la cruz.

Otro ejemplo característico de topología fina se puede dar en $\mathbb{R}$, donde si consideramos la topología euclídea e y la topología de Sorgenfrey e^+, se tiene que e^+ es una topología más fina que e sobre $\mathbb{R}$. Recuérdese que la topología de Sorgenfrey sobre $\mathbb{R}$ es la topología generada por la base $\{[x, x + \varepsilon) : x \in \mathbb{R},\ \varepsilon > 0\}$. Es fácil probar que las funciones reales continuas por la derecha en la topología euclídea son continuas en la topología de Sorgenfrey.

Proposición 4.18. *a) Si consideramos* $\mathbb{R}^2$ *con la topología euclídea e, la topología de la cruz sobre* $(\mathbb{R}^2, e)$ *satisface la condición del radio esencial. Por tanto, una función real separadamente continua en la topología ordinaria es de la primera clase de Baire en la topología ordinaria .*

b) Si consideramos $\mathbb{R}$ *con la topología euclídea e, la topología de Sorgenfrey sobre* $(\mathbb{R}, e)$ *satisface la condición del radio esencial. Por tanto, una función continua por la derecha en la topología ordinaria es de la primera clase de Baire en la topología ordinaria.*

Demostración. a) Sea $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ y U un t-entorno de x, entonces existe un conjunto t-abierto $K(x, \delta)$ tal que $K(x, \delta) \subset U$. Definimos el radio esencial $r(x, U)$ como

$$r(x, U) = \delta/2 > 0$$

es fácil comprobar que se cumple (4.2) de la definición 4.16, luego t satisface la condición del radio esencial.

b) Sea $x \in \mathbb{R}$ y U un e^+-entorno de x, entonces existe $\varepsilon > 0$ tal que $[x, x+\varepsilon) \subset U$. Definimos el radio esencial $r(x, U)$ como

$$r(x, U) = \varepsilon/2 > 0$$

se comprueba fácilmente que se cumple (4.2) de la definición 4.16, luego e^+ satisface la condición del radio esencial. □

El siguiente resultado es una generalización del apartado a) de la proposición anterior.

Proposición 4.19. *Sean* X, Y *y* E *espacios metrizables, entonces cada función* $f : X \times Y \to E$ *separadamente continua es de la primera clase de Borel.*

Demostración. Introducimos una topología τ en $X \times Y$, similar a la topología de la cruz en $\mathbb{R}^2$, de la siguiente forma

Para cada $a = (a_1, a_2) \in X \times Y$ y para cada $\delta > 0$ consideramos los conjuntos

$$K(a, \delta) = \{b = (x, y) \in X \times Y : b \in B(a, \delta),\ x = a_1 \text{ ó } y = a_2\}$$

Un conjunto $G \subset X \times Y$ será abierto en τ si para cada $z \in G$ existe $\delta > 0$ tal que $z \in K(z, \delta) \subset G$.

Se puede ver fácilmente que una función $f : X \times Y \to E$ es τ-continua sí y sólo sí f es separadamente continua.

Veamos que τ tiene la propiedad de $\mathcal{G}_\delta$-inserción. Sea $G \subset X \times Y$ un conjunto τ-abierto.

Para cada $z \in G$, $\exists \delta_z > 0$ tal que $z \in K(z, \delta_z) \subset G$.

Para cada $n \in \mathbb{N}$ y cada $z \in G$, tomamos $\varepsilon_z^n = \text{mín}\{\delta_z, \frac{1}{n}\}$ y llamamos

$$G_n := \bigcup_{(z_1,z_2)\in G} B_1(z_1, \varepsilon_z^n) \times B_2(z_2, \varepsilon_z^n)$$

entonces, G_n es un subconjunto abierto de $X \times Y$ y, es inmediato que

$$G \subset \bigcap_n G_n \subset \overline{G}^{\,\tau}$$

lo que implica que, en virtud de la proposición 4.13, cada función separadamente continua de $X \times Y$ en E es de la primera clase de Borel. $\square$

Apéndice A

Resultados Topológicos

Recogemos en este apéndice algunos resultados topológicos que se usan en el trabajo.

Un subconjunto Z de X es un cero sí y sólo sí $Z = f^{-1}(0)$ donde $f : X \to \mathbb{R}$ es continua y se denota por $\mathcal{Z}(X)$ la familia de los ceros de funciones reales continuas sobre X (se comprueba fácilmente que en la definición anterior no hay inconveniente en suponer que $f : X \to [0, 1]$); por otra parte, $\mathcal{U}(X)$ denota la familia de los coceros de funciones reales continuas sobre X, es decir, conjuntos cuyo complementario está en $\mathcal{Z}(X)$.

Si $f : X \to \mathbb{R}$ es continua y $\alpha \in \mathbb{R}$, entonces los conjuntos $\{x \in X : f(x) \leq \alpha\}$, $\{x \in X : f(x) = \alpha\}$, $\{x \in X : f(x) \geq \alpha\}$ están en $\mathcal{Z}(X)$, y sus complementos $\{x \in X : f(x) < \alpha\}$, $\{x \in X : f(x) \neq \alpha\}$, $\{x \in X : f(x) > \alpha\}$ están en $\mathcal{U}(X)$.

Proposición A.1. *Las familias $\mathcal{Z}(X)$ y $\mathcal{U}(X)$ son cerradas por uniones e intersecciones finitas.*

Demostración. Es suficiente probarlo para dos ceros (resp., dos coceros).

Sean $Z_1, Z_2 \in \mathcal{Z}(X)$,es decir,

$$Z_1 = \{x \in X : f(x) = 0 \text{ con f continua}\}$$
$$Z_2 = \{x \in X : g(x) = 0 \text{ con g continua}\}$$

(Se puede suponer sin perdida de generalidad que f y g son positivas)

Entonces, es claro que

$Z_1 \cup Z_2 = f^{-1}(0) \cup g^{-1}(0) = (f.g)^{-1}(0)$ $\quad f.g$ continua

$Z_1 \cap Z_2 = f^{-1}(0) \cap g^{-1}(0) = (f + g)^{-1}(0)$ $\quad f + g$ continua $\square$

Proposición A.2. *Las familias $\mathcal{Z}(X)$ (resp., $\mathcal{U}(X)$) son cerradas por intersecciones numerables (resp., uniones numerables).*

Demostración. Sea $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de ceros en X, por lo que existe una sucesión de funciones continuas $f_n : X \to [0,1]$ tal que

$$Z_n = f_n^{-1}(0) \qquad \text{para cada } n \in \mathbb{N}$$

Se tiene que

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} Z_n = g^{-1}(0) \in \mathcal{Z}(X)$$

con $g = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} f_n$ continua. □

Proposición A.3. *Si X es un espacio métrico, entonces $\mathcal{F}(X) = \mathcal{Z}(X)$ y $\mathcal{G}(X) = \mathcal{U}(X)$.*

Demostración. Si $F \in \mathcal{F}(X)$, tomamos $f : X \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = d(x, F)$$

Es claro que f es continua y $F = f^{-1}(0) \in \mathcal{Z}(X)$.
La otra inclusión es evidente. □

Lema A.4. *Para todo espacio topológico X se tiene que $\mathcal{Z}(X) \subsetneqq \mathcal{U}_\delta(X)$. Por tanto, también es cierto que $\mathcal{U}(X) \subsetneqq \mathcal{Z}_\sigma(X)$.*

Demostración. Sea $Z \in \mathcal{Z}(X)$ y $f : X \to \mathbb{R}$ una aplicación continua tal que $Z = f^{-1}(0)$. Definimos

$$U_n = \{x \in X : |f(x)| < 1/n\} \in \mathcal{U}(X)$$

y es evidente que $Z = \bigcap_{n=1}^{\infty} U_n \in \mathcal{U}_\delta(X)$. □

Lema A.5. *Sea (E, ρ) un espacio métrico. Si $G \in \mathcal{G}(E)$ $(= \mathcal{U}(E))$ existe una sucesión $Z_n \in \mathcal{F}(E)$ $(= \mathcal{Z}(E))$ tal que*

$$G = \bigcup_n Z_n \quad y \quad Z_n \subset \mathring{Z}_{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Demostración. Sea $G \in \mathcal{G}(E)$ y tomamos la siguiente sucesión de cerrados en E

$$Z_n = \{x \in E : \ \rho(x, G^c) \geq 1/n\} \qquad \text{para cada } n \in \mathbb{N}$$

es claro que $G = \cup_n Z_n$ y $Z_n \subset \mathring{Z}_{n+1}$ para cada $n \in \mathbb{N}$. □

Lema A.6. *Sea X un espacio topológico, (E,ρ) un espacio métrico y $\varphi : X \to E$ una función continua. Si Z es un conjunto cerrado en E, entonces $\varphi^{-1}(Z)$ es un cero en X.*

Demostración. Como E es un espacio métrico, $Z \in \mathcal{F}(E) = \mathcal{Z}(E)$. Luego, existe una función continua $f : E \to \mathbb{R}$ tal que $f^{-1}(0) = Z$.

De aquí se tiene que

$$\varphi^{-1}(Z) = (\varphi^{-1} \circ f^{-1})(0) = (f \circ \varphi)^{-1}(0) \in \mathcal{Z}(X)$$

□

Proposición A.7. *Si X es un espacio normal, $A \subset B \subset X$, $A \in \mathcal{F}_\sigma(X)$, $B \in \mathcal{G}_\delta(X)$ entonces existe $H \in \mathcal{U}_\delta(X)$, $A \subset H \subset B$.*

Demostración. Consideramos primero el caso particular $B \in \mathcal{G}(X)$ y $A = \bigcup\limits_n A_n$ con $A_n \in \mathcal{F}(X)$. Por el lema de Urysohn (ver [38]), existe $\varphi_n \in C(X,[0,1])$ tal que

$$\varphi_n(x) = 0 \text{ si } x \in B^c \qquad \varphi_n(x) = 1 \text{ si } x \in A_n$$

Entonces, $\varphi = \sum\limits_n \frac{1}{2^n}\varphi_n$ es continua y, es claro que

$$H := \{x \in X : \ \varphi(x) > 0\} \in \mathcal{U}(X)$$

cumple $A \subset H \subset B$.

Finalmente, en el caso general, si $B = \bigcap\limits_n B_n$ con $B_n \in \mathcal{G}(X)$, para cada n existe $H_n \in \mathcal{U}(X)$ con $A \subset H_n \subset B_n$, luego $H = \bigcap\limits_n H_n$ cumple que $H \in \mathcal{U}_\delta(X)$ y $A \subset H \subset B$. □

Proposición A.8. *Sea X un espacio topológico y Z_1, Z_2,..., Z_n ceros disjuntos en X. Entonces existen U_1, U_2,..., U_n coceros disjuntos en X tales que $Z_k \subset U_k$ para $1 \leq k \leq n$ y, para cada $k \in \{1,\dots,n\}$, existe una función continua $\alpha_k : X \to [0,1]$ tal que*

$$\alpha_k(Z_k) = \{1\} \qquad \alpha_k(U_k^c) = \{0\}$$

Demostración. Sean Z_1, Z_2 ceros disjuntos en X

$$Z_1 = f_1^{-1}(0) \qquad f_1 : X \to [0,1] \text{ continua}$$

$$Z_2 = f_2^{-1}(0) \qquad f_2 : X \to [0,1] \text{ continua}$$

Definimos la aplicación continua $f : X \to [0,1]$ por $f = \frac{f_1^2}{f_1^2+f_2^2}$; por la definición de f

$$Z_1 = f^{-1}(0) \qquad Z_2 = f^{-1}(1)$$

y los conjuntos $U_1 = \{x \in X : f(x) < 1/2\}$ y $U_2 = \{x \in X : f(x) > 1/2\}$ son coceros disjuntos en X tal que $Z_1 \subset U_1$ y $Z_2 \subset U_2$.

Además si $U_1 = \{x \in X : g_1(x) > 0\}$ para cierta función continua $g_1 : X \to [0,1]$, definimos la función continua $\alpha_1 : X \to [0,1]$ por $\alpha_1 = \frac{g_1^2}{g_1^2+f_1^2}$.

De donde

$$\alpha_1(Z_1) = \{1\} \qquad \alpha_1(U_1^c) = \{0\}$$

Haciendo el mismo razonamiento para Z_2 obtenemos la función continua correspondiente.

En el caso general, Z_1,..., Z_n ceros disjuntos en X se aplica inducción sobre n. □

Proposición A.9. *La unión de una familia discreta de cerrados es un cerrado.*

<u>*Demostración*</u>. Sea $\{F_i : i \in I\}$ una familia discreta de cerrados y $x \in (\cup_{i\in I} F_i)^c$, entonces existe $V(x)$ entorno de x que interseca a lo más con un elemento de $\{F_i : i \in I\}$. Sea $j \in I$ tal que $F_j \cap V(x) \neq \emptyset$, entonces $x \in F_j^c \cap V(x) \neq \emptyset$ es un entorno de x contenido en $(\cup_{i\in I} F_i)^c$, por lo que $(\cup_{i\in I} F_i)^c$ es un abierto en X. □

Proposición A.10. *La unión de una familia fuertemente discreta de ceros en un espacio normal es un cero.*

<u>*Demostración*</u>. Sea $\mathcal{Z}$ una familia fuertemente discreta de ceros en X y $\{G_Z : Z \in \mathcal{Z}\}$ una familia discreta de abiertos tal que $Z \subset G_Z$ $\forall Z \in \mathcal{Z}$.

Para cada $Z \in \mathcal{Z}$, sea $\varphi_Z \in C(X,\mathbb{R})$ tal que $Z = \varphi_Z^{-1}(0)$. Por la normalidad de X, existe $\Psi_Z \in C(X,[0,1])$ tal que $\Psi_Z(Z) = \{0\}$ y $\Psi_Z(X \setminus G_Z) = \{1\}$ para cada $Z \in \mathcal{Z}$. Definimos $f_Z(x) = \text{mín}\{|\varphi_Z(x)| + \Psi_Z(x), 1\}$ y ponemos

$$f(x) = \begin{cases} f_Z(x) & x \in G_Z,\ Z \in \mathcal{Z} \\ 1 & x \notin \cup\{G_Z : Z \in \mathcal{Z}\} \end{cases}$$

Entonces, $f \in C(X,\mathbb{R})$ y $f^{-1}(0) = \cup\{Z : Z \in \mathcal{Z}\}$. □

Los siguientes resultados muestran propiedades sobre los espacios métricos y paracompactos. Un espacio topológico X es paracompacto si cada cubrimiento abierto de X tiene un refinamiento abierto localmente finito.

Proposición A.11 (Teorema de Stone). *Cada cubrimiento abierto de un espacio métrico tiene un refinamiento abierto que es localmente finito y σ-discreto.*

<u>*Demostración*</u>. Sea $\{U_s\}_{s\in S}$ un cubrimiento abierto de un espacio metrizable X; sea d la métrica sobre el espacio X y $<$ una relación de orden total sobre el conjunto S. Para cada $i \in \mathbb{N}$, definimos inductivamente las familias $\mathcal{V}_i = \{V_{s,i}\}_{s\in S}$ de subconjuntos de X de la forma

$$V_{s,i} = \cup B(c, 1/2^i)$$

donde la unión recorre todos los puntos $c \in X$ que satisfacen las siguientes condiciones:

(1) s es el elemento más pequeño de S tal que $c \in U_s$.

(2) $c \notin V_{t,j}$ para $j < i$ y $t \in S$.

(3) $B(c, 3/2^i) \subset U_s$.

Se sigue de la definición que los conjuntos $V_{s,i}$ son abiertos y por (3) que $V_{s,i} \subset U_s$. Sea $x \in X$ y tomamos s el elemento más pequeño de S tal que $x \in U_s$ y un número natural i tal que $B(x, 3/2^i) \subset U_s$. Entonces, o bien $x \in V_{t,j}$ para un $j < i$ y un $t \in S$, o bien, $x \in V_{s,i}$. Por tanto, $\mathcal{V} = \cup_{i\in\mathbb{N}}\mathcal{V}_i$ es un refinamiento abierto del cubrimiento abierto $\{U_s\}_{s\in S}$.

Probaremos ahora que para cada $i \in \mathbb{N}$

(4) si $x_1 \in V_{s_1,i}$, $x_2 \in V_{s_2,i}$ y $s_1 < s_2$, entonces $d(x_1, x_2) > 1/2^i$.

y esto mostrará que las familias $\mathcal{V}_i$ son discretas, porque cada bola de radio $1/2^{i+1}$ corta a los más a un miembro de $\mathcal{V}_i$.

Por la definición de los conjuntos $V_{s_1,i}$ y $V_{s_2,i}$, existen puntos c_1, c_2 satisfaciendo (1) y (3) tal que $x_k \in B(c_k, 1/2^i) \subset V_{s_k,i}$ para $k = 1, 2$. De (3) se sigue que $B(c_1, 3/2^i) \subset U_{s_1}$ y de (1) que $c_2 \notin U_{s_1}$, por tanto $d(c_1, c_2) \geq 3/2^i$. De aquí,

$$d(x_1, x_2) \geq d(c_1, c_2) - d(c_1, x_1) - d(c_2, x_2) > 1/2^i$$

lo que prueba (4).

Para concluir la prueba del teorema es suficiente mostrar que para cada $t \in S$ y cada par k, j de números naturales

(5) si $B(x, 1/2^k) \subset V_{t,j}$, entonces $B(x, 1/2^{j+k}) \cap V_{s,i} = \emptyset$ para $i \geq j + k$ y $s \in S$.

porque para cada $x \in X$ existe k, j números naturales y $t \in S$ tal que $B(x, 1/2^k) \subset V_{t,j}$ y por tanto, la bola $B(x, 1/2^{j+k})$ corta a lo más a $j + k - 1$ miembros de $\mathcal{V}$, por lo que $\mathcal{V}$ es localmente finito.

Se sigue de (2) que los puntos c en la definición de $V_{s,i}$ no pueden estar en $V_{t,j}$ cuando $i \geq j + k$; como $B(x, 1/2^k) \subset V_{t,j}$, tenemos que $d(x, c) > 1/2^k$ para cada uno de estos c. Las desigualdades $j+k \geq k+1$ y $i \geq k+1$, implican que $B(x, 1/2^{j+k}) \cap B(c, 1/2^i) = \emptyset$ y por tanto que se cumpla (5). $\square$

Corolario A.12. *Cada espacio métrico es paracompacto.*

Demostración. Es consecuencia del Teorema de Stone y la definición de espacio paracompacto. $\square$

Como consecuencia del Teorema de Stone, se obtiene la siguiente propiedad para espacio métricos.

Proposición A.13. *Cada espacio métrico tiene una base σ-discreta de abiertos.*

Demostración. Sea d una métrica sobre el espacio metrizable X y, para cada $i \in \mathbb{N}$, sea $\mathcal{B}_i$ un refinamiento abierto σ-discreto del cubrimiento abierto de X formado por la bolas de radio $1/i$. Es inmediato que la familia σ-discreta $\mathcal{B} = \cup_{i \in \mathbb{N}} \mathcal{B}_i$ es una base para X. $\square$

Proposición A.14. *Un espacio topológico X es paracompacto sí y sólo sí X es subparacompacto y colectivamente normal.*

Demostración. La demostración aparece en [11]. $\square$

Apéndice B

La topología de la densidad sobre $\mathbb{R}$

La topología de la densidad sobre $\mathbb{R}$ es el ejemplo más interesante de topología fina. Además, la topología de la densidad en la recta real da un ejemplo en el que las funciones de la primera clase de Borel no coinciden con las funciones de la primera clase de Baire cuando se considera como espacio de partida la recta real con esta topología (ver ejemplo 2.24).

Definición B.1. *Un punto $z \in \mathbb{R}$ se dice que es un punto de densidad de un conjunto medible $M \subset \mathbb{R}$ si se cumple:*

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{1}{2h} \lambda(M \cap (z-h, z+h)) = 1$$

donde λ es la medida de Lebesgue sobre $\mathbb{R}$.

Teorema B.2 (de densidad de Lebesgue). *Casi todos los puntos de un conjunto medible $M \subset \mathbb{R}$ son puntos de densidad de M.*

Demostración. Por la teoría de integración de Lebesgue, la derivada de la integral indefinida de una función g localmente integrable es igual a g en casi todo punto.

Aplicamos este teorema al caso $g = \chi_M$. $\square$

Definición B.3. *Diremos que un conjunto medible de M es d-abierto si cada punto de M es un punto de densidad de M.*

La familia d de todos los conjuntos d-abiertos forma una topología, que llamaremos *topología de la densidad*. La mayor dificultad reside en probar que la unión arbitraria de d-abiertos es medible, esto es consecuencia del siguiente teorema.

Observación B.4. *Claramente esta topología es más fina que la topología Euclídea.*

Teorema B.5 (propiedad cuasi-Lindelöf de d). *Sea $\mathcal{M}$ una familia de conjuntos d-abiertos. Entonces $\mathcal{M}$ contiene una subfamilia numerable $\mathcal{M}_0$ tal que la unión difiere de la unión de $\mathcal{M}$ en un conjunto nulo.*

Demostración. Supongamos que $T := \bigcup_{M \in \mathcal{M}} M$ está contenida en algún intervalo acotado I (no hay ningún problema en asumirlo).

Sea $\mathcal{S}$ la colección de todas las uniones numerables de conjuntos de $\mathcal{M}$, entonces existe $S \in \mathcal{S}$ tal que

$$\lambda(S) = \sup\{\lambda(M) : M \in \mathcal{S}\}$$

Cada punto $x \in T$ es un punto de densidad de algún $M \in \mathcal{M}$. Puesto que $\lambda(M \cup S) = \lambda(S)$ se tiene que $\lambda(M \setminus S) = 0$. Por tanto, x es un punto de densidad de $M \cap S$ y de S.

Claramente, x no puede ser punto de densidad de $I \setminus S$. Por el teorema B.2, casi todo punto de $I \setminus S$ es un punto de densidad de $I \setminus S$, por lo que $T \setminus S$ es un conjunto Lebesgue nulo. $\square$

Proposición B.6. *El d-interior de un conjunto medible M consiste en todos los puntos de densidad de M pertenecientes a M.*

Demostración. Sea U el conjunto de todos los puntos de densidad de M pertenecientes a M. Por el Teorema de densidad de Lebesgue, $M \setminus U$ es nulo. Por tanto, U es medible y cada punto de U es un punto de densidad de U, es decir, U es un conjunto d-abierto de M. $\square$

Corolario B.7. *Un conjunto medible M es d-entorno de un punto $z \in M$ sí y sólo sí z es un punto de densidad de M.*

Definición B.8. *Una función f definida en un entorno de un punto $z \in \mathbb{R}$ es aproximadamente continua en z (en estos términos), si existe $M \subset \mathbb{R}$ conjunto medible tal que z es punto de densidad de M y*

$$\lim_{\substack{x \to z \\ x \in M}} f(x) = f(z)$$

Si f es aproximadamente continua en cada punto, diremos que f es aproximadamente continua.

Teorema B.9. *Una función es aproximadamente continua en un punto z sí y sólo sí es d-continua en z. En particular, f es aproximadamente continua sobre $\mathbb{R}$ sí y sólo sí los conjuntos*

$$\{x \in \mathbb{R} : f(x) > a\} \qquad \{x \in \mathbb{R} : f(x) < a\}$$

son d-abiertos para cada $a \in \mathbb{R}$.

<u>*Demostración*</u>. ($\Rightarrow$) Por el corolario B.7, cada función aproximadamente continua en un punto z es d-continua en z.
($\Leftarrow$) Supongamos que f es d-continua en z. Para cada $n \in \mathbb{N}$, existe un conjunto U_n d-abierto conteniendo a z tal que

$$|f(x) - f(z)| < \frac{1}{n} \quad \forall x \in U_n$$

Sea $r_n \searrow 0$ una sucesión de números reales tal que

$$\frac{1}{2h}\lambda(U_n \cap (z-h, z+h)) > 1 - \frac{1}{n} \qquad \forall h \in (0, r_n]$$

Sea $M_n := U_n \setminus \left(z - \frac{r_{n+1}}{n}, z + \frac{r_{n+1}}{n}\right)$ y $M := \bigcup\limits_n M_n$.

Para $h \in [r_{n+1}, r_n]$, tenemos que

$$\frac{1}{2h}\lambda(M \cap (z-h, z+h)) \geq \frac{1}{2h}\lambda(M_n \cap (z-h, z+h)) \geq 1 - \frac{1}{n} - \frac{2r_{n+1}}{2hn} \geq 1 - \frac{2}{n}$$

Por lo que, z es un punto de densidad de M y

$$\lim_{\substack{x \to z \\ x \in M}} f(x) = f(z)$$

$\square$

Corolario B.10. *Una función aproximadamente continua es medible.*

<u>*Demostración*</u>. Es consecuencia de que los conjuntos d-abiertos en la topología de la densidad son medibles y el teorema anterior. $\square$

A continuación demostramos un teorema de topología general que permite establecer determinadas propiedades de la topología de la densidad.

Teorema B.11. *Sea τ una topología sobre X tal que cada subconjunto numerable de X es τ-cerrado y cada conjunto τ-abierto es no numerable. Entonces:*

(a) El conjunto X es no numerable.

(b) No existen puntos τ-aislados.

(c) Los subconjuntos τ-compactos de X son exactamente los conjuntos finitos.

(d) Si $\tau - \lim x_n = x$, entonces el conjunto $\{n \in \mathbb{N} : x_n \neq x\}$ es finito.

(e) El espacio (X, τ) no es separable.

(f) No hay puntos de X con un sistema fundamental numerable de τ- entornos.

(g) El espacio (X, τ) no es metrizable.

(h) Si τ es una topología fina sobre un espacio métrico separable Baire (X, d) y cada función real τ-continua sobre X es de la primera clase de Baire sobre (X, d), entonces (X, τ) no es normal.

Demostración. Las afirmaciones (a), (b) y (e) son consecuencia inmediata de las hipótesis, (g) es consecuencia de (f).

(c) Sea K un conjunto infinito. Entonces existe un conjunto numerable $S \subset K$. La familia de conjuntos τ-abiertos $\{\{x\} \cup (X \setminus S) : x \in S\}$ forma un recubrimiento de K del que no se puede extraer un subrecubrimiento finito.

(d) Si el conjunto $\{n \in \mathbb{N} : x_n \neq x\}$ es infinito, para una cantidad infinita de $n \in \mathbb{N}$, x_n no pertenece al τ-entorno $X \setminus \{x_n : x_n \neq x\}$. Por tanto, $\tau - \lim x_n \neq x$.

(f) Supongamos que existe $\{V_n\}$ un sistema fundamental numerable de τ-entornos de un punto x de X. Como $\{x\}$ es no aislado, existe $x_n \in V_n \setminus \{x\}$. Entonces $X \setminus \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ es un τ-entorno de x que no contiene ningún V_n.

(h) Sean A, $B \subset X$ conjuntos numerables densos disjuntos y supongamos que (X, τ) es normal, entonces existe una función τ-continua f sobre X tal que $f(A) = 0$ y $f(B) = 1$. Puesto que f es de la primera clase de Baire sobre (X, d), los conjuntos disjuntos

$$[f \leq 1/3] \qquad [f \geq 2/3]$$

son $\mathcal{G}_\delta$-densos residuales, pero esto no puede ocurrir en un espacio Baire. $\square$

Teorema B.12 (propiedades de la topología de la densidad). *La topología de la densidad tiene las siguientes propiedades:*

a) $(\mathbb{R}, d)$ es un espacio Hausdorff completamente regular.

b) Cada conjunto d-abierto es no numerable y cada conjunto numerable es d-cerrado. En particular,

I) *No existen puntos aislados en d.*

II) *Los conjuntos d-compactos son exactamente los conjunto finitos.*

III) *Si d-$\lim_n x_n = x$, entonces el conjunto $\{n \in \mathbb{N} : x_n \neq x\}$ es finito.*

IV) *El espacio $(\mathbb{R}, d)$ no es separable.*

V) *No hay puntos de $\mathbb{R}$ con un sistema fundamental numerable de d-entornos.*

c) El espacio $(\mathbb{R}, d)$ no es normal.

<u>*Demostración*</u>. a) Sea $V \subset \mathbb{R}$ un conjunto d-abierto y $a \in V$. Hay que demostrar que existe una función d-continua $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $\varphi(a) > 0$ y $\varphi(x) = 0\ \forall x \in \mathbb{R} \setminus V$.

V es medible Lebesgue y existe un conjunto G que es $\mathcal{F}_\sigma$ en la topología ordinaria de $\mathbb{R}$ con $G \subset V$ tal que $\lambda(V \setminus G) = 0$; podemos suponer que $a \in G$. Todos los puntos de V son puntos de densidad de V, luego todos los puntos de G son puntos de densidad de G.

Por el teorema de Zahorski ([10, Teorema 6.5]), existe una función $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ con $0 \leq \varphi \leq 1$ tal que $G = \{x \in \mathbb{R} : \varphi(x) > 0\}$; como $a \in G$, $\varphi(a) > 0$. Si $x \notin V \Rightarrow x \notin G \Rightarrow \varphi(x) = 0$.

b) Si un conjunto d-abierto fuese numerable sería nulo, por lo que se llega a una contradicción. Los conjuntos numerables son d-cerrados pues si tomamos el complementario, es claro que tiene que ser d-abierto por la definición.

Luego estamos en las condiciones del teorema B.11 y las afirmaciones i), ii), iii), iv) y v) son ciertas.

c) Es consecuencia del apartado h) del teorema B.11. $\square$

Proposición B.13. *La topología de la densidad tiene la propiedad de $\mathcal{G}_\delta$-inserción. Por tanto, una función aproximadamente continua es de la primera clase de Baire en la topología ordinaria.*

<u>*Demostración*</u>. Sea $G \subset F$ con F un d-cerrado y G un d-abierto. Consideramos el siguiente conjunto

$$B := \{x \in \mathbb{R} : \text{ para cada } n \in \mathbb{N} \text{ existe } m > n \text{ tal que } \lambda(G \cap (x - 1/m, x + 1/m)) > 1/m\}$$

Es claro que B es un conjunto $\mathcal{G}_\delta$ en la topología ordinaria pues $B = \cap_n G_n$ con

$$G_n = \{x \in \mathbb{R} : \text{existe } m > n \text{ tal que } \lambda(G \cap (x - 1/m, x + 1/m)) > 1/m\}$$

Por la definición de conjunto d-abierto y conjunto d-cerrado se comprueba que $G \subset B \subset F$. $\square$

Observación B.14. *Por tanto, las funciones continuas en la topología de la densidad son de la primera clase de Baire en la topología ordinaria. Se sigue que una función de la primera clase de Baire en la topología de la densidad es de la segunda clase de Baire en la topología ordinaria.*

Proposición B.15. *Los conjuntos $\mathcal{F}_\sigma$ en la topología de la densidad son exactamente los conjuntos medibles Lebesgue.*

Demostración. Es claro que los conjuntos $\mathcal{F}_\sigma$ en la topología de la densidad son medibles Lebesgue (por ser una intersección numerable de conjuntos medibles).

Para demostrar el recíproco, sea A un conjunto medible Lebesgue, entonces $A = B \cup N$ donde B es un conjunto $\mathcal{F}_\sigma$ en la topología ordinaria (y por tanto en la topología densidad) y N es nulo. Es obvio que los conjuntos nulos son cerrados para la topología de la densidad. Por lo tanto A es un conjunto $\mathcal{F}_\sigma$ para la topología de la densidad. □

Observación B.16. *De aquí se deduce que una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de la primera clase de Borel en la topología de la densidad sí y sólo sí es medible Lebesgue.*

Bibliografía

[1] A. Alexiewicz and W. Orlicz. Sur la continuité et la classification de Baire des fonctions abstraites. *Fund. Math.*, **35**:105–126, (1948).

[2] R. Baire. Sur la théorie des ensembles. *Comptes Rendus Paris*, **129**, (1899).

[3] R. Baire. Sur la théorie des fonctions discontinues. *Comptes Rendus Paris*, **129**, (1899).

[4] R. Baire. Sur les fonctions de variables réelles. *Annali di Matematica Pura et Appl.*, **3**:1–123, (1899).

[5] R. Baire. Nouvelle démotration d'un théorème sur les fonctions discontinues. *Bull. Soc. Math. France*, **28**:173–179, (1900).

[6] R. Baire. *"Leçons sur les fonctions discontinues"*. Gauthier-Villars, Paris, 1905.

[7] S. Banach. Über analytisch darstellbare operationen in abstrakten räumen. *Fund. Math.*, **17**:283–295, (1931).

[8] C. Bessaga and A. Pelczynski. *"Selected Topics in Infinite-Dimensional Topology"*. Polish Sci. Publishers, Warsaw, 1975.

[9] É. Borel. *"Leçons sur les fonctions de variables réelles"*. Paris, 1905.

[10] A. M. Bruckner. *"Differentiation of Real Functions"*, page 28. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1978.

[11] D. K. Burke. *"Covering Properties",* in Handbook of Set-Theoretic Topology, pages 347–422. North-Holland, Amsterdam, 1984.

[12] J. Chaber and P. Zenor. On perfect subparacompactness and a metrization theorem for Moore spaces. *Topology Proceedings*, **2**:401–407, (1977).

[13] D. L. Cohn. *"Measure Theory"*, pages 55–56. Birkhäuser, Boston, Basel, Berlin, 1993.

[14] J. Diestel. *"Sequences and Series in Banach Spaces"*. Springer-Verlag, New York, 1984.

[15] C. Dowker. On a theorem of Hanner. *Ark. för Mat.*, **2**:307–313, (1952).

[16] J. Dugundji. An extension of Tietze's theorem. *Pacific J. Math.*, **1**:353–367, (1951).

[17] G. A. Edgar and R. R. F. Wheeler. Topological properties of Banach spaces. *Pacific J. Math.*, **115**:317–350, (1984).

[18] R. Engelking. *"General Topology"*. Polish Sci. Publishers, Warsaw, 1977.

[19] W. G. Fleissner. An axiom for nonseparable Borel theory. *Trans. Amer. Math. Soc.*, **251**:309–328, (1979).

[20] M. Fosgerau. *When are Borel functions Baire functions?* PhD thesis, University College London, 1991.

[21] M. Fréchet. Sur quelques points du calcul fonctionnel. *Rend. del Circ. Mat. di Palermo*, **22**:1–74, (1906).

[22] K. M. Garg. A general nonseparable theory of functions and multifunctions. *Real Analysis Exchange*, **9**:317–335, (1983-84).

[23] H. Hahn. *"Reelle Funktionen"*. Akad. Verlag, Leipzig, 1932.

[24] P. Halmos. *"Measure Theory"*. Van Nostrand, New York, 1950.

[25] R. W. Hansell. Borel measurable mapping for nonseparable metric spaces. *Trans. Amer. Math. Soc.*, **161**:145–169, (1971).

[26] R. W. Hansell. On Borel mapping and Baire functions. *Trans. Amer. Math. Soc.*, **194**:195–211, (1974).

[27] R. W. Hansell. First class selectors for upper semi-continuous multifunctions. *J. Funct. Anal.*, **75**:382–395, (1987).

[28] R. W. Hansell. *"First Class Functions with Values in Nonseparable Spaces"*, volume I, II of *Collection: Constantin Carathéodory: An international tribute*, pages 461–475. 1991.

[29] R. W. Hansell, J. E. Jayne, and M. Talagrand. Correction to the paper First class selector for weak upper semi-continuous mapping in Banach spaces. *J. Reine Angew. Math.*, **361**:219–220, (1985).

[30] R. W. Hansell, J. E. Jayne, and M. Talagrand. First class selector for weak upper semi-continuous mapping in Banach spaces. *J. Reine Angew. Math.*, **361**:201–220, (1985).

[31] F. Hausdorff. *"Set Theory"*. Chelsea, New York, 1957.

[32] J. E. Jayne, J. Orihuela, J. Pallarés, and G. Vera. σ-Fragmentability of multivalued maps and selection theorems. *Journal of Functional Analysis*, **117**:243–273, (1993).

[33] J. E. Jayne and C. A. Rogers. Borel selectors for upper semicontinuous multi-valued functions. *Matematika*, **32**:324–337, (1985).

[34] J. E. Jayne and C. A. Rogers. Borel selectors for upper semicontinuous set-valued maps. *Acta Math*, **155**:41–79, (1985).

[35] J. E. Jayne and C. A. Rogers. Upper semicontinuous set-valued functions. *Acta Math.,* **149**:87-125, (1982), **155**:149–152, (1985).

[36] H. J. K. Junnila. *"Three Covering Properties"*, pages 195–245. Surveys in General Topology, Ed. by G. M. Reed, London, New York, San Francisco, 1980.

[37] K. Kuratowski. Quelques problèmes concernant espaces métriques non-séparables. *Fund. Math.*, **25**:532–545, (1935).

[38] K. Kuratowski. *"Topology I"*. Academic Press, New York, 1966.

[39] K. Kuratowski. *"Topology II"*. Academic Press, New York, 1968.

[40] M. Laczkowich. Baire 1 functions. *Real. Anal Exchange*, **9**:15–28, (1983-84).

[41] H. Lebesgue. Sur l'approximation des fonctions. *Bull. Sci. Math.*, **22**:278–287, (1898).

[42] H. Lebesgue. Sur les fonctions de plusieurs variables. *Comptes Rendus Paris*, **128**, (1899).

[43] H. Lebesgue. Démotration d'un théorème de R. Baire, 1904. *Note II des Leçons sur les functions de variables réelles et leur représentation par des séries de polynomes*, de E. M. Borel; Paris, Gauthier-Villars.

[44] H. Lebesgue. Une propriété caractéristique des fonctions de classe 1. *Bull. Soc. Math. de France*, **32**:229–242, (1904).

[45] H. Lebesgue. Sur les fonctions représentables analytiquement. *Journ. Math. Pures et Appl.*, **1**:139–216, (1905).

[46] J. Lukes, J. Maly, and L. Zajizek. *"Fine Topology Methods in Real Analysis and Potential Theory"*, volume 1189 of *Lecture Notes in Mathematics.* Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 1986.

[47] J. Lukes and L. Zajícek. The insertion of $\mathcal{G}_\delta$ sets and fine topologies. *Comment. Math. Univ. Carolinae*, **18**:101–104, (1977).

[48] D. Martin and R. Solavay. Internal Cohen extensions and Souslin's problem. *Ann. Math.*, **94**:201–245, (1971).

[49] D. Montgomery. Non-separable metric spcaces. *Fund. Math.*, **25**:527–533, (1935).

[50] W. Moran. Separate continiuty and supports of measures. *J. London. Math. Soc.*, **44**:320–324, (1969).

[51] D. Preiss. Limits of approximately continuous functions. *Czechoslovak Math. J.*, **21**:371–372, (1971).

[52] C. A. Rogers. Functions of the first Baire class. *J. London Math. Soc*, **37**:535–544, (1988).

[53] S. Rolewicz. On inversion of non-linear transformations. *Studia Math.*, **17**:79–83, (1958).

[54] W. Rudin. Lebesgue's first theorem. *Math. Analysis and Applications, part B. Edited by L. Nachbin. Adv. in Math. Supplem. Studies 7B.* Academic Press, pages 741–747, (1981).

[55] V. V. Srivatsa. Baire class 1 selectors for upper semicontinuous set-valued maps. *Trans. Amer. Math. Soc.*, **337**:609–624, (1993).

[56] C. Stegall. Functions of the first Baire class with values in Banach spaces. *Proc. Amer. Math. Soc.*, **111**:981–991, (1991).

[57] A. H. Stone. Non-separable Borel sets. *Rozprawy Mat.*, **28**:41, (1962).

[58] A. H. Stone. *"Analytic sets in non-separable metric spaces".* Part 5 of Analytic Sets, Academic Press, London, 1980.

[59] G. Vera. Baire mesurability of separately continuous functions. *Quart. J. Math.*, **39**:109–116, (1988).

[60] L. Vesely. Characterization of Baire-one functions between topological spaces. *Acta Universitatis Carolinae Math et Phys.*, **33**:143–156, (1992).