INTEGRALES VECTORIALES DE RIEMANN Y MCSHANE

José Rodríguez Ruiz

TESINA DE LICENCIATURA

Departamento de Matemáticas
Universidad de Murcia
Septiembre de 2002

D. **José Luis García Hernández**, director del Departamento de Matemáticas de la Universidad de Murcia,

CERTIFICA

que la presente memoria con título **Integrales vectoriales de Riemann y McShane** ha sido realizada por el licenciado en Matemáticas **José Rodríguez Ruiz** y constituye su tesina.

Y para que así conste, en cumplimiento de la legislación vigente, firmo la presente en Murcia, a 6 de septiembre de 2002.

V^{o}B^{o} José Luis García Hernández

D. **Gabriel Vera Botí**

CERTIFICA

que la presente memoria con título **Integrales vectoriales de Riemann y McShane** ha sido realizada bajo su dirección por el licenciado en Matemáticas **José Rodríguez Ruiz** y constituye su tesina.

Y para que así conste, en cumplimiento de la legislación vigente, firmo la presente en Murcia, a 6 de septiembre de 2002.

V^{o}B^{o} Gabriel Vera Botí

Para Gloria, con todo mi amor

Agradecimientos

Como suele ser habitual, parte del papel que el sufrido lector tiene entre sus manos está destinado a mostrar la gratitud del autor hacia aquellas personas que, de un modo u otro, han colaborado para que este trabajo vea, al fin, la luz.

En primer lugar, quiero mostrar mi más sincero agradecimiento a Gabriel Vera, mi director, por proporcionarme la oportunidad de realizar esta tarea y, pese a la aleatoriedad de mis visitas, ser siempre un firme punto de apoyo, bien a la hora de despejar dudas, bien a la hora de ofrecer una perspectiva global de un cierto asunto.

Quisiera también reconocer la ayuda prestada por Bernardo Cascales, así como su constante empuje y motivación, que sin duda me han marcado profundamente. Asimismo, la colaboración de Matías Raja ha contribuido al enriquecimiento de la Sección 5.2 de esta memoria.

Sirvan estas líneas como homenaje a toda mi familia, mis padres, hermanos, tíos, abuelos... que siempre están ahí y me han ayudado permanentemente en la más difícil de todas las carreras: la vida.

Aunque en su "Espacios Métricos Booleanos" ha dejado bien claro que no es partidario de semejantes muestras de afecto, no quiero pasar por alto la ocasión de manifestar mi gratitud hacia Antonio Avilés. Las largas conversaciones sobre Matemáticas, de las que sin duda he salido beneficiado, y, sobre todo, su gran amistad, justifican plenamente su inclusión en la presente "lista"...

... en la que no puede faltar Mari Ángeles, una buena amiga que me ofreció su ordenador para teclear, entre otras cosas, esta memoria.

Y, sobre todo, doy las gracias a Gloria. Por su amor, por su comprensión, por estar a mi lado en los días grises y soleados, por su apoyo, por su paciencia, por su confianza y, en definitiva, por todo. A esta maravillosa chica va dedicado este modesto trabajo.

Índice General

Introducción

Desde sus orígenes, la Teoría de la Integración ha constituido una de las ramas más destacadas de la Matemática y sus aplicaciones en otros campos son múltiples y de enorme importancia. Nuestro trabajo se enmarca dentro de lo que se conoce como Integración Vectorial, que podemos definir brevemente como el estudio de técnicas de integración de funciones $f : \Omega \longrightarrow X$, donde Ω es un espacio de medida y X un espacio vectorial topológico, en general un espacio de Banach.

Desde los trabajos iniciales de G. Birkhoff, S. Bochner, N. Dunford y B.J. Pettis en los años 30 (véase [30]), un gran número de matemáticos ha puesto toda su energía en el desarrollo de técnicas de integración vectorial como medio para estudiar propiedades topológicas y geométricas de los espacios de Banach. Hasta ahora las integrales más analizadas y de mayor impacto en la teoría de espacios de Banach han sido las de Bochner (una generalización natural de la de Lebesgue) y Pettis. Nuestro trabajo versa sobre otros dos tipos de integral vectorial: las integrales de Riemann y McShane de funciones $f : [a, b] \longrightarrow X$, donde X es un espacio de Banach.

La Integral de Riemann Vectorial es la extensión natural de la conocida integral que se enseña a los estudiantes de primer curso de licenciatura. A ella dedicamos la primera parte de esta memoria, cuyo contenido resumimos a continuación.

En el *Capítulo 1* definimos la integral de Riemann y extendemos al caso general algunas propiedades elementales. Pronto se pone de manifiesto que el caso vectorial presenta ciertas diferencias con el escalar. Así, existen funciones $f : [a, b] \longrightarrow X$ integrables Riemann cuya norma $\|f\| : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ no es integrable Riemann y que, además, no son medibles Bochner. En particular, se observa que la integral de Bochner no es una extensión de la de Riemann, al contrario de lo que ocurre para funciones reales con la integral de Lebesgue.

En el *Capítulo 2* analizamos dos condiciones suficientes para que una función sea integrable Riemann: que tenga variación débilmente acotada o que sea integrable Darboux. Adaptamos al caso vectorial la conocida caracterización de Lebesgue sobre integrabilidad Darboux y deducimos que *una función acotada continua en casi todo punto es integrable Riemann.* Sin embargo, el recíproco no es cierto en general y el *Capítulo 3* está dedicado a estudiar la clase de los espacios de Banach para los que toda función integrable Riemann es continua en casi todo punto. Los únicos espacios conocidos con esta propiedad son los de dimensión finita, l^1 y el espacio de Tsirelson. Proporcionamos ejemplos que desmienten la conjetura para el resto de espacios de sucesiones clásicos, $C[0,1]$ y los espacios uniformemente convexos, además de analizar el problema para la topología débil.

En el *Capítulo 4* probamos que la integral de Pettis extiende a la de Riemann y hacemos un breve estudio de ciertas formas débiles de la integral.

El *Capítulo 5* está dedicado en su totalidad a caracterizar, mediante integración Riemann, un par de propiedades de los espacios de Banach relativas a la convergencia en norma de sucesiones convergentes respecto de ciertas topologías vectoriales más gruesas. Por ejemplo, y como aplicación del principal resultado de la *Sección 5.1*, obtenemos que:

- un espacio de Banach X es de Schur *si* y sólo si toda función débilmente continua $f : [0,1] \longrightarrow X$ es integrable Riemann;

- un espacio de Banach X es de dimensión finita *si* y sólo si toda función ω^*-continua $f : [0,1] \longrightarrow X^*$ es integrable Riemann.

En el *Capítulo 6* demostramos que toda función integrable Riemann tiene la llamada *propiedad de Bourgain* cuando X es real. Como consecuencia de este resultado, que creemos original, obtenemos una mejora de la afirmación *la integral de Pettis extiende a la de Riemann* y una prueba de la compacidad de $Z_f = \{x^* f :\ x^* \in B_{X^*}\}$ en $\|.\|_1$.

Finalizamos el bloque dedicado a la integral de Riemann con un breve resumen (*Capítulo 7*) de lo que actualmente se conoce sobre los conjuntos de límites de sumas de Riemann de una función acotada $f : [0,1] \longrightarrow X$. Repasamos sin demostraciones la historia de los dos principales problemas: la *existencia* de límites y la *convexidad* del conjunto de los mismos.

La segunda parte de esta memoria está dedicada al estudio de la INTEGRAL DE MCSHANE VECTORIAL, aunque el caso escalar ocupa un lugar importante en nuestro desarrollo.

A finales de los cincuenta, mientras trabajaba en problemas de ecuaciones diferenciales, J. Kurzweil definió y utilizó ([41]) la integral que luego se llamaría *de Henstock* (o *integral de Riemann generalizada*) para funciones $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$. La nomenclatura actualmente empleada es consecuencia del estudio detallado que R. Henstock hizo de la construcción de Kurzweil en [27] y [28] (probando, por ejemplo, el teorema de la convergencia monótona). La integral de Henstock (que coincide con la de Perron-Denjoy) es una extensión de la de Lebesgue, pero, en general, para una función f integrable Henstock su valor absoluto $|f|$ no tiene por qué serlo (esto asegura la existencia de funciones que no son integrables Lebesgue pero sí en el sentido de Henstock).

Ampliando la clase de particiones utilizada por Kurzweil, E.J. McShane obtuvo (en [43], dentro de un contexto mucho más general que el que nosotros vamos a considerar) una integral que *coincide* con la de Lebesgue. Aunque el caso escalar está sobradamente estudiado (hay tratados como [44] donde se desarrolla toda una teoría de integración McShane de funciones $\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ –a la postre equivalente a la de Lebesgue–), no es fácil encontrar una prueba autocontenida de la equivalencia entre las construcciones de McShane y Lebesgue para funciones de $[a, b]$ en $\mathbb{K}$. Por ello hemos optado por incluir todo un capítulo (concretamente el *9*) dedicado a justificar dicha equivalencia, que desempeña un papel fundamental en el resto de la memoria. A continuación resumimos el contenido de los otros dos capítulos de este bloque.

En el *Capítulo 8* introducimos la integral de McShane vectorial, demostramos el *lema de Henstock* (de especial importancia en la teoría), probamos que toda función medible simple es integrable McShane y un hecho destacable: al igual que en el caso escalar, *la integral de McShane extiende a la de Riemann*.

Esto muestra la diferencia que existe en el caso vectorial entre las integrales de McShane y Bochner (que, como indicamos anteriormente, es la extensión natural de la de Lebesgue). En general, la integral de McShane es una extensión de la de Bochner y ambas integrales coinciden si y sólo si el espacio es de dimensión finita. Estos resultados son parte del contenido del *Capítulo 10*, que está dedicado a comentar las relaciones existentes entre las integrales de McShane, Bochner y Pettis. En la *Sección 10.1* mostramos que la integrabilidad Pettis extiende a la de McShane. El recíproco es cierto si exigimos medibilidad Bochner a la función (*Sección 10.3*). Para demostrarlo nos apoyamos en un difícil teorema de paso al límite bajo la integral –*Sección 10.2*–, que nos permite deducir además los teoremas *de Vitali* y *de la convergencia dominada* para la integral de McShane. Cerramos el apartado dedicado a esta integral dando una caracterización de los espacios de Banach de dimensión finita en términos de una forma *fuerte* del lema de Henstock.

Hemos confeccionado un Apéndice que contiene una serie de definiciones y resultados complementarios utilizados en el resto de la memoria, desglosado en una serie de apartados. La mayoría son sobradamente conocidos y nos limitamos a dar el enunciado y una referencia bibliográfica. Sin embargo, se incluye la demostración de otros menos difundidos o para los que no hemos podido dar una referencia concreta.

En lo que respecta a las numerosas referencias empleadas, destacamos [21], [57] y [51] para la parte dedicada a la integral de Riemann, y [44], [22], [20] y [19] en lo que se refiere a la integral de McShane. No obstante, a lo largo de la memoria indicamos con precisión la fuente de cada resultado y proporcionamos al inicio de cada sección o capítulo las referencias elementales relativas al mismo.

El presente trabajo no es una mera recopilación del material de los artículos citados anteriormente o el resto de los que aparecen en la bibliografía.

Hemos ampliado y, en algunos casos, corregido algunas de las demostraciones originales (ejemplos destacados son A.4.15, 3.3.1 y 10.3.3).

Ciertos resultados han sido obtenidos de manera independiente (es decir, hemos conseguido una prueba de ellos sin disponer de los artículos donde aparecen demostrados), por ejemplo 2.2.14, 3.2, 8.2.2, 8.3.1 *iii)*, 8.4.1, 10.3.1 *iii)*, 10.3.9 y 10.3.10. En otros casos hemos conseguido demostraciones alternativas más elementales o transparentes, como pueden ser 3.2.5, 6.0.4, 10.3.1 ó 10.3.4.

Incluimos también mejoras y generalizaciones de resultados previos, como pueden ser 2.1.4, 4.0.12 *iii)*, 5.1.2 *iv)*, 5.2.5 y 6.0.2. Además, creemos que 6.0.1 es un resultado original que aparece publicado aquí por primera vez.

Notaciones y convenios

Aunque la notación es estándar (la de textos como [17]), creemos conveniente hacer una serie de observaciones al respecto.

En toda la memoria $\mathbb{K}$ denota indistintamente el cuerpo $\mathbb{R}$ (de los números reales) ó $\mathbb{C}$ (de los números complejos).

Para nosotros un *espacio de medida* es una terna (Ω, Σ, μ), donde Ω es un conjunto, Σ es una σ-álgebra en Ω y $\mu : \Sigma \longrightarrow [0, \infty]$ una medida contablemente aditiva tal que $\mu(\emptyset) = 0$. Denotamos por $\mathcal{L}^1(\mu)$ al conjunto de las funciones de Ω en $\mathbb{K}$ integrables Lebesgue. El subconjunto de las reales se representa mediante $\mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\mu)$. El espacio de Banach cociente obtenido identificando funciones integrables que coinciden en casi todo punto se denota por $L^1(\mu)$. Mantenemos la misma notación para una función integrable y su clase de equivalencia en $L^1(\mu)$. Si $E \in \Sigma$, definimos $\Sigma_E = \{A \cap E : A \in \Sigma\}$ y $\mu_E = \mu \restriction_{\Sigma_E}$.

Si $A, B \in \Sigma$ son medibles, decimos que A está *contenido esencialmente* en B si $\mu(A \setminus B) = 0$.

La medida (resp. exterior) de Lebesgue se representa mediante m (resp. m^*) y la σ-álgebra de Lebesgue de $[a, b]$ mediante Σ. Un subconjunto medible $E \subset [a, b]$ es *conulo* si $m([a, b] \setminus E) = 0$.

Si $E \subset \Omega$, su *función característica* viene dada por $\chi_E : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$, $\chi_E(x) = 0$ si $x \notin E$ y $\chi_E(x) = 1$ si $x \in E$. Si V es un espacio vectorial y $f : \Omega \longrightarrow V$ es una aplicación, definimos $\chi_E f$ como la función que vale 0 fuera de E y coincide con f en E.

En toda la memoria X representa un espacio de Banach arbitrario sobre $\mathbb{K}$ (es decir, puede ser tanto real como complejo). Las excepciones a esta regla se indican convenientemente. El dual topológico se representa mediante X^*, B_X es el conjunto de elementos de X de norma menor o igual que 1 y S_X el formado por los de norma 1. La topología débil de X (resp. débil estrella de X^*) la denotamos por ω ó $\sigma(X, X^*)$ (resp. ω^* ó $\sigma(X^*, X)$). Si no se dice lo contrario la topología del espacio X que consideramos es la inducida por la norma (por ejemplo, si escribimos $\lim_n x_n = x$ nos referimos a la topología normada). Una *inmersión* de espacios de Banach es una aplicación lineal $T : X \longrightarrow Y$ que es un homeomorfismo entre X y $T(X)$. Obtenemos un *renormamiento* de un espacio de Banach cuando cambiamos la norma original por otra equivalente (es decir, que induce la misma topología).

Para cada $n \in \mathbb{N}$ definimos $e_n = (\delta_{i,n})_{i \in \mathbb{N}} \in \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$, donde $\delta_{i,n}$ representa la delta de Dirac: $\delta_{i,n} = 0$ si $i \neq n$, $\delta_{n,n} = 1$.

Una *topología vectorial* τ en un espacio vectorial V es una topología (no necesariamente Hausdorff) que hace continuas a las operaciones de suma y producto por escalares del espacio V. El par (V, τ) se dice *espacio vectorial topológico*.

El *interior* de un subconjunto A de un espacio topológico se denota mediante $int(A)$, su adherencia o clausura mediante $\overline{A}$.

En toda la memoria $[a, b]$ es un intervalo cerrado y acotado de $\mathbb{R}$. Salvo que se diga lo contrario todos los intervalos son no degenerados (es decir, no unipuntuales).

Parte I

Integral de Riemann

Capítulo 1

Definición y propiedades elementales

Se llama *partición de Riemann* de $[a, b]$ a una colección

$$\mathcal{P} = \{([a_i, b_i], s_i) : i = 1, \ldots, n\}$$

donde

- $\{[a_i, b_i]\}_{i=1,\ldots,n}$ es un conjunto de subintervalos de $[a, b]$ (los *subintervalos de* $\mathcal{P}$) que no se solapan (es decir, la intersección de dos distintos es como mucho un punto) cuya unión es $[a, b]$. El conjunto de extremos de estos intervalos se llama *conjunto de puntos* de $\mathcal{P}$ y lo denotaremos mediante $e(\mathcal{P})$.

- $s_i \in [a_i, b_i]$ para cada $i = 1, \ldots, n$. Se llamarán *puntos intermedios* de la partición y su conjunto lo denotaremos por $t(\mathcal{P})$. Normalmente escribiremos $t(\mathcal{P}) = \{s_1, \ldots, s_n\}$ (aunque haya repeticiones).

La *norma* de la partición se define como

$$|\mathcal{P}| = \max\{b_i - a_i : i = 1, \ldots, n\}.$$

Sea $\mathcal{P}'$ otra partición de Riemann del intervalo $[a, b]$. Diremos que $\mathcal{P}'$ es *más fina* que $\mathcal{P}$ si $e(\mathcal{P}) \subset e(\mathcal{P}')$.

Sea ahora $f : [a, b] \longrightarrow X$ una función. La *suma de Riemann* de f asociada a la partición $\mathcal{P}$ se define como

$$f(\mathcal{P}) = \sum_{i=1}^{n} (b_i - a_i) f(s_i).$$

En otras ocasiones escribiremos abreviadamente $f(\mathcal{P}) = \sum_{i=1}^{n} m(H_i) f(s_i)$ para $H_i = [a_i, b_i]$ y $m(H_i) = b_i - a_i$.

Denotaremos el conjunto de las particiones de Riemann del intervalo $[a, b]$ mediante $\Pi[a, b]$. De aquí en adelante, salvo que se diga lo contrario, cuando hablemos de una *partición de Riemann* nos estaremos refiriendo a una *partición de Riemann del intervalo* $[a, b]$.

Definición 1.0.1. *Sea $f : [a, b] \longrightarrow X$ una función. Diremos que es* integrable Riemann *en $[a, b]$ con integral $z \in X$ si satisface las siguientes condiciones equivalentes:*

i) Para cada $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que, para toda partición de Riemann $\mathcal{P}$ de norma menor que δ,
$$\|f(\mathcal{P}) - z\| < \epsilon.$$

ii) Para cada $\epsilon > 0$ existe una partición de Riemann $\mathcal{P}_\epsilon$ tal que, para toda $\mathcal{P} \in \Pi[a, b]$ más fina que $\mathcal{P}_\epsilon$,
$$\|f(\mathcal{P}) - z\| < \epsilon.$$

Demostramos la equivalencia como en [21, Teorema 3].

Proposición 1.0.2. *Para una función $f : [a, b] \longrightarrow X$ las dos condiciones anteriores son equivalentes e implican que f es acotada.*

Demostración. $i) \Rightarrow ii)$ Sea $\epsilon > 0$. Existe $\delta > 0$ tal que $\|f(\mathcal{P}) - z\| < \epsilon$ para cada $\mathcal{P} \in \Pi[a, b]$ de norma menor que δ. Fijamos $\mathcal{P}_0 \in \Pi[a, b]$ de norma menor que δ. Si $\mathcal{P}$ es una partición de Riemann más fina que $\mathcal{P}_0$ es claro que $|\mathcal{P}| \leq |\mathcal{P}_0| < \delta$ y así $\|f(\mathcal{P}) - z\| < \epsilon$.

Antes de probar la otra punta de flecha afirmamos que *si f satisface $ii)$, entonces está acotada.* En efecto: tomemos una partición de Riemann
$$\mathcal{P}_0 = \{([a_i, b_i], s_i) : i = 1, \ldots, n\}$$
tal que $\|f(\mathcal{P}) - z\| < 1$ para cada $\mathcal{P} \in \Pi[a, b]$ más fina que $\mathcal{P}_0$. Para ver que f es acotada basta comprobar que lo está en cada uno de los subintervalos de $\mathcal{P}_0$. Fijamos $1 \leq i \leq n$. Para cada $t \in [a_i, b_i]$ definimos la partición $\mathcal{P}_t \in \Pi[a, b]$ como aquella que tiene como subintervalos los de $\mathcal{P}_0$ y puntos intermedios
$$s_j \in [a_j, b_j] \text{ para cada } j \neq i \quad \text{y} \quad t \in [a_i, b_i].$$
Evidentemente, $\mathcal{P}_t$ es más fina que $\mathcal{P}_0$ y por tanto $\|f(\mathcal{P}_t) - z\| < 1$. Además $\|f(\mathcal{P}_0) - z\| < 1$ y, entonces, $\|f(\mathcal{P}_t) - f(\mathcal{P}_0)\| < 2$. Pero
$$f(\mathcal{P}_t) - f(\mathcal{P}_0) = (b_i - a_i)(f(t) - f(s_i)),$$
lo que implica
$$\|f(t) - f(s_i)\| < \frac{2}{b_i - a_i}.$$
Esta desigualdad es válida para todo $t \in [a_i, b_i]$ y así f es acotada en dicho subintervalo.

ii) $\Rightarrow$ *i)* Por la observación anterior existe $M > 0$ tal que $\|f(t)\| < M$ para todo $t \in [a, b]$.

Dado $\epsilon > 0$, sea $\mathcal{P}_0 \in \Pi[a, b]$ tal que $\|f(\mathcal{P}) - z\| < \frac{\epsilon}{2}$ para cada $\mathcal{P} \in \Pi[a, b]$ más fina que $\mathcal{P}_0$. Afirmamos que para cada $\mathcal{P} \in \Pi[a, b]$

$$|\mathcal{P}| < \delta := \frac{\epsilon}{4M(n+1)} \quad \Rightarrow \quad \|f(\mathcal{P}) - z\| < \epsilon,$$

donde n es el número de subintervalos de $\mathcal{P}_0$.

En efecto, sea $\mathcal{P} \in \Pi[a, b]$ tal que $|\mathcal{P}| < \delta$. Escribimos

$$\mathcal{P}_0 = \{([a_i, b_i], s_i) : i = 1, \ldots, n\}$$

$$\mathcal{P} = \{([c_i, d_i], t_i) : i = 1, \ldots, m\}.$$

Definimos el conjunto Y de los pares $(i, j) \in \{1, \ldots, n\} \times \{1, \ldots, m\}$ tales que $[a_i, b_i] \cap [c_j, d_j] =: I_{i,j}$ no es ni vacío ni un punto. Construimos la siguiente partición auxiliar $\mathcal{P}_1 \in \Pi[a, b]$

$$\mathcal{P}_1 = \{(I_{i,j}, r_{i,j}) : \ (i, j) \in Y\},$$

donde para cada $(i, j) \in Y$

- Si $I_{i,j} = [c_j, d_j]$, entonces $r_{i,j} := t_j$.
- En caso contrario tomamos $r_{i,j} \in I_{i,j}$ arbitrario.

Observamos que

$$\begin{aligned}
\|f(\mathcal{P}) - f(\mathcal{P}_1)\| &= \left\| \sum_{j=1}^{m} (d_j - c_j) f(t_j) - \sum_{(i,j) \in Y} m(I_{i,j}) f(r_{i,j}) \right\| \\
&= \left\| \sum_{j=1}^{m} \sum_{\substack{1 \leq i \leq n \\ (i,j) \in Y}} m(I_{i,j}) \left(f(t_j) - f(r_{i,j}) \right) \right\| \\
&\leq \sum_{j=1}^{m} \sum_{\substack{1 \leq i \leq n \\ (i,j) \in Y \\ I_{i,j} \neq [c_j, d_j]}} m(I_{i,j}) \|f(t_j) - f(r_{i,j})\| \\
&\leq 2M \sum_{j=1}^{m} \sum_{\substack{1 \leq i \leq n \\ (i,j) \in Y \\ I_{i,j} \neq [c_j, d_j]}} m(I_{i,j}) \\
&\leq 2M \sum_{j \in J} (d_j - c_j), \qquad (1.1)
\end{aligned}$$

donde J es el conjunto de los $j \in \{1, \ldots, m\}$ para los que existe un $1 \leq i \leq n$ tal que $(i, j) \in Y$ y $[c_j, d_j] \neq I_{i,j}$ (es decir, $(c_j, d_j) \cap e(\mathcal{P}_0) \neq \emptyset$). Como $e(\mathcal{P}_0)$ tiene $n + 1$ elementos, es claro que $|J| \leq n + 1$.

De la desigualdad anterior se desprende que

$$\|f(\mathcal{P}) - f(\mathcal{P}_1)\| < 2M(n+1)|\mathcal{P}| < \frac{\epsilon}{2}$$

por la elección de δ. Por construcción $\mathcal{P}_1$ es más fina que $\mathcal{P}_0$ y así

$$\|f(\mathcal{P}) - z\| \leq \|f(\mathcal{P}_1) - z\| + \|f(\mathcal{P}) - f(\mathcal{P}_1)\| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

□

Si f es integrable Riemann, la unicidad del vector z que aparece en la definición es obvia. Lo llamaremos *integral* de f en $[a,b]$ y lo denotaremos mediante $\int_a^b f$ ó $(R)\int_a^b f$. Otra notación que conviene fijar es: $\int_b^a f := -\int_a^b f$.

Es evidente que $\Pi[a,b]$ puede ser preordenado de dos formas:

1. $\mathcal{P} \preceq_1 \mathcal{P}'$ si y sólo si $|\mathcal{P}'| \leq |\mathcal{P}|$.
2. $\mathcal{P} \preceq_2 \mathcal{P}'$ si y sólo si $e(\mathcal{P}) \subset e(\mathcal{P}')$.

Proposición 1.0.3. $(\Pi[a,b], \preceq_1)$ *y* $(\Pi[a,b], \preceq_2)$ *son conjuntos dirigidos. Dada una función* $f : [a,b] \longrightarrow X$ *podemos definir dos redes*

$$S_f^1 : (\Pi[a,b], \preceq_1) \longrightarrow X \quad y \quad S_f^2 : (\Pi[a,b], \preceq_2) \longrightarrow X$$

mediante $S_f^1(\mathcal{P}) = S_f^2(\mathcal{P}) = f(\mathcal{P})$. *Son equivalentes:*

i) f *es integrable Riemann en* $[a,b]$.

ii) La red S_f^1 *es convergente.*

iii) La red S_f^2 *es convergente.*

En tal caso la integral y los límites de las redes coinciden.

Demostración. Es elemental. Veamos por ejemplo que $(\Pi[a,b], \preceq_2)$ es dirigido. En efecto, sean $\mathcal{P}, \mathcal{P}' \in \Pi[a,b]$, que representamos

$$\mathcal{P} = \{([a_i, b_i], s_i) : i = 1, \ldots, n\},$$

$$\mathcal{P}' = \{([c_i, d_i], t_i) : i = 1, \ldots, m\}.$$

Definimos, como en la prueba precedente, el conjunto Y de los pares $(i,j) \in \{1,\ldots,n\} \times \{1,\ldots,m\}$ tales que $[a_i,b_i] \cap [c_j,d_j] =: I_{i,j}$ no es ni vacío ni un punto. Definimos ahora $\mathcal{P}'' \in \Pi[a,b]$ mediante

$$\mathcal{P}_1 = \{(I_{i,j}, r_{i,j}) : \ (i,j) \in Y\}$$

para ciertos $r_{i,j} \in I_{i,j}$ arbitrarios. Es claro que $\mathcal{P} \preceq \mathcal{P}''$ y $\mathcal{P}' \preceq \mathcal{P}''$.

□

La completitud del espacio X nos permite dar el siguiente criterio de Cauchy [21, Teorema 5]. La condición *iv)* (aparentemente más débil) nos será de gran utilidad en lo sucesivo.

Proposición 1.0.4. *Para una función $f : [a, b] \longrightarrow X$ son equivalentes:*

i) *f es integrable Riemann en $[a, b]$.*

ii) *Para cada $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2 \in \Pi[a, b]$ tienen norma menor que δ, entonces $\|f(\mathcal{P}_1) - f(\mathcal{P}_2)\| < \epsilon$.*

iii) *Para cada $\epsilon > 0$ existe $\mathcal{P}_\epsilon \in \Pi[a, b]$ tal que si $\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2 \in \Pi[a, b]$ son más finas que $\mathcal{P}_\epsilon$, entonces $\|f(\mathcal{P}_1) - f(\mathcal{P}_2)\| < \epsilon$.*

iv) *Para cada $\epsilon > 0$ existe $\mathcal{P}_\epsilon \in \Pi[a, b]$ tal que si $\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2 \in \Pi[a, b]$ satisfacen $e(\mathcal{P}_1) = e(\mathcal{P}_2) = e(\mathcal{P}_\epsilon)$, entonces $\|f(\mathcal{P}_1) - f(\mathcal{P}_2)\| < \epsilon$.*

Demostración. *i)* $\Leftrightarrow$ *ii)* y *i)* $\Leftrightarrow$ *iii)* son consecuencia de la condición de Cauchy para redes y la proposición 1.0.3.

iii) $\Rightarrow$ *iv)* es evidente.

iv) $\Rightarrow$ *iii)* Sea $\epsilon > 0$ fijo. Por hipótesis existe $\mathcal{P}_\epsilon \in \Pi[a, b]$ tal que para cada par $\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2 \in \Pi[a, b]$ con los mismos puntos que $\mathcal{P}_\epsilon$ tenemos $\|f(\mathcal{P}_1) - f(\mathcal{P}_2)\| < \frac{\epsilon}{2}$.

Escribimos $\mathcal{P}_\epsilon = \{([a_i, b_i], s_i) : i = 1, \ldots, n\}$ y definimos la partición auxiliar

$$\mathcal{P}_0 = \{([a_i, b_i], a_i) : i = 1, \ldots, n\}.$$

Vamos a demostrar a continuación que para cada $\mathcal{P} \in \Pi[a, b]$ más fina que $\mathcal{P}_\epsilon$ se cumple $\|f(\mathcal{P}) - f(\mathcal{P}_0)\| < \frac{\epsilon}{2}$ (con esta afirmación la prueba termina).

En efecto, tomamos $\mathcal{P} = \{([c_j, d_j], t_j) : i = 1, \ldots, m\}$ más fina que $\mathcal{P}_\epsilon$. Existe una partición de $\{1, \ldots, m\}$, digamos $J_1, \ldots, J_n$, tal que para cada $1 \leq i \leq n$

$$[a_i, b_i] = \bigcup_{j \in J_i} [c_j, d_j].$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned}
f(\mathcal{P}_0) - f(\mathcal{P}) &= \sum_{i=1}^{n} (b_i - a_i) f(a_i) - \sum_{j=1}^{m} (d_j - c_j) f(t_j) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \left((b_i - a_i) f(a_i) - \sum_{j \in J_i} (d_j - c_j) f(t_j) \right) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j \in J_i} (d_j - c_j)(f(a_i) - f(t_j)) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j \in J_i} \frac{d_j - c_j}{b_i - a_i} (b_i - a_i)(f(a_i) - f(t_j)).
\end{aligned} \tag{1.2}$$

Es decir, $f(\mathcal{P}_0) - f(\mathcal{P}) \in \sum_{i=1}^n co(R_i)$, siendo

$$R_i = \{(b_i - a_i)(f(s) - f(t)) : t, s \in [a_i, b_i]\},$$

Por otra parte afirmamos

$$\sum_{i=1}^n co(R_i) \subset co(\sum_{i=1}^n R_i). \tag{1.3}$$

En efecto: es inmediato (razonando por inducción en n) que nos podemos reducir al caso $n = 2$. Sean $x \in co(R_1)$ e $y \in co(R_2)$. Existen $f_1, \ldots, f_r, g_1, \ldots, g_s \in [0,1]$ tales que $\sum_{k=1}^r f_k = 1$, $\sum_{l=1}^s g_l = 1$, $x = \sum_k f_k x_k$ e $y = \sum_l g_l y_l$ para ciertos $x_1, \ldots, x_r \in R_1$ e $y_1, \ldots, y_s \in R_2$. Es inmediato comprobar que

$$x + y = \sum_{k,l} (f_k g_l)(x_k + y_l)$$

y, además, $1 = \left(\sum_k f_k\right)\left(\sum_l g_l\right) = \sum_{k,l} f_k g_l$, lo que prueba la afirmación.

Volviendo a $iv) \Rightarrow iii)$, tenemos entonces que $f(\mathcal{P}_0) - f(\mathcal{P}) \in co\left(\sum_{i=1}^n R_i\right)$. Para concluir vamos a ver que

$$x \in co\left(\sum_{i=1}^n R_i\right) \quad \Rightarrow \quad \|x\| < \frac{\epsilon}{2}$$

En efecto, por la convexidad de las bolas en X basta probar que si $x \in \sum_{i=1}^n R_i$ entonces $\|x\| < \frac{\epsilon}{2}$. Evidentemente

$$\sum_{i=1}^n R_i = \{f(\mathcal{P}_1) - f(\mathcal{P}_2) : \mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2 \in \Pi[a,b] \text{ tales que } e(\mathcal{P}_1) = e(\mathcal{P}_2) = e(\mathcal{P}_\epsilon)\}$$

está formado por elementos de norma menor que $\frac{\epsilon}{2}$ por la elección de $\mathcal{P}_\epsilon$. Esto completa la prueba. □

A continuación extendemos al caso vectorial unas sencillas propiedades sobradamente conocidas de la integral de Riemann de funciones reales, tal y como sugiere R.A. Gordon en [21, Teoremas 7-8].

Observación 1.0.5. *Sea $x \in X$ fijo. Sea $f : [a,b] \longrightarrow X$ la función constante con imagen $\{x\}$. Entonces $f(\mathcal{P}) = (b-a)x$ para cada $\mathcal{P} \in \Pi[a,b]$ y, por tanto, f es integrable Riemann y $\int_a^b f = (b-a)x$. Emplearemos la notación $\int_a^b x := \int_a^b f$.*

Proposición 1.0.6. *Sean $f : [a,b] \longrightarrow X$ integrable Riemann y $[c,d] \subset [a,b]$. Entonces $f \restriction_{[c,d]}$ es integrable Riemann en $[c,d]$.*

Nota 1.0.7. *Denotaremos de igual modo a una función f y a cualquier restricción suya.*

Demostración. Es simple consecuencia del criterio de Cauchy 1.0.4. Si $\epsilon > 0$, tomamos $\delta > 0$ tal que $\|f(\mathcal{P}_1) - f(\mathcal{P}_2)\| < \epsilon$ para todo par de particiones de Riemann de $[a,b]$ de norma menor que δ. Dadas ahora $\mathcal{P}, \mathcal{P}' \in \Pi[c,d]$ tales que $|\mathcal{P}|, |\mathcal{P}'| < \delta$, podemos encontrar $\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2 \in \Pi[a,b]$ de norma menor que δ tales que

$$f(\mathcal{P}_1) - f(\mathcal{P}_2) = f(\mathcal{P}) - f(\mathcal{P}').$$

La construcción es obvia: sean $\mathcal{P}_l$ y $\mathcal{P}_r$ particiones de Riemann de norma menor que δ de los subintervalos $[a,c]$ y $[d,b]$ respectivamente (si alguno es degenerado no lo consideramos en el razonamiento). Entonces los subintervalos de $\mathcal{P}_1$ (resp. $\mathcal{P}_2$) serán los de $\mathcal{P}$ (resp. $\mathcal{P}'$) más los de $\mathcal{P}_l$ y $\mathcal{P}_r$; los puntos intermedios asociados a $\mathcal{P}_1$ (resp. $\mathcal{P}_2$) serán los de $\mathcal{P}$ (resp. $\mathcal{P}'$) junto con los de $\mathcal{P}_r$ y $\mathcal{P}_l$. □

Proposición 1.0.8. *Sean $f : [a,b] \longrightarrow X$ una función y $a < c < b$. Entonces f es integrable Riemann en $[a,b]$ si y sólo si $f \upharpoonright_{[a,c]}$ y $f \upharpoonright_{[c,b]}$ son integrables Riemann en $[a,c]$ y $[c,b]$ respectivamente. En tal caso*

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f.$$

Demostración. Una implicación es consecuencia del resultado precedente.

Para ver el recíproco fijamos $\epsilon > 0$ y un par de particiones $\mathcal{P}_1 \in \Pi[a,c]$, $\mathcal{P}_2 \in \Pi[c,b]$ tales que si $\mathcal{P} \in \Pi[a,c]$ (resp. $\mathcal{P} \in \Pi[c,b]$) es más fina que $\mathcal{P}_1$ (resp. $\mathcal{P}_2$), entonces

$$\left\| f(\mathcal{P}) - \int_a^c f \right\| < \frac{\epsilon}{2}$$

y respectivamente

$$\left\| f(\mathcal{P}) - \int_c^b f \right\| < \frac{\epsilon}{2}.$$

Sea ahora $\mathcal{P}_0 \in \Pi[a,b]$ definida *ensamblando* $\mathcal{P}_1$ y $\mathcal{P}_2$ (es decir, sus subintervalos son los de $\mathcal{P}_1$ más los de $\mathcal{P}_2$, y sus puntos intermedios los de $\mathcal{P}_1$ más los de $\mathcal{P}_2$ –asociados a los subintervalos correspondientes–). Si ahora $\mathcal{P} \in \Pi[a,b]$ es más fina que $\mathcal{P}_0$ resulta que $e(\mathcal{P}_1) \cup e(\mathcal{P}_2) \subset e(\mathcal{P})$, $c \in e(\mathcal{P})$ y podemos construir a partir de $\mathcal{P}$ dos particiones $\mathcal{P}_1' \in \Pi[a,c]$ y $\mathcal{P}_2' \in \Pi[c,b]$ del modo siguiente:

- $\mathcal{P}_1'$ tiene como subintervalos los de $\mathcal{P}$ contenidos en $[a,c]$, y como puntos intermedios los que tiene $\mathcal{P}$ asociados a los anteriores intervalos.

- $\mathcal{P}_2'$ tiene como subintervalos los de $\mathcal{P}$ contenidos en $[c,b]$, y como puntos intermedios los que tiene $\mathcal{P}$ asociados a aquéllos.

Es claro que $\mathcal{P}_1 \preceq \mathcal{P}_1'$ y $\mathcal{P}_2 \preceq \mathcal{P}_2'$. Por tanto

$$\left\| f(\mathcal{P}) - \int_a^c f - \int_c^b f \right\| = \left\| \left(f(\mathcal{P}_1') - \int_a^c f \right) + \left(f(\mathcal{P}_2') - \int_c^b f \right) \right\| < \epsilon.$$

Esto prueba la otra implicación y la *aditividad respecto del intervalo de integración.* □

Proposición 1.0.9. *El conjunto $R([a,b],X)$ de las funciones de $[a,b]$ en X integrables Riemann es un espacio vectorial y la integral es una forma lineal sobre él.*

Demostración. Trabajamos con las notaciones de la proposición 1.0.3. Si $f,g \in R([a,b],X)$ y $v,w \in \mathbb{K}$, entonces la función $h = vf + wg : [a,b] \longrightarrow X$ satisface para cada $\mathcal{P} \in \Pi[a,b]$

$$S_h^1(\mathcal{P}) = vS_f^1(\mathcal{P}) + wS_g^1(\mathcal{P}).$$

Por hipótesis existen los límites (en norma)

$$\int_a^b f = \lim S_f^1 \quad \text{y} \quad \int_a^b g = \lim S_g^1.$$

La continuidad de la suma y el producto por escalares en X implica que existe el límite de la red S_h^1 y vale $v\int_a^b f + w\int_a^b g$. □

Proposición 1.0.10. *Sea $f : [a,b] \longrightarrow X$ una función integrable Riemann. Sea M una cota superior de $\|f\|$ en $[a,b]$. Entonces*

$$\left\| \int_a^b f \right\| \leq M(b-a).$$

Si además $\|f\| : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ es integrable Riemann,

$$\left\| \int_a^b f \right\| \leq \int_a^b \|f\|.$$

Demostración. Sea $\mathcal{P} \in \Pi[a,b]$ arbitraria. Si

$$\mathcal{P} = \{([a_i,b_i],s_i) : i = 1,\ldots,n\},$$

entonces

$$\|f(\mathcal{P})\| = \left\| \sum_{i=1}^n (b_i - a_i) f(s_i) \right\| \leq \sum_{i=1}^n (b_i - a_i)\|f\|(s_i) = \|f\|(\mathcal{P}) \leq M(b-a).$$

Esta desigualdad (válida para toda partición de Riemann del intervalo) y la proposición 1.0.3 finalizan la prueba. □

Hasta ahora todo lo que hemos visto guarda un claro paralelismo con las propiedades de la integral de Riemann de funciones reales. A continuación mostramos que una de ellas no se preserva en el caso general: la *integrabilidad absoluta*. El siguiente ejemplo [21, Ejemplo 14] reúne diversas patologías de la integral de Riemann vectorial que serán analizadas con detalle en los Capítulos 2 (sección 2.2) y 3.

Ejemplo 1.0.11 (B.J. Pettis, 1938). *Sea $B[a,b]$ el espacio de Banach de las funciones reales acotadas definidas en $[a,b]$ (con la norma del supremo). Si $E \subset [a,b]$ no es medible Lebesgue, consideramos la función $f : [a,b] \longrightarrow B[a,b]$ definida por $f(t) = \chi_{\{t\}}$ si $t \in E$, $f(t) = 0$ en caso contrario. Entonces f es integrable Riemann, mientras que $\|f\|$ no es medible Lebesgue (y, por tanto, no puede ser integrable Riemann).*

Demostración. Veamos en primer lugar la integrabilidad. Sean $\mathcal{P}, \mathcal{P}' \in \Pi[a,b]$ con los mismos subintervalos $\{[a_i,b_i]\}_{1\leq i\leq n}$ y puntos intermedios $(s_i)_{1\leq i\leq n}$ y $(t_i)_{1\leq i\leq n}$, respectivamente. Supongamos que $b_i - a_i = d$ para todo $1 \leq i \leq n$. Un punto $x \in [a,b]$ puede coincidir como mucho con dos de los (s_i) y con dos de los (t_i). Por tanto

$$\begin{aligned} \|f(\mathcal{P}) - f(\mathcal{P}')\| &= \left\| \sum_{i=1}^{n} (b_i - a_i)(f(s_i) - f(t_i)) \right\| \\ &= d \left\| \sum_{i=1}^{n} (\chi_{\{s_i\}\cap E} - \chi_{\{t_i\}\cap E}) \right\| \\ &\leq 2d. \end{aligned}$$

Esta desigualdad, junto con el criterio *iv*) de la proposición 1.0.4, proporciona la integrabilidad Riemann de f.

Por otro lado, la elección de E garantiza que $\|f\| = \chi_E$ no es medible Lebesgue. $\square$

Presentamos a continuación una versión preliminar del *teorema fundamental del cálculo* para la integral de Riemann [21, Teorema 8]. Recuérdese que una función $f : [a,b] \longrightarrow X$ se dice *lipschitziana* (con constante de Lipschitz $L > 0$) cuando

$$\|f(t) - f(s)\| \leq L|t - s|$$

para cada $t, s \in [a,b]$. En tal caso f es continua.

Proposición 1.0.12. *Sea $f : [a,b] \longrightarrow X$ integrable Riemann. Definimos su función* integral indefinida *mediante $F(t) := \int_a^t f$ para $a < t \leq b$, $F(a) = 0$. Entonces:*

- *F es lipschitziana en $[a,b]$.*
- *Si f es continua en un punto $t \in [a,b]$, entonces existe $F'(t) = f(t)$.*

Demostración. Veamos en primer lugar la lipschitzianidad de F. Sea M una cota superior de $\|f\|$ en $[a,b]$. Para cualquier par $t < s$ en $[a,b]$ las proposiciones 1.0.8 y 1.0.10 nos muestran que

$$\|F(s) - F(t)\| = \left\| \int_t^s f \right\| \leq M(s - t).$$

Vamos a probar la segunda afirmación del enunciado. Supongamos que $t \in [a,b]$ es un punto de continuidad de f. Para cada $h \in \mathbb{R}^*$ tal que $t+h \in [a,b]$ tenemos la siguiente igualdad

$$\frac{F(t+h)-F(t)}{h} - f(t) = \frac{1}{h}\left(\int_a^{t+h} f - \int_a^t f - \int_t^{t+h} f(t)\right) = \frac{1}{h}\int_t^{t+h} (f - f(t)),$$

por la linealidad de la integral y la aditividad con respecto al intervalo de integración.

Fijemos ahora $\epsilon > 0$. La continuidad de f en t nos dice que existe un $\delta > 0$ tal que para cada $h \in \mathbb{R}^*$ que verifique $|h| < \delta$ y $t+h \in [a,b]$ entonces $\|f(t+h) - f(t)\| < \epsilon$. Para un tal h obtenemos que

$$\left\|\frac{F(t+h)-F(t)}{h} - f(t)\right\| \leq \frac{1}{|h|}(|h|\epsilon) = \epsilon$$

en virtud de la proposición 1.0.10. Esto finaliza la prueba. □

La composición de una función integrable Riemann con un elemento del dual es integrable Riemann [21, Teorema 7]. Esta es la principal consecuencia de la siguiente

Proposición 1.0.13. *Sea $f : [a,b] \longrightarrow X$ una función integrable Riemann. Sea $T : X \longrightarrow Y$ un operador continuo entre espacios de Banach. Entonces la composición Tf es integrable Riemann en $[a,b]$ y*

$$\int_a^b Tf = T\left(\int_a^b f\right).$$

En particular, para cada $x^* \in X^*$ la función $x^*f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{K}$ es integrable Riemann con integral $\int_a^b x^*f = x^*\left(\int_a^b f\right)$.

Demostración. Si $T = 0$ el resultado es trivial. Supongamos entonces que $\|T\| > 0$ y fijemos $\epsilon > 0$ arbitrario. Sea $\delta > 0$ tal que $\|f(\mathcal{P}) - \int_a^b f\| < \frac{\epsilon}{\|T\|}$ para cada $\mathcal{P} \in \Pi[a,b]$ de norma menor que δ. Dada una partición cualquiera $\mathcal{P} \in \Pi[a,b]$ tenemos $(Tf)(\mathcal{P}) = T(f(\mathcal{P}))$ y, si además tiene norma menor que δ,

$$\left\|(Tf)(\mathcal{P}) - T\left(\int_a^b f\right)\right\| \leq \|T\| \left\|f(\mathcal{P}) - \int_a^b f\right\| < \epsilon.$$

□

Como una pequeña aplicación demostramos el siguiente resultado a partir del teorema fundamental del cálculo para la integral de Riemann de funciones reales, simplificando la prueba de [21, Teorema 16], que se apoya en la integral de Bochner.

Proposición 1.0.14 (Graves, 1927). *Si $f : [a,b] \longrightarrow X$ es derivable en todo punto y $f' : [a,b] \longrightarrow X$ es integrable Riemann en $[a,b]$, entonces*

$$f(t) - f(a) = \int_a^t f'$$

para cada $t \in [a,b]$.

Demostración. Si $x^* \in X^*$, la función $x^* f$ es derivable en todo $[a,b]$ con derivada $(x^* f)'(t) = x^*(f'(t))$. La integrabilidad Riemann de f' implica que la derivada $(x^* f)'$ es integrable Riemann (proposición 1.0.13) y podemos concluir que para todo $t \in [a,b]$

$$x^*(f(t) - f(a)) = x^* f(t) - x^* f(a) = \int_a^t x^*(f') = x^* \left(\int_a^t f' \right).$$

Aplicando el teorema de Hahn-Banach tenemos el resultado deseado. □

Es sencillo adaptar a nuestro contexto la prueba del caso real del *teorema de cambio de variable para la integral de Riemann.*

Proposición 1.0.15 (Cambio de variable). *Sea $f : [a,b] \longrightarrow X$ integrable Riemann. Sea $\phi : [c,d] \longrightarrow [a,b]$ estrictamente creciente de clase C^1 tal que $\phi(c) = a$ y $\phi(d) = b$. La función $g : [c,d] \longrightarrow X$ definida por*

$$g(s) = \phi'(s) f(\phi(s))$$

es integrable Riemann en $[c,d]$ y

$$\int_c^d g = \int_a^b f.$$

Demostración. Sean M y K cotas superiores de $\|f\|$ y $|\phi'|$ en $[a,b]$. Si $\mathcal{P} \in \Pi[c,d]$

$$\mathcal{P} = \{([c_i, d_i], s_i) : i = 1, \ldots, n\},$$

entonces la monotonía de ϕ nos permite construir una partición

$$\mathcal{P}_\phi = \{([\phi(c_i), \phi(d_i)], \phi(s_i)) : i = 1, \ldots, n\} \in \Pi[a,b].$$

El teorema de los valores intermedios de Lagrange implica que $|\mathcal{P}_\phi| \leq K|\mathcal{P}|$ y

$$\begin{aligned} f(\mathcal{P}_\phi) &= \sum_{i=1}^n (\phi(d_i) - \phi(c_i)) f(\phi(s_i)) \\ &= \sum_{i=1}^n \phi'(t_i)(d_i - c_i) f(\phi(s_i)) \\ &= g(\mathcal{P}) - \sum_{i=1}^n (d_i - c_i)(\phi'(s_i) - \phi'(t_i)) f(\phi(s_i)) \end{aligned}$$

para ciertos $t_i \in [c_i, d_i]$. Por tanto

$$\left\| g(\mathcal{P}) - \int_a^b f \right\| \leq \left\| f(\mathcal{P}_\phi) - \int_a^b f \right\| + M \sum_{i=1}^{n} (d_i - c_i) |\phi'(s_i) - \phi'(t_i)|.$$

Es claro que el resultado se sigue de la integrabilidad de f, la desigualdad $|\mathcal{P}_\phi| \leq K|\mathcal{P}|$ y la continuidad uniforme de ϕ' en $[c, d]$ $\square$

Capítulo 2

Condiciones suficientes de integrabilidad

En este capítulo vamos a analizar un par de condiciones que garantizan la integrabilidad Riemann de una función $f : [a, b] \longrightarrow X$. La referencia básica que hemos seguido es [21].

Recordemos que una función $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{K}$ se dice *de variación acotada* si existe una constante $K > 0$ tal que para cada colección finita de subintervalos de $[a, b]$ que no se solapen, $\{[a_i, b_i]\}_{1 \leq i \leq n}$,

$$\sum_{i=1}^{n} |f(b_i) - f(a_i)| \leq K.$$

En el caso $X = \mathbb{R}$ los siguientes hechos son sobradamente conocidos:

- Las funciones de variación acotada son integrables Riemann [2, 7.28].
- Una función es integrable Riemann si y sólo si es acotada y continua en casi todo punto (*teorema de Lebesgue*, [48, 5.27]).

Al considerar el caso vectorial la primera afirmación sigue siendo válida y, de hecho, la hipótesis se puede debilitar (véase la proposición 2.1.3). Extender el segundo resultado no es, en general, posible, aunque sigue siendo cierto el *si* (corolario 2.2.8). El estudio de la validez, para un espacio de Banach X, del teorema de caracterización de Lebesgue ocupará una parte sustancial de esta memoria, en concreto todo el Capítulo 3.

2.1 Variación débilmente acotada

Volvamos por un momento al ejemplo 1.0.11. Un vistazo permite apreciar que f tiene una propiedad especial que nos permite obtener, a partir del criterio de Cauchy *iv*) (1.0.4), su integrabilidad Riemann: la existencia de una constante

$K > 0$ (que sólo depende de f; en el citado ejemplo tomamos $K = 2$) tal que para cada familia finita de subintervalos de $[a, b]$ que no se solapen, digamos $\{[a_i, b_i]\}_{1 \le i \le n}$,

$$\left\| \sum_{i=1}^{n} (f(b_i) - f(a_i)) \right\| \le K.$$

Definición 2.1.1. *Una función $f : [a, b] \longrightarrow X$ que posea la anterior propiedad se llamará* de variación débilmente acotada *(abreviadamente VDA).*

A continuación justificamos esta terminología.

Lema 2.1.2. *Para una función $f : [a, b] \longrightarrow X$ son equivalentes:*

i) f es de VDA.

ii) Para cada $x^* \in X^*$ la función $x^* f$ es de variación acotada.

Demostración. *i)* $\Rightarrow$ *ii)* Fijemos $x^* \in X^*$ y una familia de subintervalos como en la definición precedente. Por A.7.1 existe una constante $C > 0$ (universal, que podemos tomar π) y un subconjunto $S \subset \{1, \dots, n\}$ tal que

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n} |x^* f(b_i) - x^* f(a_i)| &\le C \left| \sum_{i \in S} x^* f(b_i) - x^* f(a_i) \right| \\ &= C \left| x^* \left(\sum_{i \in S} (f(b_i) - f(a_i)) \right) \right| \\ &\le C \|x^*\| \left\| \sum_{i \in S} (f(b_i) - f(a_i)) \right\| \\ &\le C \|x^*\| K, \end{aligned}$$

siendo K una constante que satisfaga las condiciones de la definición de función de VDA. Esto prueba que $x^* f$ es de variación acotada.

ii) $\Rightarrow$ *i)* Sólo necesitamos comprobar que el conjunto A de las sumas de la forma $\sum_i (f(d_i) - f(c_i))$, donde $\{[c_i, d_i]\}_i$ es una colección finita de subintervalos de $[a, b]$ que no se solapan, es *acotado*. Por el *principio de la acotación uniforme* A está acotado si y sólo si $x^*(A)$ es acotado para cada $x^* \in X^*$. Para verlo fijamos $x^* \in X^*$. Por hipótesis $x^* f$ es de variación acotada. Sea $K > 0$ (dependiente de x^*) una constante que satisfaga la condición de la definición de función de variación acotada mencionada anteriormente. Tenemos

$$\left| x^* \left(\sum_i (f(d_i) - f(c_i)) \right) \right| \le \sum_i |x^* f(d_i) - x^* f(c_i)| \le K$$

para cada colección finita de subintervalos que no se solapen. Por lo tanto $x^*(A)$ es acotado (para cada $x^* \in X^*$) y f es de VDA. □

Repitiendo el argumento dado en el ejemplo que originó esta discusión vamos a probar (siguiendo [21, Teorema 9]) la siguiente

Proposición 2.1.3 (Alexiewicz-Orlicz). *Sea $f : [a,b] \longrightarrow X$ una función de VDA. Entonces es integrable Riemann en $[a,b]$.*

Demostración. Empleamos el criterio de Cauchy 1.0.4. Sean $\epsilon > 0$ arbitrario y $K > 0$ una cota superior de la norma de los elementos del conjunto de las sumas $\sum_i (f(d_i) - f(c_i))$, donde $\{[c_i, d_i]\}_i$ es una colección finita de subintervalos que no se solapan. Fijamos $n \in \mathbb{N}$ tal que $\Delta := \frac{b-a}{n} < \frac{\epsilon}{K}$ y una partición $\mathcal{P}_0 \in \Pi[a,b]$

$$\mathcal{P}_0 = \{([a_i, b_i], s_i) : i = 1, \ldots, n\}$$

de modo que $b_i - a_i = \Delta$ para todo $1 \leq i \leq n$. Entonces, si $\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2 \in \Pi[a,b]$ son de la forma

$$\mathcal{P}_1 = \{([a_i, b_i], r_i) : i = 1, \ldots, n\}\,, \quad \mathcal{P}_2 = \{([a_i, b_i], t_i) : i = 1, \ldots, n\}$$

resulta que

$$\|f(\mathcal{P}_1) - f(\mathcal{P}_2)\| = \left\| \sum_{i=1}^{n} (b_i - a_i)(f(r_i) - f(s_i)) \right\| = \Delta \left\| \sum_{i=1}^{n} (f(r_i) - f(s_i)) \right\| < \epsilon$$

Aplicando 1.0.4 tenemos la integrabilidad Riemann de f. □

El recíproco no es cierto, como mostramos en el siguiente ejemplo (que generaliza uno de R. Rejouani [21, Ejemplo 11]).

Ejemplo 2.1.4. *Sean $1 < p < \infty$ y $Q = [0,1] \cap \mathbb{Q} = \{r_n : n \in \mathbb{N}\}$. Definimos $f : [0,1] \longrightarrow l^p$ como $f(r_n) = e_n$ para cada n, $f(t) = 0$ para $t \notin Q$. Entonces existe $\int_0^1 f = 0$ pero f no es de VDA.*

Demostración. Sea $1 < q < \infty$ tal que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Fijamos $\epsilon > 0$ arbitrario. Sea

$$\mathcal{P} = \{([a_i, b_i], s_i) : i = 1, \ldots, n\} \in \Pi[0,1]$$

de norma menor que $\delta = \frac{\epsilon^q}{2}$. Sea J el conjunto de índices correspondientes a los puntos intermedios de la partición que son racionales, y para cada $j \in J$ sea r_{n_j} el correspondiente punto intermedio. Existe una partición $J_1, \ldots, J_N$ de J de manera que $n_i = n_j$ para $i, j \in J_k$ y $n_i \neq n_j$ si $i \in J_r$, $j \in J_s$ y $r \neq s$. Observamos que $|J_k| \leq 2$ para todo k (un punto intermedio no puede estar asociado a más de dos subintervalos de $\mathcal{P}$) y $N \leq n$. Para cada k definimos $N(k) = n_i$ si $i \in J_k$. Entonces

$$\sum_{j \in J} (b_j - a_j) e_{n_j} = \sum_{k=1}^{N} \left(\sum_{j \in J_k} (b_j - a_j) \right) e_{N(k)}.$$

Como $p > 1$, tenemos $(c+d)^p \leq 2^{p-1}(c^p + d^p)$ para cada $c, d \geq 0$. Así,

$$\begin{aligned}
\|f(\mathcal{P})\| = \left\| \sum_{s_i \in Q} (b_i - a_i) f(s_i) \right\| &= \left\| \sum_{j \in J} (b_j - a_j) e_{n_j} \right\| \\
&= \left\| \sum_{k=1}^{N} \left(\sum_{j \in J_k} (b_j - a_j) \right) e_{N(k)} \right\| \\
&= \left(\sum_{k=1}^{N} \left(\sum_{j \in J_k} (b_j - a_j) \right)^p \right)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq \left(\sum_{k=1}^{N} 2^{p-1} \left(\sum_{j \in J_k} (b_j - a_j)^p \right) \right)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq 2^{\frac{1}{q}} \left(\sum_{k=1}^{N} (\sum_{j \in J_k} (b_j - a_j) |\mathcal{P}|^{p-1}) \right)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq (2|\mathcal{P}|)^{\frac{1}{q}} \left(\sum_{k=1}^{N} (\sum_{j \in J_k} (b_j - a_j)) \right)^{\frac{1}{p}} \\
&= (2|\mathcal{P}|)^{\frac{1}{q}} < \epsilon.
\end{aligned}$$

Esto prueba la integrabilidad Riemann de f en $[0,1]$, con integral 0.

Pasamos ahora a ver que no es de VDA. Para ello tomamos $n \in \mathbb{N}$ arbitrario y consideramos la familia de subintervalos (que no se solapan)

$$\{[q_k, y_k] : 0 \leq k \leq n-1\},$$

donde cada $q_k, y_k \in \left(a + k\frac{b-a}{n}, a + (k+1)\frac{b-a}{n}\right)$, $q_k = r_{n_k}$ es racional e y_k es irracional. Entonces

$$\left\| \sum_{i=1}^{n} (f(q_i) - f(y_i)) \right\| = \left\| \sum_{i=1}^{n} e_{n_i} \right\| = n^{\frac{1}{p}}.$$

Haciendo crecer n arbitrariamente se observa que f no es de VDA. □

2.2 Integrabilidad Darboux

Como anunciamos con anterioridad, vamos a demostrar que *una función $f : [a,b] \longrightarrow X$ acotada y continua en casi todo punto es integrable Riemann.* Para ello adaptamos al caso vectorial el concepto clásico de integrabilidad Darboux, que en el caso de funciones escalares coincide con el de integrabilidad en sentido Riemann. Dicha coincidencia para un espacio de Banach X es, como veremos más adelante, equivalente a la validez del clásico *teorema de Lebesgue* para funciones integrables Riemann.

Antes de nada recordamos una serie de conceptos.

Definición 2.2.1. *Sean (T, τ) un espacio topológico y (X, d) un espacio métrico. Consideramos una función $f : T \longrightarrow X$.*

i) Si $S \subset T$, llamaremos oscilación *de f en S a*

$$w(f, S) = \sup_{s,s' \in S} d(f(s), f(s')).$$

ii) Si $t \in T$, se define la oscilación *de F en T como*

$$w(f, t) = \inf_{U \in \epsilon(t)} w(f, U),$$

donde $\epsilon(t)$ denota la familia de entornos de t en (T, τ).

Admitimos que puedan tomar como valor $+\infty$.

Resumimos a continuación una serie de propiedades elementales.

Proposición 2.2.2. *En las anteriores condiciones*

i) Si $S \subset S' \subset T$, entonces $w(f, S) \leq w(f, S')$.

ii) Si $\mathcal{B}$ es una base de entornos de t en (T, τ), se tiene

$$w(f, t) = \inf_{U \in \mathcal{B}} w(f, U).$$

iii) Si $T = [a, b]$ con la topología ordinaria y $t \in (a, b)$, entonces

$$w(f, t) = \lim_{\delta \to 0^+} w(f, [t - \delta, t + \delta]).$$

iv) f es continua en un punto $t \in T$ si y sólo si $w(f, t) = 0$.

v) Para cada $a > 0$ el conjunto $\{t \in T : w(f, t) < a\}$ es abierto.

vi) Denotamos por $Cont(f, \tau)$ el conjunto de puntos de continuidad de f. Entonces $Cont(f, \tau)$ es un $\mathcal{G}_\delta$ en T (intersección numerable de abiertos) y, por tanto, medible Borel.

Demostración. Es inmediata. Como ejemplo hacemos las dos últimas. *iv)* Si $t \in T$ cumple $w(f, t) < a$ entonces podemos encontrar $U \in \tau$ entorno de t tal que $w(f, U) < a$. Pero para cada $s \in U \in \tau$, U es un entorno de s y así $w(f, s) \leq w(f, U) < a$, es decir, $U \subset \{t \in T : w(f, t) < a\}$.

v) De *iii)* deducimos que

$$[a, b] \setminus Cont(f, \tau) = \cup_{n=1}^{\infty} \{t \in T : w(f, t) \geq \frac{1}{n}\},$$

unión numerable de cerrados por *iv*). $\square$

Definición 2.2.3. *Llamaremos* partición de Darboux *del intervalo* $[a, b]$ *a una colección finita* $\mathcal{P}$ *de subintervalos que no se solapen y cuya unión sea todo* $[a, b]$. *Su* norma *será el máximo de las longitudes de los subintervalos que la componen. El conjunto de* puntos de la partición *será el formado por los extremos de los intervalos, y lo denotaremos mediante* $\mathrm{e}(\mathcal{P})$. *Finalmente, si* $\mathcal{P}'$ *es otra partición de Darboux de* $[a, b]$, *diremos que es* más fina *que* $\mathcal{P}$ *si* $\mathrm{e}(\mathcal{P}) \subset \mathrm{e}(\mathcal{P}')$. *El conjunto de las particiones de Darboux de* $[a, b]$ *se representa por* $d\Pi[a, b]$.

Definición 2.2.4. *Sea* $\mathcal{P} = \{[a_i, b_i] : 1 \leq i \leq n\} \in d\Pi[a, b]$. *La* suma de Darboux *de* f *asociada a* $\mathcal{P}$ *es*

$$d(f, \mathcal{P}) = \sum_{i=1}^{n} w(f, [a_i, b_i])(b_i - a_i) \in [0, \infty].$$

Diremos que f es *integrable Darboux* en $[a, b]$ si cumple alguna (en tal caso ambas) de las siguientes condiciones:

i) Para cada $\epsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que si $\mathcal{P} \in d\Pi[a, b]$ tiene norma menor que δ, entonces $d(f, \mathcal{P}) < \epsilon$.

ii) Para cada $\epsilon > 0$ existe una $\mathcal{P}_0 \in d\Pi[a, b]$ tal que para toda partición de Darboux $\mathcal{P}$ más fina que $\mathcal{P}_0$ se cumple $d(f, \mathcal{P}) < \epsilon$.

Proposición 2.2.5. *Las anteriores condiciones son equivalentes.*

Demostración. *i)* $\Rightarrow$ *ii)* es consecuencia de que si una partición de Darboux es más fina que otra, entonces su norma es menor o igual.

ii) $\Rightarrow$ *i)* En primer lugar observamos que f *es acotada*. Esto es claro: dado $\epsilon = 1$ podemos encontrar una partición $\mathcal{P} = \{[a_i, b_i] : 1 \leq i \leq n\} \in d\Pi[a, b]$ tal que $\sum_{i=1}^{n}(b_i - a_i)w(f, [a_i, b_i]) < 1$. Por tanto $w(f, [a_i, b_i]) < \frac{1}{b_i - a_i}$ para cada $1 \leq i \leq n$, y, en particular, f está acotada en $[a_i, b_i]$. Sea M una cota superior de $\|f\|$ en $[a, b]$.

Fijamos $\epsilon > 0$ y $\mathcal{P}_0 \in d\Pi[a, b]$ tal que $d(f, \mathcal{P}) < \epsilon$ para cada $\mathcal{P} \in d\Pi[a, b]$ más fina que $\mathcal{P}_0$. Escribimos

$$e(\mathcal{P}_0) = \{a = t_0 < t_1 < \cdots < t_N = b\}.$$

Sea $0 < \delta < \frac{\epsilon}{8M(N+1)}$. Dada $\mathcal{P} \in d\Pi[a, b]$ de norma menor que δ vamos a demostrar que $d(f, \mathcal{P}) < 2\epsilon$. En efecto, si $J_1, \ldots, J_m$ son los subintervalos de $\mathcal{P}$ definimos A como el conjunto de pares $(i, j) \in \{1, \ldots, N\} \times \{1, \ldots, m\}$ tales que $I_{i,j} = [t_{i-1}, t_i] \cap [c_j, d_j]$ es no vacío ni unipuntual. La partición de Darboux

$\mathcal{P}' = \{I_{i,j}\}_{(i,j)\in A}$ es más fina que $\mathcal{P}_0$ y, por tanto, $d(f,\mathcal{P}') < \epsilon$. Por otro lado

$$\begin{aligned} d(f,\mathcal{P}) &= \sum_{j=1}^{m} w(f,J_j)m(J_j) \\ &= \sum_{(i,j)\in A} w(f,J_j)m(I_{i,j}) \\ &= d(f,\mathcal{P}') + \sum_{(i,j)\in A} (w(f,J_j) - w(f,I_{i,j}))m(I_{i,j}) \\ &< \epsilon + \sum_{(i,j)\in A} (w(f,J_j) - w(f,I_{i,j}))m(I_{i,j}). \end{aligned}$$

Fijamos por un momento $(i,j) \in A$. Tenemos dos posibilidades

- $J_j \subset I_{i,j}$. En tal caso $w(f,J_j) - w(f,I_{i,j}) \leq 0$.
- $J_j \not\subset I_{i,j}$. Entonces $J_j \not\subset [t_{i-1}, t_i]$ y, como $\mathcal{P}$ tiene norma menor que δ, resulta que $J_j \subset [t_{i-1}-\delta, t_{i-1}+\delta]$ ó $J_j \subset [t_i - \delta, t_i + \delta]$.

Si B es el conjunto de pares $(i,j) \in A$ que cumplen esta última condición,

$$\sum_{(i,j)\in A} (w(f,J_j) - w(f,I_{i,j}))m(I_{i,j}) \leq \sum_{(i,j)\in B} (w(f,J_j) - w(f,I_{i,j}))m(I_{i,j}) =$$

$$\sum_{i=0}^{N} \sum_{\substack{(i,j)\in B \\ J_j \subset [t_i-\delta, t_i+\delta]}} (w(f,J_j) - w(f,I_{i,j}))m(I_{i,j}) \leq (N+1)4M(2\delta) < \epsilon.$$

Por tanto $d(f,\mathcal{P}) < \epsilon$, como se quería demostrar. □

Proposición 2.2.6. *Si $f : [a,b] \longrightarrow X$ es integrable Darboux, entonces es integrable Riemann.*

Demostración. Fijamos $\epsilon > 0$ y una partición $\mathcal{P}_\epsilon = \{[a_i,b_i] : 1 \leq i \leq n\} \in d\Pi[a,b]$ tal que $d(f,\mathcal{P}_\epsilon) < \epsilon$. Sean $\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2 \in \Pi[a,b]$ con subintervalos los de $\mathcal{P}_\epsilon$ y puntos intermedios $s_i, t_i \in [a_i,b_i]$ respectivamente. Es claro que

$$\|f(\mathcal{P}_1) - f(\mathcal{P}_2)\| \leq \sum_{i=1}^{n} (b_i - a_i)\|f(s_i) - f(t_i)\| \leq d(f,\mathcal{P}_\epsilon) < \epsilon$$

y la integrabilidad Riemann de f se sigue de 1.0.4. □

Podemos imitar la prueba del caso real para dar la siguiente caracterización de la integrabilidad Darboux [21, Teorema 18]:

Teorema 2.2.7 (Lebesgue). *Una función $f : [a,b] \longrightarrow X$ es integrable Darboux si y sólo si es acotada y continua en casi todo punto.*

Demostración. Sólo si. Ya hemos visto anteriormente que f es acotada si es integrable Darboux. Dado que f es continua en un punto $t \in [a, b]$ si y sólo si $w(f, t) = 0$, el conjunto de sus puntos de discontinuidad es la unión $E = \cup_{i=1}^{\infty} E_i$, siendo $E_n = \{t \in [a, b] : w(f, t) \geq \frac{1}{n}\}$. E es medible Lebesgue (unión numerable de cerrados, que son medibles) y para ver que tiene medida cero sólo hay que comprobar que $m(E_n) = 0$ para cada $n \in \mathbb{N}$.

Fijemos $n \in \mathbb{N}$ y sea $\epsilon > 0$ arbitrario. Tomemos $\mathcal{P} = \{[a_i, b_i] : 1 \leq i \leq p\} \in d\Pi[a, b]$ tal que $d(f, \mathcal{P}) < \frac{\epsilon}{n}$. Sea $I = \{1 \leq i \leq p : E_n \cap (a_i, b_i) \neq \emptyset\}$. Para cada $i \in I$ podemos fijar un $t_i \in (a_i, b_i) \cap E_n$; $[a_i, b_i]$ es un entorno de t_i en $[a, b]$ y así $\frac{1}{n} \leq w(f, t_i) \leq w(f, [a_i, b_i])$. Como E_n está esencialmente contenido en $\cup_{i \in I}(a_i, b_i)$ resulta

$$\frac{\epsilon}{n} > d(f, \mathcal{P}) \geq \sum_{i \in I} w(f, [a_i, b_i]) m([a_i, b_i]) \geq \frac{1}{n} \sum_{i \in I} m([a_i, b_i]) \geq \frac{1}{n} m(E_n)$$

y así $m(E_n) < \epsilon$ (para cada $\epsilon > 0$). Por tanto $m(E_n) = 0$.

Si. Sea M una cota superior de $\|f\|$ en $[a, b]$. Fijamos $b - a > \epsilon > 0$ y $n \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{n} < \epsilon$.

Por hipótesis $m(E_n) = 0$ y existe una sucesión de intervalos abiertos disjuntos dos a dos $\{(c_k, d_k)\}_{k \in \mathbb{N}}$ tales que su unión contiene a E_n y $\sum_{k=1}^{\infty}(d_k - c_k) < \epsilon$. Pero E_n es cerrado en el compacto $[a, b]$ y, por tanto, compacto. Así, podemos suponer que la sucesión anterior es finita: $\{(c_i, d_i)\}_{1 \leq i \leq p}$. Asumiendo que todos estos intervalos intersecan a E_n, tenemos para cada i que $I_i = [a, b] \cap [c_i, d_i]$ es un intervalo no degenerado y para $i \neq j$ la intersección $I_i \cap I_j$ es a lo más un punto.

Sea $A = \cup_{i=1}^{p} I_i \subset [a, b]$. Claramente $[a, b] \neq A$ por ser $m(A) < \epsilon < b - a$ y, así, $B = [a, b] \setminus A$ es una unión disjunta de intervalos abiertos y semiabiertos (estos últimos aparecen en caso de que $a \in A$ ó $b \in A$).

Sea J uno cualquiera de ellos con adherencia $[r, s] = \overline{J}$. Es claro que $E_n \cap [r, s] = \emptyset$ y, por lo tanto, para cada $t \in [r, s]$ existe un intervalo cerrado $J_t \subset [a, b]$ entorno de t en la topología relativa de $[a, b]$ tal que $w(f, J_t) < \frac{1}{n}$. La compacidad de $[r, s]$ implica la existencia de $t_1, \ldots, t_n \in [r, s]$ tales que $[r, s] \subset \cup_{i=1}^{n} J_{t_i}$. Sea $\mathcal{P}_J$ la partición de Darboux de $[r, s]$ con puntos r, s y los extremos de cada J_{t_k} que estén contenidos en (r, s). Cada subintervalo G de esta partición está contenido en algún $J_{t_k} = [u_k, v_k]$ y, por lo tanto, satisface $w(f, G) < \frac{1}{n}$.

Resumiendo, tenemos descompuesto $B = [a, b] \setminus A$ en una unión disjunta de intervalos cuyas adherencias admiten particiones de Darboux $\mathcal{P}_J$ tales que $w(f, G) < \frac{1}{n}$ para cada $G \in \mathcal{P}_J$. Además, A es una unión finita de intervalos cuyas longitudes suman menos que ϵ. Agrupando estos intervalos con los de las particiones asociadas a B podemos obtener una partición de Darboux $\mathcal{P}_0$ de $[a, b]$. Denotaremos por $\mathcal{P}_0'$ a la colección de subintervalos de $\mathcal{P}$ que intersecan a E_n y por $\mathcal{P}_0''$ a la colección de los restantes.

Acabamos de ver que $\mathcal{P}_0' = \{I_1, \ldots, I_p\}$ y $w(f, G) < \frac{1}{n}$ para todo $G \in \mathcal{P}_0''$.

Si $\mathcal{P} \in d\Pi[a,b]$ es más fina que $\mathcal{P}_0$ definimos

$$\mathcal{P}' = \{I \in \mathcal{P} : I \subset J \text{ para algún } J \in \mathcal{P}_0'\}$$
$$\mathcal{P}'' = \{I \in \mathcal{P} : I \subset J \text{ para algún } J \in \mathcal{P}_0''\}.$$

La oscilación de f en cada intervalo de $\mathcal{P}''$ es evidentemente menor que $\frac{1}{n}$. Además $\mathcal{P} = \mathcal{P}' \cup \mathcal{P}''$ ($\mathcal{P}$ es más fina que $\mathcal{P}_0$) y, por tanto,

$$\begin{aligned} d(f,\mathcal{P}) &= \sum_{I\in\mathcal{P}'} m(I)w(f,I) + \sum_{I\in\mathcal{P}''} m(I)w(f,I) \\ &\leq 2M\sum_{I\in\mathcal{P}'} m(I) + \frac{1}{n}\sum_{I\in\mathcal{P}''} m(I) \\ &\leq 2M\sum_{i=1}^{p} m(I_i) + \frac{b-a}{n} \\ &< (2M + (b-a))\epsilon. \end{aligned}$$

Esto prueba la integrabilidad Darboux de f en $[a,b]$. □

Corolario 2.2.8. *Cualquier función $f : [a,b] \longrightarrow X$ acotada y continua en casi todo punto es integrable Riemann en $[a,b]$. En particular, toda función continua es integrable Riemann.*

Nota 2.2.9. *Se puede adaptar fácilmente la prueba del caso escalar para dar una demostración más elemental de la última afirmación, basada simplemente en la continuidad uniforme.*

Nota 2.2.10. *Es esencial que la continuidad sea respecto a la topología de la norma en X, no se puede obtener la misma conclusión para funciones continuas respecto a la topología débil de X o ω^* (caso de ser X el dual de un espacio normado). La integrabilidad Riemann de las funciones débilmente continuas caracteriza ciertas propiedades topológicas de los espacios de Banach, como analizaremos en el Capítulo 5.*

A continuación damos un par de ejemplos que muestran que, en general, la integrabilidad Darboux es más fuerte que la de Riemann. El primero ya es conocido, mientras que el segundo ha sido extraído de [21, Ejemplo 10].

Ejemplo 2.2.11. *Sea $f : [a,b] \longrightarrow B[a,b]$ la función definida en el ejemplo 1.0.11. Ya vimos que f es integrable Riemann en $[a,b]$. Sin embargo, no es integrable Darboux.*

Demostración. En caso contrario, por el teorema precedente, $\|f\| : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ sería acotada y continua en casi todo punto, es decir, integrable Riemann, en contra de lo probado en el citado ejemplo. □

Ejemplo 2.2.12 (Rejouani). *Existe una función $f : [0,1] \longrightarrow c_0$ integrable Riemann sin puntos de continuidad.*

Demostración. Sea $Q = \mathbb{Q} \cap [0,1] = \{r_1, r_2, \dots\}$ y definimos $f : [0,1] \longrightarrow c_0$ por $f(r_n) = e_n$ (para todo $n \in \mathbb{N}$) y $f(t) = 0$ para cada $t \in [0,1]$ irracional. Para ver que f no es continua *en ningún punto* basta notar que su norma $\|f\| = \chi_Q$ carece de puntos de continuidad.

Afirmamos que f es de VDA (y, en virtud de 2.1.3, integrable Riemann en $[0,1]$). En efecto, sea $\{[c_i, d_i]\}_{1 \leq i \leq n}$ una familia finita de subintervalos de $[0,1]$ que no se solapen. Nótese que entonces $c_i \neq c_j$ (resp. $d_i \neq d_j$) para $i \neq j$ y, así, $\sum_{i=1}^n f(c_i) \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ (resp. $\sum_{i=1}^n f(d_i) \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}$). Por tanto $\sum_{i=1}^n (f(d_i) - f(c_i)) \in \{-1,0,1\}^{\mathbb{N}}$ y

$$\left\| \sum_{i=1}^n (f(d_i) - f(c_i)) \right\|_\infty \leq 1.$$

Esto prueba la afirmación. $\square$

En particular, para todo espacio de Banach X que contenga una copia isomorfa de c_0 existe una función de VDA $f : [a,b] \longrightarrow X$ que no es integrable Darboux (véase 3.1.1). Curiosamente el recíproco es cierto (fue demostrado por Rejouani en [50]) y proporciona otra caracterización de los espacios de Banach que no contienen a c_0, así como una mejora de 2.1.3 en tales espacios.

Lema 2.2.13. *Sea $f : [a,b] \longrightarrow X$ una función que no es continua en casi todo punto. Entonces existen $\alpha > 0$ y una sucesión de subintervalos de $[a,b]$ disjuntos dos a dos $\{[r_n, s_n]\}_{n \in \mathbb{N}}$ de manera que $\|f(s_n) - f(r_n)\| > \alpha$ para cada $n \in \mathbb{N}$.*

Demostración. Por hipótesis $[a,b] \setminus Cont(f) = \cup_{n=1}^\infty \{t \in [a,b] : \ w(f,t) \geq \frac{1}{n}\}$ tiene medida positiva, luego existe $\beta > 0$ tal que

$$K = \{t \in (a,b) : \ w(f,t) \geq \beta\}$$

tiene medida $\eta = m(K) > 0$. Fijamos $\alpha = \frac{\beta}{2}$.

A continuación construimos por recurrencia una sucesión de subintervalos abiertos de $[a,b]$ disjuntos dos a dos, digamos $I_1, I_2, \dots$, tales que

- $I_i \cap K \neq \emptyset$ para cada $i \in \mathbb{N}$.
- $\sum_{i=1}^n m(I_i) < \eta$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Fijamos $t_1 \in K$ arbitrario. Podemos tomar $I_1 = (t_1 - \delta, t_1 + \delta)$ siendo $0 < \delta < \frac{\eta}{4}$ suficientemente pequeño de manera que $I_1 \subset [a,b]$. Para probar el paso inductivo supongamos dados $I_1, \dots, I_n \subset [a,b]$ intervalos abiertos disjuntos dos a dos tales que $I_i \cap K \neq \emptyset$ para $1 \leq i \leq n$ y $\sum_{i=1}^n m(I_i) < \eta$. Esta desigualdad implica que $K \not\subset \cup_{i=1}^n \overline{I_i}$ y, por tanto, existe $t_{n+1} \in K$ tal que $t_{n+1} \notin \cup_{i=1}^n \overline{I_i}$. Basta tomar ahora $\delta > 0$ suficientemente pequeño de manera que $I_{n+1} = (t_{n+1} - \delta, t_{n+1} + \delta) \subset [a,b]$, no corte a ninguno de los I_i y

$$2\delta < \eta - \sum_{i=1}^n m(I_i).$$

Como para cada $n \in \mathbb{N}$ existe $t_n \in I_n$ verificando $w(f, t_n) \geq \beta > \alpha$ (e I_n es abierto), podemos tomar $r_n < s_n$ contenidos en I_n tales que $\|f(s_n) - f(r_n)\| > \alpha$. La sucesión $\{[r_n, s_n]\}_{n \in \mathbb{N}}$ nos sirve. $\square$

Proposición 2.2.14. *Para un espacio de Banach X son equivalentes:*

i) X no contiene copias isomorfas de c_0.

ii) Toda función $f : [a, b] \longrightarrow X$ de VDA es integrable Darboux.

Demostración. Sólo nos queda demostrar $i) \Rightarrow ii)$. Supongamos por reducción al absurdo que existe una función $f : [a, b] \longrightarrow X$ de VDA que no es integrable Darboux. Es fácil ver, a partir de la definición de VDA, que f es acotada. Por el teorema de Lebesgue 2.2.7 la función f no puede ser continua en casi todo punto y el lema anterior garantiza la existencia un $\alpha > 0$ y una sucesión de subintervalos de $[a, b]$ disjuntos dos a dos $\{[r_n, s_n]\}_{n \in \mathbb{N}}$ tales que

$$\|f(s_n) - f(r_n)\| > \alpha$$

para cada $n \in \mathbb{N}$. En particular la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} (f(s_n) - f(r_n))$$

no puede ser convergente en X. Sin embargo, para cada $x^* \in X^*$

$$\sum_{n=1}^{\infty} |x^*(f(s_n) - f(r_n))| = \sum_{n=1}^{\infty} |x^* f(s_n) - x^* f(r_n)| < \infty$$

porque $x^* f$ es una función de variación acotada (lema 2.1.2). Esto contradice el teorema de Bessaga-Pelczynski de caracterización de los espacios de Banach que no contienen a c_0 (teorema A.3.5).

$\square$

Capítulo 3

La propiedad de Lebesgue

El clásico teorema de Lebesgue de integración Riemann [48, Teorema 5.27] afirma que *una función* $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{K}$ *es integrable Riemann si y sólo si es acotada y continua en casi todo punto.* Es decir, *si y sólo si es integrable Darboux* (2.2.7). Cuando tratamos el caso general de funciones que toman valores en un espacio de Banach sólo una de las implicaciones es válida en general (véase el corolario 2.2.8 y los ejemplos que lo siguen). Es natural preguntarse: *¿qué espacios de Banach* X *satisfacen que cualquier función integrable Riemann* $f : [a, b] \longrightarrow X$ *es continua en casi todo punto?*. Hasta la fecha sólo se pueden ofrecer respuestas parciales a esta cuestión. Todos los espacios de Banach finito-dimensionales tienen esta propiedad, al igual que l^1 ([51] y [21]) y el espacio de Tsirelson [21]. Para el resto de espacios de Banach *clásicos* la respuesta es negativa.

3.1 Espacios de Banach con la propiedad de Lebesgue

Se dice que un espacio de Banach X tiene la *propiedad de Lebesgue* (abreviadamente LP) si toda función integrable Riemann $f : [a, b] \longrightarrow X$ es continua en casi todo punto. Un espacio de Banach X tiene la *propiedad débil de Lebesgue* (WLP) si toda función $f : [a, b] \longrightarrow X$ integrable Riemann es débilmente continua en casi todo punto. Evidentemente, un espacio Banach con la propiedad de Lebesgue tiene WLP.

Observación 3.1.1. *Sea* $T : X \longrightarrow Y$ *una inmersión de espacios de Banach. Si* X *no tiene LP entonces* Y *también carece de dicha propiedad. En particular LP es una propiedad topológica (se preserva por renormamientos).*

Demostración. Sea $f : [a, b] \longrightarrow X$ una función integrable Riemann que *no* es continua en casi todo punto. La composición $g = Tf : [a, b] \longrightarrow Y$ es integrable Riemann por 1.0.13. Vamos a demostrar que

$$Cont(g) \subset Cont(f)$$

(y como f no es continua en casi todo punto, g tampoco lo puede ser). Para ello observamos que $Z = T(X)$ es un subespacio cerrado del Banach Y topológicamente isomorfo a X vía T. Tenemos un operador continuo T^{-1} de Z en X y, así, la composición $T^{-1}g = T^{-1}Tf = f$ es una función continua en cada $t \in Cont(g)$. $\square$

El teorema clásico de Lebesgue de caracterización de las funciones integrables Riemann nos dice que $\mathbb{K}$ tiene la propiedad de Lebesgue. Un argumento sencillo permite extender esta afirmación a cualquier espacio de Banach de dimensión finita:

Proposición 3.1.2. *Todo espacio de Banach finito-dimensional tiene la propiedad de Lebesgue.*

Demostración. Sea X un espacio de Banach de dimensión finita con una base algebraica $\{v_1, \ldots, v_n\}$. Es fácil ver (a partir de la equivalencia de todas las normas en $\mathbb{K}^n$) que $T(a_1, \ldots, a_n) = \sum_{i=1}^n a_i v_i$ define un isomorfismo topológico entre $\mathbb{K}^n$ y X. La observación 3.1.1 nos reduce a demostrar que $\mathbb{K}^n$ tiene la propiedad de Lebesgue. Definimos para cada $1 \leq i \leq n$, $p_i : \mathbb{K}^n \longrightarrow \mathbb{K}$ como la proyección en la i-ésima coordenada (lineal y continua). Sea $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{K}^n$ integrable Riemann. Para cada i la composición $p_i f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{K}$ es integrable Riemann (1.0.13) y, por el teorema de Lebesgue, continua en un conjunto medible conulo $E_i \subset [a, b]$. Entonces $E = \cap_{i=1}^n E_i$ es un conjunto medible conulo tal que $p_i f$ es continua en cada punto de E para cualquier $1 \leq i \leq n$ y, así, f es continua en cada punto de E. Esto completa la prueba. $\square$

Un espacio de Banach es *de Schur* (o tiene la propiedad de Schur) si toda *sucesión* débilmente convergente es convergente en norma. Todo espacio de dimensión finita tiene dicha propiedad, así como $l^1(\Gamma)$ para cualquier conjunto infinito Γ [11, Capítulo VII].

Proposición 3.1.3. *Todo espacio de Banach que sea de Schur y tenga WLP posee la propiedad de Lebesgue.*

Demostración. Sean $f : [a, b] \longrightarrow X$ integrable Riemann y X un espacio de Schur que tiene WLP. Esta última condición implica que f es débilmente continua en casi todo punto. Sea $t \in Cont(f, \omega)$ y sea $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ cualquier sucesión en $[a, b]$ que converja hacia t. Entonces $\omega - \lim f(t_n) = f(t)$ y así $\|.\| - \lim f(t_n) = f(t)$ gracias a la propiedad de Schur. Por tanto $Cont(f) = Cont(f, \omega)$ es un conjunto medible conulo. $\square$

A continuación vamos a demostrar que l^1 tiene la propiedad de Lebesgue. Los primeros en descubrirlo fueron Nemirovskii, Ochan y Rejouani [47] (1972). Nosotros seguiremos el método de [51], basado en una idea de M.I. Kadets, que extrae una propiedad de l^1 suficiente para probar que tiene LP.

Definición 3.1.4. *Un espacio de Banach X tiene la propiedad [K] si existen una constante $a > 0$ y un conjunto numerable $N \subset X^*$ de manera que, para cualquier sucesión $(x_m)_{m\in\mathbb{N}}$ en X con las propiedades siguientes:*

- *converge hacia* 0 *respecto de* $\sigma(X, N)$ *y*
- *existe* $\epsilon > 0$ *tal que* $\|x_n\| \geq \epsilon$ *para todo* n*,*

se tiene

$$\overline{\lim_m} \|x + x_m\| \geq \|x\| + a\epsilon$$

para todo $x \in X$*.*

Proposición 3.1.5. *El espacio* l^1 *tiene la propiedad [K].*

Demostración. Para cada $n \in \mathbb{N}$ definimos $x_n^* \in (l^1)^*$ mediante

$$x_n^* \left((a_m)_{m \in \mathbb{N}}\right) = a_n.$$

Supongamos que la sucesión $a^m = (a_n^m)_n$, $m = 1, 2, \dots$, cumple

i) Existe $\epsilon > 0$ tal que $\|a^m\| = \sum_{n=1}^{\infty} |a_n^m| \geq \epsilon$, $m \in \mathbb{N}$.

ii) $\lim_m x_n^*(a^m) = \lim_m a_n^m = 0$ para todo n.

Dado $x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in l^1$ arbitrario, vamos a demostrar que

$$\overline{\lim_m} \|x + a^m\| \geq \|x\| + \frac{\epsilon}{2}.$$

Para ello fijamos $n_0 \in \mathbb{N}$ suficientemente grande tal que $\sum_{n=n_0+1}^{\infty} |x_n| < \frac{\epsilon}{8}$. Por *ii)* podemos tomar $M \in \mathbb{N}$ tal que $|a_n^m| < \frac{\epsilon}{8n_0}$ para cada $1 \leq n \leq n_0$ y cada $m \geq M$. Entonces utilizamos la desigualdad triangular *al revés* para obtener

$$\begin{aligned}
\|x + a^m\| &= \sum_{n=1}^{n_0} |x_n + a_n^m| + \sum_{n=n_0+1}^{\infty} |x_n + a_n^m| \\
&\geq \sum_{n=1}^{n_0} |x_n| - \sum_{n=1}^{n_0} |a_n^m| - \sum_{n=n_0+1}^{\infty} |x_n| + \sum_{n=n_0+1}^{\infty} |a_n^m| \\
&= \|x\| - 2 \sum_{n=n_0+1}^{\infty} |x_n| + \|a^m\| - 2 \sum_{n=1}^{n_0} |a_n^m| \\
&> \|x\| - 2\left(\frac{\epsilon}{8}\right) + \epsilon - 2n_0 \left(\frac{\epsilon}{8n_0}\right) \\
&= \|x\| + \frac{\epsilon}{2}
\end{aligned}$$

para cada $m \geq M$. Esto prueba la afirmación y demuestra que l^1 tiene la propiedad [K] con $a = \frac{1}{2}$ y $N = \{x_n^*\}_{n \in \mathbb{N}}$. □

Teorema 3.1.6 (Rejouani). *Todo espacio de Banach* X *con la propiedad [K] tiene la propiedad de Lebesgue.*

Demostración. Sean $a > 0$ y $N \subset X^*$ numerable tales que si $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión en X que cumple

- existe un $\epsilon > 0$ de manera que $\|x_n\| \geq \epsilon$, $n = 1, 2, \ldots$, y
- $\sigma(X, N) - \lim_n x_n = 0$,

entonces

$$\overline{\lim_n}\|x_n + x\| \geq \|x\| + a\epsilon \tag{3.1}$$

para cada $x \in X$.

Sea $f : [a, b] \longrightarrow X$ integrable Riemann. Para cada $x^* \in N$ la función x^*f es integrable Riemann y, por tanto, $m([a, b] \setminus Cont(x^*f)) = 0$. Consideramos el conjunto medible conulo (N es numerable) $G = \cap_{x^* \in N} Cont(x^*f)$. Sabemos que $[a, b] \setminus Cont(f) = \cup_{n=1}^{\infty} F_n$, donde $F_n = \{t \in [a, b] : \ w(f, t) \geq \frac{1}{n}\}$ para $n = 1, 2, \ldots$. El teorema estará demostrado si vemos que $m(F_n) = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Fijamos $M \in \mathbb{N}$. Como G es conulo, $m(F_M) = m(G \cap F_M)$. Vamos a demostrar que $d := m(G \cap F_M) = 0$ por reducción al absurdo. Supongamos que $d > 0$ y tomemos un $\delta > 0$ tal que para todo par de particiones $\mathcal{P}, \mathcal{P}' \in \Pi[a, b]$ de norma menor que δ

$$\|f(\mathcal{P}) - f(\mathcal{P}')\| < \frac{ad}{8M}.$$

Fijamos $\mathcal{P}_0 = \{I_1, \ldots, I_n\}$ una partición de Darboux de $[a, b]$ de norma menor que δ. Sea

$$J = \{i \in \{1, \ldots, n\} : \ int(I_i) \cap G \cap F_M \neq \emptyset\}$$

y tomemos $t_j \in int(I_i) \cap G \cap F_M$ para cada $j \in J$ (evidentemente $J \neq \emptyset$ por ser $d > 0$). Podemos suponer que $J = \{1, \ldots, k\}$.

Afirmamos que existen $t'_j \in I_j$, $j = 1, \ldots, k$ tales que

$$\left\| \sum_{i=1}^{j} m(I_i)(f(t_i) - f(t'_i)) \right\| \geq \left(\sum_{i=1}^{j} m(I_i) \right) \frac{a}{8M} \tag{3.2}$$

para todo $j = 1, \ldots, k$. Vamos a construirlos recurrentemente.

- Dado que $t_1 \in F_M \cap int(I_i)$, podemos encontrar una sucesión $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ contenida en I_1 convergente a t_1 y tal que $\|f(t_1) - f(s_n)\| \geq \frac{1}{4M}$ para todo n (la oscilación de f en t_1 es mayor o igual que $\frac{1}{M}$). Pero también $t_1 \in G$, luego es un punto de continuidad de x^*f para cada $x^* \in N$ y resulta que $\sigma(X, N) - \lim_n(f(s_n) - f(t_1)) = 0$. Como X tiene la propiedad [K] (3.1),

  $$\overline{\lim_n}\|f(s_n) - f(t_1)\| \geq \frac{a}{4M}.$$

  Podemos tomar $t'_1 = s_n$ (para n suficientemente grande) cumpliendo $\|m(I_1)(f(t_1) - f(t'_1))\| \geq m(I_1)\frac{a}{8M}$.

- Sea $1 < j < k$ y supongamos que $t'_i \in I_i$ satisfacen (3.2) para $1 \leq i \leq j$. En particular

  $$\left\| \sum_{i=1}^{j} m(I_i)(f(t_i) - f(t'_i)) \right\| \geq \left(\sum_{i=1}^{j} m(I_i) \right) \frac{a}{8M}.$$

Como $t_{j+1} \in F_M \cap int(I_{j+1})$, podemos razonar como antes y encontrar una sucesión contenida en I_{j+1}, digamos $(s_n)_n$, convergente hacia t_{j+1} y tal que $\|f(s_n) - f(t_{j+1})\| \geq \frac{1}{4M}$ para todo n. Además $t_{j+1} \in G$ y así $\sigma(X,N) - \lim_n(f(t_{j+1}) - f(s_n)) = 0$. La propiedad [K] de X, si definimos $x = \sum_{i=1}^{j} m(I_i)(f(t_i) - f(t'_i))$, implica que

$$\overline{\lim_n}\|x + m(I_{j+1})(f(t_{j+1}) - f(s_n))\| \geq \|x\| + m(I_{j+1})\frac{a}{4M}.$$

Podemos tomar un n suficientemente grande tal que, definiendo $t'_{j+1} = s_n$, $\|x + m(I_{j+1})(f(t_{j+1}) - f(t'_{j+1}))\| \geq \|x\| + m(I_{j+1})\frac{a}{8M}$. Aplicando la hipótesis de inducción concluye la prueba.

En particular (tómese $j = k$ en (3.2)),

$$\left\|\sum_{i=1}^{k} m(I_i)(f(t_i) - f(t'_i))\right\| \geq \left(\sum_{i=1}^{k} m(I_i)\right)\frac{a}{8M}.$$

Sea $\mathcal{P} \in \Pi[a,b]$ (resp. $\mathcal{P}'$) una partición con subintervalos $I_1, \ldots, I_n$ (y, por tanto, con norma menor que δ) y puntos intermedios $t(\mathcal{P}) = \{t_1, \ldots, t_k, z_{k+1}, \ldots, z_n\}$ (resp. $t(\mathcal{P}') = \{t'_1, \ldots, t'_k, z_{k+1}, \ldots, z_n\}$). Podemos releer la desigualdad anterior en términos de sumas de Riemann:

$$\|f(\mathcal{P}) - f(\mathcal{P}')\| \geq m\left(\cup_{i=1}^{k} I_i\right)\frac{a}{8M}.$$

Por la definición de J tenemos que $G \cap F_M$ está contenido esencialmente (de hecho, salvo quizás un número finito de puntos) en $\cup_{i=1}^{k} I_i$. Por tanto, $d = m(G \cap F_M) \leq m(\cup_{i=1}^{k} I_i)$ y de aquí $\|f(\mathcal{P}) - f(\mathcal{P}')\| \geq \frac{ad}{8M}$, una contradicción. $\square$

Corolario 3.1.7. *l^1 tiene la propiedad de Lebesgue.*

Nota 3.1.8. *Existe un espacio de Banach separable reflexivo infinito-dimensional con la propiedad de Lebesgue: el espacio de Tsirelson. La prueba se debe a Da Rocha y el lector interesado puede consultar [21].*

3.2 La propiedad débil de Lebesgue

Observación 3.2.1. *Sea $T : X \longrightarrow Y$ una inmersión de espacios de Banach. Si Y tiene WLP entonces X tiene dicha propiedad. En particular WLP es una propiedad topológica (se preserva por renormamientos).*

Demostración. Supongamos que X no tiene WLP. Sea $f : [a,b] \longrightarrow X$ integrable Riemann que *no* es débilmente continua en casi todo punto. La composición $g = Tf : [a,b] \longrightarrow Y$ es integrable Riemann (proposición 1.0.13). Sabemos que $T(X) = Z$ es un subespacio cerrado de Y topológicamente isomorfo a X a través del operador T. Denotamos por $Cont(g, \sigma(Y, Y^*))$ al conjunto de puntos de continuidad (quizás vacío) de la función $g : [a,b] \longrightarrow (Y, \omega)$. Vamos a demostrar que

$$Cont(g, \sigma(Y, Y^*)) \subset Cont(f, \sigma(X, X^*))$$

(y, como f no es débilmente continua en casi todo punto, g tampoco lo puede ser). Fijamos $t \in Cont(g, \sigma(Y, Y^*))$ (si este conjunto no es vacío, naturalmente). Sea $x^* \in X^*$ arbitrario y consideremos $z^* = x^*T^{-1} \in Z^*$. El teorema de Hahn-Banach nos permite encontrar una extensión $y^* \in Y^*$ de z^*. Entonces la función $y^*g = z^*g = x^*T^{-1}g = x^*T^{-1}Tf = x^*f$ es continua en t. Por tanto, $t \in Cont(f, \sigma(X, X^*))$ e Y no tiene WLP. □

A continuación damos una condición suficiente para que un espacio de Banach tenga la propiedad débil de Lebesgue.

Proposición 3.2.2. *Sea X un espacio de Banach con dual X^* separable. Entonces X tiene WLP.*

Demostración. Sea $N = \{x_1^*, x_2^*, \dots\} \subset X^*$ denso y numerable. Fijamos una función integrable Riemann $f : [a,b] \longrightarrow X$. Sea M una cota superior de $\|f\|$ en $[a,b]$. Para cada $n \in \mathbb{N}$ la función $x_n^* f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{K}$ es integrable Riemann y, por tanto, continua en casi todo punto. Es decir, $E_n = Cont(x_n^* f)$ es medible conulo y, así, $E = \cap_{n=1}^{\infty} E_n$ es un conjunto medible conulo formado por los puntos de $[a,b]$ donde cada $x_n^* f$ es continua ($n \in \mathbb{N}$). Afirmamos que *f es débilmente continua en cualquier $t \in E$.* Fijamos $x^* \in X^*$. Sea $(t_m)_{m \in \mathbb{N}}$ una sucesión en $[a,b]$ convergente hacia t. Dado $\epsilon > 0$ la densidad de N permite encontrar $n \in \mathbb{N}$ tal que $\|x^* - x_n^*\| < \frac{\epsilon}{4M}$. Como $t \in E_n$, existe un $m_0 \in \mathbb{N}$ tal que $|x_n^* f(t_m) - x_n^* f(t)| < \frac{\epsilon}{2}$ para cada $m \geq m_0$. Entonces

$$\begin{aligned} |x^* f(t_m) - x^* f(t)| &\leq |x^* f(t_m) - x_n^* f(t_m)| + |x_n^* f(t_m) - x_n^* f(t)| \\ &\quad + |x_n^* f(t) - x^* f(t)| \\ &< \|x^* - x_n^*\| \|f(t_m)\| + \frac{\epsilon}{2} + \|x^* - x_n^*\| \|f(t)\| < \epsilon \end{aligned}$$

para todo $m \geq m_0$. Esto finaliza la demostración. □

Nota 3.2.3. *En realidad hemos demostrado un resultado más fuerte: si X^* es separable y $f : [a,b] \longrightarrow X$ es una función tal que $x^* f$ es integrable Riemann para cada $x^* \in X^*$ (una tal función se dice RD-integrable –definición 4.0.1– y es acotada por el* principio de la acotación uniforme*), entonces f es débilmente continua en casi todo punto.*

Presentamos unos ejemplos de espacios de Banach con dual separable y, por tanto, con la propiedad débil de Lebesgue.

- Espacios de dimensión finita.
- c y c_0 (su dual es l^1).

- $L^p(\mu)$ si (Ω, Σ, μ) es un espacio de medida σ-finita con Σ contablemente generada y $1 < p < \infty$ (su dual es $L^q(\mu)$ para $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, que es separable –véase A.1.10–). En particular l^p, $L^p[a, b]$ y cualquier espacio de Hilbert separable.

El recíproco de la proposición no es cierto: hemos visto que l^1 tiene LP (corolario 3.1.7) y, en particular, WLP. Sin embargo su dual (l^∞) no es separable.

A continuación nos ocupamos de dar ejemplos de espacios de Banach que *no* tienen WLP.

Ejemplo 3.2.4. *$B[a, b]$ no tiene WLP.*

Demostración. La función f del ejemplo 1.0.11 es integrable Riemann pero no es medible y, por tanto, no puede ser débilmente continua en casi todo punto (lema 5.0.1). $\square$

Otro modo de ver que $B[a, b]$ no tiene WLP es utilizar la inmersión natural $C[a, b] \longrightarrow B[a, b]$ y el siguiente ejemplo, que hemos desarrollado con ideas similares a las de [21, Ejemplo 13].

Ejemplo 3.2.5. *El espacio de Banach $C[a, b]$ de las funciones continuas de $[a, b]$ en $\mathbb{R}$ (dotado de la norma del supremo) no tiene WLP.*

Demostración. $C[a, b]$ es topológicamente isomorfo a $C[0, 1]$ y basta probar la afirmación para este último espacio.

Definimos una función $f : [0, 1] \longrightarrow C[0, 1]$ del siguiente modo:

- si $t \in [0, 1]$ es un racional diádico de la forma $t = \frac{k}{2^n}$ (para $n \in \mathbb{N}$ y $1 \leq k \leq 2^n - 1$), $f(t)$ es la función continua con soporte contenido en $[\frac{k-1}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}]$ que se anula en los extremos de este subintervalo, toma el valor 1 en t y es lineal en el resto del intervalo;

- si t no es un racional diádico contenido en $(0, 1)$ definimos $f(t) = 0$.

Veamos en primer lugar que *f es integrable Riemann en* $[0, 1]$. Sea $N \in \mathbb{N}$ arbitrario ≥ 2 pero fijo. Sea $\mathcal{P}_0$ la partición de Darboux de $[0, 1]$ formada por los subintervalos

$$I_n = \left[\frac{n}{2^N} - \frac{1}{2^{2N}}, \frac{n}{2^N} + \frac{1}{2^{2N}} \right] \quad \text{para} \quad 1 \leq n \leq 2^N - 1$$

y el resto de subintervalos que los anteriores determinan en $[0, 1]$ (las adherencias de las componentes conexas de $[0, 1] \setminus \cup_{n=1}^{2^N-1} I_n$), digamos $J_1, \ldots, J_{2^N}$.

Sean $\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2 \in \Pi[0, 1]$ con los mismos subintervalos que $\mathcal{P}_0$ y puntos intermedios $a_n \in I_n$, $a'_m \in J_m$ y $b_n \in I_n$, $b'_m \in J_m$ respectivamente. Como

$\|f(t)\|_\infty \leq 1$ para cada $t \in [0,1]$ resulta

$$\begin{aligned}
\left\| \sum_{n=1}^{2^N-1} m(I_n)(f(a_n) - f(b_n)) \right\| &\leq \sum_{n=1}^{2^N-1} m(I_n)\|f(a_n) - f(b_n)\| \\
&\leq \frac{1}{2^{2N-1}}(2^N - 1) \cdot 2 \\
&= \frac{2^N - 1}{2^{2N-2}}. \qquad (3.3)
\end{aligned}$$

Si suponemos enumerados $J_1, J_2, \ldots$ en *orden creciente* tenemos

- $a'_m, b'_m \in J_m \subset (\frac{m-1}{2^N}, \frac{m}{2^N})$ para cada $m = 2, \ldots, 2^N - 1$,
- $a'_1, b'_1 \in J_1 \subset [0, \frac{1}{2^N})$ y
- $a'_{2^{N-1}}, b'_{2^{N-1}} \in J_{2^{N-1}} \subset (\frac{2^{N-1}}{2^N}, 1]$.

Un vistazo a la construcción de f nos lleva a concluir que, para cada $1 \leq m \leq 2^N$, a'_m (resp. b'_m) cumple una de dos:

- $f(a'_m) = 0$ (resp. $f(b'_m) = 0$) o bien
- es un racional diádico contenido en $(\frac{m-1}{2^N}, \frac{m}{2^N})$ y $f(a'_m)(x) = 0$ (resp. $f(b'_m)(x) = 0$) para cualquier $x \notin (\frac{m-1}{2^N}, \frac{m}{2^N})$.

Por lo tanto, para cada $m = 1, \ldots, 2^N$ la función $f(a'_m) - f(b'_m) \in C[0,1]$ se anula fuera de $(\frac{m-1}{2^N}, \frac{m}{2^N})$.

Si tomamos cualquier $s \in [0,1]$, existe $n \in \{1, \ldots, 2^N\}$ tal que $s \in [\frac{n-1}{2^N}, \frac{n}{2^N}]$ y el comentario anterior nos dice que $(f(a'_m) - f(b'_m))(s) = 0$ si $n \neq m$. Es decir, para cada $s \in [0,1]$ hay como mucho un índice $k \in \{1, \ldots, 2^N\}$ tal que $(f(a'_k) - f(b'_k))(s) \neq 0$ y en consecuencia (recuérdese que $\|f(t)\|_\infty \leq 1$ para todo $t \in [0,1]$):

$$\begin{aligned}
\left| \left(\sum_{k=1}^{2^N} m(J_k)(f(a'_k) - f(b'_k)) \right)(s) \right| &\leq \sum_{k=1}^{2^N} m(J_k)\left|f(a'_k) - f(b'_k)\right|(s) \\
&\leq 2\left(\max_{k=1,\ldots,2^N} m(J_k) \right) \\
&\leq \frac{1}{2^{N-1}}.
\end{aligned}$$

Por tanto

$$\left\| \sum_{n=1}^{2^N} m(J_n)(f(a'_n) - f(b'_n)) \right\|_\infty \leq \frac{1}{2^{N-1}}.$$

Esta desigualdad y (3.3) conducen a

$$\|f(\mathcal{P}_1) - f(\mathcal{P}_2)\| \leq \frac{2^N - 1}{2^{2N-2}} + \frac{1}{2^{N-1}} = \frac{2^{N-1} \cdot 3 - 1}{2^{2N-2}}.$$

Como N es arbitrario y $\lim_N \frac{2^{N-1}\cdot 3-1}{2^{2N-2}} = 0$, tenemos garantizada la integrabilidad Riemann de f.

Para ver que f no es débilmente continua en casi todo punto es suficiente comprobar que f no es débilmente continua en cada $s \in (0,1) \setminus \mathbb{Q}$. Para ello fijamos un irracional $s \in (0,1)$ y una sucesión de racionales diádicos $(t_k)_{k\in\mathbb{N}}$ del intervalo $(0,1)$ convergente a s de manera que, si $t_k = \frac{m_k}{2^{n_k}}$ (con $1 \leq m_k < 2^{n_k}$), entonces

$$\frac{m_k}{2^{n_k}} - \frac{1}{2^{n_k+1}} < s < \frac{m_k}{2^{n_k}} + \frac{1}{2^{n_k+1}}.$$

La definición de f nos permite deducir que $f(t_k)(s) \geq \frac{1}{2}$ para todo k. Consideramos $\delta_s \in C[0,1]^*$ (evaluación en s) y

$$\delta_s(f(t_k)) = f(t_k)(s) \geq \frac{1}{2} > \delta_s(f(s)) = f(s)(s) = 0$$

para todo k (s es irracional y su imagen por f es la función nula). Esto implica que $\delta_s f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{K}$ no es continua en s y así f no es débilmente continua en s. Esto completa la demostración. $\square$

Otros espacios de Banach sin WLP son

- $L^\infty[a,b]$ (tenemos una inmersión natural $C[a,b] \longrightarrow L^\infty[a,b]$).
- l^∞: contiene una copia isomorfa de cualquier espacio de Banach separable [17, Proposición 5.11], por ejemplo $C[a,b]$ (véase [17, Proposición 1.27]).

Problema 3.2.6. *Caracterización de los espacios de Banach con WLP.*

3.3 Otros espacios sin la propiedad LP

En la sección precedente hemos visto que $B[a,b]$, $C[a,b]$, $L^\infty[a,b]$ y l^∞ no tienen WLP y, por tanto, no satisfacen la propiedad de Lebesgue.

La construcción del ejemplo 2.1.4 puede extenderse a una clase más amplia de espacios para obtener el siguiente resultado [21, Teorema 23].

Proposición 3.3.1 (Da Rocha). *Cualquier espacio de Banach X de dimensión infinita que admita una norma equivalente uniformemente convexa (véase A.6) no tiene la propiedad de Lebesgue.*

Demostración. Sea $\|.\|$ una norma uniformemente convexa en X. Por hipótesis X es de dimensión infinita y existe una sucesión básica $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ formada por vectores unitarios (proposición A.6.2). Sea $Y = \overline{span}\{x_1, x_2, \dots\}$, que es un subespacio cerrado de X y, por tanto, un espacio de Banach uniformemente convexo para la norma $\|.\|$ con base de Schauder normalizada $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. El teorema de Gurarii-Gurarii (A.6.4) nos garantiza que existen $p > 1$ y una constante $A > 0$ de manera que para cada sucesión de escalares $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $x = \sum_{n=1}^\infty a_n x_n$ converja se cumple la siguiente desigualdad:

$$\|x\| \leq A \left(\sum_{n=1}^\infty |a_n|^p \right)^{\frac{1}{p}}. \tag{3.4}$$

Definimos $Q = \mathbb{Q} \cap [0,1] = \{r_1, r_2, \dots\}$. Sea $f : [0,1] \longrightarrow Y$ la función definida como $f(r_n) = x_n$ (para todo $n \in \mathbb{N}$) y $f(t) = 0$ para cada $t \in [0,1]$ irracional. Evidentemente f no es continua *en ningún punto*: $\|f\| = \chi_Q$ no tiene ningún punto de continuidad. Veamos que f es integrable Riemann en $[0,1]$. Sea $\epsilon > 0$ y tomemos $\delta = \frac{1}{2}\left(\frac{\epsilon}{A}\right)^{\frac{p}{p-1}}$. Si

$$\mathcal{P} = \{([a_i, b_i], s_i) : \ i = 1, \dots, n\} \in \Pi[0,1]$$

tiene norma menor que δ definimos $J = \{1 \leq i \leq n : \ s_i \in Q\}$ y podemos tomar $J_1, \dots, J_N$ la partición de J asociada a la relación de equivalencia $i \sim j$ *sii* $s_i = s_j$. Es claro que $|J_k| \leq 2$ para cada k (cada punto intermedio no puede estar asociado a más de dos subintervalos de $\mathcal{P}$). Para cada $k = 1, \dots, N$ sea $r_{n_k} \in Q$ tal que $s_i = r_{n_k}$ para todo $i \in J_k$. Con todas estas notaciones podemos usar (3.4) junto con la clásica desigualdad $(c+d)^p \leq 2^{p-1}(c^p + d^p)$ (si $c, d \geq 0$) para deducir:

$$\begin{aligned}
\|f(\mathcal{P})\| &= \left\| \sum_{i=1}^{n} (b_i - a_i) f(s_i) \right\| \\
&= \left\| \sum_{k=1}^{N} \left(\sum_{i \in J_k} (b_i - a_i) \right) x_{n_k} \right\| \\
&\leq A \left(\sum_{k=1}^{N} (\sum_{i \in J_k} (b_i - a_i))^p \right)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq A \left(\sum_{k=1}^{N} 2^{p-1} (\sum_{i \in J_k} (b_i - a_i)^p) \right)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq 2^{\frac{p-1}{p}} A \left(\sum_{k=1}^{N} (\sum_{i \in J_k} (b_i - a_i) |\mathcal{P}|^{p-1}) \right)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq (2|\mathcal{P}|)^{\frac{p-1}{p}} A \left(\sum_{k=1}^{N} (\sum_{i \in J_k} (b_i - a_i)) \right)^{\frac{1}{p}} \\
&= A (2|\mathcal{P}|)^{\frac{p-1}{p}} < \epsilon.
\end{aligned}$$

Esto prueba que existe $\int_0^1 f = 0$ y, sin embargo, f no tiene puntos de continuidad. En particular, Y no tiene la propiedad de Lebesgue y X tampoco (3.1.1). $\square$

Disponemos así de más ejemplos concretos de espacios de Banach sin LP: espacios de Hilbert de dimensión infinita, l^p y $L^p[a,b]$ para $1 < p < \infty$ (estos dos últimos son ejemplos de espacios con WLP que no tienen LP). En general, cualquier $L^p(\mu)$ de dimensión infinita carece de la propiedad de Lebesgue (A.6.3).

Por tanto, los espacios de Banach que contienen una copia isomorfa de l^2 no tienen la propiedad de Lebesgue. Ejemplos de tales espacios los proporcionan los siguientes resultados.

Teorema 3.3.2. *$L^1[a,b]$ contiene una copia isomorfa de l^2.*

Demostración. Puede consultarse en [17, Teorema 6.28]. □

Teorema 3.3.3 (Pelczynski). *Si X es un espacio de Banach separable que contiene una copia isomorfa de l^1, entonces existe una inmersión $l^2 \longrightarrow X^*$.*

Demostración. [49, Teorema 3.4] □

En la demostración de 3.3.1 y en el ejemplo 2.2.12 construimos sendas funciones integrables Riemann sin puntos de continuidad. Es natural plantearse la siguiente cuestión:

Problema 3.3.4. *¿Para qué espacios de Banach X toda función integrable Riemann $f : [a,b] \longrightarrow X$ tiene al menos un punto de continuidad?*

Corolario 3.3.5. *Cualquier espacio de Banach que contenga una copia isomorfa de c_0 no tiene la propiedad de Lebesgue.*

Demostración. Directa a partir del citado ejemplo 2.2.12. □

Nota 3.3.6. *Esto proporciona una nueva demostración de que los espacios l^∞, $C[a,b]$, $L^\infty[a,b]$ y $B[a,b]$ no tienen LP. A la lista de espacios sin la propiedad de Lebesgue podemos añadir c.*

Finalizamos la sección con otra clase de espacios de sucesiones que no tienen la propiedad de Lebesgue: los *espacios de sucesiones de Lorentz*.

Sea $w = \{w_1 = 1, w_2, \dots\}$ una sucesión decreciente de reales positivos tal que $\sum_{n=1}^{\infty} w_n = \infty$ y $\lim_n w_n = 0$. Si $1 \leq p < \infty$, se define $d(w,p)$ como el espacio de Banach de las sucesiones $a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en $\mathbb{K}$ tales que

$$\|a\| = \sup_{\sigma\in\mathcal{S}} \left(\sum_{n=1}^{\infty} |a_{\sigma(n)}|^p w_n \right)^{\frac{1}{p}} < \infty, \tag{3.5}$$

donde $\mathcal{S}$ es el conjunto de biyecciones $\mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$.

Lema 3.3.7. *En estas condiciones, sean $a^1, \dots, a^n \in \{e_1, e_2, \dots,\}$ de manera que para cada $i \in \mathbb{N}$ hay como mucho dos a^k de manera que $a^k = e_i$. Entonces*

$$\left\| \sum_{k=1}^{n} a^k \right\| \leq 2 \left(\sum_{k=1}^{n} w_k \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Demostración. De la hipótesis deducimos que $v = \sum_{k=1}^{n} a^k = (v_m)_{m\in\mathbb{N}} \in d(w,p)$ satisface

- $|\{m \in \mathbb{N} : \ v_m \neq 0\}| \leq n$.
- $v_m \in \{0, 1, 2\}$ para cada $m \in \mathbb{N}$.

Sea $\sigma \in \mathcal{S}$ arbitraria. Observamos que $\sum_{m=1}^{\infty} |v_{\sigma(m)}|^p w_m$ es una suma con a lo más n sumandos no nulos y cada $|v_{\sigma(m)}| \leq 2$. De la monotonía de la sucesión $(w_m)_m$ se deduce que

$$\sum_{m=1}^{\infty} |v_{\sigma(m)}|^p w_m \leq \sum_{m=1}^{n} 2^p w_m = 2^p \sum_{m=1}^{n} w_m.$$

Esta desigualdad es válida para cada $\sigma \in \mathcal{S}$ y finaliza la demostración. □

Para probar la siguiente proposición seguimos la idea de [21, Teorema 25].

Proposición 3.3.8. *En las condiciones anteriores, $d(w, p)$ no tiene LP.*

Demostración. Enumeramos $[0, 1] \cap \mathbb{Q} = \{r_1, r_2, \dots\}$. Es fácil comprobar que $\|e_n\| = 1$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Esto implica que la función $f : [0, 1] \longrightarrow d(w, p)$ definida como $f(r_n) = e_n$ (para cada $n \in \mathbb{N}$) y $f(t) = 0$ si t es irracional, no es continua en ningún punto (véase la prueba de 3.3.1). Sin embargo, es integrable Riemann en $[0, 1]$ como mostramos a continuación mediante el criterio de Cauchy 1.0.4. Distinguimos dos casos:

- $p = 1$. Fijamos $\epsilon > 0$. Como $(w_n)_n$ es una sucesión monótona decreciente con límite 0, es claro que $\lim_N \frac{1}{N}\left(\sum_{i=1}^{N} w_i\right) = 0$ y existirá $N \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{N}\left(\sum_{i=1}^{N} w_i\right) < \frac{\epsilon}{4}$. Sea $\mathcal{P}_0 \in d\Pi[0, 1]$ con puntos $t_k = \frac{k}{N}$ $(k = 0, 1, \dots, N)$. Para cualquier partición $\mathcal{P} \in \Pi[0, 1]$ con $e(\mathcal{P}) = \{t_0, \dots, t_N\}$ y puntos intermedios $s_i \in [t_{i-1}, t_i]$ podemos aplicar el lema previo y obtener

  $$\|f(\mathcal{P})\| = \left\|\sum_{i=1}^{N} \frac{1}{N} f(s_i)\right\| = \frac{1}{N}\left\|\sum_{i=1}^{N} f(s_i)\right\| \leq \frac{2}{N}\left(\sum_{i=1}^{N} w_i\right) < \frac{\epsilon}{2}.$$

  Es claro que si $\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2 \in \Pi[0, 1]$ tienen los mismos subintervalos que $\mathcal{P}_0$, entonces $\|f(\mathcal{P}_1) - f(\mathcal{P}_2)\| < \epsilon$.

- $1 < p < \infty$. Dado $\epsilon > 0$, fijamos $N \in \mathbb{N}$ suficientemente grande de manera que $N^{1-\frac{1}{p}} > \frac{4}{\epsilon}$. Definimos $t_k = \frac{k}{N}$ $(k = 0, \dots, N)$ y tomamos una partición de $[0, 1]$ de la forma $\mathcal{P} = \{([t_{i-1}, t_i], s_i) : \ i = 1, \dots, N\}$. Podemos aplicar otra vez el lema previo (junto con el hecho de que $w_k \leq 1$ para todo k) y concluir la desigualdad

  $$\|f(\mathcal{P})\| = \left\|\sum_{i=1}^{N} \frac{1}{N} f(s_i)\right\| = \frac{1}{N}\left\|\sum_{i=1}^{N} f(s_i)\right\| \leq \frac{2}{N}\left(\sum_{i=1}^{N} w_i\right)^{\frac{1}{p}} \leq \frac{2}{N} N^{\frac{1}{p}} < \frac{\epsilon}{2}$$

  por la elección de N. Finalmente, dadas $\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2 \in \Pi[0, 1]$ con los mismos puntos $\{t_k\}_{0 \leq k \leq N}$ se tiene $\|f(\mathcal{P}_1) - f(\mathcal{P}_2)\| < \epsilon$.

Esto prueba la integrabilidad Riemann de f. □

Capítulo 4

Formas débiles de la integral

En este capítulo introducimos conceptos análogos a los de *integrabilidad Dunford y Pettis* (definición A.4.7) reemplazando la integral de Lebesgue por la de Riemann. Establecemos distintas relaciones entre estos nuevos tipos de integrabilidad y demostramos que *la integral de Pettis extiende a la de Riemann.* La referencia básica es [21].

Definición 4.0.1. *Diremos que $f : [a, b] \longrightarrow X$ es integrable*

i) Riemann-Dunford *(abreviadamente RD-integrable) si para cada $x^* \in X^*$ la composición $x^* f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{K}$ es integrable Riemann.*

ii) Riemann-Pettis *(abreviadamente RP-integrable) si es RD-integrable y para cada intervalo cerrado $I \subset [a, b]$ existe $x_I \in X$ tal que para todo $x^* \in X^*$*

$$x^*(x_I) = \int_a^b x^* f.$$

Nota 4.0.2. *El vector $x_I \in X$ de la definición precedente, si existe, es necesariamente único como consecuencia del teorema de Hahn-Banach.*

Proposición 4.0.3. *Sea $f : [a, b] \longrightarrow X$ medible y RD-integrable. Entonces f es integrable Bochner.*

Demostración. Para cada $x^* \in X^*$ la función $x^* f$ es integrable Riemann y, por tanto, acotada en $[a, b]$. Por el *principio de la acotación uniforme* existe $M > 0$ cota superior de $\|f\|$ en $[a, b]$. Además, f es medible Bochner y

$$\int_a^b \|f\| \leq M(b - a) < \infty.$$

La proposición A.4.5 permite deducir que f es integrable Bochner. $\square$

Proposición 4.0.4. *Sea $f : [a, b] \longrightarrow X$ una función. Entonces*

i) f integrable Riemann $\Rightarrow$ f integrable Riemann-Pettis.

ii) f integrable Riemann-Pettis $\Rightarrow$ f es integrable Pettis.

Demostración. i) Supongamos que f es integrable Riemann en $[a, b]$. Por la proposición 1.0.13 tenemos que para cada $x^* \in X^*$ la composición x^*f es integrable Riemann. Es más, si $I \subset [a, b]$ es un subintervalo cerrado entonces f es integrable Riemann en I y su integral $x_I := \int_I f \in X$ satisface para cada $x^* \in X^*$ (de nuevo aplicamos 1.0.13, esta vez en el intervalo I)

$$x^*(x_I) = \int_I x^* f.$$

Por tanto, f es RP-integrable.

ii) Por hipótesis f es RP-integrable y, en particular, integrable Dunford. Si denotamos por $\nu : \Sigma \longrightarrow X^{**}$ a la integral indefinida de Dunford de f, la RP-integrabilidad de f implica que $\nu(I) \in X$ para cada subintervalo cerrado $I \subset [a, b]$. Estamos en las condiciones del teorema A.4.15 y basta comprobar que $Z_f = \{x^*f : x^* \in B_{X^*}\}$ es un subconjunto uniformemente absolutamente continuo de $\mathcal{L}^1[a, b]$. La RD-integrabilidad de f implica, según comentamos en la prueba de la proposición anterior, que $M = \sup_{t \in [a,b]} \|f(t)\| < \infty$. Entonces para cada $E \in [a, b]$ medible y cada $h \in Z_f$

$$\int_E |h| \leq \int_E M = m(E)M,$$

por lo que Z_f es uniformemente absolutamente continuo y f es integrable Pettis. □

Hemos preferido dar ya una prueba de que toda función $f : [a, b] \longrightarrow X$ integrable Riemann es integrable Pettis (que corrige la ausencia de detalles de la fuente original [21, Teorema 15]), aunque más adelante obtendremos un par de mejoras. La primera (contenida en 6.0.2 y A.5.6) es válida cuando el espacio X es real y es consecuencia de un resultado de J. Bourgain. La segunda mejora la presentaremos al hablar de la integral de McShane, en la segunda parte de esta memoria. En concreto demostraremos que la integral de McShane extiende a la de Riemann (8.4.1) y que la de Pettis extiende a la de McShane (10.1.2). Para probar este último resultado emplearemos también la caracterización A.4.15, aunque, a diferencia de 4.0.4 (donde utilizamos *iii*) $\Rightarrow$ *iv*) $\Rightarrow$ *v*) $\Rightarrow$ *i*) de A.4.15, que no deja de ser un sencillo argumento de teoría de la medida), la prueba descansará en la implicación más compleja (*ii* $\Rightarrow$ *iii*) del citado teorema.

Ninguno de los recíprocos de 4.0.4 es cierto en general. Para dar un contraejemplo al segundo basta tomar una función $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ integrable Lebesgue que no sea integrable Riemann (por ejemplo, la función característica de $[a, b] \cap \mathbb{Q}$). El contraejemplo al primero es más elaborado y lo presentaremos en el *Capítulo 5*, dentro de otro contexto.

Para funciones escalares la integral de Lebesgue extiende a la de Riemann y la medibilidad de una función integrable Riemann se obtiene gracias a su continuidad en casi todo punto (teorema de Lebesgue). En el caso general sigue siendo cierto que una función continua en casi todo punto $f : [a,b] \longrightarrow X$ es medible Bochner (de hecho basta exigirle continuidad débil en casi todo punto, véase 5.0.1), pero ya hemos mostrado (ejemplo 2.2.11) que la integrabilidad Riemann no asegura continuidad en casi todo punto, ni siquiera medibilidad (en el ejemplo 1.0.11 construimos f integrable Riemann tal que $\|f\|$ no es medible Lebesgue y, así, f no puede ser medible). Es sencillo mostrar que una función integrable Riemann es integrable Bochner *si* y sólo si es medible Bochner [21, Teorema 15]:

Corolario 4.0.5. *Si $f : [a,b] \longrightarrow X$ es integrable Riemann y medible Bochner entonces es integrable Bochner (y las integrales coinciden).*

Demostración. f es medible Bochner e integrable Riemann-Dunford por el resultado precedente. La proposición 4.0.3 nos asegura la integrabilidad Bochner de f. Por otro lado, para cada $x^* \in X^*$

$$x^*\left((B)\int_a^b f\right) = (L)\int_a^b x^*f = (R)\int_a^b x^*f = x^*\left((R)\int_a^b f\right)$$

por la proposición 1.0.13. Podemos aplicar el teorema de Hahn-Banach y deducir $(B)\int_a^b f = (R)\int_a^b f$. $\square$

Problema 4.0.6. *¿Para qué espacios de Banach X la integrabilidad Riemann de una función $f : [a,b] \longrightarrow X$ implica su medibilidad? Es decir, ¿en qué espacios de Banach la integrabilidad Bochner extiende a la de Riemann?*

Ejemplo 4.0.7. *Si H es un espacio de Hilbert con dimensión hilbertiana (i.e. cardinalidad de cualquier base hilbertiana) mayor que c, entonces existe una función $f : [a,b] \longrightarrow H$ integrable Riemann que no es medible Bochner.*

Demostración. Podemos reducirnos al caso $H = l^2([a,b])$. Sea $\{e_t\}_{t\in[a,b]}$ la base hilbertiana *estándar* de H. Definimos la función $f : [a,b] \longrightarrow H$ mediante $f(t) = e_t$.

f no es medible Bochner porque no tiene rango esencialmente separable (teorema A.4.2). En efecto, si $A \subset [a,b]$ es medible y $m(A) > 0$, en particular A no es numerable y $f(A) = \{e_t : \ t \in A\}$ es un subconjunto no numerable de vectores tales que $\|e_t - e_s\| = \sqrt{2}$ para $t \neq s$ $(t, s \in A)$. Por tanto $f(A)$ no puede ser separable.

f es integrable Riemann en $[a,b]$. En efecto, dada cualquier partición

$$\mathcal{P} = \{([a_i, b_i], s_i) : \ i = 1, \ldots, n\} \in \Pi[a,b],$$

podemos tomar $I_1, \ldots, I_N$ la partición de $\{1, \ldots, n\}$ asociada a la relación de equivalencia $i \sim j$ *sii* $s_i = s_j$. Para cada $j = 1, \ldots, N$ fijamos $i_j \in I_j$. Evidentemente $|I_j| \leq 2$ para cada j. Por tanto:

$$\begin{aligned}
\|f(\mathcal{P})\| &= \left\| \sum_{j=1}^{N} \left(\sum_{i \in I_j} (b_i - a_i) \right) e_{s_{i_j}} \right\| \\
&= \left(\sum_{j=1}^{N} \left(\sum_{i \in I_j} (b_i - a_i) \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \left(\sum_{j=1}^{N} \left(\sum_{i \in I_j} 2(b_i - a_i)^2 \right) \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \sqrt{2} \left(\sum_{j=1}^{N} \left(\sum_{i \in I_j} (b_i - a_i)|\mathcal{P}| \right) \right)^{\frac{1}{2}} \\
&= (2(b-a)|\mathcal{P}|)^{\frac{1}{2}}.
\end{aligned}$$

(Hemos utilizado que $(c+d)^2 \leq 2(c^2 + d^2)$ para $c, d \geq 0$). Esta desigualdad prueba que existe $\int_a^b f = 0$. $\square$

Como consecuencia de los comentarios anteriores al corolario 4.0.5 tenemos [21, Corolario 19] el siguiente

Corolario 4.0.8. *Si $f : [a, b] \longrightarrow X$ es integrable Darboux entonces*

i) f es medible.

ii) $\|f\|$ es integrable Riemann.

iii) f es integrable Bochner.

Demostración. El teorema 2.2.7 afirma que f es continua en casi todo punto y el lema 5.0.1 asegura la medibilidad Bochner de f. Por otro lado, $\|f\|$ es acotada y continua en casi todo punto. Entonces es integrable Riemann y, en particular, integrable Lebesgue. Podemos aplicar ahora A.4.5 y obtener que f es integrable Bochner. $\square$

Ahora nos ocuparemos de ver bajo qué condiciones la RD-integrabilidad de una función implica RP-integrabilidad [21, Teoremas 29, 31].

Definición 4.0.9. *Un subconjunto $S \subset X$ es* de Schur *si toda sucesión contenida en S débilmente convergente a un punto de X es convergente en norma.*

Definición 4.0.10. *Un espacio de Banach X se dice* débilmente sucesionalmente completo *(abreviadamente WSC) si (X, ω) es sucesionalmente completo* *(como espacio uniforme): toda sucesión débilmente de Cauchy es débilmente convergente. Un subconjunto $S \subset X$ es WSC si toda sucesión de Cauchy respecto de (X, ω) contenida en S es débilmente convergente a un punto de X.*

Todo espacio de Banach reflexivo es WSC ([9, V.4.4]). Como ejemplos de espacios WSC que, en general, no son reflexivos podemos citar: $ca(\Sigma)$ (espacio de medidas escalares numerablemente aditivas definidas en una σ-álgebra Σ, con la norma de la variación total), $L^1(\mu)$ para un espacio de medida finita (Ω, Σ, μ) (véase [11, VII, Teorema 12]) y $L^\infty(\mu)$ si μ es σ-finita [9, pág. 138].

Lema 4.0.11. *Todo espacio de Banach X con la propiedad de Schur es WSC.*

Demostración. Sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en X que no es de Cauchy en norma. Existen por tanto $a > 0$ y una subsucesión $(x_{n_k})_k$ tales que $z_k = x_{n_{k+1}} - x_{n_k}$ verifica $\|z_k\| > a$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Como X tiene la propiedad de Schur, la sucesión $(z_k)_k$ no puede ser débilmente convergente a 0 y, así, $(x_n)_n$ no es de Cauchy en (X, ω). □

Proposición 4.0.12. *Sea $f : [a, b] \longrightarrow X$ una función RD-integrable. Sea $W = co(f[a, b])$. f es RP-integrable si se cumple alguna de las siguientes condiciones*

i) f es medible

ii) W es débilmente sucesionalmente completo (en particular, si X es WSC).

iii) X tiene la PIP-Lebesgue (definición A.4.17).

Demostración. Una función RD-integrable que lo sea también en sentido Pettis es obviamente integrable Riemann-Pettis. Si X tiene la PIP-Lebesgue, entonces cualquier función acotada escalarmente medible es integrable Pettis. En particular, toda función RD-integrable es integrable Pettis y, por tanto, Riemann-Pettis. Esto prueba *iii*). Por otro lado (para ver *i*)), si f es medible y RD-integrable, entonces es integrable Pettis por las proposiciones 4.0.3 y A.4.10.

ii) Es claro que $V = (b-a)W$ es débilmente sucesionalmente completo y que $f(\mathcal{P}) \in V$ para cada $\mathcal{P} \in \Pi[a, b]$. Fijamos un subintervalo cerrado $I \subset [a, b]$. Sea $\mathcal{P}_n \in \Pi[I]$, $n \in \mathbb{N}$, una sucesión de particiones tales que $\lim_n |\mathcal{P}_n| = 0$. Para cada $x^* \in X^*$ la función x^*f es integrable Riemann en I (por ser f RD-integrable) y existe $\lim_n (x^*f)(\mathcal{P}_n) = \int_I x^*f$; en particular, la sucesión $\{(x^*f)(\mathcal{P}_n)\}_n$ es de Cauchy en $\mathbb{K}$. Es claro que para todo $x^* \in X^*$ y cada n se tiene $(x^*f)(\mathcal{P}_n) = x^*(f(\mathcal{P}_n))$ y, por tanto, la sucesión $(f(\mathcal{P}_n))_n$ es de Cauchy en (X, ω). Como $f(\mathcal{P}_n) \in V$ para cada n y V es WSC, existe $\omega - \lim_n f(\mathcal{P}_n) = x_I \in X$. Entonces

$$x^*(x_I) = \lim_n x^*(f(\mathcal{P}_n)) = \int_I x^*f$$

para todo $x^* \in X^*$. Esto prueba que f es integrable Riemann-Pettis. □

En particular, la clase de los espacios de Banach para los que *RD-integrable* equivale a *RP-integrable* contiene a los espacios débilmente compactamente generados (WCG) (véase A.4).

Un vistazo a la prueba de $ii)$ en 4.0.12 permite apreciar que, si fortalecemos la hipótesis exigiendo a W que sea también de Schur, la RD-integrabilidad implica integrabilidad Riemann. En detalle:

Proposición 4.0.13. *Sea $f : [a,b] \longrightarrow X$ una función RP-integrable. Si $W = co(f[a,b])$ es de Schur, entonces f es integrable Riemann.*

Demostración. Sea ν la integral indefinida de Pettis de f (véase 4.0.4) y $z = \nu([a,b]) \in X$. Vamos a demostrar que f es integrable Riemann con integral z. Tomamos cualquier sucesión de particiones $\mathcal{P}_n \in \Pi[a,b]$, $n = 1, 2, \dots,$ tales que $\lim_n |\mathcal{P}_n| = 0$. Para cada $x^* \in X^*$ la función x^*f es integrable Riemann con integral $x^*(z)$ (por ser f RP-integrable). Por tanto

$$\lim_n x^*(f(\mathcal{P}_n)) = \lim_n (x^*f)(\mathcal{P}_n) = \int_a^b x^*f = x^*(z),$$

es decir, existe $\omega - \lim_n f(\mathcal{P}_n) = z$. Como $f(\mathcal{P}_n) \in V = (b-a)W$ y V es de Schur (por serlo W), existe $\|.\| - \lim_n f(\mathcal{P}_n) = z$.
Esto prueba que f es integrable Riemann y $\int_a^b f = z$. $\square$

Como consecuencia de 4.0.11, 4.0.12 y 4.0.13 obtenemos la siguiente propiedad de los espacios de Schur (de hecho los caracteriza, como demostraremos en el *Capítulo 5*).

Corolario 4.0.14. *Si X es de Schur, cualquier función $f : [a,b] \longrightarrow X$ integrable Riemann-Dunford es integrable Riemann.*

Lema 4.0.15. *Si A es un subconjunto separable del espacio de Banach X, existen $x_1^*, x_2^*, \dots \in X^*$ tales que para cada $a \in A$*

$$\|a\| = \sup_{n \in \mathbb{N}} |x_n^*(a)|$$

Demostración. Dado que $\overline{span}(A)$ es también separable, el teorema de Hahn-Banach reduce la prueba al caso de que X sea separable. Sea $D \subset X$ denso numerable y tomemos para cada $d \in D$ un $x_d^* \in S_{X^*}$ tal que $|x_d^*(d)| = \|d\|$. Fijemos $x \in X$ arbitrario y $\epsilon > 0$. La densidad de D permite encontrar un $d \in D$ tal que $\|x - d\| < \epsilon$ y $\|x\| - \epsilon < \|d\|$. Entonces

$$\begin{aligned} \|x\| - \epsilon < \|d\| = |x_d^*(d)| &\leq |x_d^*(x)| + |x_d^*(d-x)| \\ &\leq |x_d^*(x)| + \|x - d\| < |x_d^*(x)| + \epsilon \\ &< \sup_{f \in D} |x_f^*(x)| + \epsilon. \end{aligned}$$

Es decir, para cada $\epsilon > 0$

$$\|x\| - 2\epsilon < \sup_{f \in D} |x_f^*(x)|.$$

El lema queda probado. $\square$

Con la ayuda de este lema podemos demostrar [21, Teorema 32]:

Proposición 4.0.16. *Una función $f : [a,b] \longrightarrow X$ RD-integrable de rango relativamente compacto es integrable Darboux.*

Demostración. $V = f([a,b]) \subset X$ es relativamente compacto en un espacio métrico y, en consecuencia, es separable. Por el lema 4.0.15 existe una sucesión $(x_n^*)_{n\in\mathbb{N}}$ en X^* tal que

$$\|v\| = \sup_{n\in\mathbb{N}} |x_n^*(v)| \tag{4.1}$$

para todo $v \in V$. Para cada n la función $x_n^* f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{K}$ es integrable Riemann y, así, existe un conjunto medible conulo $F_n \subset [a,b]$ tal que $x_n^* f$ es continua en cada punto de F_n. La intersección $F = \cap_{n=1}^{\infty} F_n \subset [a,b]$ es un conjunto medible conulo. La proposición queda automáticamente demostrada si vemos que f es continua en cada punto de F, por el teorema de Lebesgue 2.2.7 (la acotación de f se sigue, por ejemplo, de su RD-integrabilidad).

Para ello fijamos $t \in F$ y $(t_m)_m$ una sucesión en $[a,b]$ convergente hacia t. Por la definición de F resulta que cada $x_n^* f$ es continua en t y, por tanto,

$$\lim_m x_n^*(f(t_m)) = x_n^*(f(t))$$

para cada $n \in \mathbb{N}$; es decir, la sucesión $(f(t_n))_n$ converge hacia $f(t)$ en la topología $\sigma(X,N)$ generada por la colección $N = \{x_n^*\}_n$. Esta topología es más débil que la normada y Hausdorff: dados $x \neq y \in X$ existe, por (4.1), un $n \in \mathbb{N}$ tal que $x_n^*(x) \neq x_n^*(y)$; como x_n^* es $\sigma(X,N)$-continua, x e y tienen $\sigma(X,N)$-entornos disjuntos. Por tanto, la sucesión $(f(t_n))_n$ tiene un único posible punto de $\|.\|$-aglomeración: $f(t)$. Al estar contenida en el relativamente compacto V debe converger en norma a $f(t)$. Así, f es continua en t y la prueba ha finalizado. $\square$

Capítulo 5

Continuidad débil e integrabilidad

Los primeros en observar que la continuidad débil no asegura integrabilidad Riemann fueron Alexiewicz y Orlicz [1]. Su ejemplo [21, Ejemplo 35] ha sido generalizado por V.M. Kadets [36], C. Wang y Z. Yang [57] hasta obtener una caracterización completa de los espacios de Banach X para los que toda función débilmente continua $f : [a,b] \longrightarrow X$ es integrable Riemann: los espacios de Schur. En la sección 5.1 presentaremos este resultado (teorema 5.1.2) en su versión más general, extendido a topologías vectoriales más gruesas que la normada.

En la segunda sección caracterizamos, mediante integración Riemann, otra propiedad relativa a la convergencia en norma de sucesiones débilmente convergentes y que posee, por ejemplo, todo espacio uniformemente convexo.

Comenzamos probando que toda función débilmente continua en casi todo punto es medible Bochner y RP-integrable [21, Corolario 30] cuando además es acotada.

Lema 5.0.1. *Una función $f : [a,b] \longrightarrow X$ débilmente continua en casi todo punto es medible Bochner.*

Demostración. Para aplicar el teorema de medibilidad A.4.2 veamos que f tiene rango *esencialmente* separable. El conjunto medible $E = Cont(f,\omega)$ es conulo por hipótesis. Vamos a comprobar que $f(E)$ es separable. En efecto, sea $D \subset E$ denso numerable (E es un subespacio de un métrico separable y, en consecuencia, es separable). Fijamos $Y = \overline{span(f(D))}^{\|\cdot\|} \subset X$. Es fácil ver que Y es separable. Para ver que $f(E)$ es $\|.\|$-separable basta comprobar que $f(E) \subset Y$. La convexidad de $span(f(D))$ implica, por el teorema de Mazur (A.6.6), que $Y = \overline{span(f(D))}^{\omega}$. Como $f\restriction_E$ es débilmente continua y D denso en E,

$$f(E) \subset \overline{f(D)}^{\omega} \subset \overline{span(f(D))}^{\omega} = Y$$

y esto finaliza la demostración. □

Corolario 5.0.2. *Si $f : [a, b] \longrightarrow X$ es acotada y débilmente continua en casi todo punto entonces es RP-integrable. En particular toda función $f : [a, b] \longrightarrow X$ débilmente continua es RP-integrable.*

Demostración. Para cada $x^* \in X^*$ la función $x^* f$ es acotada y continua en casi todo punto, luego integrable Riemann. La función f es entonces RD-integrable y además medible (lema previo). El resultado se sigue de 4.0.12. □

5.1 Caracterización de la propiedad de Schur

Definición 5.1.1. *Sean X un espacio de Banach y τ una topología vectorial Hausdorff en X más gruesa que la inducida por la norma. Diremos ([57]) que X es* de Schur respecto de τ *si toda sucesión en X convergente en la topología τ lo es también en la inducida por la norma.*

Nuestro objetivo en la sección es probar el siguiente teorema. La equivalencia de las tres primeras condiciones se demuestra en [57, Teorema 2], mientras que la cuarta es una generalización de [3, Proposición 7]. La hipótesis de convexidad local de la topología τ que aparece en el primer artículo puede ser omitida.

Teorema 5.1.2. *Sean X un espacio de Banach y τ una topología vectorial Hausdorff en X más gruesa que la de la norma. Son equivalentes:*

i) X es de Schur respecto de τ.

ii) Toda función τ-continua $f : [a, b] \longrightarrow X$ es integrable Darboux.

iii) Toda función τ-continua $f : [a, b] \longrightarrow X$ es integrable Riemann.

iv) Para cada función $f : [a, b] \longrightarrow X$ τ- continua, su norma $\|f\|$ es integrable Riemann.

Si $\tau = \omega$, podemos añadir a la lista anterior:

v) Toda función $f : [a, b] \longrightarrow X$ RD-integrable es integrable Riemann.

vi) Cualquier función $f : [a, b] \longrightarrow X$ RD-integrable de rango relativamente ω-compacto es integrable Darboux.

En particular, para un espacio X que no sea de Schur siempre podemos encontrar funciones RP-integrables que no son integrables Riemann (la demostración del teorema dará un ejemplo *estándar*), resolviendo así una cuestión pendiente del capítulo anterior.

La siguiente construcción *tipo Cantor* será también utilizada en la sección siguiente. Para cualquier subintervalo cerrado $J \subset [0, 1]$ denotaremos por $g(J)$ a su punto medio. *Afirmamos* que existen subintervalos cerrados $A_{n,k} = [a_{n,k}, b_{n,k}] \subset B_{n,k} \subset [0, 1]$ ($n \in \mathbb{N}$ y $1 \leq k \leq 2^{n-1}$) tales que

i) $g(A_{n,k}) = g(B_{n,k})$

ii) $m(A_{n,k}) = \left(\frac{1}{2^{n-1}}\right)\left(\frac{1}{3^n}\right)$

iii) $m(B_{n,k}) = \left(\frac{1}{2^{n-1}}\right)\left(1 - \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{3^i}\right)$

iv) los intervalos $A_{n,k}$ son disjuntos

para todo $n \in \mathbb{N}$ y cada $1 \leq k \leq 2^{n-1}$. Esbozamos la construcción: para $n = 1$ definimos $B_{1,1} = [0,1]$ y $A_{1,1} = [a_{1,1}, b_{1,1}] \subset B_{1,1}$ el intervalo cerrado tal que $m(A_{1,1}) = \frac{1}{3}$ y $g(A_{1,1}) = g(B_{1,1})$. Definimos $B_{2,1} = [0, a_{1,1}]$ y $B_{2,2} = [b_{1,1}, 1]$. Sean $A_{2,1} = [a_{2,1}, b_{2,1}]$ y $A_{2,2} = [a_{2,2}, b_{2,2}]$ los intervalos cerrados de medida $\frac{1}{2}\frac{1}{3^2}$ tales que $g(A_{2,1}) = g(B_{2,1})$ y $g(A_{2,2}) = g(B_{2,2})$. A continuación repetimos el proceso para

$$B_{3,1} = [0, a_{2,1}], B_{3,2} = [b_{2,1}, a_{1,1}], B_{3,3} = [b_{1,1}, a_{2,2}], B_{3,4} = [b_{2,2}, 1]$$

y vamos obteniendo las sucesiones de intervalos deseadas. Sean

$$G = \cup_{n=1}^{\infty} \cup_{k=1}^{2^{n-1}} (a_{n,k}, b_{n,k}) \quad \text{y} \quad H = [0,1] \setminus G.$$

Lema 5.1.3. *Sean (X, τ) un espacio vectorial topológico y $f_{n,k} : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ funciones continuas con soporte contenido en $[a_{n,k}, b_{n,k}]$ ($n \in \mathbb{N}$ y $1 \leq k \leq 2^{n-1}$) tales que $f(a_{n,k}) = f(b_{n,k}) = 0$. Definimos para cada n la función continua $g_n = \sum_{i=1}^{2^{n-1}} f_{n,i}$. Supongamos que existe $M > 0$ tal que $\|f_{n,k}\|_\infty < M$ para cada $n \in \mathbb{N}$ y $k = 1, \ldots, 2^{n-1}$. Si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión en X convergente hacia 0, la serie*

$$f(t) = \sum_{i=1}^{\infty} g_i(t) x_i$$

converge uniformemente en $t \in [0,1]$ y define una función continua de $[0,1]$ en X.

Demostración. Sólo nos tenemos que preocupar de verificar la convergencia uniforme. Sea $W \subset X$ un entorno de 0. Como X es un espacio vectorial topológico, existe un entorno U de 0 equilibrado (es decir, para cada $u \in U$ y $a \in \mathbb{K}$ de módulo menor o igual que 1 se cumple $au \in U$) tal que $M \cdot U \subset W$. Por hipótesis existe un $N \in \mathbb{N}$ tal que $x_n \in U$ para todo $n > N$. Observamos que

$$g_n(t) = 0 \quad \text{para todo} \quad t \notin \cup_{i=1}^{2^{n-1}} (a_{n,i}, b_{n,i}) \tag{5.1}$$

y así para cada $n \neq m$ se tiene $sop(g_n) \cap sop(g_m) = \emptyset$ (por la propiedad *iv*). Por tanto, para cada $t \in [0,1]$ tenemos que la suma $f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} g_n(t) x_n$ consta como mucho de un único sumando no nulo. Afirmamos que, para cada $q \geq N$,

$$\sum_{n=1}^{q} g_n(t) x_n - f(t) \in W \text{ para todo } t \in [0,1].$$

En efecto, en primer lugar observamos que

$$\sum_{n=1}^{q} g_n(t)x_n - f(t) = \sum_{n=q+1}^{\infty} g_n(t)x_n.$$

De la ecuación (5.1) es inmediato que si $t \in H$ o $t \in \cup_{n=1}^{q} \cup_{i=1}^{2^{n-1}} (a_{n,i}, b_{n,i})$, entonces $\sum_{n=q+1}^{\infty} g_n(t)x_n = 0$, y si $t \in \cup_{i=1}^{2^{m-1}} (a_{m,i}, b_{m,i})$ para algún $m > q \geq N$, entonces

$$\sum_{n=q+1}^{\infty} g_n(t)x_n = g_m(t)x_m.$$

Así, $\sum_{n=q+1}^{\infty} g_n(t)x_n \in D(0, M) \cdot U \subset M \cdot U \subset W$ porque U es equilibrado y $x_k \in U$ para $k > N$. Esto prueba la convergencia uniforme de la serie y acaba la demostración del lema. □

Con estos preliminares podemos pasar a la demostración del teorema 5.1.2

Demostración. *i)* ⇒ *ii)* es consecuencia de que toda función $f : [a, b] \longrightarrow X$ τ-continua es continua para la norma, por la propiedad de Schur de X y la metrizabilidad de $[a, b]$. En particular, f es integrable Darboux por el teorema 2.2.7.

ii) ⇒ *iii)* se obtiene de 2.2.6.

iii) ⇒ *i)* y *iv)* ⇒ *i)*. Para cada $n \in \mathbb{N}$ y $k = 1, \ldots, 2^{n-1}$ sea $h_{n,k}$ una función real continua definida en $[0, 1]$ de soporte contenido en $A_{n,k} = [a_{n,k}, b_{n,k}]$ tal que $h_{n,k}(g(A_{n,k})) = 1$, $h_{n,k}(a_{n,k}) = h_{n,k}(b_{n,k}) = 0$ y $0 \leq h_{n,k} \leq 1$. Definimos la función continua $h_n = \sum_{i=1}^{2^{n-1}} h_{n,i}$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Es claro que $0 \leq h_n \leq 1$ para todo n.

Vamos a probar que si X no es de Schur respecto de τ, existe una función τ-continua $f : [0, 1] \longrightarrow X$ tal que ni f ni $\|f\|$ son integrables Riemann.

Si X no es de Schur respecto de τ existe una sucesión en X que converge a 0 respecto de τ pero no en norma. Pasando a una adecuada subsucesión podemos encontrar $a > 0$ y una sucesión $x_1, x_2, \dots \in X$ convergente a 0 respecto de τ de modo que $\|x_n\| \geq a$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Aplicando el lema 5.1.3 obtenemos una función τ-continua $f : [0, 1] \longrightarrow X$ definida por

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} h_n(t)x_n$$

(para cada $t \in [0, 1]$ la suma es finita al ser disjuntos los soportes de las h_n's). Vamos a ver que f y $\|f\|$ no son integrables Riemann en $[0, 1]$ mostrando que no cumplen el criterio de Cauchy (1.0.4). *Afirmamos* que para cada $\delta > 0$ existen $\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2 \in \Pi[0, 1]$ de norma menor que δ tales que

$$\|f(\mathcal{P}_1) - f(\mathcal{P}_2)\| \geq \frac{a}{2} \quad \text{y} \quad |\|f\|(\mathcal{P}_1) - \|f\|(\mathcal{P}_2)| \geq \frac{a}{2}.$$

Para verlo fijamos $N \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{2^{N-1}} < \delta$. Por construcción los intervalos $B_{N,1}, \ldots, B_{N,2^{N-1}}$ son disjuntos de medida $\frac{1}{2^{N-1}}\left(1 - \sum_{i=1}^{N-1} \frac{1}{3^i}\right) < \delta$ (propiedad *iii*). Podemos construir dos particiones de Riemann $\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2 \in \Pi[0,1]$ de norma menor que δ con los mismos subintervalos de modo que

- $B_{N,k}$ es un intervalo de $\mathcal{P}_1$ y $\mathcal{P}_2$ para todo $1 \leq k \leq 2^{N-1}$;
- para $1 \leq k \leq 2^{N-1}$ el punto intermedio de $\mathcal{P}_1$ (resp. $\mathcal{P}_2$) asociado a $B_{N,k}$ es $g(B_{N,k}) = g(A_{N,k})$ (resp. $a_{N,k}$);
- si J es un subintervalo de $\mathcal{P}_1$ y $\mathcal{P}_2$ distinto de cualquier $B_{N,k}$ el punto intermedio asociado en una y otra partición es el mismo.

Por lo tanto, de la definición de las h_n se deduce

$$\begin{aligned}
\|f(\mathcal{P}_1) - f(\mathcal{P}_2)\| &= \left\| \sum_{k=1}^{2^{N-1}} m(B_{N,k})(f(g(A_{N,k})) - f(a_{N,k})) \right\| \\
&= \left\| m(B_{N,1}) \sum_{k=1}^{2^{N-1}} x_N \right\| \\
&= m(B_{N,1}) 2^{N-1} \|x_N\| \\
&> \frac{a}{2},
\end{aligned}$$

porque $\|x_n\| \geq a$ para todo n y

$$\begin{aligned}
m(B(N,k)) &= \frac{1}{2^{N-1}} \left(1 - \sum_{i=1}^{2^{N-1}} \frac{1}{3^i}\right) \\
&= \frac{1}{2^{N-1}} \left(1 - (\frac{1}{2} - \frac{1}{3^{2^{N-1}} \cdot 2})\right) \\
&> \frac{1}{2^N}.
\end{aligned}$$

Análogamente

$$\begin{aligned}
|\|f\|(\mathcal{P}_1) - \|f\|(\mathcal{P}_2)| &= \left| \sum_{k=1}^{2^{N-1}} m(B_{N,k})(\|f\|(g(A_{N,k})) - \|f\|(a_{N,k})) \right| \\
&= \left| m(B_{N,1}) \sum_{k=1}^{2^{N-1}} \|x_N\| \right| \\
&= m(B_{N,1}) 2^{N-1} \|x_N\| \\
&> \frac{a}{2}.
\end{aligned}$$

Esto concluye la demostración de $iii), iv) \Rightarrow i)$.

$i) \Rightarrow iv)$ es consecuencia de que si $f : [a, b] \longrightarrow X$ es τ-continua, entonces es continua para la topología de la norma (véase $i) \Rightarrow ii)$), $\|f\| : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ es continua y, por tanto, integrable Riemann.

$i) \Rightarrow v)$ El corolario 4.0.14.

$v) \Rightarrow iii)$ Toda función $f : [a, b] \longrightarrow X$ débilmente continua es inmediatamente RD-integrable (para cada $x^* \in X^*$ la función $x^* f$ es continua en $[a, b]$ y, por tanto, integrable Riemann).

$i) \Rightarrow vi)$. Sea $f : [a, b] \longrightarrow X$ RD-integrable de rango débilmente relativamente compacto. Por el *teorema de Eberlein-Smulian* A.6.7 f tiene rango débilmente relativamente sucesionalmente compacto. Pero como toda sucesión débilmente convergente es convergente en norma (X es de Schur), tenemos que $f([a, b])$ es relativamente compacto en norma. El resultado se sigue ahora de la proposición 4.0.16.

$vi) \Rightarrow ii)$ Toda función $f : [a, b] \longrightarrow X$ débilmente continua tiene rango débilmente compacto y es RD-integrable. □

Obtenemos así una nueva caracterización de los espacios de Banach de dimensión finita [36, página 35]:

Corolario 5.1.4. *Para un espacio de Banach X son equivalentes:*

i) X es de dimensión finita.

ii) Toda función ω^*-continua $f : [a, b] \longrightarrow X^*$ es integrable Riemann.

Demostración. $i) \Rightarrow ii)$. Si X es de dimensión finita, su dual también lo es y en éste coinciden ω^* y la topología generada por la norma (véase [46, 5.9.4]). La integrabilidad se sigue de 2.2.8.

$ii) \Rightarrow i)$. El teorema precedente afirma que X^* es de Schur respecto de ω^*. Por el teorema de Josefson-Nissenzweig (A.6.8) X debe ser finito dimensional. □

5.2 Espacios de Banach con la propiedad [H]

Definición 5.2.1. *Sean $(X, \|.\|)$ un espacio de Banach y τ una topología vectorial en X más débil que la inducida por la norma. Diremos que $(X, \|.\|)$ tiene* la propiedad [H] *respecto de τ si para cualquier sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ τ-convergente a un punto $x \in X$ tal que $\lim_n \|x_n\| = \|x\|$, entonces $\lim_n \|x_n - x\|$. Diremos que tiene la propiedad [H] si la tiene respecto de su topología débil.*

Observación 5.2.2. *En las condiciones de la anterior definición, el espacio de Banach $(X, \|.\|)$ tiene la propiedad [H] respecto de τ si para toda sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ contenida en S_X y débilmente convergente a $x \in S_X$ se tiene*

$$\lim_n \|x_n - x\| = 0.$$

Demostración. Sea $(y_n)_n$ una sucesión en X τ-convergente a $y \in X$ de modo que $\lim_n \|y_n\| = \|y\|$. La convergencia en norma estaría garantizada si $y = 0$. En caso contrario $\|y\| > 0$ y podemos suponer que $\|y_n\| > 0$ para todo n (porque $\lim_n \|y_n\| = \|y\|$). Para cada n definimos $x_n = \frac{1}{\|y_n\|} y_n \in S_X$. Como (X, τ) es un espacio vectorial topológico existe $\tau - \lim_n x_n = \frac{1}{\|y\|} y =: x \in S_X$ y, por hipótesis, el límite se da en la topología de la norma. Ahora es fácil ver que $y_n - y = \|y_n\| x_n - \|y\| x \to 0$ en norma. $\square$

Evidentemente, esta propiedad es más débil que ser de Schur respecto de τ. Vamos a ver a continuación que cualquier espacio de Banach con norma localmente uniformemente convexa (definición A.6.5) tiene la propiedad [H] [29, Ejercicio 15.17]. En particular, la tienen los los espacios $(L^p(\mu), \|.\|_p)$ para $1 < p < \infty$ y, por tanto, cualquier espacio de Hilbert (consúltese A.6).

Proposición 5.2.3. *Sea* $(X, \|.\|)$ *un espacio de Banach localmente uniformemente convexo. Entonces* $(X, \|.\|)$ *tiene la propiedad [H].*

Demostración. Sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en S_X que converge débilmente a un punto $x \in S_X$. Del teorema de Hahn-Banach [9, III.6.7.] se deduce que existe $x^* \in S_{X^*}$ tal que

$$x^*(x) = \sup_{y^* \in B_X^*} |y^*(x)| = \|x\| = 1. \tag{5.2}$$

Supongamos por reducción al absurdo que $(x_n)_n$ no converge en norma hacia x. Entonces no puede ocurrir que $\lim_n \|x_n + x\| = 2$ (porque $(X, \|.\|)$ es localmente uniformemente convexo) y podemos encontrar $0 < a < 2$ y una subsucesión $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ tales que

$$0 \leq \|x_{n_k} + x\| < a < 2$$

para cada $k \in \mathbb{N}$. Si $x^* \in B_{X^*}$ y $k \in \mathbb{N}$, tenemos

$$|x^*(x_{n_k}) + x^*(x)| < a$$

y tomando límites cuando $k \to \infty$ se deduce $|2x^*(x)| < a$ (x es el límite débil de $(x_{n_k})_k$). Esto contradice (5.2). $\square$

Nuestro objetivo es caracterizar los espacios de Banach que tienen la propiedad [H] respecto de una topología vectorial Hausdorff τ (dentro de una cierta clase de topologías que precisaremos a continuación y que incluye a las topologías débiles generadas por subespacios normantes de X^*) como aquéllos para los que toda función $f : [a, b] \longrightarrow X$ tal que

- f es τ-continua
- $\|f\|$ es continua

es integrable Riemann.

Definición 5.2.4. *Se dice que una topología vectorial Hausdorff τ en el espacio de Banach X tiene la* propiedad W *respecto de $\|.\|$ (lo denotaremos por $\tau \in W(X, \|.\|)$) si es más gruesa que la topología normada y para cada red (x_α) contenida en S_X y τ-convergente a un vector $x \in S_X$*

$$\lim_\alpha \inf_{a\in[0,1]} \|ax_\alpha + (1-a)x\| = 1.$$

Diremos que τ tiene la propiedad W-secuencial *respecto de $\|.\|$ (abreviadamente $\tau \in W_s(X, \|.\|)$) si es más gruesa que la normada y satisface la anterior condición para* sucesiones.

Evidentemente una topología vectorial Hausdorff τ en X con la propiedad W tiene la propiedad W-secuencial.

Si Z es un subespacio (algebraico) de X^* que es *total* (es decir, si $x \in X$, $x \neq 0$, existe $z^* \in Z$ tal que $z^*(x) \neq 0$), entonces la topología débil $\sigma(X, Z)$ en X generada por Z (la topología vectorial más gruesa que hace continuo a cada elemento de Z) es Hausdorff y más gruesa que la normada. El corolario A.6.14 nos dice que, en estas condiciones, son equivalentes:

i) La topología $\sigma(X, Z)$ tiene la propiedad W respecto de $\|.\|$.

ii) El subespacio Z es *normante*, es decir, para cada $x \in X$

$$\|x\| = \sup\{|z^*(x)| : \ z^* \in Z \cap B_{X^*}\}.$$

La idea para la demostración de $i) \Rightarrow ii)$ se debe a M. Raja.

Presentamos ahora el principal resultado de la sección. En la prueba utilizaremos las construcciones desarrolladas en el apartado precedente con la misma notación. Adaptamos la idea de [57, Teorema 6] para abarcar todas las topologías de la clase $W_s(X, \|.\|)$.

Teorema 5.2.5. *Sean $(X, \|.\|)$ un espacio de Banach y τ una topología vectorial Hausdorff en X tal que $\tau \in W_s(X, \|.\|)$. Son equivalentes:*

i) $(X, \|.\|)$ *tiene la propiedad [H] respecto de τ.*

ii) Toda función τ-continua $f : [a, b] \longrightarrow X$ con norma $\|f\|$ continua es integrable Darboux en $[a, b]$.

iii) Toda función τ-continua $f : [a, b] \longrightarrow X$ con norma $\|f\|$ continua es integrable Riemann en $[a, b]$.

Demostración. $i) \Rightarrow ii)$ es clara: toda función $f : [a, b] \longrightarrow X$ τ-continua con $\|f\|$ continua es continua (y, por tanto, integrable Darboux por el teorema de Lebesgue 2.2.7) ya que $[a, b]$ es métrico y $(X, \|.\|)$ tiene la propiedad [H] respecto de τ.

$ii) \Rightarrow iii)$ es directa de 2.2.6.

iii) $\Rightarrow$ *i)* Sean h_n, $n = 1, 2, \dots$, como en la prueba de 5.1.2. Supongamos que $(X, \|.\|)$ no tiene la propiedad [H] respecto de τ. Existen por tanto (observación 5.2.2) $a > 0$ y una sucesión $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en S_X convergente hacia $y \in S_X$ en la topología τ de modo que $\|y_n - y\| > a$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Definimos $x_n = y_n - y$ para $n = 1, 2, \dots$. Entonces $\tau - \lim_n x_n = 0$ y $\|x_n\| > a > 0$ para todo n. En la demostración de 5.1.2 veíamos que la función $f : [0, 1] \longrightarrow X$ definida mediante

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} h_n(t)x_n$$

es τ-continua pero no es integrable Riemann en $[0, 1]$. Por lo tanto la función $g : [0, 1] \longrightarrow X$ dada por $g(t) = y + f(t)$ es τ-continua y no integrable Riemann (véase 1.0.9). Para acabar la demostración vamos a ver que $\|g\|$ es continua en cada $t_0 \in [0, 1]$. Distinguimos una serie de casos:

- $t_0 \in G = \cup_{n=1}^{\infty} \cup_{i=1}^{2^{n-1}} (a_{n,i}, b_{n,i})$. Sean $N \in \mathbb{N}$ y $1 \leq k \leq 2^{N-1}$ tales que $t_0 \in (a_{N,k}, b_{N,k})$. Recordemos que para cada $t \in (a_{N,k}, b_{N,k})$

  $$g(t) = y + f(t) = y + h_N(t)x_N.$$

  De la continuidad de $h_N : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ se deduce inmediatamente la de $g \restriction_{(a_{N,k},b_{N,k})}$. En particular, g y $\|g\|$ son continuas en t_0.

- $t_0 \in H$ pero $t_0 \neq a_{n,k}, b_{n,k}$ para todo n y cada $1 \leq k \leq 2^{n-1}$. Como $f(t) = 0$ para todo $t \in H = [0, 1] \setminus G$, tenemos $\|g(t_0)\| = \|y\| = 1$. Por hipótesis $\tau \in W_s(X, \|.\|)$, luego

  $$\lim_n \inf_{a\in[0,1]} \|ax_n + y\| = 1.$$

  Fijado $\epsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n > N$ y todo $t \in [0, 1]$

  $$\|h_n(t)x_n + y\| \geq 1 - \epsilon \tag{5.3}$$

  (recordemos que $0 \leq h_n \leq 1$ para todo n). Como $t_0 \notin G$ y es distinto de todos los extremos de los subintervalos $(a_{n,i}, b_{n,i})$, podemos tomar $\delta > 0$ suficientemente pequeño de modo que si $|t - t_0| < \delta$, entonces

  $$t \notin \cup_{n=1}^{N} \cup_{i=1}^{2^{n-1}} [a_{n,i}, b_{n,i}].$$

  Afirmamos que cualquier $t \in [0, 1]$ que cumpla $|t - t_0| < \delta$ verifica

  $$1 = \|g(t_0)\| \geq \|g(t)\| \geq 1 - \epsilon.$$

  En efecto, si $t \in H$ tenemos $\|g(t)\| = \|y\| = 1$. En otro caso existen $n \in \mathbb{N}$ y $1 \leq k \leq n$ tales que $t \in (a_{n,k}, b_{n,k})$. La elección de δ implica que $n > N$ y de la desigualdad (5.3) se desprende

  $$1 \geq \|h_n(t)(y_n - y) + y\| \geq 1 - \epsilon.$$

  Pero $t \in (a_{n,k}, b_{n,k})$ y, por tanto, $h_n(t)(y_n - y) + y = g(t)$. Esto prueba la continuidad de $\|g\|$ en t_0.

- $t_0 = a_{n,k}$ para ciertos $n \in \mathbb{N}$ y $1 \leq k \leq 2^{n-1}$. Para cada $t \in [a_{n,k}, b_{n,k})$ tenemos que $g(t) = h_n(t)x_n + y$, luego g y $\|g\|$ son continuas en $[a_{n,k}, b_{n,k})$. En particular, $\|g\|$ es continua en t_0 *por la derecha*. Para ver la continuidad por el otro lado fijamos $\epsilon > 0$. Podemos encontrar un $N \in \mathbb{N}$ tal que $\|h_m(t)x_m + y\| \geq 1 - \epsilon$ para todo $m > N$ y cada $t \in [0,1]$. Supongamos que $N \geq n$. Tomamos $\delta > 0$ de manera que si $|t - t_0| < \delta$, entonces

  $$t \notin \left(\cup_{h=1}^{N} \cup_{i=1}^{2^{i-1}} [a_{h,i}, b_{h,i}]\right) \setminus [a_{n,k}, b_{n,k}]$$

  (todos los intervalos $[a_{h,i}, b_{h,i}]$ son disjuntos dos a dos). *Afirmamos que si* $t \in [0,1]$ *cumple* $0 \leq t_0 - t < \delta$, *entonces*

  $$1 = \|g(t_0)\| \geq \|g(t)\| \geq 1 - \epsilon.$$

  Si $t \in H$, tenemos $\|g(t)\| = 1$. Si $t \notin H$, entonces existen $h \in \mathbb{N}$ y $1 \leq i \leq 2^{h-1}$ tales que $t \in (a_{h,i}, b_{h,i})$. La elección de δ y $t < t_0 = a_{n,k}$ conducen a que $h > N$. Por tanto

  $$1 \geq \|g(t)\| = \|h_h(t)x_h + y\| \geq 1 - \epsilon.$$

  Esto prueba que $\|g\|$ es continua en t_0.

- Si $t_0 = b_{n,k}$ para ciertos n, k se razona de manera análoga.

Queda demostrada la continuidad de $\|g\|$. □

Corolario 5.2.6 (Wang, Yang). *Un espacio de Banach* $(X, \|.\|)$ *tiene la propiedad* $[H]$ *si y sólo si toda función débilmente continua* $f : [a,b] \longrightarrow X$ *con norma* $\|f\|$ *continua es integrable Riemann (Darboux).*

Capítulo 6

Integrabilidad y propiedad de Bourgain

En esta sección demostraremos (6.0.1) que toda función integrable Riemann $f : [a,b] \longrightarrow X$ tiene la propiedad de Bourgain (definiciones A.5.1 y A.5.2) cuando el espacio X es real. Este resultado no aparece en ninguna de las fuentes consultadas para la elaboración de esta memoria y nos permite

- dar (en 6.0.2) una nueva prueba (de hecho una mejora) de la implicación

  $$f \textit{ integrable Riemann} \Rightarrow f \textit{ integrable Pettis}$$

  que ya vimos con anterioridad (4.0.4);

- deducir que si $f : [a,b] \longrightarrow X$ es integrable Riemann, entonces

  $$Z_f = \{x^* f : \ x^* \in B_{X^*}\}$$

  es $\|.\|_p$-compacto como subconjunto de $L^p[a,b]$ para cada $1 \le p < \infty$ (véase 6.0.4).

Para $p = 1$ el último resultado es un simple corolario de [55, Proposición 4-1-5, Teorema 4-1-6], donde en particular se demuestra que para toda función $f : [a,b] \longrightarrow X$ integrable Dunford

$$Z_f \text{ uniformemente absolutamente continuo } \Rightarrow Z_f \text{ compacto en } \|.\|_1.$$

La demostración hace uso del profundo *teorema de la subsucesión* de Fremlin [55, Teorema 8.1] y hemos preferido presentar 6.0.4 como aplicación de las técnicas de J. Bourgain (teorema A.5.3), más accesibles.

Proposición 6.0.1. *Sea X un espacio de Banach real. Si $f : [a,b] \longrightarrow X$ es una función integrable Riemann, entonces Z_f tiene la propiedad de Bourgain.*

Demostración. Fijamos $\alpha > 0$ y un conjunto $A \subset [a,b]$ medible con $m(A) > 0$. Sea $\eta = \alpha\frac{m(A)}{2}$ y tomemos (gracias a la integrabilidad Riemann de f) un $N \in \mathbb{N}$ suficientemente grande de modo que $\|f(\mathcal{P}) - f(\mathcal{P}')\| < \eta$ para cualquier par de particiones de Riemann $\mathcal{P}, \mathcal{P}'$ de norma menor o igual que $\delta = \frac{b-a}{N}$. Definiendo $t_i = a + i\delta$ $(0 \le i \le N)$, tenemos para cada $x^* \in B_{X^*}$ y $a_i, b_i \in [t_{i-1}, t_i]$

$$\left|\sum_{i=1}^{N}(x^*f(a_i) - x^*f(b_i))(t_i - t_{i-1})\right| = \delta\left|\sum_{i=1}^{N}(x^*f(a_i) - x^*f(b_i))\right| < \eta. \tag{6.1}$$

Definimos $B_i = A \cap [t_{i-1}, t_i] \subset A$ para cada $1 \le i \le N$. Sea $\mathcal{S}$ el conjunto de los B_i's con medida positiva. Fijamos $x^* \in B_{X^*}$. Sea

$$J = \{i \in \{1, \dots, N\} : \ \sup(x^*f)([t_{i-1}, t_i]) - \inf(x^*f)([t_{i-1}, t_i]) > \alpha\}.$$

Para cada $j \in J$ fijamos $a_j, b_j \in [t_{j-1}, t_j]$ tales que $x^*f(a_j) - x^*f(b_j) > \alpha$. Tomando $a_i = b_i \in [t_{i-1}, t_i]$ para cada $i \notin J$ podemos concluir (a partir de (6.1))

$$\eta > \delta\sum_{j\in J}(x^*f(a_j) - x^*f(b_j)) > \delta\alpha|J|,$$

de donde $\delta|J| < \frac{m(A)}{2}$.

Afirmamos que existe $i \notin J$ tal que $m(B_i) > 0$. En efecto, como los conjuntos finitos tienen medida nula resulta que

$$\begin{aligned} m(A) &= m\left(\cup_{i=1}^{N}(A \cap (t_{i-1}, t_i))\right) \\ &= \sum_{i\in J} m(B_i) + \sum_{i\notin J} m(B_i) \\ &\le |J|\delta + \sum_{i\notin J} m(B_i) \\ &< \frac{m(A)}{2} + \sum_{i\notin J} m(B_i). \end{aligned}$$

De esta desigualdad se tiene inmediatamente la afirmación.

Pero como $i \notin J$ y $B_i \subset [t_{i-1}, t_i]$, tenemos $\sup(x^*f)(B_i) - \inf(x^*f)(B_i) \le \alpha$. Esto demuestra que Z_f tiene la propiedad de Bourgain. □

El espacio de Banach X tiene de manera natural estructura de espacio de Banach *real*, que denotaremos por $\tilde{X}$. Si una función $f : [a,b] \longrightarrow X$ es integrable Riemann es evidente que $f : [a,b] \longrightarrow \tilde{X}$ es integrable Riemann y, por el teorema precedente,

$$Z_f^{\mathbb{R}} = \{x^*f : \ x^* \in B_{\tilde{X}^*}\}$$

tiene la propiedad de Bourgain. Como f es acotada, Z_f es uniformemente absolutamente continuo y el corolario A.5.6 nos dice que $f : [a,b] \longrightarrow \tilde{X}$ es integrable Pettis. De A.4.9 se deduce:

Corolario 6.0.2. *Toda función $f : [a, b] \longrightarrow X$ integrable Riemann es integrable Pettis.*

Nota 6.0.3. *En realidad hemos probado una mejora de esta implicación (en el caso X real), pues toda función $f : [a, b] \longrightarrow X$ integrable Dunford tal que*

- *Z_f es un subconjunto uniformemente absolutamente continuo de $\mathcal{L}^1[a, b]$*
- *tiene la propiedad de Bourgain*

es integrable Pettis (véase A.5.6).

Aplicando A.5.7 a la función $f : [a, b] \longrightarrow \tilde{X}$ obtenemos la compacidad de $Z_f^{\mathbb{R}}$ en $(L^p[a, b], \|.\|_p)$ para cada $1 \leq p < \infty$.

Corolario 6.0.4. *Si $f : [a, b] \longrightarrow X$ es integrable Riemann entonces Z_f es $\|.\|_p$-compacto para $1 \leq p < \infty$.*

Demostración. Sea $(x_n^*)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión contenida en B_{X^*}. El lema A.7.4 nos dice que $u_n = \Re(x_n^*)$ tiene norma ≤ 1 y verifica $x_n^*(x) = u_n(x) - iu_n(ix)$ para cada $x \in X$ y $n \in \mathbb{N}$. Si definimos $g = if : [a, b] \longrightarrow X$ tenemos

$$x_n^* f = u_n(f) - iu_n(g)$$

para $n = 1, 2, \ldots$. La función g también es integrable Riemann (1.0.9) y el comentario previo muestra que $Z_f^{\mathbb{R}}$ y $Z_g^{\mathbb{R}}$ son $\|.\|_p$-compactos. Podemos extraer una subsucesión $n_1 < n_2 < \ldots$ tal que

$$\lim_k \|u_{n_k} f - F\|_p = 0 \quad \text{y} \quad \lim_k \|u_{n_k} g - G\|_p = 0$$

para ciertas $F, G \in L^p[a, b]$. Por tanto

$$\lim_k \|x_{n_k}^* f - (F - iG)\|_p = 0.$$

Esto prueba que Z_f es un subconjunto compacto de $(L^p[a, b], \|.\|_p)$. $\square$

Capítulo 7

Límites de sumas de Riemann

Recordemos (1.0.3) que $\Pi[a,b]$ es un conjunto dirigido con las siguientes dos relaciones:

- $\mathcal{P} \preceq_1 \mathcal{P}'$ si y sólo si $|\mathcal{P}'| \leq |\mathcal{P}|$.
- $\mathcal{P} \preceq_2 \mathcal{P}'$ si y sólo si $e(\mathcal{P}) \subset e(\mathcal{P}')$.

Sea $f : [a,b] \longrightarrow X$ una función. Tenemos un par de redes asociadas a f

$$S_f^1 : (\Pi[a,b], \preceq_1) \longrightarrow X \quad \text{y} \quad S_f^2 : (\Pi[a,b], \preceq_2) \longrightarrow X$$

definidas mediante $S_f^1(\mathcal{P}) = S_f^2(\mathcal{P}) = f(\mathcal{P})$. La función f es integrable Riemann con integral $z \in X$ si y sólo si una de las redes anteriores converge a z (en tal caso ambas lo hacen).

En esta sección hacemos un breve repaso sobre lo que se conoce acerca de los puntos de aglomeración de las anteriores redes en el caso de que f sea una función *acotada* cualquiera. Hemos optado por omitir las demostraciones, que el lector interesado podrá encontrar en las numerosas citas bibliográficas proporcionadas o en el reciente *survey* que aparece en el apéndice de [34] y que contiene pruebas de los resultados más generales que vamos a mencionar aquí.

Sea $f : [a,b] \longrightarrow X$ una función acotada. Un razonamiento similar al que nos llevó a probar la equivalencia de las dos definiciones de integral de Riemann (1.0.2) muestra que el conjunto de puntos de aglomeración de la red S_f^1 coincide con el de la red S_f^2. De aquí en adelante denotaremos mediante $I(f)$ a dicho conjunto. Es fácil ver que $x \in X$ pertenece a $I(f)$ si y sólo si existe una sucesión $(\mathcal{P}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en $\Pi[a,b]$ tal que $\lim_n |\mathcal{P}_n| = 0$ y $\lim_n f(\mathcal{P}_n) = x$.

Es bien conocido que para $X = \mathbb{R}$ el conjunto $I(f)$ es el intervalo cerrado de extremos la integral inferior y superior de f. En particular es no vacío y convexo. La extensión de estas dos propiedades al caso general ha sido el principal objeto de estudio en la literatura sobre el tema y, como veremos más adelante, quedan pendientes numerosas cuestiones.

En lo que sigue $f : [0,1] \longrightarrow X$ será una función acotada.

Convexidad de $I(f)$

Cuando X es de dimensión finita el conjunto $I(f)$ es convexo. Las primeras demostraciones de este hecho se deben a Hartman [25] (1947), Jeffery [32] (1950) y Ellis [16] (1959). La prueba de Hartman es consecuencia del siguiente lema geométrico de Steinitz:

Lema 7.0.1. *Sean $n \geq 1$ y $w_1, \ldots, w_r \in \mathbb{R}^n$. Definimos*

$$P = \left\{ \sum_{i=1}^{r} a_i w_i : \ 0 \leq a_i \leq 1 \right\}$$

y

$$V = \left\{ \sum_{i=1}^{r} a_i w_i : \ a_i \in \{0,1\} \right\}.$$

Entonces, para cada $x \in P$

$$d(x,V) \leq n \max\{\|w_i\| : \ i = 1, \ldots, r\}.$$

Una variante de este lema permitió a Halperin y Miller [24] extender el resultado a espacios de Hilbert.

El primer resultado negativo se debe a Nakamura y Amemiya, que en [45] construyen una función acotada $f : [0,1] \longrightarrow l^1(\mathbb{R})$ tal que $I(f)$ consta exactamente de dos puntos. En el citado artículo se generalizan los resultados precedentes probando que $I(f)$ es convexo siempre que X sea uniformemente convexo. Paralelamente, Hartman demuestra ([26], 1968) un resultado equivalente (en virtud de un teorema posterior de Enflo [17, Teorema 9.18]) en el caso de que la norma de X sea *uniformemente diferenciable Frechet*, es decir, cuando existe

$$\lim_{t \to 0} \frac{\|x + th\| - \|x\|}{t}$$

uniformemente en $x, h \in S_X$.

Ya en 1984, M.I. Kadets y V.M. Kadets prueban la convexidad de $I(f)$ cuando X es B-convexo [33], mejorando los resultados previos de Hartman y Amemiya-Nakamura. [Un espacio de Banach X es *B-convexo* si existen $n \geq 2$ y $0 < \epsilon < 1$ de tal modo que para cada $x_1, \ldots, x_n \in S_X$ podemos encontrar $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{K}$ de módulo ≤ 1 tales que $\| \sum_{i=1}^{n} a_i x_i \| \leq n(1-\epsilon)$].

Hasta la fecha la clase más general (engloba a todas las anteriormente mencionadas) de espacios para los que $I(f)$ es convexo es la de los reflexivos y débilmente B-convexos [35]. [Un espacio de Banach es *débilmente B-convexo* si existen $n \in \mathbb{N}$ y $\epsilon > 0$ tales que, para cada colección finita $\{A_i\}_{i=1}^{n}$ de sucesiones débilmente convergentes a cero contenidas en B_X, existen $x_1 \in A_1, \ldots, x_n \in A_n$ de manera que $\| \sum_{i=1}^{n} x_i \| \leq n(1-\epsilon)$].

Si X es separable

- tampoco es posible asegurar la convexidad de $I(f)$ (en [33] y [34] se adapta el ejemplo de Amemiya y Nakamura para l^1);

- sólo podemos garantizar que $I(f)$ es un conjunto *estrellado* [34, Apéndice, Teorema 3];

- el caso $X = c_0$ permanece todavía abierto.

El conjunto de límites respecto de la topología débil

Sea $f : [0,1] \longrightarrow X$ una función acotada. Se define $WI(f)$ como el conjunto de puntos de X que son límite débil de una sucesión $\{f(\mathcal{P}_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$, donde $\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2, \cdots \in \Pi[a,b]$ y $\lim_n |\mathcal{P}_n| = 0$. El primer estudio detallado sobre la relación entre la estructura de un espacio de Banach X y las propiedades de los conjuntos de límites $WI(f)$ aparece en [35], donde V.M. Kadets prueba:

Teorema 7.0.2. *Un espacio de Banach X es reflexivo si y sólo si toda función $f : [0,1] \longrightarrow X$ acotada tal que $|WI(f)| = 1$ es débilmente integrable Riemann (i.e. la red S_f^1 es débilmente convergente).*

Teorema 7.0.3. *Un espacio de Banach X no contiene una copia isomorfa de l^1 si y sólo si $WI(f)$ es convexo para toda $f : [0,1] \longrightarrow X$ acotada.*

Es natural preguntarse: *¿para qué espacios de Banach $I(f) = WI(f)$ para toda $f : [0,1] \longrightarrow X$ acotada?* [En tal caso diremos que X tiene la *propiedad de coincidencia*]. Evidentemente, todo espacio de Schur tiene esta propiedad, al igual que los reflexivos débilmente B-convexos [35] (1988). Este resultado extiende uno anterior de Hartman [26] (1968), que probó lo mismo para cualquier espacio de Banach con norma uniformemente diferenciable Frechet. Un ejemplo de espacio de Banach sin la propiedad de coincidencia es $l^1 \oplus l^2$ [35].

Existencia de límites

Hasta ahora sólo nos hemos preocupado de cuándo $I(f)$ es convexo o coincide con $WI(f)$. En este apartado comentaremos las diversas soluciones parciales obtenidas hasta la fecha como respuesta a la pregunta: *¿cuándo $I(f) \neq \emptyset$?*

Si $f : [0,1] \longrightarrow X$ tiene rango relativamente compacto es evidente que $I(f) \neq \emptyset$. En particular esto se verifica para toda función acotada $f : [0,1] \longrightarrow X$ con X de dimensión finita. Hartman demostró además en [25] y [26]:

Proposición 7.0.4. *Sea $f : [0,1] \longrightarrow X$ una función acotada.*

i) Si X tiene norma uniformemente diferenciable Frechet*, para cada $\epsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que si $\mathcal{P}_0 \in d\Pi[0,1]$ tiene norma menor que δ y $z \in I(f)$, entonces existe una partición $\mathcal{P} \in \Pi[0,1]$ con los mismos subintervalos que $\mathcal{P}_0$ de manera que $\|f(\mathcal{P}) - z\| < \epsilon$.*

ii) Si X es de dimensión finita*, para cada $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que para toda $\mathcal{P} \in \Pi[0,1]$ de norma menor que δ existe un $z \in I(f)$ verificando $\|f(\mathcal{P}) - z\| < \epsilon$.*

Ellis demostró en [16] que el recíproco de (ii) es cierto. En dicho artículo se muestra que $I(f) \neq \emptyset$ siempre que X sea separable. Más adelante Amemiya y Nakamura [45] y Hartman [26] demuestran de manera independiente el mismo resultado cuando X es uniformemente convexo (Hartman maneja, como siempre, normas uniformemente diferenciables Frechet). Para un espacio reflexivo el teorema de Eberlein-Smulian (A.6.7) implica que $WI(f) \neq \emptyset$ para toda función acotada $f : [0,1] \longrightarrow X$. Por tanto, todos los espacios reflexivos con la propiedad de coincidencia (en particular los reflexivos débilmente B-convexos [35]) satisfacen $I(f) \neq \emptyset$.

En resumen: $I(f) \neq \emptyset$ siempre que X sea separable o reflexivo débilmente B-convexo.

Sumas de Riemann-Lebesgue

Recientemente, V.M. Kadets y L.M. Tseytlin [37] han introducido un nuevo concepto más elástico que generaliza el de suma de Riemann y que comentamos brevemente para finalizar la sección.

Definición 7.0.5. *Una* partición de Riemann-Lebesgue *de $[0,1]$ (abreviadamente una RL-partición) es una colección contable $\mathcal{P} = \{(\Delta_n, t_n)\}_n$ donde*

- *$\{\Delta_n\}_n$ es una partición de $[0,1]$ formada por conjuntos medibles Lebesgue.*
- *$t_n \in \Delta_n$ para cada n.*

Dadas dos RL-particiones $\mathcal{P} = \{(\Delta_n, t_n)\}_n$ y $\mathcal{P}' = \{(\Delta'_n, t'_n)\}_n$, diremos que $\mathcal{P}'$ es más fina que $\mathcal{P}$ (y se denota $\mathcal{P} \preceq \mathcal{P}'$) si existe una partición $I_1, I_2, \ldots$ del conjunto de índices de $\mathcal{P}'$ tal que $\Delta_n = \cup_{i \in I_n} \Delta'_i$ para cada n.

Si $\mathcal{P} = \{(\Delta_n, t_n)\}_n$ es una RL-partición de $[0,1]$ y tomamos una función $f : [0,1] \longrightarrow X$, se llama *suma de Riemann-Lebesgue* de f asociada a $\mathcal{P}$ a la serie formal $f(\mathcal{P}) = \sum_n m(\Delta_n) f(t_n)$.

Definición 7.0.6. *Sea $f : [0,1] \longrightarrow X$ una función acotada. Un $x \in X$ se dice* punto límite de sumas Riemann-Lebesgue de f *si para cada $\epsilon > 0$ y cada $\mathcal{P}$ RL-partición existe una RL-partición $\mathcal{P}'$ más fina que $\mathcal{P}$ tal que $f(\mathcal{P}')$ es absolutamente convergente y $\|f(\mathcal{P}') - x\| < \epsilon$. Denotaremos el conjunto de puntos límites mediante $I_{RL}(f)$. Un $x \in X$ es un* punto límite débil de sumas Riemann-Lebesgue de f *si para cada entorno U de x en la topología débil de*

X y cada RL-partición $\mathcal{P}$ existe una RL-partición $\mathcal{P}'$ más fina que $\mathcal{P}$ tal que $f(\mathcal{P}')$ es absolutamente convergente y $f(\mathcal{P}') \in U$. El conjunto de tales puntos se denotará mediante $WI_{RL}(f)$.

A continuación repasamos algunas de las propiedades de los conjuntos $I_{RL}(f)$.

i) $I_{RL}(f)$ es convexo para cualquier función $f : [0,1] \longrightarrow X$ [37].

ii) $I_{RL}(f) = WI_{RL}(f)$ para cada función $f : [0,1] \longrightarrow X$ [37].

iii) Si X es WCG y $f : [0,1] \longrightarrow X$ tiene un mayorante integrable (i.e. existe $g \in \mathcal{L}^1[0,1]$ tal que $\|f\| \leq g$), entonces $I_{RL}(f) \neq \emptyset$ [38].

iv) Para cualquier $S \subset X$ cerrado y convexo de cardinalidad menor o igual que la del continuo existe una función $f : [0,1] \longrightarrow X$ tal que $I_{RL}(f) = S$ [37].

Parte II

Integral de McShane

Capítulo 8

Introducción a la integral de McShane

8.1 Propiedades elementales

Un *calibre* del intervalo $[a, b]$ es una función $\delta : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^+$. Llamaremos *partición de McShane* del intervalo $[a, b]$ a una colección

$$\mathcal{P} = \{([a_i, b_i], s_i) : i = 1, \ldots, n\}$$

donde

- $\{[a_i, b_i]\}_{i=1,\ldots,n}$ es un conjunto de subintervalos (los *subintervalos de* $\mathcal{P}$) que no se solapan y cuya unión es todo $[a, b]$.
- $s_i \in [a, b]$ para cada $1 \leq i \leq n$. Se llamarán *puntos asociados* de la partición. Cada s_i no está necesariamente en el subintervalo asociado $[a_i, b_i]$.

La partición de McShane $\mathcal{P}$ se dice *subordinada* a un calibre δ cuando

$$[a_i, b_i] \subset [s_i - \delta(s_i), s_i + \delta(s_i)]$$

para todo $i = 1, \ldots, n$. En tal caso escribiremos abreviadamente $\mathcal{P}$ *sub* δ.

Si además $f : [a, b] \longrightarrow X$ es una función, la *suma de McShane* de f asociada a $\mathcal{P}$ se define como

$$f(\mathcal{P}) = \sum_{i=1}^{n} (b_i - a_i) f(s_i).$$

Denotaremos el conjunto de particiones de McShane de $[a, b]$ como $m\Pi[a, b]$, y el subconjunto de las que están subordinadas a un calibre δ mediante $m\Pi_\delta[a, b]$.

La existencia de suficientes particiones de McShane está garantizada por el siguiente lema.

Lema 8.1.1. *Dado un calibre $\delta : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^+$ siempre existe una partición de McShane de $[a, b]$ subordinada a δ.*

Demostración. Consideramos el recubrimiento abierto $\{(s-\delta(s), s+\delta(s))\}_{s\in[a,b]}$ del compacto $[a, b]$. Podemos extraer un subcubrimiento finito

$$\{(s_i - \delta(s_i), s_i + \delta(s_i))\}_{1\leq i\leq n}.$$

Sea $T = \{a = t_0 < t_1 < \cdots < t_N = b\}$ el conjunto formado por a, b y los puntos $s_i - \delta(s_i)$ ó $s_i + \delta(s_i)$ contenidos en $[a, b]$.

Afirmamos que *para cada* $j = 1, \ldots, N$ *existe un cierto índice* $i_j \in \{1, \ldots, n\}$ *tal que* $[t_{j-1}, t_j] \subset [s_{i_j} - \delta(s_{i_j}), s_{i_j} + \delta(s_{i_j})]$. En efecto: fijado $1 \leq j \leq N$ existe un $1 \leq i_j \leq n$ de manera que $t_{j-1} \in (s_{i_j} - \delta(s_{i_j}), s_{i_j} + \delta(s_{i_j}))$ y, por tanto, $t_j \leq s_{i_j} + \delta(s_{i_j})$, de donde $[t_{j-1}, t_j] \subset [s_{i_j} - \delta(s_{i_j}), s_{i_j} + \delta(s_{i_j})]$.
Es claro que

$$\mathcal{P} = \{([t_{j-1}, t_j], s_{i_j}) : j = 1, \ldots, N\}$$

es una partición de McShane de $[a, b]$ subordinada al calibre δ. □

Definición 8.1.2. *Una función $f : [a, b] \longrightarrow X$ se dice* integrable McShane *en $[a, b]$ si existe $z \in X$ tal que para cada $\epsilon > 0$ existe un calibre δ de modo que, para toda $\mathcal{P} \in m\Pi[a, b]$ sub δ,*

$$\|f(\mathcal{P}) - z\| < \epsilon.$$

Como ocurre en el caso de la integral de Riemann, podemos interpretar la integrabilidad McShane de una función en términos de redes. Para ello definimos el conjunto

$$D = \{(\mathcal{P}, \delta) : \ \delta \text{ es un calibre y } \mathcal{P} \in m\Pi_\delta[a, b]\},$$

preordenado por la relación (reflexiva y transitiva)

$$(\mathcal{P}, \delta) \preceq (\mathcal{P}', \delta') \text{ sii } \delta' \leq \delta.$$

$(D, \preceq)$ *es un conjunto dirigido*. En efecto: dados $(\mathcal{P}, \delta), (\mathcal{P}', \delta') \in D$, podemos tomar el calibre $\delta'' = \min\{\delta, \delta'\}$ y una partición de McShane $\mathcal{P}''$ sub δ'' (por el lema 8.1.1). Evidentemente $(\mathcal{P}, \delta) \preceq (\mathcal{P}'', \delta'') \in D$ y $(\mathcal{P}', \delta') \preceq (\mathcal{P}'', \delta'')$.

Dada una función $f : [a, b] \longrightarrow X$ podemos asociarle una red $MS_f : D \longrightarrow X$ del siguiente modo

$$MS_f\left((\mathcal{P}, \delta)\right) = f(\mathcal{P}).$$

Si $(\mathcal{P}, \delta) \preceq (\mathcal{P}', \delta') \in D$ entonces $\mathcal{P}' \in m\Pi_\delta[a, b]$ y, por tanto, son equivalentes:

i) f es integrable McShane en $[a, b]$.

ii) La red MS_f es convergente.

En tal caso el vector $z \in X$ que aparece en la definición de la integral coincide con el límite de la red MS_f (y, por tanto, es único). Se llama *integral de McShane* de f en $[a, b]$ y se denota mediante $\int_a^b f$ o $(MS)\int_a^b f$.

En un espacio métrico completo una red es convergente si y sólo si cumple la condición de Cauchy. Aplicando esto a la red anterior tenemos el siguiente criterio de Cauchy [22, Teorema 3].

Proposición 8.1.3. *Sea $f : [a,b] \longrightarrow X$ una función. Son equivalentes:*

i) *f es integrable McShane en $[a,b]$.*

ii) *Para cada $\epsilon > 0$ existe un calibre $\delta : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^+$ de manera que si $\mathcal{P}, \mathcal{P}' \in m\Pi_\delta[a,b]$, entonces*

$$\|f(\mathcal{P}) - f(\mathcal{P}')\| < \epsilon.$$

En los siguientes tres resultados damos una demostración detallada de [22, Teorema 4]

Proposición 8.1.4. *Si $f : [a,b] \longrightarrow X$ es integrable McShane en $[a,b]$ y $J \subset [a,b]$ es un subintervalo cerrado, entonces $f \upharpoonright_J$ es integrable McShane en J. La integral se denotará mediante $\int_J f$ o $(MS) \int_J f$.*

Demostración. Vamos a aplicar el anterior criterio de Cauchy. Sea $\epsilon > 0$ fijo y tomemos un calibre $\delta : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^+$ tal que

$$\|f(\mathcal{P}) - f(\mathcal{P}')\| < \epsilon$$

para todo par $\mathcal{P}, \mathcal{P}' \in m\Pi_\delta[a,b]$. Consideramos el calibre $\delta_J = \delta \upharpoonright_J$ y tomamos cualquier par $\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2 \in m\Pi_{\delta_J}(J)$. Es claro que $\overline{[a,b] \setminus J}$ es unión de uno (si un extremo de J es a ó b) o dos subintervalos disjuntos cerrados I, H de tal modo que I, J, H no se solapan y su unión es todo $[a,b]$. En I y H podemos encontrar (en virtud de 8.1.1) particiones de McShane $\mathcal{P}_I$ y $\mathcal{P}_H$ subordinadas a $\delta \upharpoonright_I$ y $\delta \upharpoonright_H$ respectivamente. Ahora podemos construir dos particiones de McShane de $[a,b]$ subordinadas a δ:

- $\mathcal{P}$ formada por los subintervalos de $\mathcal{P}_I$, $\mathcal{P}_H$ y $\mathcal{P}_1$, con sus correspondientes puntos asociados;

- $\mathcal{P}'$ formada por los subintervalos de $\mathcal{P}_I, \mathcal{P}_H$ y $\mathcal{P}_2$, con los correspondientes puntos asociados.

Es evidente que $f(\mathcal{P}) - f(\mathcal{P}') = f(\mathcal{P}_1) - f(\mathcal{P}_2)$, luego

$$\|f(\mathcal{P}_1) - f(\mathcal{P}_2)\| = \|f(\mathcal{P}) - f(\mathcal{P}')\| < \epsilon.$$

Esto completa la prueba. □

Proposición 8.1.5. *Sea $f : [a,b] \longrightarrow X$ integrable McShane en $[a,b]$. Si $a < c < b$, entonces*

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$$

Demostración. Fijado $\epsilon > 0$, tomamos un calibre $\delta : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^+$ tal que si $\mathcal{P} \in m\Pi_\delta[a, b]$ entonces

$$\left\| f(\mathcal{P}) - \int_a^b f \right\| < \epsilon.$$

La integrabilidad de $f \restriction_{[a,c]}$ y $f \restriction_{[c,b]}$ nos permite encontrar un par de particiones de McShane $\mathcal{P}_1$ y $\mathcal{P}_2$ de $[a, c]$ y $[c, b]$, subordinadas a δ, tales que

$$\left\| f(\mathcal{P}_1) - \int_a^c f \right\| < \epsilon \quad \text{y} \quad \left\| f(\mathcal{P}_2) - \int_c^b f \right\| < \epsilon.$$

La partición de McShane $\mathcal{P}$ de $[a, b]$ formada tomando los subintervalos de $\mathcal{P}_1$ y $\mathcal{P}_2$ con sus correspondientes puntos asociados verifica que

- está subordinada a δ y
- $f(\mathcal{P}_1) + f(\mathcal{P}_2) = f(\mathcal{P})$.

Por tanto,

$$\begin{aligned}\left\| \int_a^b f - \int_a^c f - \int_c^b f \right\| &\leq \left\| \int_a^b f - f(\mathcal{P}) \right\| + \left\| \int_a^c f - f(\mathcal{P}_1) \right\| \\ &+ \left\| \int_c^b f - f(\mathcal{P}_2) \right\| < 3\epsilon\end{aligned}$$

por la elección del calibre δ. La validez de esta desigualdad para cualquier $\epsilon > 0$ nos da la identidad buscada. □

Proposición 8.1.6. *El conjunto $MS([a, b], X)$ de las funciones $f : [a, b] \longrightarrow X$ integrables McShane es un espacio vectorial y la integral es una forma lineal sobre él.*

Demostración. Sean $f, g \in MS([a, b], X)$ y $r, s \in \mathbb{K}$. Las redes asociadas cumplen $MS_{rf+sg} = rMS_f + sMS_g$. Por ser X un espacio vectorial topológico tenemos garantizada la existencia de

$$\lim MS_{rf+sg} = r \lim MS_f + s \lim MS_g = r \int_a^b f + s \int_a^b g$$

que es lo que se quería demostrar. □

Nota 8.1.7.
Si $\mathcal{P} = \{([a_i, b_i], s_i) : i = 1, \ldots, n\}$ es una partición de McShane tal que $s_i \in [a_i, b_i]$ para cada $i = 1, \ldots, n$, diremos que es una partición de Henstock. *Podemos definir la integrabilidad Henstock como en 8.1.2 considerando solamente particiones de Henstock. La integral así obtenida es una extensión propia de la de McShane. Es conocido que una función $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ es integrable McShane (Lebesgue, véase 9.4.2) si y sólo si f y $|f|$ son integrables Henstock*

[42]. Para más información acerca de la integral de Henstock de funciones escalares, el lector interesado puede consultar [31] y las distintas referencias que en dicho artículo se proporcionan.

En el caso general de un espacio de Banach X, D.H. Fremlin ha demostrado (en [18, Teorema 8, Corolario 9]) que para una función $f : [a, b] \longrightarrow X$ son equivalentes:

i) *f es integrable McShane.*

ii) *f es integrable Henstock y Pettis.*

iii) *La función $\chi_E f$ es integrable Henstock para cada $E \subset [a, b]$ medible.*

La prueba descansa en ciertas aplicaciones del profundo teorema de la subsucesión de Fremlin *[55, Capítulo 8] y hemos optado por omitirla.*

8.2 El lema de Henstock

El siguiente resultado constituye una herramienta fundamental en el resto de la memoria y es una adaptación de un resultado original de R. Henstock [28], que lo empleó para probar un *teorema de la convergencia monótona* adaptado a la integral que hoy lleva su nombre (véase 8.1.7). Antes necesitamos introducir un nuevo concepto.

Definición 8.2.1. *Dado un calibre $\delta : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^+$, una* partición parcial de McShane *subordinada a δ es una colección finita*

$$\mathcal{P} = \{([a_i, b_i], s_i) : i = 1, \dots, n\}$$

donde

- $s_i \in [a, b]$ *para* $i = 1, \dots, n$;
- $\{[a_i, b_i]\}_{1 \leq i \leq n}$ *son subintervalos de* $[a, b]$ *que no se solapan;*
- $[a_i, b_i] \subset [s_i - \delta(s_i), s_i + \delta(s_i)]$ *para cada* $i = 1, \dots, n$.

Si $f : [a, b] \longrightarrow X$ es una función cualquiera, la suma de McShane *de f respecto de $\mathcal{P}$ es $f(\mathcal{P}) = \sum_{i=1}^n (b_i - a_i) f(s_i)$.*

Proposición 8.2.2 (Lema de Henstock). *Sea $f : [a, b] \longrightarrow X$ una función integrable McShane. Dado $\epsilon > 0$, sea $\delta : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^+$ un calibre tal que $\|f(\mathcal{P}) - \int_a^b f\| < \epsilon$ para cada $\mathcal{P} \in m\Pi_\delta[a, b]$. Si $\mathcal{P} = \{([c_i, d_i], s_i) : \ i = 1, \dots, n\}$ es una partición parcial de McShane subordinada a δ, entonces*

$$\left\| \sum_{i=1}^n \int_{c_i}^{d_i} f - (d_i - c_i) f(s_i) \right\| \leq \epsilon.$$

Si además $X = \mathbb{K}$,

$$\sum_{i=1}^n \left| \int_{c_i}^{d_i} f - (d_i - c_i) f(s_i) \right| \leq \pi\epsilon.$$

Demostración. Fijamos $J_1, \ldots, J_p$ subintervalos cerrados de $[a, b]$ que no se solapan entre sí, que no se solapan con los de $\mathcal{P}$ y tales que

$$(\cup_{i=1}^{p} J_i) \cup (\cup_{i=1}^{n} [c_i, d_i]) = [a, b].$$

La integrabilidad de f en subintervalos (proposición 8.1.4) nos permite encontrar para cada $i = 1, \ldots, p$ una sucesión $\{\mathcal{P}_{i,k}\}_{k\in\mathbb{N}} \in m\Pi_\delta(J_i)$ tal que

$$\lim_k f(\mathcal{P}_{i,k}) = \int_{J_i} f.$$

Para cada $k \in \mathbb{N}$ consideramos la partición de McShane $\mathcal{P}_k \in m\Pi[a, b]$ formada por los subintervalos de $\mathcal{P}$ más los de $\mathcal{P}_{i,k}$ $(1 \leq i \leq p)$, con sus correspondientes puntos asociados. Evidentemente, $\mathcal{P}_k$ sub δ y así (usando 8.1.5)

$$\left\| f(\mathcal{P}_k) - \int_a^b f \right\| = \left\| \sum_{i=1}^{n} (d_i - c_i) f(s_i) + \sum_{j=1}^{p} f(\mathcal{P}_{j,k}) - \sum_{i=1}^{n} \int_{c_i}^{d_i} f - \sum_{j=1}^{p} \int_{J_j} f \right\|$$
$$= \left\| \sum_{i=1}^{n} \left((d_i - c_i) f(s_i) - \int_{c_i}^{d_i} f \right) + \sum_{j=1}^{p} \left(f(\mathcal{P}_{j,k}) - \int_{J_j} f \right) \right\| < \epsilon.$$

Tomando límites cuando $k \to \infty$ obtenemos la primera desigualdad del enunciado. Para ver la otra empleamos la proposición A.7.1, que garantiza la existencia de $S \subset \{1, \ldots, n\}$ tal que

$$\sum_{i=1}^{n} \left| \int_{c_i}^{d_i} f - (d_i - c_i) f(s_i) \right| \leq \pi \left| \sum_{i\in S} \left(\int_{c_i}^{d_i} f - (d_i - c_i) f(s_i) \right) \right|.$$

La demostración termina aplicando a la partición parcial $\{([c_i, d_i], s_i) : \ i \in S\}$ la primera conclusión del enunciado. $\square$

Corolario 8.2.3. *Sean $f : [a, b] \longrightarrow X$ una función integrable McShane, $\epsilon > 0$ y $\delta : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^+$ un calibre de manera que $\|f(\mathcal{P}) - \int_a^b f\| < \epsilon$ para cada $\mathcal{P} \in m\Pi_\delta[a, b]$. Si $\mathcal{P} = \{([c_i, d_i], s_i)\}_{1\leq i\leq n}$ y $\mathcal{P}' = \{([c_i, d_i], s_i')\}_{1\leq i\leq n}$ son particiones parciales de McShane subordinadas a δ entonces*

$$\left\| \sum_{i=1}^{n} (d_i - c_i)(f(s_i) - f(s_i')) \right\| \leq 2\epsilon.$$

Si además $X = \mathbb{K}$:

$$\sum_{i=1}^{n} (d_i - c_i) \left| f(s_i) - f(s_i') \right| \leq 2\pi\epsilon.$$

Como una primera aplicación ofrecemos una prueba de la continuidad de la función *integral indefinida*. Adaptamos al caso vectorial la demostración de [40, Proposición 6].

Definición 8.2.4. *Dada una función $f : [a,b] \longrightarrow X$ integrable McShane, definimos (en virtud de 8.1.4) su* integral indefinida *como la función $F : [a,b] \longrightarrow X$ dada por $F(a) = 0$ y, para $t \in (a,b]$,*

$$F(t) = (MS)\int_a^t f.$$

Lema 8.2.5. *Dada una función $f : [a,b] \longrightarrow X$ integrable McShane, su integral indefinida F es una función continua.*

Demostración. Fijado $x \in [a,b)$, vamos a ver que F es continua en x por la derecha. Para ello, dado $\epsilon > 0$, tomamos un calibre $\delta : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^+$ tal que

$$\left\| f(\mathcal{P}) - \int_a^b f \right\| < \frac{\epsilon}{1 + \|f(x)\|}$$

para cada $\mathcal{P} \in m\Pi_\delta[a,b]$. Sea $d = \min\left\{\delta(x), \frac{\epsilon}{1+\|f(x)\|}\right\}$.

Afirmamos que si $t \in (x, x+d) \cap [a,b]$, entonces $\|F(x) - F(t)\| < \epsilon$. En efecto: la partición parcial de McShane $\{([x,t],x)\}$ está subordinada δ y podemos aplicar 8.2.2 para obtener

$$\left\| (t-x)f(x) - \int_x^t f \right\| \leq \frac{\epsilon}{1 + \|f(x)\|}.$$

Utilizando la aditividad respecto del intervalo de integración (8.1.5)

$$\begin{aligned} \|F(t) - F(x)\| &= \left\| \int_x^t f \right\| \\ &\leq \frac{\epsilon}{1 + \|f(x)\|} + \|f(x)\|(t-x) \\ &< \epsilon \end{aligned}$$

por la elección de t y d.

De modo análogo podemos ver que F es continua por la izquierda en cualquier punto de $(a,b]$ y concluir la prueba de la continuidad de F. □

La validez de la versión *fuerte* del lema de Henstock (la segunda desigualdad, con la suma fuera de la norma) caracteriza a los espacios de Banach de dimensión finita. El primero en observar este comportamiento fue S.S. Cao [5]. Nosotros daremos una prueba que muestra la estrecha relación existente entre la integrabilidad Bochner y la validez de dicha *forma fuerte*. En concreto demostraremos (véase 10.3.10) que para un espacio de Banach X son equivalentes:

i) X es de dimensión finita.

ii) Dada $f : [a,b] \longrightarrow X$ integrable McShane y fijado $\epsilon > 0$, existe un calibre δ de manera que para cada partición parcial de McShane $\{([c_i,d_i],s_i) : i = 1,\dots,n\}$ subordinada a δ

$$\sum_{i=1}^n \left\| (d_i - c_i)f(s_i) - \int_{c_i}^{d_i} f \right\| < \epsilon.$$

iii) Una función $f : [a,b] \longrightarrow X$ es integrable McShane si y sólo si es integrable Bochner.

8.3 Integrabilidad de funciones simples

El siguiente resultado es una mejora de [22, Teorema 14] y nos proporciona los primeros ejemplos de funciones integrables en el sentido de McShane.

Proposición 8.3.1. *Si $f : [a,b] \longrightarrow X$ es una función medible simple, entonces:*

i) *f es integrable McShane.*

ii) *Si $f = \sum_{i=1}^{p} \chi_{E_i} \cdot x_i$ (con $A_i \subset [a,b]$ medible Lebesgue y $x_i \in X$ para $i = 1, \ldots, p$) entonces*

$$\int_a^b f = \sum_{i=1}^{p} m(E_i) x_i = (B) \int_a^b f.$$

iii) *Para cada $\epsilon > 0$ existe un calibre $\delta : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^+$ tal que*

$$\sum_{i=1}^{n} \left\| \int_{a_i}^{b_i} f - (b_i - a_i) f(s_i) \right\| \leq \epsilon$$

para cualquier partición parcial de McShane $\{([a_i, b_i], s_i) : \ i = 1, \ldots, n\}$ subordinada a δ.

Demostración. Vamos a demostrar las tres afirmaciones simultáneamente. La desigualdad triangular y 8.1.6 reducen la prueba al caso $f = \chi_E \cdot x$, con $E \subset [a,b]$ medible y $x \in X$.

Fijamos $\epsilon > 0$. La regularidad de la medida de Lebesgue ([7, Capítulo I]) nos permite encontrar $H \subset E \subset G$, G abierto, H compacto (en particular cerrado) tales que $m(G) < m(E) + \epsilon$ y $m(H) > m(E) - \epsilon$. Construimos a partir de estos conjuntos el siguiente calibre $\delta : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^+$

1. Si $t \in H \subset G$ definimos $\delta(t)$ de modo que $[t - \delta(t), t + \delta(t)] \subset G$.
2. Si $t \in G \setminus H$ (que es abierto), tomamos $\delta(t)$ de forma que
$$[t - \delta(t), t + \delta(t)] \subset G \setminus H.$$
3. En otro caso ($t \in [a,b] \setminus G \subset \mathbb{R} \setminus H$ abierto) definimos $\delta(t)$ de manera que $[t - \delta(t), t + \delta(t)] \cap H = \emptyset$.

Evidentemente, basta probar *iii)* para particiones de todo el intervalo $[a,b]$ (porque el lema 8.1.1 garantiza que toda partición parcial subordinada a δ se puede completar a una partición de todo $[a,b]$ subordinada a δ). Dada

$$\mathcal{P} = \{([a_i, b_i], s_i) : \ i = 1, \ldots, n\} \in m\Pi_\delta[a,b],$$

definimos $W = \cup_{s_i \in E} [a_i, b_i]$.

Afirmamos que $H \subset W \subset G$. En efecto:

- $H \subset W$. Para verlo tomamos $t \in H$. Existe un i tal que $t \in [a_i, b_i] \cap H \subset [s_i - \delta(s_i), s_i + \delta(s_i)] \cap H$ y la definición de δ no permite otra posibilidad que $s_i \in H \subset E$. Por tanto $t \in [a_i, b_i] \subset W$.
- $W \subset G$. Dado $t \in W$, tomamos un índice i tal que $s_i \in E$ y $t \in [a_i, b_i]$. Como $s_i \in G$, la elección de δ conduce a que $[s_i - \delta(s_i), s_i + \delta(s_i)] \subset G$ y así $t \in [a_i, b_i] \subset [s_i - \delta(s_i), s_i + \delta(s_i)] \subset G$.

Por tanto,

$$m(W \setminus E) \leq m(G \setminus E) < \epsilon \quad \text{y} \quad m(E \setminus W) \leq m(E \setminus H) < \epsilon.$$

Finalmente,

$$\begin{aligned}
\left\| (B)\int_a^b f - f(\mathcal{P}) \right\| &= \left\| \sum_{i=1}^n \left((B)\int_{a_i}^{b_i} f - (b_i - a_i) f(s_i) \right) \right\| \\
&\leq \sum_{i=1}^n \left\| (B)\int_{a_i}^{b_i} f - (b_i - a_i) f(s_i) \right\| \\
&= \sum_{i=1}^n \| m(E \cap [a_i, b_i]) x - (b_i - a_i) \chi_E(s_i) x \| \\
&= \|x\| \sum_{i=1}^n | m(E \cap [a_i, b_i]) - (b_i - a_i) \chi_E(s_i) | \\
&= \|x\| \left(\sum_{s_i \in E} m([a_i, b_i] \setminus E) + \sum_{s_i \notin E} m(E \cap [a_i, b_i]) \right) \\
&= \|x\| \big(m(W \setminus E) + m(E \setminus W) \big) \quad < \quad 2\|x\|\epsilon.
\end{aligned}$$

Esta cadena de desigualdades completa la demostración. □

8.4 Relación con la integral de Riemann

Aunque la relación de la integral de McShane con el resto de integrales vectoriales será presentada con detalle en el *Capítulo 10*, el carácter elemental de la prueba nos permite mostrar ahora que *la integral de McShane extiende a la de Riemann.* Para probar este resultado hemos combinado ideas del caso real ([44, I.7]) y de la demostración de la Proposición 8.3.1.

Teorema 8.4.1. *Sea $f : [a, b] \longrightarrow X$ una función integrable Riemann. Entonces es integrable McShane y $(R)\int_a^b f = (MS)\int_a^b f$.*

Demostración. Evidentemente, podemos suponer sin pérdida de generalidad que X es real. Definimos $I = (R)\int_a^b f \in X$. Sea M una cota superior de $\|f\|$ en $[a, b]$. Fijamos $\epsilon > 0$. Sea $\delta > 0$ tal que para cada partición de Riemann $\mathcal{P} \in \Pi[a, b]$ de norma menor que δ

$$\|f(\mathcal{P}) - I\| < \epsilon.$$

Fijamos $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b$ tales que $t_i - t_{i-1} < \delta$ para $i = 1, \ldots, n$. Tomamos $[a_i, b_i] \subset (t_{i-1}, t_i)$ de modo que $m((t_{i-1}, t_i) \setminus [a_i, b_i]) < \frac{\epsilon}{n}$. Sea

$$\Delta : [a, b] \longrightarrow \left(0, \frac{\epsilon}{2(n+1)}\right)$$

un calibre que satisfaga las siguientes propiedades:

- Si $t \in [a_i, b_i]$ para un cierto $1 \leq i \leq n$, entonces $[t - \Delta(t), t + \Delta(t)] \subset (t_{i-1}, t_i)$.
- Si $t \in (t_{i-1}, t_i) \setminus [a_i, b_i]$, entonces $[t - \Delta(t), t + \Delta(t)] \subset (t_{i-1}, t_i) \setminus [a_i, b_i]$.
- $[t - \Delta(t), t + \Delta(t)]$ no corta a $\cup_{i=1}^n [a_i, b_i]$ para $t \in \{t_0, \ldots, t_n\}$.

Vamos a demostrar que $\|f(\mathcal{P}) - I\| \leq (2M + 1)\epsilon$ *para cada* $\mathcal{P} \in m\Pi_\Delta[a, b]$. Por el teorema de Hahn-Banach sólo tenemos que comprobar

$$|(x^* f)(\mathcal{P}) - x^*(I)| \leq (2M + 1)\epsilon$$

para todo $x^* \in B_{X^*}$ y cada $\mathcal{P} \in m\Pi_\Delta[a, b]$.
Fijamos $x^* \in B_{X^*}$. Para cada $i = 1, \ldots, n$ definimos $M_i = \sup_{t \in [t_{i-1}, t_i]} x^* f(t)$ y $m_i = \inf_{t \in [t_{i-1}, t_i]} x^* f(t)$. Sean $g, h : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ definidas mediante

$$g = \sum_{i=1}^n m_i \chi_{(t_{i-1}, t_i)} \quad \text{y} \quad h = \sum_{i=1}^n M_i \chi_{(t_{i-1}, t_i)}. \tag{8.1}$$

Fijamos una $\mathcal{P} \in m\Pi_\Delta[a, b]$. Para cada $i = 1, \ldots, n$ definimos $\mathcal{P}_i$ como la partición parcial de McShane formada por aquellos subintervalos de $\mathcal{P}$ cuyos puntos asociados están contenidos en (t_{i-1}, t_i), junto con los correspondientes puntos asociados. Sea P_i la unión de dichos subintervalos. Afirmamos en primer lugar que

$$|m(P_i) - (t_i - t_{i-1})| < \frac{\epsilon}{n} \quad \text{para cada } 1 \leq i \leq n. \tag{8.2}$$

En efecto: si $1 \leq i \leq n$,

- $[a_i, b_i] \subset P_i$. Fijamos $t \in [a_i, b_i]$. Sea J un intervalo de $\mathcal{P}$ tal que

  $$t \in J \cap [a_i, b_i] \subset [s - \Delta(s), s + \Delta(s)] \cap [a_i, b_i],$$

  siendo s el punto asociado a J en $\mathcal{P}$. En particular,

  $$[s - \Delta(s), s + \Delta(s)] \cap [a_i, b_i] \neq \emptyset$$

  y entonces $[s - \Delta(s), s + \Delta(s)]$ está contenido en algún (t_{j-1}, t_j) (por la definición del calibre Δ) y, como contiene a $t \in [a_i, b_i] \subset (t_{i-1}, t_i)$, resulta que $[s - \Delta(s), s + \Delta(s)] \subset (t_{i-1}, t_i)$. En particular $s \in (t_{i-1}, t_i)$ y $J \subset P_i$, luego $t \in P_i$.

- $P_i \subset (t_{i-1}, t_i)$. Dado J un intervalo de $\mathcal{P}$ con punto asociado $s \in (t_{i-1}, t_i)$, entonces $J \subset [s - \Delta(s), s + \Delta(s)] \subset (t_{i-1}, t_i)$ por la definición de Δ.

De estas dos observaciones deducimos (recordando la elección de $[a_i, b_i]$)

$$-\frac{\epsilon}{n} < m([a_i, b_i]) - m((t_{i-1}, t_i)) \leq m(P_i) - m((t_{i-1}, t_i)) \leq 0$$

para todo i. (8.2) queda demostrada.

Sean $L = \sum_{i=1}^n m_i(t_i - t_{i-1})$ y $U = \sum_{i=1}^n M_i(t_i - t_{i-1})$. Afirmamos que

$$|g(\mathcal{P}) - L| < M\epsilon \quad \text{y} \quad |h(\mathcal{P}) - U| < M\epsilon. \tag{8.3}$$

En efecto: basta echar un vistazo a (8.1) para deducir

$$\begin{aligned} |g(\mathcal{P}) - L| &= \left| \sum_{i=1}^n g(\mathcal{P}_i) - \sum_{i=1}^n m_i(t_i - t_{i-1}) \right| \\ &\leq \sum_{i=1}^n |g(\mathcal{P}_i) - m_i(t_i - t_{i-1})| \\ &= \sum_{i=1}^n |m_i(m(P_i) - (t_i - t_{i-1}))| \\ &\leq M \sum_{i=1}^n |m(P_i) - (t_i - t_{i-1})| \quad < \quad M\epsilon, \end{aligned}$$

donde la última desigualdad es consecuencia de (8.2). Análogamente se prueba $|h(\mathcal{P}) - U| < M\epsilon$.

Definimos una función auxiliar $F : [a, b] \longrightarrow X$ mediante $F(t) = f(t)$ si $t \notin \{t_0, \ldots, t_n\}$, $F(t) = 0$ en caso contrario. Veamos que

$$|(x^*F)(\mathcal{P}) - x^*(I)| \leq (M + 1)\epsilon. \tag{8.4}$$

En efecto: la elección de δ implica $|\sum_{i=1}^n (t_i - t_{i-1})x^*f(e_i) - x^*(I)| < \epsilon$ para cada $e_i \in [t_{i-1}, t_i]$. Tomando supremos e ínfimos:

$$x^*(I) - \epsilon \leq \sum_{i=1}^n (t_i - t_{i-1})m_i = L \leq U = \sum_{i=1}^n (t_i - t_{i-1})M_i \leq x^*(I) + \epsilon.$$

De (8.3) deducimos

$$x^*(I) - \epsilon \leq L \leq M\epsilon + g(\mathcal{P}) \leq M\epsilon + (x^*F)(\mathcal{P}),$$

porque, evidentemente, $g \leq x^*F$. Así, $x^*(I) - (M + 1)\epsilon \leq (x^*F)(\mathcal{P})$. Por otro lado, $x^*F \leq h$ y entonces

$$x^*F(\mathcal{P}) \leq h(\mathcal{P}) \leq U + M\epsilon \leq x^*(I) + (M + 1)\epsilon$$

por (8.3). Esto prueba (8.4).

Para acabar escribimos $\mathcal{P} = \{(J_i, s_i) : i = 1, \dots, p\}$ y comparamos $x^*F(\mathcal{P})$ con $x^*f(\mathcal{P})$:

$$\begin{aligned}
|x^*F(\mathcal{P}) - x^*f(\mathcal{P})| &= \left| \sum_{s_i \in \{t_0, \dots, t_n\}} m(J_i) x^* f(s_i) \right| \\
&\leq \sum_{j=0}^{n} \left| \sum_{s_i = t_j} m(J_i) x^* f(s_i) \right| \\
&\leq M \sum_{j=0}^{n} \left(\sum_{s_i = t_j} m(J_i) \right) \\
&\leq M \sum_{j=0}^{n} 2\Delta(t_j),
\end{aligned}$$

porque si $s_i = t_j$ entonces ($\mathcal{P}$ sub Δ) $J_i \subset [t_j - \Delta(t_j), t_j + \Delta(t_j)]$. Pero por la definición del calibre Δ tenemos $\Delta < \frac{\epsilon}{2(n+1)}$, y así

$$|x^*F(\mathcal{P}) - x^*f(\mathcal{P})| < M\epsilon.$$

Combinando esta desigualdad y (8.4)

$$|x^*f(\mathcal{P}) - x^*(I)| < (2M + 1)\epsilon.$$

Por lo tanto, para cualquier partición de McShane $\mathcal{P}$ sub Δ y cada $x^* \in B_{X^*}$

$$|x^*(I) - x^*f(\mathcal{P})| < (2M + 1)\epsilon.$$

Esto completa la demostración. $\square$

Capítulo 9

La integral de funciones escalares

El objetivo de este capítulo es mostrar que, para una función $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{K}$, integrabilidad Lebesgue e integrabilidad McShane coinciden. Nos basamos en las ideas de [44, Capítulo VII] y para lograr el objetivo necesitamos dos hechos fundamentales:

- el *teorema de la convergencia monótona* para la integral de McShane (9.2.2);
- la *medibilidad Lebesgue* de cualquier función integrable McShane (9.3.1).

9.1 Integrabilidad absoluta

La prueba del siguiente resultado (adaptación de [44, Teorema II.2.4]) es una simple aplicación de la *versión fuerte* del lema de Henstock (segunda desigualdad de 8.2.2). La posibilidad de tomar puntos asociados fuera de los correspondientes intervalos en las particiones de McShane desempeña un papel fundamental.

Proposición 9.1.1. *Si $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{K}$ integrable McShane, entonces $|f|$ también lo es.*

Demostración. Utilizaremos el criterio de Cauchy 8.1.3. Dado $\epsilon > 0$, sea δ un calibre en $[a,b]$ tal que $|f(\mathcal{P}) - \int_a^b f| < \epsilon$ para cada $\mathcal{P} \in m\Pi_\delta[a,b]$.

Sean $\mathcal{P}$ y $\mathcal{P}'$ particiones de McShane de $[a,b]$ subordinadas a δ. Se afirma que

$$||f|(\mathcal{P}) - |f|(\mathcal{P}')| \leq 2\pi\epsilon.$$

Si $\mathcal{P} = \{([a_i,b_i],s_i)\}_{1\leq i\leq n}$ y $\mathcal{P}' = \{([c_j,d_j],s'_j)\}_{1\leq j\leq m}$, definimos

$$A = \{(i,j) : \ 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m, \ I_{i,j} = [a_i,b_i] \cap [c_j,d_j] \neq \emptyset \text{ no degenerado}\}.$$

Consideramos las siguientes particiones de McShane subordinadas a δ

$$\mathcal{P}_1 = \{(I_{i,j}, s_i) : \ (i,j) \in A\}$$

$$\mathcal{P}_2 = \{(I_{i,j}, s'_j) : \ (i,j) \in A\}.$$

Podemos aplicar el lema de Henstock 8.2.3 a dichas particiones obteniendo

$$\sum_{(i,j)\in A} |f(s_i) - f(s'_j)| m(I_{i,j}) \leq 2\pi\epsilon. \tag{9.1}$$

Ahora la desigualdad triangular nos lleva a

$$\begin{aligned} ||f|(\mathcal{P}) - |f|(\mathcal{P}')| = \left| \sum_{(i,j)\in A} (|f|(s_i) - |f|(s'_j)) m(I_{i,j}) \right| &\leq \\ \sum_{(i,j)\in A} \big||f|(s_i) - |f|(s'_j)\big| m(I_{i,j}) &\leq \\ \sum_{(i,j)\in A} \big|f(s_i) - f(s'_j)\big| m(I_{i,j}) &\leq 2\pi\epsilon, \end{aligned}$$

por (9.1).

Es decir, $|f|$ cumple el criterio de Cauchy de integrabilidad McShane. □

Dada una función $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$, definimos su *parte positiva* y *parte negativa* como $f^+ = \frac{1}{2}(f + |f|)$ y $f^- = \frac{1}{2}(|f| - f)$. El resultado anterior y 8.1.6 nos permiten afirmar:

Corolario 9.1.2. *Si $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ es integrable McShane, entonces f^+ y f^- también lo son.*

9.2 El teorema de la convergencia monótona

Adaptamos a continuación el clásico *teorema de la convergencia monótona* de la integral de Lebesgue [53, Capítulo 1] a la integral de McShane [44, II.4.2].

Lema 9.2.1. *Sean $f, g : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ integrables McShane tales que $f \leq g$. Entonces $\int_a^b f \leq \int_a^b g$.*

Demostración. Inmediata. □

Teorema 9.2.2. *Sea $f_n : [a,b] \longrightarrow [0,\infty)$ una sucesión de funciones integrables McShane tal que $f_n(t) \leq f_{n+1}(t)$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y cada $t \in [a,b]$ con límite puntual* finito *$f : [a,b] \longrightarrow [0,\infty)$. Entonces f es integrable McShane si y sólo si la sucesión $\int_a^b f_n$ es acotada superiormente. En tal caso:*

$$\lim_n \int_a^b f_n = \int_a^b f.$$

Demostración. Definimos $J_n := \int_a^b f_n$. Por el lema previo $(J_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión monótona creciente y, si f fuese integrable McShane, $\int_a^b f$ sería una cota superior para dicha sucesión.

Recíprocamente, supongamos que $\lim_n J_n = J \in [0,\infty)$. Fijamos $\epsilon > 0$ y $\alpha = \frac{2J+\epsilon}{2J+2\epsilon} \in (0,1)$.

Podemos encontrar

- $N \in \mathbb{N}$ de manera que
$$J_n > J - \frac{\epsilon}{2} \quad \text{para todo } n \geq N. \tag{9.2}$$
- Para cada $t \in [a,b]$ un $N \leq n(t) \in \mathbb{N}$ tal que, para cada $n \geq n(t)$,
$$f_n(t) \geq \alpha f(t). \tag{9.3}$$
- Para cada $n \in \mathbb{N}$ un calibre $\delta_n : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^+$ tal que para toda partición de McShane $\mathcal{P}$ subordinada a δ_n
$$|f_n(\mathcal{P}) - J_n| < \frac{\epsilon}{2^{n+3}}. \tag{9.4}$$
Podemos suponer sin pérdida de generalidad que $\delta_n \geq \delta_{n+1}$ para cualquier $n \in \mathbb{N}$.

Definimos el calibre $\delta(t) := \delta_{n(t)}(t)$ para $t \in [a,b]$. Se afirma que *si* $\mathcal{P}$ *es una partición de McShane de* $[a,b]$ *subordinada a* δ*, entonces* $|f(\mathcal{P}) - J| < \epsilon$.

Fijamos $\mathcal{P} = \{([a_i,b_i],s_i), i = 1,\dots,k\} \in m\Pi_\delta[a,b]$. En primer lugar
$$f(\mathcal{P}) > J - \epsilon.$$
En efecto, claramente
$$[a_i,b_i] \subseteq [s_i - \delta(s_i), s_i + \delta(s_i)] \subseteq [s_i - \delta_N(s_i), s_i + \delta_N(s_i)]$$
por la *monotonía* de los calibres ($n(s_i) \geq N$). Por tanto, $\mathcal{P}$ está subordinada a δ_N y (9.4) implica
$$f(\mathcal{P}) \geq f_N(\mathcal{P}) \geq J_N - \frac{\epsilon}{2^{N+3}} > J - \epsilon.$$
Por otro lado, definimos $M = \max\{n(s_1),\dots,n(s_k)\}$ y para cada $h \in \mathbb{N}$
$$I_h := \{i \in \{1,\dots,k\} : n(s_i) = h\}.$$
Sea $H = \{h \in \mathbb{N} : \ I_h \neq \emptyset\}$. Para cada $h \in H$ consideramos la partición parcial de McShane $\mathcal{P}_h = \{([a_i,b_i],s_i) : \ i \in I_h\}$, que está subordinada a δ_h.

Fijamos $\mathcal{P}_i^* \in m\Pi_{\delta_M}[a_i,b_i]$ para todo $i = 1,\dots,k$. Podemos construir para cada $h \in H$ una partición parcial de McShane $\mathcal{P}^*[h] = \cup_{i\in I_h}\mathcal{P}_i^*$. Como $\delta_M \leq \delta_{n(s_i)}$ para cada $i = 1,\dots,k$, es claro que $\mathcal{P}^*[h]$ está subordinada a δ_h.

Aplicando el *lema de Henstock* 8.2.2 a f_h y la partición parcial $\mathcal{P}_h$ obtenemos (por (9.4))

$$\left|\sum_{i\in I_h}\int_{a_i}^{b_i} f_h - f_h(\mathcal{P}_h)\right| \le \frac{\epsilon}{2^{h+3}}. \tag{9.5}$$

Podemos usar de nuevo 8.2.2 (aplicándolo a f_h y $\mathcal{P}^*[h] = \cup_{i\in I_h}\mathcal{P}_i^*$), junto con la proposición 8.1.5 en cada $[a_i, b_i]$, para concluir

$$\left|\sum_{i\in I_h}\left(\int_{a_i}^{b_i} f_h - f_h(\mathcal{P}_i^*)\right)\right| = \left|\sum_{i\in I_h}\int_{a_i}^{b_i} f_h - f_h(\mathcal{P}^*[h])\right| \le \frac{\epsilon}{2^{h+3}}.$$

De estas dos desigualdades obtenemos que

$$f_h(\mathcal{P}_h) \le f_h(\mathcal{P}^*[h]) + \frac{\epsilon}{2^{h+2}}$$

para cada $h \in H$.

Por definición $M = \max_{i=1,\dots,k} n(s_i)$ y, así, $f_h \le f_M$ para cada $h \in H$. Podemos combinar la última desigualdad con (9.3) (en cada punto asociado de la partición $\mathcal{P}_h$) para deducir

$$\alpha f(\mathcal{P}_h) < f_h(\mathcal{P}_h) < f_h(\mathcal{P}^*[h]) + \frac{\epsilon}{2^{h+2}} \le f_M(\mathcal{P}^*[h]) + \frac{\epsilon}{2^{h+2}}$$

para cualquier $h \in H$. Definimos $\mathcal{P}^* \in m\Pi[a, b]$ mediante

$$\mathcal{P}^* = \cup_{h\in H}\mathcal{P}^*[h] = \cup_{h\in H}\cup_{i\in I_h}\mathcal{P}_i^*$$

(la unión de los subintervalos de cada $\mathcal{P}^*[h]$ coincide con $\cup_{n(s_i)=h}[a_i, b_i]$, por lo que los subintervalos de $\mathcal{P}^*$ no se solapan y su unión es todo $[a, b]$). Es claro que $\mathcal{P}^*$ está subordinada a δ_M (por estarlo las $\mathcal{P}_i^*$). Como $\mathcal{P} = \cup_{h\in H}\mathcal{P}_h$, de la desigualdad precedente concluimos

$$\begin{aligned}
\alpha f(\mathcal{P}) &= \alpha\sum_{h\in H} f(\mathcal{P}_h) \\
&< \sum_{h\in H}\frac{\epsilon}{2^{h+2}} + \sum_{h\in H} f_M(\mathcal{P}^*[h]) \\
&= \sum_{h\in H}\frac{\epsilon}{2^{h+2}} + f_M(\mathcal{P}^*) \\
&\le \sum_{h=1}^{M}\frac{\epsilon}{2^{h+2}} + f_M(\mathcal{P}^*) \\
&\le \frac{\epsilon}{4} + f_M(\mathcal{P}^*).
\end{aligned}$$

Combinando esta desigualdad con $|f_M(\mathcal{P}^*) - J_M| < \frac{\epsilon}{2^{M+3}}$ (9.4) tenemos

$$f(\mathcal{P}) < \alpha^{-1}\left(\frac{\epsilon}{4} + f_M(\mathcal{P}^*)\right) < \alpha^{-1}\left(\frac{\epsilon}{4} + J_M + \frac{\epsilon}{2^{M+3}}\right).$$

Como $J_M \leq J$, la definición de α nos lleva a

$$f(\mathcal{P}) < \frac{2J+2\epsilon}{2J+\epsilon}\left(J+\frac{\epsilon}{2}\right) = J+\epsilon.$$

Hemos demostrado que para cada partición de McShane $\mathcal{P}$ de $[a,b]$ subordinada al calibre δ

$$|f(\mathcal{P}) - J| < \epsilon.$$

Por tanto, f es integrable McShane en $[a,b]$ con integral J, que es lo que se quería probar. $\square$

9.3 Medibilidad de las funciones integrables

El objetivo de esta sección es dar una prueba del siguiente

Teorema 9.3.1. *Toda función integrable McShane $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{K}$ es medible Lebesgue.*

Para ello seguimos la exposición de Y. Kubota [40] (desglosada en varios pasos), donde el resultado que acabamos de presentar se obtiene como simple corolario al *teorema fundamental del cálculo* para la integral de McShane (la función f se obtiene como derivada en casi todo punto de una función continua: su integral indefinida).

Fijamos una serie de convenios y notaciones. Dada una función real de variable real ϕ definida en un entorno del punto x, se puede definir la derivada superior por la derecha de ϕ en x como

$$\overline{D}^+\phi(x) = \limsup_{y\to x^+} \frac{\phi(y)-\phi(x)}{y-x}.$$

Análogamente se puede definir la derivada inferior por la derecha

$$\underline{D}^+\phi(x) = \liminf_{y\to x^+} \frac{\phi(y)-\phi(x)}{y-x}.$$

En estas condiciones, ϕ es derivable por la derecha en el punto x si y sólo si $\overline{D}^+\phi(x) = \underline{D}^+\phi(x) \in \mathbb{R}$. Podemos trabajar por la izquierda análogamente. Se dirá que ϕ tiene derivada superior en x si

$$\overline{D}^+\phi(x) = \overline{D}^-\phi(x) \in \mathbb{R}$$

Dicha cantidad se representará por $\overline{D}\phi(x)$. Análogamente podemos definir la derivada inferior.

Lema 9.3.2. *Sea $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ una función integrable McShane con integral indefinida F (definición 8.2.4). Para cada $\epsilon > 0$ existe una función monótona creciente $g : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que* *i)* $0 = g(a) \leq g(b) \leq \epsilon$.

ii) $\overline{D}^+(F(x) - g(x)) \leq f(x)$ *para cada* $x \in [a, b)$.

iii) $\overline{D}^-(F(x) - g(x)) \leq f(x)$ *para cada* $x \in (a, b]$.

Demostración. Sea δ un calibre en $[a, b]$ tal que para cada $\mathcal{P} \in m\Pi_\delta[a, b]$

$$\left| f(\mathcal{P}) - \int_a^b f \right| < \frac{\epsilon}{\pi}. \tag{9.6}$$

Definimos para cada $a \leq c < d \leq b$

$$G[c, d] := \sup \left\{ \sum \left| f(t_i)(b_i - a_i) - \int_{a_i}^{b_i} f \right| \right\},$$

donde el supremo se toma sobre todas las particiones de McShane del intervalo $[c, d]$ subordinadas a δ. El lema de Henstock 8.2.2 implica que G (como función de intervalos) toma valores en $[0, \epsilon]$. Definimos $g(a) := 0$ y para cada $x \in (a, b]$

$$g(x) := G[a, x].$$

Evidentemente g satisface i).

Afirmamos que g *es monótona creciente.* Para ello observamos (*pegando* particiones) que para cada $a \leq c < d < e \leq b$

$$G[c, e] \geq G[c, d] + G[d, e], \tag{9.7}$$

y tomando $c = a$ en la anterior desigualdad obtenemos la monotonía de g.

En segundo lugar se afirma que para cada $x \in [a, b)$

$$\overline{D}^+(F(x) - g(x)) \leq f(x).$$

En efecto, sea $x < t < b$ tal que $|t - x| < \delta(x)$. Como la partición parcial $\{([x, t], x)\}$ está subordinada a δ:

$$\left| f(x)(t - x) - \int_x^t f \right| \leq G[x, t].$$

Esta desigualdad y (9.7) nos llevan a

$$\begin{aligned} F(t) - g(t) - (F(x) - g(x)) &= \int_x^t f + (G[a, x] - G[a, t]) \\ &\leq \int_x^t f - G[x, t] \\ &\leq f(x)(t - x). \end{aligned}$$

Es decir,

$$\frac{(F(t)-g(t))-(F(x)-g(x))}{t-x} \leq f(x)$$

para todo $x < t < \min\{b, x+\delta(x)\}$ y tomando límites superiores se obtiene la desigualdad buscada.

Razonando de modo análogo podemos concluir que para cada $x \in (a, b]$

$$\overline{D}^{-}(F(x)-g(x)) \leq f(x).$$

□

Teorema 9.3.3. *Sea $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ una función integrable McShane. Entonces su integral indefinida F verifica:*

$$\overline{D}^{+}F(t) \leq f(t)$$
$$\overline{D}^{-}F(t) \leq f(t)$$

en casi todo punto $t \in [a, b]$.

Demostración. Sea $E = \{x \in (a, b) : \overline{D}^{+}F(x) - f(x) > 0\}$. *Supongamos por reducción al absurdo que $m^*(E) > 0$.*

Definimos para cada $n \in \mathbb{N}$

$$E_n = \left\{x \in (a, b) : \overline{D}^{+}F(x) - f(x) > \frac{1}{n}\right\}.$$

Es trivial que $E = \cup_{n=1}^{\infty} E_n$ y por la subaditividad de m^* existe n tal que $m^*(E_n) = v > 0$.

Fijado $\epsilon \in (0, \frac{v}{n})$, sea g la función monótona creciente proporcionada por el lema 9.3.2 para este ϵ. Es conocido (véase [58, Teorema 7.21]) que g es derivable en casi todo punto, su derivada g' es integrable Lebesgue y $g(b) - g(a) \geq \int_a^b g'$.

En primer lugar, veamos que el conjunto medible $B = \{t \in [a, b] : g'(t) > \frac{1}{n}\}$ satisface

$$m(B) < v. \tag{9.8}$$

En efecto, como $g' \geq 0$ (g es monótona creciente):

$$\frac{1}{n}m(B) \leq (L)\int_B g' \leq (L)\int_a^b g' \leq g(b) - g(a) \leq \epsilon < \frac{v}{n}$$

por la desigualdad *i*) en el lema precedente. Por tanto, $m(B) < v$.

Por otro lado, afirmamos que $m^*(E_n) < v$ (en contra de la definición de v). Para comprobarlo fijamos $F \subset (a, b)$ un conjunto medible conulo tal que existe $g'(t)$ para cada $t \in F$. Observamos que $F \cap E_n \subset B$: en efecto, si $x \in F$ la propiedad *ii*) en el lema 9.3.2 garantiza

$$\overline{D}^{+}F(x) - g'(x) \leq f(x).$$

Si además $x \in E_n$, entonces

$$\frac{1}{n} < \overline{D}^+ F(x) - f(x) \leq g'(x)$$

y así $x \in B$. Por tanto $F \cap E_n \subset B$. De aquí se obtiene rápidamente la contradicción deseada:

$$\begin{aligned} m^*(E_n) &\leq m^*(F \cap E_n) + m^*\left(([a,b] \setminus F) \cap E_n\right) \\ &\leq m^*(B) + m^*([a,b] \setminus F) = m^*(B) < v. \end{aligned}$$

Por lo tanto, $m^*(E) = 0$. De modo análogo se prueba que

$$m^*\Big(\{x \in (a,b) : \ \overline{D}^- F(x) - f(x) > 0\}\Big) = 0$$

y el teorema queda demostrado. □

Un razonamiento similar nos permite demostrar el siguiente

Teorema 9.3.4. *Sea $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ una función integrable McShane. Su integral indefinida F satisface*

$$\begin{aligned} \underline{D}^+ F(t) &\geq f(t) \\ \underline{D}^- F(t) &\geq f(t) \end{aligned}$$

en casi todo punto $t \in [a,b]$.

A partir de 9.3.3 y 9.3.4 se deduce inmediatamente el resultado clave de la sección [40, Proposición 6]:

Corolario 9.3.5 (Teorema fundamental del cálculo). *Si $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función integrable McShane, su integral indefinida F es derivable en casi todo punto $t \in [a,b]$ y $F'(t) = f(t)$.*

Finalizamos la sección con la prueba del teorema 9.3.1.

Demostración. Si $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{K}$ es integrable McShane y $f = u + iv$ es su descomposición en partes real e imaginaria, es sencillo ver que $u, v : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ son integrables McShane. Para ver la medibilidad de f basta comprobar que u y v son medibles Lebesgue y, así, podemos suponer sin pérdida de generalidad que $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$. Sea F su integral indefinida, que es una función continua (proposición 8.2.5) tal que $F'(t) = f(t)$ en casi todo $t \in [a,b]$ por el resultado precedente. El lema A.1.1 nos proporciona la medibilidad de f. □

9.4 La equivalencia Lebesgue-McShane

Sea $f : [a,b] \longrightarrow [0,\infty)$ una función medible Lebesgue. Sabemos que existe una sucesión de funciones medibles simples $\{s_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ de manera que

- $s_n \geq 0$ para cada $n \in \mathbb{N}$.
- $s_n \leq s_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$.
- $\lim_n s_n(t) = f(t)$ para cada $t \in [a, b]$.

Es conocido que s_n es integrable McShane y $a_n = (MS)\int_a^b s_n = (L)\int_a^b s_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$ (proposición 8.3.1). El teorema 9.2.2 garantiza que f es integrable McShane si y sólo si la sucesión $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ está acotada superiormente, en cuyo caso

$$\lim_n a_n = (MS)\int_a^b f.$$

Por otro lado, podemos aplicar el *teorema de la convergencia monótona de Lebesgue* para obtener

$$\lim_n a_n = (L)\int_a^b f.$$

Por tanto, f es integrable McShane si y sólo si $(L)\int_a^b f < \infty$, es decir, si y sólo si f es integrable Lebesgue. En tal caso $(L)\int_a^b f = (MS)\int_a^b f$.

Como la integrabilidad McShane de cualquier función $f : [a, b] \longrightarrow [0, \infty)$ implica medibilidad Lebesgue (9.3.1), tenemos probado el siguiente

Teorema 9.4.1. *Para una función $f : [a, b] \longrightarrow [0, \infty)$ son equivalentes:*

i) f es integrable McShane.

ii) f es integrable Lebesgue.

En tal caso las integrales coinciden.

Completamos la prometida equivalencia:

Corolario 9.4.2. *Sea $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{K}$ una función. Son equivalentes:*

i) f es integrable McShane.

ii) f es integrable Lebesgue.

En tal caso las integrales coinciden.

Demostración. Sea $f = u + iv$ su descomposición en parte real e imaginaria. Es conocido que f es integrable Lebesgue (resp. McShane) sii u y v lo son, en cuyo caso $(L)\int_a^b f = (L)\int_a^b u + i(L)\int_a^b v$ (resp. $(MS)\int_a^b f = (MS)\int_a^b u + i(MS)\int_a^b v$). Por tanto, la prueba se reduce al caso $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$. Sabemos que $f = f^+ - f^-$, siendo f^+ y f^- funciones no negativas. Es conocido que f es integrable Lebesgue sii lo son f^+ y f^-, y lo mismo ocurre para la integrabilidad McShane (en virtud de 8.1.6 y 9.1.2). En tal caso, $(L)\int_a^b f = (L)\int_a^b f^+ - (L)\int_a^b f^-$ (resp. $(MS)\int_a^b f = (MS)\int_a^b f^+ - (MS)\int_a^b f^-$). Esto reduce la demostración al caso $f : [a, b] \longrightarrow [0, \infty)$, que ha sido probado anteriormente. $\square$

Capítulo 10

Relación con otras integrales

En este capítulo determinamos cuál es la relación existente entre la integrabilidad Bochner, Pettis y McShane de una función $f : [a, b] \longrightarrow X$, presentando los resultados al respecto de D.H. Fremlin y J. Mendoza [20], R.A. Gordon [22], V.A. Skvortsov y A.P. Solodov [54]. En concreto:

- Una función integrable Riemann es integrable Pettis (4.0.4) e integrable McShane (8.4.1), pero en general no es medible y, por tanto, integrable Bochner (1.0.11). La medibilidad de la función garantiza su integrabilidad Bochner (4.0.5).

- Una función integrable Bochner es integrable McShane (10.3.1). Como acabamos de comentar en el punto anterior, el recíproco no es cierto en general. Los únicos espacios de Banach X para los que coinciden integrabilidad Bochner y McShane son los de dimensión finita (10.3.10).

- Una función integrable McShane es integrable Pettis (10.1.2). La afirmación contraria no es válida en general, pero sí cuando la función es además medible (10.3.5). En particular integrabilidad Pettis y McShane coinciden si X es separable.

Para demostrar 10.3.5 empleamos un potente teorema de convergencia para la integral de McShane (debido a D.H. Fremlin) que, además, nos permite deducir un teorema de *tipo Vitali* y el de la *convergencia dominada* para esta integral (*Sección 10.2*), tanto para la topología débil como para la inducida por la norma.

10.1 Integrabilidad Pettis

Proposición 10.1.1. *Si $f : [a, b] \longrightarrow X$ es integrable McShane y $T : X \longrightarrow Y$ es una aplicación lineal continua entre espacios de Banach, entonces la compo-*

sición $Tf : [a,b] \longrightarrow Y$ es integrable McShane y

$$\int_a^b Tf = T\left(\int_a^b f\right).$$

En particular, para cada $x^* \in X^*$ la función x^*f es integrable McShane y $\int_a^b x^*f = x^*\left(\int_a^b f\right)$.

Demostración. (Con las notaciones introducidas después de la definición 8.1.2). Para cada $(\mathcal{P},\delta) \in D$ tenemos

$$MS_{Tf}((\mathcal{P},\delta)) = T\left(MS_f((\mathcal{P},\delta))\right)$$

por la linealidad de T. El resultado se sigue de la continuidad de T. □

Sea $f : [a,b] \longrightarrow X$ una función integrable McShane. El resultado precedente y el corolario 9.4.2 nos dicen que f es integrable Dunford. Si denotamos su integral indefinida como $\nu : \Sigma \longrightarrow X^{**}$, es fácil ver que $\nu([c,d]) \in X$ para cada subintervalo cerrado $[c,d] \subset [a,b]$: f es integrable McShane en $[c,d]$ por 8.1.4 y el resultado anterior implica que $x^*\left(\int_c^d f\right) = \int_c^d x^*f$ para cada $x^* \in X^*$; por tanto $\nu([c,d]) = \int_c^d f \in X$.

Estamos entonces en las condiciones del teorema A.4.15 (utilizado anteriormente para probar que la integrabilidad Pettis extiende a la de Riemann, véase 4.0.4), que será la herramienta básica utilizada para demostrar la siguiente mejora [20, Teorema 2C]:

Teorema 10.1.2. *Toda función $f : [a,b] \longrightarrow X$ integrable McShane es integrable Pettis.*

Demostración. Fijado $\epsilon > 0$, tomamos un calibre $\delta : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^+$ tal que

$$\left\| \int_a^b f - f(\mathcal{P}) \right\| < \epsilon \tag{10.1}$$

para toda $\mathcal{P} \in m\Pi_\delta[a,b]$. Fijamos

$$\mathcal{P} = \{(I_i,t_i) : \ i = 1,\ldots,n\} \in m\Pi_\delta[a,b]$$

y definimos $M = \max_{1\le i\le n} \|f(t_i)\|$.

Para demostrar el teorema basta probar la siguiente afirmación

$$\|\nu(E)\| \le Mm(E) + 2\epsilon \tag{10.2}$$

para cada unión finita E de subintervalos cerrados que no se solapen. En efecto: si suponemos probada esta desigualdad y tomamos una sucesión $\{[a_n,b_n]\}_{n\in\mathbb{N}}$ de subintervalos cerrados de $[a,b]$ que no se solapen, dados $N \le n \in \mathbb{N}$,

$$\left\| \sum_{j=N}^n \nu([a_j,b_j]) \right\| \le M \sum_{j=N}^n m([a_j,b_j]) + 2\epsilon.$$

Por tanto, para cada $N \in \mathbb{N}$

$$\sup_{n\geq N}\left\|\sum_{j=N}^{n}\nu([a_j,b_j])\right\| \leq M\sum_{j=N}^{\infty}m([a_j,b_j])+2\epsilon$$

y así

$$\overline{\lim_{N}}\sup_{n\geq N}\left\|\sum_{j=N}^{n}\nu([a_j,b_j])\right\| \leq 2\epsilon$$

(la medida de Lebesgue es contablemente aditiva). Esta última desigualdad es válida para cada $\epsilon > 0$ y, por tanto, existe $\lim_N \sup_{n\geq N}\left\|\sum_{j=N}^{n}\nu([a_j,b_j])\right\| = 0$. Es decir, $\sum_{i=1}^{\infty}\nu([a_i,b_i])$ es una serie convergente en el Banach X. Aplicando A.4.15 ya está probado el teorema.

Para demostrar (10.2) escribimos $E = \cup_{j=1}^{p}E_j$ con los E_j subintervalos cerrados que no se solapan. Es claro que si $I_i \setminus E \neq \emptyset$ entonces $\overline{I_i \setminus E} = \cup_{h=1}^{h_i}J_{i,h}$ para ciertos $J_{i,h}$ subintervalos cerrados que no se solapan. Definimos

$$I = \{i \in \{1,\ldots,n\} : I_i \setminus E \neq \emptyset\}$$

y, para cada $i \in I$, la siguiente partición parcial subordinada a δ:

$$\mathcal{P}_i = \{(J_{i,h},t_i) :\ h = 1,\ldots,h_i\}.$$

Es fácil ver (definiendo $J_{i,h} = \emptyset$ y $h_i = 1$ si $i \notin I$) que

$$\begin{aligned}\left\|f(\mathcal{P})-\sum_{i\in I}f(\mathcal{P}_i)\right\| &= \left\|\sum_{i=1}^{n}\left(m(I_i)-\sum_{h=1}^{h_i}m(J_{i,h})\right)f(t_i)\right\| \\ &= \left\|\sum_{i=1}^{n}(m(I_i)-m(I_i\setminus int(E)))f(t_i)\right\| \\ &= \left\|\sum_{i=1}^{n}m(I_i\cap int(E))f(t_i)\right\| \\ &\leq M\sum_{i=1}^{n}m(I_i\cap int(E)) \\ &= Mm(E). \qquad (10.3)\end{aligned}$$

Se observa que $\mathcal{P}_0 = \cup_{i\in I}\mathcal{P}_i$ es una partición parcial subordinada a δ y la unión de sus subintervalos es

$$\cup_{i\in I}\overline{I_i\setminus E} = \overline{\cup_{i\in I}(I_i\setminus E)} = \overline{\cup_{i=1}^{n}(I_i\setminus E)} = \overline{[a,b]\setminus E}.$$

Dado $\eta > 0$ arbitrario podemos encontrar $\mathcal{P}_j^* \in m\Pi_\delta(E_j)$ tal que

$$\left\|\int_{E_j}f - f(\mathcal{P}_j^*)\right\| < \eta \qquad (10.4)$$

para cualquier $1 \leq j \leq p$.

Sea $\mathcal{P}' = \mathcal{P}_0 \cup \left(\cup_{j=1}^{p} \mathcal{P}_j^*\right) \in m\Pi_\delta[a,b]$ (la unión de todos los subintervalos de las $\mathcal{P}_j^*$ es $\cup_{j=1}^{p} E_j = E$). Como $\mathcal{P}$ también está subordinada a δ, podemos aplicar (10.1) y obtener

$$\|f(\mathcal{P}) - f(\mathcal{P}')\| = \left\| f(\mathcal{P}) - \sum_{i\in I} f(\mathcal{P}_i) - \sum_{j=1}^{p} f(\mathcal{P}_j^*) \right\| < 2\epsilon.$$

Esta desigualdad, (10.3) y (10.4) permiten concluir

$$\left\|\sum_{j=1}^{p} \nu(E_j)\right\| \leq \sum_{j=1}^{p} \|\nu(E_j) - f(\mathcal{P}_j^*)\| + \left\| \sum_{j=1}^{p} f(\mathcal{P}_j^*) + \sum_{i\in I} f(\mathcal{P}_i) - f(\mathcal{P}) \right\|$$
$$+ \left\| \sum_{i\in I} f(\mathcal{P}_i) - f(\mathcal{P}) \right\| < p\eta + 2\epsilon + Mm(E).$$

La arbitrariedad de η finaliza la demostración. $\square$

A continuación mostramos dos aplicaciones de este teorema, donde utilizamos la integrabilidad Pettis para manejar fácilmente conjuntos medibles mientras trabajamos con la integral de McShane. La proposición 10.1.3 [20, Teorema 2E] generaliza 8.1.4, mientras que 10.1.6 [20, Lema 2H] es una mejora del lema de Henstock 8.2.2.

Proposición 10.1.3. *Sean $f : [a,b] \longrightarrow X$ integrable McShane y $E \subset [a,b]$ un conjunto medible Lebesgue. Entonces la función $g = \chi_E f : [a,b] \longrightarrow X$ es integrable McShane con integral $\nu(E)$ (donde ν es la integral indefinida de Pettis de f).*

Demostración. Ya sabemos que f es integrable Pettis y, por tanto, su integral indefinida $\nu : \Sigma \longrightarrow X$ verifica $\nu \ll m$ (véase A.4.15). Fijado $\epsilon > 0$, vamos a encontrar un calibre $\delta : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^+$ tal que $\|\nu(E) - g(\mathcal{P})\| < 3\epsilon$ para toda $\mathcal{P} \in m\Pi_\delta[a,b]$. Para ello tomamos un calibre $\Delta : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^+$ de manera que

$$\left\| \int_a^b f - f(\mathcal{P}) \right\| < \epsilon \tag{10.5}$$

para cada $\mathcal{P} \in m\Pi_\delta[a,b]$. Como $\nu \ll m$, podemos encontrar $\eta > 0$ tal que

$$\text{si } F \in \Sigma \text{ tiene medida menor que } \eta, \text{ entonces } \|\nu(F)\| < \epsilon. \tag{10.6}$$

La regularidad de la medida de Lebesgue nos permite encontrar *cerrados* $F_1 \subset E$ y $F_2 \subset [a,b]\backslash E$ tales que $m(F_1) > m(E) - \eta$ y $m(F_2) > m([a,b]\backslash E) - \eta$. Fijamos un calibre $\delta : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^+$ de manera que

- $\delta \leq \Delta$ (puntualmente) y

- $[t-\delta(t), t+\delta(t)] \cap F_i = \emptyset$ para cada $t \in [a,b] \setminus F_i$ e $i = 1,2$.

Veamos que este calibre satisface lo deseado. Para ello fijamos $\mathcal{P} \in m\Pi_\delta[a,b] \subset m\Pi_\Delta[a,b]$, que escribimos

$$\mathcal{P} = \{([a_i,b_i], s_i) : \; i = 1,\dots,n\}.$$

Sea $I = \{i = 1,\dots,n : \; s_i \in E\}$ y definimos $H = \cup_{i\in I}[a_i,b_i]$. El lema de Henstock 8.2.2 implica

$$\left\| \sum_{i\in I} \left(\int_{a_i}^{b_i} f - (b_i - a_i) f(s_i) \right) \right\| = \left\| \nu(H) - \sum_{i\in I} (b_i - a_i) f(s_i) \right\| \leq \epsilon.$$

Pero $\sum_{i\in I}(b_i - a_i)f(s_i) = g(\mathcal{P})$, luego

$$\|\nu(H) - g(\mathcal{P})\| \leq \epsilon. \tag{10.7}$$

Observamos que

- $F_1 \subset H$. En efecto, si $t \in F_1 \subset [a,b]$ existe $1 \leq j \leq n$ tal que t pertenece a $[a_j,b_j] \cap F_1 \subset [s_j - \delta(s_j), s_j + \delta(s_j)] \cap F_1$; así, esta última intersección es no vacía y la definición del calibre δ nos lleva a que $s_j \in F_1 \subset E$ y, por tanto, $[a_j,b_j] \subset H$.

- $H \subset [a,b] \setminus F_2$. En efecto, si $i \in I$ entonces $s_i \in E \subset [a,b] \setminus F_2$ y, por tanto, $\emptyset = [s_i - \delta(s_i), s_i + \delta(s_i)] \cap F_2 \supset [a_i,b_i] \cap F_2$.

Estas dos observaciones nos permiten concluir que $m(E \setminus H) \leq m(E \setminus F_1) < \eta$ y $m(H \setminus E) \leq m\left(([a,b] \setminus F_2) \setminus E\right) < \eta$ por la elección de F_1 y F_2. Deducimos $\|\nu(E \setminus H)\| < \epsilon$ y $\|\nu(H \setminus E)\| < \epsilon$ en virtud de (10.6). Así,

$$\|\nu(H) - \nu(E)\| = \|\nu(H \cap E) + \nu(H \setminus E) - \nu(E \cap H) - \nu(E \setminus H)\| < 2\epsilon.$$

Combinando esta desigualdad con (10.7) tenemos

$$\|\nu(E) - g(\mathcal{P})\| < 3\epsilon$$

como se quería demostrar. □

Nota 10.1.4. *Sea $f : [a,b] \longrightarrow X$ integrable McShane con integral indefinida de Pettis ν. En los comentarios previos al teorema 10.1.2 hemos visto que $\nu(J) = \int_J f \restriction_J$ para cada subintervalo cerrado $J \subset [a,b]$. La proposición precedente nos dice que $\int_J f \restriction_J = \int_a^b \chi_J f$. De aquí en adelante utilizaremos la notación*

$$\int_E f := \int_a^b \chi_E f = \nu(E) \in X$$

para cada subconjunto medible $E \subset [a,b]$, que es coherente con la mantenida hasta ahora para subintervalos cerrados.

Definición 10.1.5. *Dado un calibre* $\delta : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^+$, *una* partición parcial de McShane generalizada *subordinada a* δ *es una colección finita*

$$\mathcal{P} = \{(E_i, s_i) : i = 1, \dots, n\}$$

donde

- $s_i \in [a,b]$ *para* $i = 1, \dots, n$;
- $\{E_i\}_{1 \leq i \leq n}$ *son subconjuntos medibles disjuntos de* $[a,b]$;
- $E_i \subset [s_i - \delta(s_i), s_i + \delta(s_i)]$ *para cada* $i = 1, \dots, n$.

Si $f : [a,b] \longrightarrow X$ *es una función cualquiera, la* suma de McShane *de* f *respecto de* $\mathcal{P}$ *es* $f(\mathcal{P}) = \sum_{i=1}^n m(E_i) f(s_i)$.

Proposición 10.1.6 (Lema de Henstock generalizado).
Sea $f : [a,b] \longrightarrow X$ *una función integrable McShane. Dado* $\epsilon > 0$, *existe un calibre* $\delta : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^+$ *tal que para cada partición parcial de McShane* generalizada *subordinada a* δ, *digamos* $\mathcal{P} = \{(E_i, s_i) : \ i = 1, \dots, n\}$, *se cumple*

$$\left\| \sum_{i=1}^n \left(\int_{E_i} f - m(E_i) f(s_i) \right) \right\| \leq \epsilon.$$

Demostración. Sea δ un calibre tal que

$$\left\| \int_a^b f - f(\mathcal{P}') \right\| < \epsilon$$

para cada $\mathcal{P}' \in m\Pi_\delta[a,b]$. Fijamos una partición parcial de McShane generalizada $\mathcal{P} = \{(E_i, s_i) : \ i = 1, \dots, n\}$ subordinada a $\delta' = \frac{\delta}{2}$. *Se afirma* que para cada $\eta > 0$

$$\left\| \int_{\cup_{i=1}^n E_i} f - f(\mathcal{P}) \right\| \leq \epsilon + 3\eta.$$

(Esto finalizará la demostración).

Definimos $M = \max_{1 \leq i \leq n} \|f(s_i)\|$ y tomamos $\eta' < \frac{\eta}{nM}$ tal que $\left\| \int_H f \right\| < \eta$ si $H \subset [a,b]$ es medible de medida menor que $n\eta'$.

Para cada $i = 1, \dots, n$ tenemos $E_i \subset (s_i - \delta(s_i), s_i + \delta(s_i))$ y podemos encontrar un abierto G_i tal que $E_i \subset G_i \subset (s_i - \delta(s_i), s_i + \delta(s_i))$ y $m(G_i \backslash E_i) < \frac{\eta'}{2}$ (regularidad de la medida de Lebesgue). Usando que cada G_i es unión contable de intervalos abiertos disjuntos (sus componentes conexas) podemos encontrar para cada $i = 1, \dots, n$ intervalos abiertos disjuntos $G_{i,1}, \dots, G_{i,J_i} \subset G_i$ de manera que $m(G_i) - \sum_{j=1}^{J_i} m(G_{i,j}) < \frac{\eta'}{2}$. Escribimos $[a_{i,j}, b_{i,j}] = \overline{G_{i,j}}$.

Es claro que $\{[a_{i,j}, b_{i,j}] : \ 1 \leq i \leq n, \ 1 \leq j \leq J_i\}$ es una familia de subintervalos cerrados que no se solapan y

$$\mathcal{P}_0 = \{([a_{i,j}, b_{i,j}], t_i) : \ 1 \leq i \leq n, \ 1 \leq j \leq J_i\}$$

es una partición parcial de McShane subordinada a δ. Definimos

$$F_i = \cup_{j=1}^{J_i} [a_{i,j}, b_{i,j}]$$

para $1 \leq i \leq n$, $F = \cup_{i=1}^{n} F_i$ y $E = \cup_{i=1}^{n} E_i$. Aplicando el lema de Henstock 8.2.2 a $\mathcal{P}_0$ se obtiene

$$\left\| \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{J_i} \left(\int_{a_{i,j}}^{b_{i,j}} f - (b_{i,j} - a_{i,j}) f(t_i) \right) \right\| = \left\| \nu(F) - \sum_{i=1}^{n} m(F_i) f(t_i) \right| \leq \epsilon. \tag{10.8}$$

Además,

$$m(E_i \Delta F_i) \leq \eta' \quad \text{para todo } 1 \leq i \leq n. \tag{10.9}$$

En efecto:

$$m(E_i \Delta F_i) = m(E_i \setminus F_i) + m(F_i \setminus E_i) \leq m(G_i \setminus F_i) + m(G_i \setminus E_i) < \eta'$$

porque $E_i \subset G_i$, F_i está contenido esencialmente en G_i, $m(G_i) - m(F_i) < \frac{\eta'}{2}$ y $m(G_i) - m(E_i) < \frac{\eta'}{2}$.

Entonces

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{i=1}^{n} m(F_i) f(t_i) - f(\mathcal{P}) \right\| &= \left\| \sum_{i=1}^{n} (m(F_i) - m(E_i)) f(t_i) \right\| \\ &\leq M \sum_{i=1}^{n} |m(F_i) - m(E_i)| \\ &\leq M \sum_{i=1}^{n} m(F_i \Delta E_i) \quad < \quad \eta, \end{aligned} \tag{10.10}$$

porque hemos tomado $\eta' < \frac{\eta}{nM}$.

De (10.9) deducimos

$$m(E \Delta F) = \sum_{i=1}^{n} (m(E_i \setminus F) + m(F_i \setminus E)) \leq \sum_{i=1}^{n} m(E_i \Delta F_i) < n\eta'$$

y la elección de η' garantiza que $\|\nu(E \setminus F)\| < \eta$ y $\|\nu(F \setminus E)\| < \eta$. Por tanto, $\|\nu(E) - \nu(F)\| < 2\eta$ y, aplicando (10.8) y (10.10),

$$\|\nu(E) - f(\mathcal{P})\| < \epsilon + 3\eta.$$

Esto finaliza la prueba. □

10.2 Paso al límite bajo la integral de McShane

En esta sección establecemos teoremas de paso al límite análogos a los clásicos teoremas de Vitali A.1.8 y de la convergencia dominada para la integral de Lebesgue. Los resultados básicos (10.2.2 y 10.2.3) serán empleados en la siguiente sección para demostrar que *toda función medible e integrable Pettis es integrable McShane.*

Comenzamos extendiendo una conocida propiedad de la integral de Lebesgue al caso de la integral de McShane vectorial [22, Teorema 6].

Proposición 10.2.1. *Sea $f : [a, b] \longrightarrow X$ una función integrable McShane que coincide en casi todo punto con una función $g : [a, b] \longrightarrow X$. Entonces g es integrable McShane en $[a, b]$ y*

$$\int_a^b f = \int_a^b g.$$

Demostración. Evidentemente, la proposición 8.1.6 reduce la prueba al caso $f = 0$. Como $\|g\| = 0$ en casi todo punto de $[a, b]$, $\|g\|$ es integrable Lebesgue con integral 0. La equivalencia de las integrales de McShane y Lebesgue en el caso escalar (9.4.2) implica que $\|g\|$ es integrable McShane en $[a, b]$ con $(MS) \int_a^b \|g\| = 0$. Por tanto, dado cualquier $\epsilon > 0$ existe un calibre $\delta : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^+$ tal que $\|g\|(\mathcal{P}) < \epsilon$ para cada $\mathcal{P} \in m\Pi_\delta[a, b]$. La prueba finaliza observando que $\|g(\mathcal{P})\| \leq \|g\|(\mathcal{P})$ para cada $\mathcal{P} \in m\Pi[a, b]$ por la desigualdad triangular. □

El siguiente resultado es una versión adaptada a nuestro contexto de un teorema de D.H. Fremlin [19, Teorema 4A] y constituye la clave de la presente sección.

Teorema 10.2.2 (Fremlin). *Sea $f_n : [a, b] \longrightarrow X$, $n = 1, 2, \ldots$, una sucesión de funciones integrables McShane tal que*

i) converge débilmente a $f : [a, b] \longrightarrow X$ en casi todo punto,

ii) para cada $E \subset [a, b]$ medible Lebesgue existe el límite

$$\sigma(X^{**}, X^*) - \lim_n \int_E f_n = \nu(E) \in X^{**},$$

iii) $\nu : \Sigma \longrightarrow X^{**}$ es contablemente aditiva.

Entonces, f es integrable McShane en $[a, b]$, su integral indefinida de Pettis es ν (que toma, por tanto, todos sus valores en X) y

$$\int_a^b f = \nu([a, b]).$$

Demostración. La proposición 10.2.1 nos permite suponer sin pérdida de generalidad que $\omega - \lim_n f_n = f$ en todo punto (redefiniendo todas las funciones como 0 en el subconjunto de $[a, b]$ donde no hay convergencia). Fijamos $\epsilon > 0$ e introducimos:

a) el conjunto numerable Γ definido como

$$\left\{(r, v_1, \ldots, v_n) : \ r, n \in \mathbb{N}, \ v_1, \ldots, v_n \in \mathbb{Q} \cap [0,1], \ \sum_{i=1}^{n} v_i = 1\right\};$$

a') para cada $\gamma = (r, v_1, \ldots, v_n) \in \Gamma$ definimos

$$r_\gamma = r \quad \text{y} \quad f_\gamma = \sum_{i=1}^{n} v_i f_i$$

(f_γ es integrable McShane, 8.1.6);

a") si $\gamma \in \Gamma$, fijamos

$$A_\gamma = \left\{t \in [a,b] : \ \sup_{i \in \mathbb{N}} \|f_i(t)\| \leq r_\gamma, \ \|f(t) - f_\gamma(t)\| \leq \epsilon\right\};$$

b) si $\gamma \in \Gamma$, tomamos $A_\gamma \subset V_\gamma \subset [a,b]$ medible tal que $m(V_\gamma) = m^*(A_\gamma)$;

c) para cada $t \in [a,b]$ se tiene $\omega - \lim_n f_n(t) = f(t)$ y, por el teorema de Mazur A.6.6, existe una sucesión de combinaciones convexas de elementos de $\{f_n(t)\}_{n \in \mathbb{N}}$ que converge en norma hacia $f(t)$; como además la sucesión $\{f_n(t)\}_{n \in \mathbb{N}}$ es acotada, existe $\gamma \in \Gamma$ tal que $t \in A_\gamma$; por tanto

$$[a,b] = \cup_{\gamma \in \Gamma} A_\gamma;$$

utilizando la numerabilidad de Γ podemos obtener para cada $\gamma \in \Gamma$ un subconjunto $A'_\gamma \subset A_\gamma$ de manera que $\{A'_\gamma\}_{\gamma \in \Gamma}$ sea un recubrimiento de $[a,b]$ formado por conjuntos disjuntos dos a dos;

d) como Γ es numerable, podemos encontrar una familia de reales positivos $\{d_\gamma\}_{\gamma \in \Gamma}$ tal que

$$\sum_{\gamma \in \Gamma} (r_\gamma + 1) d_\gamma \leq \epsilon;$$

e) por hipótesis ν es una medida vectorial contablemente aditiva y claramente $\nu(E) = 0$ si $m(E) = 0$; A.2.4 asegura la existencia de una familia de reales positivos $(\eta_\gamma)_{\gamma \in \Gamma}$ tal que para cualquier $H \subset [a,b]$ medible

$$m(H) \leq \eta_\gamma \quad \Rightarrow \quad \|\nu(H)\| \leq d_\gamma;$$

f) para cada $\gamma \in \Gamma$ tomamos un abierto relativo $G_\gamma \subset [a,b]$ tal que

$$m(G_\gamma \setminus V_\gamma) < \min\{d_\gamma, \eta_\gamma\}.$$

En primer lugar, veamos que para cada $\gamma \in \Gamma$ y $E \subset V_\gamma$ medible

$$\left\| \nu(E) - \int_E f_\gamma \right\| \leq m(E)\epsilon. \tag{10.11}$$

Como $\nu(E) = \sigma(X^{**}, X^*) - \lim_n \int_E f_n$, para cada $x^* \in X^*$

$$\nu(E)(x^*) = \lim_n x^* \left(\int_E f_n \right) = \lim_n x^* \left(\int_a^b \chi_E f_n \right) = \lim_n \int_E x^* f_n.$$

Observamos que $A_\gamma \cap E \subset E$ y

$$m^*(A_\gamma \cap E) = m(E)$$

(por A.1.3). La sucesión de funciones medibles $\{x^* f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ está uniformemente acotada en A_γ y, en particular, en $A_\gamma \cap E$. Podemos aplicar el teorema de la convergencia dominada A.1.5 y deducir

$$\lim_n \int_E x^* f_n = \int_E x^* f$$

(por hipótesis $\omega - \lim_n f_n = f$ en casi todo punto de $[a, b]$). Así,

$$\nu(E)(x^*) = \int_E x^* f \tag{10.12}$$

para cada $x^* \in B_{X^*}$. Por tanto

$$\begin{aligned} \left| \nu(E)(x^*) - x^* \left(\int_E f_\gamma \right) \right| &= \left| \int_E x^* f - \int_E x^* f_\gamma \right| \\ &\leq \int_E |x^* f - x^* f_\gamma| \\ &\leq m(E)\epsilon, \end{aligned}$$

porque $|x^* f - x^* f_\gamma| \leq \|f - f_\gamma\| \leq \epsilon$ en $A_\gamma \cap E$ (véase A.1.4). Esto es válido para cada $x^* \in B_{X^*}$ y prueba la estimación (10.11).

Tomamos para cada $\gamma \in \Gamma$ un calibre $\delta_\gamma : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^+$ de manera que

$$\left\| \int_{\cup_{i=1}^n E_i} f_\gamma - f_\gamma(\mathcal{P}) \right\| \leq d_\gamma \tag{10.13}$$

para cada $\mathcal{P} = \{(E_i, s_i) : i = 1, \ldots, n\}$ partición parcial de McShane generalizada subordinada a δ_γ (10.1.6). Fijamos un calibre $\delta : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^+$ tal que

- $\delta(t) \leq \delta_\gamma(t)$ para cada $t \in A'_\gamma$ y $\gamma \in \Gamma$;

- $[a,b] \cap [t-\delta(t), t+\delta(t)] \subset G_\gamma$ para cualquier $t \in A'_\gamma$ (por construcción G_γ es un abierto relativo en $[a,b]$ que contiene a $A_\gamma \supset A'_\gamma$).

Vamos a demostrar que

$$\|\nu([a,b]) - f(\mathcal{P})\| \leq (3 + 2(b-a))\epsilon$$

para cada $\mathcal{P} \in m\Pi_\delta[a,b]$.

Para ello fijamos una tal partición

$$\mathcal{P} = \{([a_i, b_i], s_i) : \ i = 1, \ldots, n\}.$$

Definimos $I_\gamma = \{1 \leq i \leq n : \ s_i \in A'_\gamma\}$ para cada $\gamma \in \Gamma$ y $K = \{\gamma \in \Gamma : \ I_\gamma \neq \emptyset\}$. Como $\{A'_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ es un recubrimiento de $[a,b]$ formado por conjuntos disjuntos, $\{I_\gamma\}_{\gamma\in K}$ es una partición finita de $\{1,\ldots,n\}$. Para cada $\gamma \in K$ e $i \in I_\gamma$ definimos $E_{i,\gamma} = [a_i, b_i] \cap V_\gamma$.

Afirmamos que

$$\left\| f(\mathcal{P}) - \sum_{\gamma\in K} \sum_{i\in I_\gamma} m(E_{i,\gamma}) f(s_i) \right\| \leq \epsilon. \tag{10.14}$$

En efecto: si $\gamma \in K$ e $i \in I_\gamma$ entonces $s_i \in A'_\gamma$ y, por la definición del calibre δ,

$$[a_i, b_i] \subset [a,b] \cap [s_i - \delta(s_i), s_i + \delta(s_i)] \subset G_\gamma \tag{10.15}$$

y, así, para cualquier $\gamma \in K$

$$\begin{aligned} \sum_{i\in I_\gamma} m([a_i,b_i] \setminus E_{i,\gamma}) &= \sum_{i\in I_\gamma} m([a_i,b_i] \setminus V_\gamma) \\ &= m\left(\cup_{i\in I_\gamma} [a_i,b_i] \setminus V_\gamma\right) \\ &\leq m(G_\gamma \setminus V_\gamma) < d_\gamma \end{aligned}$$

por la elección de G_γ. Además, $\|f(t)\| \leq r_\gamma$ para $t \in A_\gamma$ (porque $f(t) = \omega - \lim_n f_n(t)$ y $\|f_n(t)\| \leq r_\gamma$ para cada $n \in \mathbb{N}$ –véase A.7.3–). Por tanto $\|f(s_i)\| \leq r_\gamma$ para todo $i \in I_\gamma$ y, así,

$$\sum_{i\in I_\gamma} m([a_i,b_i] \setminus E_{i,\gamma}) \|f(s_i)\| < r_\gamma d_\gamma \tag{10.16}$$

para cualquier $\gamma \in K$. Por tanto, *d)* nos da la estimación

$$\begin{aligned} \left\| f(\mathcal{P}) - \sum_{\gamma\in K} \sum_{i\in I_\gamma} m(E_{i,\gamma}) f(s_i) \right\| &= \left\| \sum_{\gamma\in K} \sum_{i\in I_\gamma} m([a_i,b_i] \setminus E_{i,\gamma}) f(s_i) \right\| \\ &\leq \sum_{\gamma\in K} \sum_{i\in I_\gamma} m([a_i,b_i] \setminus E_{i,\gamma}) \|f(s_i)\| \\ &< \sum_{\gamma\in K} r_\gamma d_\gamma \quad \leq \quad \epsilon. \end{aligned}$$

Esto demuestra (10.14).

Por otra parte, para cada $1 \leq i \leq n$ existe un único $\gamma(i) \in \Gamma$ tal que $s_i \in A'_{\gamma(i)} \subset A_{\gamma(i)}$. Por definición –véase *a")*–

$$\|f(s_i) - f_{\gamma(i)}(s_i)\| \leq \epsilon.$$

Así pues, podemos utilizar (10.14) para deducir

$$\begin{aligned}\left\|f(\mathcal{P}) - \sum_{\gamma\in K}\sum_{i\in I_\gamma} m(E_{i,\gamma})f_{\gamma(i)}(s_i)\right\| &\leq \epsilon + \left\|\sum_{\substack{\gamma\in K\\ i\in I_\gamma}} m(E_{i,\gamma})(f(s_i) - f_{\gamma(i)}(s_i))\right\| \\ &\leq \epsilon + \sum_{\substack{\gamma\in K\\ i\in I_\gamma}} m(E_{i,\gamma})\|f(s_i) - f_{\gamma(i)}(s_i)\| \\ &\leq \epsilon + \sum_{i=1}^{n}(b_i - a_i)\epsilon \\ &= (1 + b - a)\epsilon. \qquad (10.17)\end{aligned}$$

Fijamos ahora $\gamma \in K$. Por definición $s_i \in A'_\gamma$ para $i \in I_\gamma$, luego

$$E_{i,\gamma} \subset [a_i, b_i] \subset [s_i - \delta(s_i), s_i + \delta(s_i)] \subset [s_i - \delta_\gamma(s_i), s_i + \delta_\gamma(s_i)]$$

por la definición del calibre δ. Por tanto, la partición parcial generalizada de McShane

$$\mathcal{P}_\gamma = \{(E_{i,\gamma}, s_i) : \ i \in I_\gamma\}$$

está subordinada a δ_γ y (10.13) implica

$$\|\nu_\gamma(H_\gamma) - f_\gamma(\mathcal{P}_\gamma)\| \leq d_\gamma,$$

siendo $H_\gamma = \cup_{i\in I_\gamma} E_{i,\gamma}$ y ν_γ la integral indefinida de Pettis de f_γ. Esta desigualdad y (10.17) permiten deducir ($\gamma(i) = \gamma$ para cada $i \in I_\gamma$)

$$\begin{aligned}\left\|f(\mathcal{P}) - \sum_{\gamma\in K}\int_{H_\gamma} f_\gamma\right\| &\leq (1 + b - a)\epsilon + \sum_{\gamma\in K}\left\|\sum_{i\in I_\gamma} m(E_{i,\gamma})f_{\gamma(i)}(s_i) - \int_{H_\gamma} f_\gamma\right\| \\ &\leq (1 + b - a)\epsilon + \sum_{\gamma\in K} d_\gamma \\ &< (2 + b - a)\epsilon. \qquad (10.18)\end{aligned}$$

Por otro lado, afirmamos que

$$\left\|f(\mathcal{P}) - \sum_{\gamma\in K}\nu(H_\gamma)\right\| \leq (2(b - a) + 2)\epsilon. \qquad (10.19)$$

En efecto: para cada $\gamma \in K$ tenemos que $H_\gamma = \cup_{i\in I_\gamma} E_{i,\gamma}$ es un subconjunto medible de V_γ y, por (10.11),

$$\left\| \nu(H_\gamma) - \int_{H_\gamma} f_\gamma \right\| \leq m(H_\gamma)\epsilon.$$

Así,

$$\left\| \sum_{\gamma\in K} \left(\nu(H_\gamma) - \int_{H_\gamma} f_\gamma \right) \right\| \leq \left(\sum_{\gamma\in K} m(H_\gamma) \right) \epsilon \leq (b-a)\epsilon,$$

porque cada $H_\gamma = \cup_{i\in I_\gamma} E_{i,\gamma} \subset \cup_{i\in I_\gamma}[a_i, b_i]$ y, por tanto, $m(H_\gamma \cap H_{\gamma'}) = 0$ para $\gamma \neq \gamma'$. La desigualdad (10.19) se deduce ahora de (10.18).

Para finalizar definimos $H'_\gamma = \cup_{i\in I_\gamma}[a_i, b_i]$ para $\gamma \in K$ y observamos que

$$m(H'_\gamma \setminus H_\gamma) = m(H'_\gamma \setminus V_\gamma) \leq m(G_\gamma \setminus V_\gamma) \leq \eta_\gamma,$$

por ser H'_γ subconjunto de G_γ (10.15) y la elección del abierto relativo G_γ. Entonces $\|\nu(H'_\gamma \setminus H_\gamma)\| = \|\nu(H'_\gamma) - \nu(H_\gamma)\| \leq d_\gamma$ por cómo hemos tomado η_γ en e) al comienzo de la prueba. En definitiva,

$$\begin{aligned} \left\| \nu([a,b]) - \sum_{\gamma\in K} \nu(H_\gamma) \right\| &= \left\| \sum_{\gamma\in K} (\nu(H'_\gamma) - \nu(H_\gamma)) \right\| \\ &\leq \sum_{\gamma\in K} d_\gamma \quad < \quad \epsilon. \end{aligned}$$

De (10.19) deducimos

$$\|f(\mathcal{P}) - \nu([a,b])\| < (3 + 2(b-a))\epsilon$$

como se quería demostrar. Como X es cerrado en X^{**}, hemos probado que $f : [a,b] \longrightarrow X$ es integrable McShane en $[a,b]$ con integral $\int_a^b f = \nu([a,b]) \in X$.

El teorema 10.1.2 asegura que f es integrable Pettis. De *b)* y *c)* se sigue que $\{V_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ es un cubrimiento numerable de $[a,b]$ formado por conjuntos medibles. Así, para cada $\gamma \in \Gamma$ podemos encontrar un conjunto medible $V'_\gamma \subset V_\gamma$ de manera que $\{V'_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ sea un cubrimiento de $[a,b]$ formado por conjuntos disjuntos dos a dos. Si $E \subset [a,b]$ es medible, cada $E \cap V'_\gamma$ es un subconjunto medible de V_γ y tenemos

$$\nu(E \cap V'_\gamma)(x^*) = \int_{E\cap V'_\gamma} x^* f$$

para cada $x^* \in X^*$, por (10.12). Además, ν es contablemente aditiva y, por tanto, $\nu(E) = \sum_{\gamma\in\Gamma} \nu(E \cap V'_\gamma)$ en la norma de X^{**}. En particular, si $x^* \in X^*$

$$\nu(E)(x^*) = \sum_{\gamma\in\Gamma} \nu(E \cap V'_\gamma)(x^*) = \sum_{\gamma\in\Gamma} \int_{E\cap V'_\gamma} x^* f = \int_E x^* f.$$

Esto prueba que ν es la integral indefinida de Pettis de f y completa la demostración. $\square$

Corolario 10.2.3. *Sea $f_n : [a,b] \longrightarrow X$, $n = 1, 2, \ldots$, una sucesión de funciones integrables McShane tal que*

- *converge débilmente hacia $f : [a,b] \longrightarrow X$ en casi todo punto y*
- *para cada $E \subset [a,b]$ medible existe el límite*

$$\nu(E) = \omega - \lim_n \int_E f_n \in X.$$

Entonces f es integrable McShane en $[a,b]$ con integral $\int_a^b f = \nu([a,b])$.

Demostración. Cada f_n es integrable Pettis (teorema 10.1.2) con integral indefinida ν_n verificando

$$\nu_n(E) = \int_E f_n = \int_a^b \chi_E f_n$$

para cada $E \subset [a,b]$ medible (proposición 10.1.3).

La sucesión de medidas contablemente aditivas (A.4.11) $\nu_n : \Sigma \longrightarrow X$ converge *puntualmente* en la topología débil hacia ν, que, por tanto, es también contablemente aditiva (proposición A.2.7). El resultado se sigue del teorema precedente. □

Establecemos a continuación un par de *teoremas de tipo Vitali* para la integral de McShane y, como consecuencia, el *teorema de la convergencia dominada.* Las versiones para la topología de la norma fueron probadas por primera vez en [20, Corolario 2Ja]. El problema para la topología débil fue resuelto posteriormente por el propio Fremlin en [19, Teorema 4E].

Lema 10.2.4. *Sea $f : [a,b] \longrightarrow X$ una función integrable McShane. Entonces*

$$\left\| \int_a^b f \right\| \leq \sup \left\{ \int_a^b |x^* f| : \ x^* \in B_{X^*} \right\}.$$

Demostración. Es consecuencia del teorema de Hahn-Banach, teniendo en cuenta que para cada $x^* \in X^*$

$$\left| x^* \left(\int_a^b f \right) \right| = \left| \int_a^b x^* f \right| \leq \int_a^b |x^* f|$$

por 10.1.1 y la desigualdad triangular para la integral de Lebesgue. □

Teorema 10.2.5. *Sea $f_n : [a,b] \longrightarrow X$, $n = 1, 2, \ldots$, una sucesión de funciones integrables McShane que converge débilmente en casi todo punto hacia $f : [a,b] \longrightarrow X$. Si la familia*

$$\mathcal{F} = \{x^* f_n : \ n \in \mathbb{N}, \ x^* \in B_{X^*}\}$$

es un subconjunto uniformemente absolutamente continuo de $\mathcal{L}^1[a,b]$*, entonces* f *es integrable McShane en* $[a,b]$ *con integral*

$$\int_a^b f = \omega - \lim_n \int_a^b f_n.$$

Demostración. Para aplicar el teorema 10.2.2 sólo hay que verificar que para cada $E \subset [a,b]$ medible existe el límite

$$\lim_n \int_E f_n = \nu(E) \in X^{**}$$

en la topología $\sigma(X^{**}, X^*)$ y que la medida vectorial así definida $\nu : \Sigma \longrightarrow X^{**}$ es contablemente aditiva.

En primer lugar probamos que f *es integrable Dunford.* Dado $x^* \in X^*$, la sucesión $\{x^* f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge en casi todo punto hacia $x^* f$ y el conjunto de sus elementos es un subconjunto uniformemente absolutamente continuo de $\mathcal{L}^1[a,b]$. El clásico teorema de Vitali A.1.8 nos dice que $x^* f \in \mathcal{L}^1[a,b]$ y

$$\lim_n \int_a^b |x^* f_n - x^* f| = 0. \tag{10.20}$$

En particular, f es integrable Dunford.

Sea $\nu : \Sigma \longrightarrow X^{**}$ su integral indefinida. Si $E \in \Sigma$, entonces para cada $x^* \in X^*$

$$\lim_n x^* \left(\int_E f_n \right) = \lim_n \int_E x^* f_n = \int_E x^* f = \nu(E)(x^*)$$

por (10.20). Es decir,

$$\sigma(X^{**}, X^*) - \lim_n \int_E f_n = \nu(E)$$

para cada $E \subset [a,b]$ medible.

Falta ver que ν es contablemente aditiva. Para ello tomamos una sucesión $E_1 \subset E_2 \subset \dots$ en Σ y $E = \cup_{i\in\mathbb{N}} E_i$. Observamos que, para cada $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} \|\nu(E) - \nu(E_n)\| &= \|\nu(E \setminus E_n)\| \\ &= \sup_{x^* \in B_{X^*}} |\nu(E \setminus E_n)(x^*)| \\ &\leq \sup_{x^* \in B_{X^*}} \int_{E\setminus E_n} |x^* f| \\ &\leq \sup_{h \in \mathcal{F}} \int_{E\setminus E_n} |h| \end{aligned}$$

porque (10.20) asegura $\lim_m \int_{E\setminus E_n} |x^* f_m| = \int_{E\setminus E_n} |x^* f|$ para cada $x^* \in B_{X^*}$. Como $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión creciente con unión E,

$$\lim_n m(E \setminus E_n) = \lim_n (m(E) - m(E_n)) = 0$$

y la continuidad absoluta uniforme de la familia $\mathcal{F}$ finaliza la prueba. □

Teorema 10.2.6. *Sea* $f_n : [a,b] \longrightarrow X$*,* $n = 1, 2, \ldots$*, una sucesión de funciones integrables McShane que converge en casi todo punto hacia* $f : [a,b] \longrightarrow X$*. Si la familia*

$$\mathcal{F} = \{x^* f_n : \ n \in \mathbb{N}, \ x^* \in B_{X^*}\}$$

es un subconjunto uniformemente absolutamente continuo de $\mathcal{L}^1[a,b]$*, entonces* f *es integrable McShane en* $[a,b]$ *con integral*

$$\int_a^b f = \lim_n \int_a^b f_n.$$

Demostración. La integrabilidad McShane de f está garantizada por el teorema precedente. Vamos a demostrar la segunda afirmación a través del corolario 10.2.3, que reduce todo a verificar que para cada $E \subset [a,b]$ medible Lebesgue existe el límite (en norma)

$$\lim_n \int_E f_n.$$

Fijado $E \subset [a,b]$ medible, veamos que la sucesión $\left\{\int_E f_n\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy. Sea $\epsilon > 0$ fijo.

Por hipótesis $\mathcal{F}$ es uniformemente absolutamente continuo y, así, existe $\eta > 0$ de manera que

$$m(H) \leq \eta \Rightarrow \left\| \int_H f_n \right\| \leq \epsilon \tag{10.21}$$

para cada $n \in \mathbb{N}$. Para comprobarlo fijamos $\eta > 0$ tal que $\int_H |x^* f_n| \leq \epsilon$ para cada H medible de medida menor o igual que η, cada $x^* \in B_{X^*}$ y $n \in \mathbb{N}$. Podemos aplicar el lema 10.2.4 a cualquier $\chi_H f_n$ y obtener

$$\left\| \int_a^b \chi_H f_n \right\| \leq \sup_{x^* \in B_{X^*}} \int_a^b \chi_H |x^* f_n| \leq \epsilon$$

para cada $H \subset [a,b]$ medible con $m(H) < \eta$ y $n \in \mathbb{N}$. Esto prueba (10.21).

Definimos para cada $n \in \mathbb{N}$

$$A_n = \{t \in [a,b] : \ \|f_i(t) - f_j(t)\| \leq \epsilon \quad \text{para todo } i, j \geq n\}. \tag{10.22}$$

Como $\lim_n f_n = f$ en casi todo punto, resulta que $A = \cup_{n=1}^{\infty} A_n$ contiene un conjunto medible conulo y entonces $m^*(A) = b - a$. Los A_n forman una sucesión creciente y el lema A.1.2 nos dice que $\lim_n m^*(A_n) = b - a$. Sea $N \in \mathbb{N}$ tal que $m^*(A_N) > (b-a) - \eta$. Fijamos $G \supset A_N$ medible tal que $m^*(A_N) = m(G)$.

Es claro que, para $i, j \geq N$,

$$\begin{aligned}
\left\| \int_{E\cap G} f_i - \int_{E\cap G} f_j \right\| &\leq \sup_{x^* \in B_{X^*}} \int_{E\cap G} |x^*(f_i - f_j)| \\
&\leq \sup_{x^* \in B_{X^*}} \int_G |x^*(f_i - f_j)| \\
&\leq m(G)\epsilon \\
&\leq (b-a)\epsilon
\end{aligned} \tag{10.23}$$

por el lema 10.2.4, la definición de A_N y G, y el lema A.1.4.

Por otro lado,

$$m(E \setminus G) \leq m([a,b] \setminus G) = (b-a) - m(G) = (b-a) - m^*(A_N) < \eta$$

y (10.21) implica

$$\left\| \int_{E\setminus G} f_i \right\| \leq \epsilon$$

para cada $i \in \mathbb{N}$. Combinando esta desigualdad con (10.23) resulta

$$\begin{aligned} \left\| \int_E f_i - \int_E f_j \right\| &= \left\| \int_{E\cap G} (f_i - f_j) + \int_{E\setminus G} (f_i - f_j) \right\| \\ &\leq ((b-a)+2)\epsilon \end{aligned}$$

para $i, j \geq N$. Esto prueba que la sucesión $\left\{\int_E f_n\right\}_n$ es de Cauchy en norma y completa la demostración. □

Corolario 10.2.7 (Teorema de la convergencia dominada).

Sea $f_n : [a,b] \longrightarrow X$, $n \in \mathbb{N}$, una sucesión de funciones integrables McShane que converge (resp. converge débilmente) en casi todo punto hacia una función $f : [a,b] \longrightarrow X$. Si existe $g \in \mathcal{L}^1[a,b]$ tal que $\|f_n\| \leq g$ para cada $n \in \mathbb{N}$ en casi todo punto, entonces f es integrable McShane en $[a,b]$ con integral

$$\int_a^b f = \lim_n \int_a^b f_n \quad \big(\textit{resp.} \quad \omega - \lim_n \int_a^b f_n\big).$$

Demostración. La familia

$$\mathcal{F} = \{x^* f_n : \ n \in \mathbb{N}, \ x^* \in B_{X^*}\}$$

es claramente un subconjunto uniformemente absolutamente continuo de $\mathcal{L}^1[a,b]$ (aplíquese por ejemplo el teorema A.2.4, en su versión escalar [53, Capítulo 6], a la medida $\int_{\_} g : \Sigma \longrightarrow \mathbb{R}$). □

10.3 Relación con la integral de Bochner

Esta sección está dedicada a completar la serie de relaciones anunciadas al comienzo del capítulo.

En primer lugar vamos a ver que *la integral de McShane extiende a la de Bochner*. Esto fue comentado por primera vez en [43, Sección 14], dentro de un marco mucho más general que el que nos ocupa. En [22, Teorema 16] aparece la primera prueba de este hecho en nuestro contexto, a partir del corolario 10.3.4 (que R.A. Gordon demuestra de una manera más elemental que nosotros). Sin embargo, la siguiente demostración es más sencilla y permite obtener una conclusión adicional. Sugerida por Di Piazza y Musial en [10], se basa en las ideas de [19, Teorema 1K].

Teorema 10.3.1. *Sea $f : [a,b] \longrightarrow X$ una función integrable Bochner. Entonces:*

i) f es integrable McShane y $(MS)\int_a^b f = (B)\int_a^b f$.

ii) Para cada $\epsilon > 0$ existe un calibre $\delta : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^+$ tal que

$$\sum_{i=1}^{n} \left\| \int_{a_i}^{b_i} f - (b_i - a_i) f(s_i) \right\| \leq \epsilon$$

para cualquier partición parcial de McShane $\{([a_i, b_i], s_i) : \ i = 1, \ldots, n\}$ subordinada a δ.

Demostración. Dado $\epsilon > 0$, existe una función medible simple $g : [a,b] \longrightarrow X$ tal que

$$(L)\int_a^b \|f - g\| < \epsilon. \tag{10.24}$$

La proposición 8.3.1 y el corolario 9.4.2 garantizan la existencia de un calibre $\delta : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^+$ tal que para cualquier partición de McShane

$$\mathcal{P} = \{([a_i, b_i], s_i) : \ i = 1, \ldots, n\}$$

subordinada a δ:

$$\sum_{i=1}^{n} \left\| \int_{a_i}^{b_i} g - (b_i - a_i) g(s_i) \right\| < \epsilon \quad \text{y}$$
$$\sum_{i=1}^{n} (b_i - a_i) \|f(s_i) - g(s_i)\| < \epsilon.$$

Así, para cualquier $\mathcal{P} = \{([a_i, b_i], s_i) : \ i = 1, \ldots, n\} \in m\Pi_\delta[a,b]$ tenemos

$$\begin{aligned}
\left\| f(\mathcal{P}) - (B)\int_a^b f \right\| &\leq \sum_{i=1}^{n} \left\| (b_i - a_i) f(s_i) - (B)\int_{a_i}^{b_i} f \right\| \\
\leq \sum_{i=1}^{n} (b_i - a_i) \|f(s_i) - g(s_i)\| &+ \sum_{i=1}^{n} \left\| (b_i - a_i) g(s_i) - \int_{a_i}^{b_i} g \right\| \\
&+ \sum_{i=1}^{n} \left\| (B)\int_{a_i}^{b_i} (g - f) \right\| \\
&< 2\epsilon + \sum_{i=1}^{n} \int_{a_i}^{b_i} \|f - g\| \\
&= 2\epsilon + \int_a^b \|f - g\| \quad < \quad 3\epsilon,
\end{aligned}$$

por (10.24). Esta cadena de desigualdades demuestra simultáneamente *i)* y *ii)* (como en la prueba de 8.3.1, basta comprobar *ii)* para particiones de todo el intervalo $[a,b]$). $\square$

Nota 10.3.2. *El recíproco de 10.3.1 es cierto, como mostramos más adelante (proposición 10.3.9). Aparentemente, el apartado* ii) *fue probado por primera vez en [8].*

Nuestro próximo objetivo es ver que *toda función* $f : [a, b] \longrightarrow X$ *medible e integrable Pettis es integrable McShane.* El primero en observar este hecho fue R.A. Gordon en [22, Teorema 17]. Nosotros seguiremos la prueba de dicho artículo, obteniendo el caso particular del corolario 10.3.4 [22, Teorema 15] como simple consecuencia de 10.2.3, que permite probar el siguiente resultado ([20, Corolario 2Jb]).

Proposición 10.3.3. *Sea* $f : [a, b] \longrightarrow X$ *una función integrable Pettis de manera que existe un cubrimiento numerable* $\{E_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *de* $[a, b]$ *formado por subconjuntos medibles tales que* $f_n = \chi_{E_n} f$ *es integrable McShane para cada* $n \in \mathbb{N}$*. Entonces* f *es integrable McShane.*

Demostración. Definimos $V_1 = E_1$ y $V_{n+1} = E_{n+1} \setminus (\cup_{i=1}^n V_i)$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Es claro que $\{V_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es un cubrimiento de $[a, b]$ formado por conjuntos medibles disjuntos dos a dos. Como $V_n \subset E_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$, podemos aplicar la proposición 10.1.3 y concluir que

$$\chi_{V_n} f_n = \chi_{V_n} f$$

es integrable McShane.

Definimos para todo $n = 1, 2, \ldots$

$$g_n = \chi_{\cup_{i=1}^n V_i} f = \sum_{i=1}^n \chi_{V_i} f.$$

Cada g_n es integrable McShane por 8.1.6. Es claro que $\lim g_n(t) = f(t)$ para cada $t \in [a, b]$. La proposición quedará probada (en virtud del corolario 10.2.3) si vemos que para cada $E \subset [a, b]$ medible existe, en la topología débil, el límite

$$\lim_n \int_E g_n.$$

Afirmamos que $\lim_n \int_E g_n = \nu(E)$, donde ν denota la integral indefinida de Pettis de la función f. En efecto: si $x^* \in X^*$ y $n \in \mathbb{N}$, aplicamos 10.1.1:

$$\begin{aligned}
x^*\left(\int_E g_n\right) &= x^*\left(\int_a^b \chi_{E\cap\left(\cup_{i=1}^n V_i\right)} f\right) \\
&= \int_a^b x^*\left(\chi_{E\cap\left(\cup_{i=1}^n V_i\right)} f\right) \\
&= \int_{E\cap\left(\cup_{i=1}^n V_i\right)} x^* f \\
&= x^*\left(\nu\left(E \cap \left(\cup_{i=1}^n V_i\right)\right)\right).
\end{aligned}$$

Por el teorema de Hahn-Banach

$$\int_E g_n = \nu\left(E \cap \left(\cup_{i=1}^n V_i\right)\right)$$

para cada $n \in \mathbb{N}$. Como f es integrable Pettis, su integral indefinida ν es contablemente aditiva (A.4.11) y, puesto que $\cup_{i=1}^\infty V_i = [a,b]$,

$$\lim_n \nu\left(E \cap \left(\cup_{i=1}^n V_i\right)\right) = \nu(E).$$

Por tanto

$$\lim_n \int_E g_n = \nu(E),$$

como se quería demostrar.
El corolario 10.2.3 garantiza además que $\int_a^b f = \lim_n \int_a^b g_n$. □

Corolario 10.3.4. *Sean $\{E_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de conjuntos medibles disjuntos de $[a,b]$ y $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en X tales que $f = \sum_{n=1}^\infty \chi_{E_n} x_n$ es integrable Pettis (equivalentemente, la serie $\sum_n m(E_n)x_n$ es incondicionalmente convergente, véase A.4.12). Entonces f es integrable McShane con integral*

$$\int_a^b f = \sum_{n=1}^\infty m(E_n)x_n.$$

Demostración. Para la integrabilidad basta utilizar la proposición anterior, teniendo presente que $\chi_{E_n} f = \chi_{E_n} x_n$ es integrable McShane para cada $n \in \mathbb{N}$ (por 8.3.1) y $\chi_{[a,b]\setminus(\cup_i E_i)} f = 0$ también es integrable McShane.

El último comentario de la demostración de 10.3.3 asegura además que

$$\int_a^b f = \lim_n \int_a^b \left(\sum_{i=1}^n \chi_{E_i} x_i\right) = \lim_n \sum_{i=1}^n m(E_i)x_i.$$

□

Con todos estos preliminares podemos demostrar el siguiente

Teorema 10.3.5. *Toda función $f : [a,b] \longrightarrow X$ medible e integrable Pettis es integrable McShane.*

Demostración. El teorema de medibilidad de Pettis A.4.2 implica que existen $E \subset [a,b]$ medible conulo y $g : [a,b] \longrightarrow X$ σ-simple tales que $\|f(t) - g(t)\| \leq 1$ para todo $t \in E$. La función $f - g$ es entonces medible y esencialmente acotada, luego integrable Bochner (por A.4.5). Pero entonces $f-g$ es integrable McShane (véase 10.3.1) y Pettis (se puede deducir de A.4.10 ó 10.1.2). Esto último implica (por hipótesis f es integrable Pettis) que g es integrable Pettis. Por el corolario 10.3.4, g es integrable McShane. La proposición 8.1.6 (aplicada a g y $f - g$) finaliza la prueba. □

Nota 10.3.6. *La medibilidad de f es esencial en el resultado precedente, como se pone de manifiesto en [20, Ejemplo 3C]. El ejemplo (con $X = l^\infty$) hace uso de la llamada* integral de Talagrand*, de dificultades técnicas que exceden las pretensiones de esta memoria, y no se incluye aquí.*

Corolario 10.3.7. *Si X es separable, una función $f : [a, b] \longrightarrow X$ es integrable Pettis si y sólo si es integrable McShane.*

Demostración. Si f es integrable Pettis cada $x^* f$ es integrable Lebesgue y, en particular, medible. El teorema de Pettis A.4.2 garantiza la medibilidad de f. El resultado se sigue entonces de 10.3.5 y 10.1.2. □

Para finalizar el capítulo demostramos la caracterización de los espacios de Banach de dimensión finita que anunciábamos al hablar del *lema de Henstock*. El teorema 10.3.1 y los siguientes resultados engloban [54, Teoremas 2 y 3], aunque damos una demostración distinta que evita la construcción que aparece en la prueba del segundo teorema citado previamente, ciertamente técnica. Nosotros logramos el objetivo gracias al *teorema de Dvoretzki-Rogers* y las ideas de [10, Lema 3]. Para ello necesitamos el siguiente lema [18, 1.5], que mejora 8.1.1.

Lema 10.3.8. *Sean $\delta : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^+$ un calibre, $A \subset [a, b]$ y K un compacto contenido en $[a, b] \cap (\cup_{t\in A}(t - \delta(t), t + \delta(t)))$. Existe una partición parcial de McShane $\{([a_i, b_i], s_i) : 1 \le i \le n\}$ subordinada a δ tal que $K \subset \cup_{i=1}^n [a_i, b_i]$ y $s_i \in A$ para cada $1 \le i \le n$.*

Demostración. La compacidad de K reduce la prueba al caso A *finito*, que demostramos por inducción en $|A|$. Si $|A| = 0$, no hay nada que demostrar ($K = \emptyset$ y basta tomar cualquier partición subordinada a δ, véase 8.1.1). Supongamos que $|A| > 0$ y la hipótesis de inducción. Sea $T \in A$ tal que

$$T - \delta(T) \le t - \delta(t)$$

para cada $t \in A$. Si $t \in A$ y $t \le T$, tenemos $T - \delta(T) \le t - \delta(t) < t \le T$ y entonces $(t - \delta(t), t + \delta(t)) \subset (T - \delta(T), T + \delta(T))$. Si definimos

$$A_0 = \{t \in A : \ t > T\} \quad \text{y} \quad K_0 = K \cap [T + \delta(T), \infty),$$

resulta que K_0 es un compacto contenido en $[a, b] \cap (\cup_{t\in A_0}(t - \delta(t), t + \delta(t)))$ y podemos encontrar una partición parcial de McShane subordinada a δ

$$\mathcal{P}_0 = \{([a'_i, b_i], s_i) : \ i = 1, \dots, n\}$$

tal que $s_i \in A_0$ para cada $1 \le i \le n$ y $K_0 \subset \cup_{i=1}^n [a'_i, b_i]$. Definimos $a_i = \max\{a'_i, T\}$ para cada $i = 1, \dots, n$ y

$$a_{n+1} = \max\{a, T - \delta(T)\}, \ b_{n+1} = \min\{T + \delta(T), b, a_1, \dots, a_n\} \text{ y } s_{n+1} = T.$$

Es fácil ver que $\mathcal{P} = \{([a_i, b_i], s_i) : \ i = 1, \dots, n + 1\}$ es la partición buscada:

- $a_i < b_i$ para $i = 1, \dots, n$. Para verlo suponemos sin pérdida de generalidad que $[a'_i, b_i] \cap K_0 \neq \emptyset$ para cada i. Fijado $1 \leq i \leq n$, tomamos $a'_i \leq t \leq b_i$ tal que $t \in K_0$. Por tanto $t \geq T + \delta(T)$ y, así, $b_i > T$, luego $b_i > a_i$.
- Como $a_i \geq T$ para cada $i = 1, \dots, n$, resulta que $b_{n+1} \geq T$ y así $b_{n+1} > a_{n+1} = \max\{a, T - \delta(T)\}$.
- Observamos que $[a_i, b_i] \subset [a'_i, b_i]$ para $1 \leq i \leq n$. Además, $b_{n+1} \leq a_i$ para todo $i = 1, \dots, n$. Por tanto, los subintervalos $\{[a_j, b_j]\}_{1 \leq j \leq n+1}$ no se solapan. Es claro también que $[a_i, b_i] \subset [s_i - \delta(s_i), s_i + \delta(s_i)]$ para $i = 1, \dots, n+1$ porque $\mathcal{P}_0$ está subordinada a δ.
- $K \subset \cup_{i=1}^{n+1}[a_i, b_i]$. En efecto: si $w \in K$, por hipótesis existe $t \in A$ tal que $w \in (t - \delta(t), t + \delta(t))$. En particular, $T - \delta(T) \leq t - \delta(t) < w$.
  1. Si $w \in K_0$, entonces existe $1 \leq i \leq n$ tal que $w \in [a'_i, b_i]$. Pero $w \geq T + \delta(T) > T$ y así $w \geq a_i$. Es decir, $w \in [a_i, b_i]$.
  2. Si $w \notin K_0$, entonces $T - \delta(T) < w < T + \delta(T)$ y $a_{n+1} < w$. Si $w \leq b_{n+1}$ ya hemos terminado. En caso contrario, $b_{n+1} < w < \min\{b, T + \delta(T)\}$ y $b_{n+1} = a_i$ para cierto $1 \leq i \leq n$. Entonces $w \leq b_i$ (si no, $b_i < w < T + \delta(T)$ contradiciendo que $K_0 \cap [a'_i, b_i] \neq \emptyset$). Por tanto $w \in [a_i, b_i]$.

Esto completa la prueba. □

Proposición 10.3.9. *Sea $f : [a, b] \longrightarrow X$ una función integrable McShane tal que para cada $\epsilon > 0$ existe un calibre δ de manera que*

$$\sum_{i=1}^{n} \left\| \int_{a_i}^{b_i} f - (b_i - a_i) f(s_i) \right\| \leq \epsilon \tag{10.25}$$

para cada partición parcial de McShane $\{([a_i, b_i], s_i) : i = 1, \dots, n\}$ subordinada a δ. Entonces f es integrable Bochner (y las respectivas integrales coinciden).

Demostración. Comenzamos observando que *si $g : [a, b] \longrightarrow X$ es integrable McShane y verifica* (10.25)*, entonces $\|g\|$ también es integrable McShane.* En efecto, basta cambiar los valores absolutos por la norma en la prueba de 9.1.1 y aplicar (10.25) en lugar de la forma *fuerte* del lema de Henstock escalar (proposición 8.2.2).

Para ver que f es integrable Bochner sólo tenemos que comprobar (por A.4.5) que f es medible Bochner y $(L) \int_a^b \|f\| < \infty$.

Medibilidad Bochner de f. Por el teorema A.4.2 la prueba se reduce a comprobar que $x^* f$ es medible para cada $x^* \in X^*$ (ya lo vimos en 10.1.2) y que f tiene rango esencialmente separable, es decir, existe $E \subset [a, b]$ medible conulo tal que $f(E)$ es separable.

Sea $\nu : \Sigma \longrightarrow X$ la integral indefinida de Pettis de f (toda función integrable McShane lo es también en el sentido de Pettis, véase 10.1.2). Podemos aplicar A.4.16 y deducir que

$$H = \overline{span\{\nu(\Sigma)\}}$$

es un subespacio cerrado separable de X. Vamos a demostrar que $f(t) \in H$ *para casi todo* $t \in [a,b]$. Para ello fijamos $D \subset H$ denso numerable y definimos

$$F_r = \{t \in [a,b] : \ \|f(t) - x\| \geq r \quad \text{para cada } x \in D\}$$

para todo $r > 0$.

Observamos en primer lugar que cada F_r es medible Lebesgue. En efecto: para cada $x \in D$ la función $t \mapsto f(t) - x$ es integrable McShane y satisface la propiedad (10.25) (por 8.1.6 y 8.3.1). Según comentamos al principio de la prueba, $t \mapsto \|f(t) - x\|$ es también integrable McShane, luego medible Lebesgue (véase 9.3.1). Por tanto, F_r es medible (D es numerable).

Se afirma que $m(F_r) = 0$ *para cada* $r > 0$. La regularidad de la medida de Lebesgue reduce la prueba a comprobar que $m(K) = 0$ para cualquier compacto $K \subset F_r$. Sea K un tal compacto y fijemos $\epsilon > 0$ arbitrario. Por hipótesis existe un calibre $\delta : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^+$ tal que

$$\sum_{i=1}^{n} \left\| \int_{a_i}^{b_i} f - (b_i - a_i) f(s_i) \right\| \leq \epsilon$$

para cada partición parcial de McShane $\{([a_i, b_i], s_i) : \ i = 1, \ldots, n\}$ subordinada a δ. Como $K \subset F_r$, tenemos que

$$K \subset [a,b] \cap (\cup_{t \in F_r} (t - \delta(t), t + \delta(t)))$$

y el lema 10.3.8 garantiza la existencia de una partición parcial $\{([a_i, b_i], s_i) : i = 1, \ldots, n\}$ subordinada a δ tal que $s_i \in F_r$ para cada $i = 1, \ldots, n$ y $K \subset \cup_{i=1}^{n} [a_i, b_i]$. Como D es denso en H y $s_i \in F_r$, es claro que $\|f(s_i) - x\| \geq r$ para cada $1 \leq i \leq n$ y $x \in H$. Por tanto,

$$\begin{aligned} rm(K) &\leq r \left(\sum_{i=1}^{n} (b_i - a_i) \right) \\ &\leq \sum_{i=1}^{n} (b_i - a_i) \left\| \frac{1}{b_i - a_i} \int_{a_i}^{b_i} f - f(s_i) \right\| \\ &= \sum_{i=1}^{n} \left\| \int_{a_i}^{b_i} f - (b_i - a_i) f(s_i) \right\| \quad \leq \quad \epsilon \end{aligned}$$

(hemos usado que $\frac{1}{b_i - a_i} \int_{a_i}^{b_i} f \in H = \overline{span\{\nu(\Sigma)\}}$). Es decir, $m(K) \leq \frac{\epsilon}{r}$ para cada $\epsilon > 0$, luego $m(K) = 0$ y la afirmación queda demostrada.

Sea

$$F = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_{\frac{1}{n}} \in \Sigma.$$

Acabamos de ver que $m(F) = 0$. Si $t \in [a,b] \setminus F$, entonces $t \notin F_{\frac{1}{n}}$ para cada $n \in \mathbb{N}$ y existe $x_n \in D$ tal que $\|f(t) - x_n\| < \frac{1}{n}$. Por tanto $f(t) \in H$ (es cerrado).

Esto demuestra que $f([a,b]\setminus F)\subset H$ y finaliza la prueba de la medibilidad de f (H es separable).

Observamos además que $(L)\int_a^b \|f\| < \infty$. En efecto: $\|f\|$ es integrable McShane (como vimos al comienzo de la demostración) y, por tanto, integrable Lebesgue (corolario 9.4.2).

Esto demuestra que f es integrable Bochner. La coincidencia de las integrales es consecuencia del teorema de Hahn-Banach y la identidad

$$x^*\left((MS)\int_a^b f\right) = (MS)\int_a^b x^*f = (L)\int_a^b x^*f = x^*\left((B)\int_a^b f\right)$$

para cada $x^*\in X^*$ (aplicamos 10.1.1 y 9.4.2). □

Aquí está la prometida caracterización de los espacios de dimensión finita en términos de la forma *fuerte* del lema de Henstock.

Teorema 10.3.10. *Para un espacio de Banach X son equivalentes:*

i) X es de dimensión finita.

ii) Dada $f:[a,b]\longrightarrow X$ integrable McShane y fijado $\epsilon>0$, existe un calibre $\delta:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}^+$ de manera que para cada partición parcial de McShane $\{([c_i,d_i],s_i):\ i=1,\dots,n\}$ subordinada a δ

$$\sum_{i=1}^n\left\|\int_{c_i}^{d_i} f-(d_i-c_i)f(s_i)\right\|\le\epsilon.$$

iii) Una función $f:[a,b]\longrightarrow X$ es integrable McShane si y sólo si es integrable Bochner.

Demostración. *i)* $\Rightarrow$ *ii)* Sea $C>0$ la constante (que sólo depende del espacio X) proporcionada por la proposición A.7.2. Dado $\epsilon>0$, el lema de Henstock 8.2.2 garantiza la existencia de un calibre $\delta:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}^+$ tal que

$$\left\|\sum_{i=1}^n\int_{a_i}^{b_i} f-(b_i-a_i)f(s_i)\right\|\le C\epsilon$$

para cualquier partición parcial de McShane $\mathcal{P}=\{([a_i,b_i],s_i):\ i=1,\dots,n\}$ subordinada a δ. Dada una tal partición, podemos aplicar la proposición A.7.2 para obtener $S\subset\{1,\dots,n\}$ tal que

$$\sum_{i=1}^n\left\|\int_{a_i}^{b_i} f-(b_i-a_i)f(s_i)\right\|\le\frac{1}{C}\left\|\sum_{i\in S}\int_{a_i}^{b_i} f-(b_i-a_i)f(s_i)\right\|\le\epsilon$$

porque $\{([a_i,b_i],s_i):\ i\in S\}$ es una partición parcial subordinada a δ.

ii) $\Rightarrow$ *iii)* Es consecuencia de 10.3.1 y 10.3.9.

iii) $\Rightarrow$ *i)* Sea X un espacio de Banach de dimensión infinita. El *teorema de Dvoretzki-Rogers* A.3.3 asegura la existencia de una serie $\sum_n x_n$ en X incondicionalmente convergente pero no absolutamente convergente. Fijamos $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de subconjuntos medibles disjuntos de $[a,b]$ con medida positiva, por ejemplo,

$$E_n = \Big(a + \Big(1 - \frac{1}{2^{n-1}}\Big)(b-a), a + \Big(1 - \frac{1}{2^n}\Big)(b-a)\Big).$$

Definimos $y_n = \frac{1}{m(E_n)} x_n \in X$ para cada $n \in \mathbb{N}$ y consideramos $f : [a,b] \longrightarrow X$ la siguiente función σ-simple:

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \chi_{E_n}(t) y_n.$$

La serie $\sum_n m(E_n) y_n = \sum_n x_n$ es incondicionalmente convergente y, por el corolario 10.3.4, f es integrable McShane. Sin embargo, f no es integrable Bochner. Para verlo basta verificar (proposición A.4.5) que $\int_a^b \|f\| = \infty$. Esto se deduce inmediatamente del teorema de la convergencia monótona para la integral de Lebesgue:

$$\int_a^b \|f\| = \int_a^b \left(\sum_{n=1}^{\infty} \chi_{E_n} \|y_n\| \right) = \sum_{n=1}^{\infty} m(E_n) \|y_n\| = \infty,$$

dado que $\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\| = \infty$. Esto completa la demostración. $\square$

Parte III

Apéndices

Apéndice A

Complementos

A.1 Medida e integración Lebesgue

MEDIBILIDAD DE LA DERIVADA DE UNA FUNCIÓN

Lema A.1.1. *Sean $F : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ una función continua y $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ una función. Si existe $F'(t) = f(t)$ en casi todo punto $t \in [a,b]$, entonces f es medible Lebesgue.*

Demostración. Sea $N \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{N} < b - a$. Para cada $n \geq N$ definimos $f_n : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ la siguiente función medible (por hipótesis F es continua)

$$f_n(t) := n\left(F\left(t + \frac{1}{n}\right) - F(t)\right)\chi_{[a,b-\frac{1}{n}]}.$$

La hipótesis implica que existe $\lim_n f_n(t) = f(t)$ en casi todo $t \in [a,b]$. Es decir, f es límite en casi todo punto de una sucesión de funciones medibles y, por tanto, es medible Lebesgue. □

MEDIDA EXTERIOR DE LEBESGUE

Lema A.1.2. *Sea $A_1 \subset A_2 \subset \cdots \subset [a,b]$ una sucesión de conjuntos tal que $m^*\left(\cup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = b - a$. Entonces*

$$\lim_n m^*(A_n) = b - a.$$

Demostración. Tomamos para cada $n \in \mathbb{N}$ un conjunto medible $A_n \subset G_n \subset [a,b]$ tal que $m(G_n) = m^*(A_n)$.

En primer lugar observamos que $m(G_n \setminus G_m) = 0$ para todo $n \leq m$. En efecto: $A_n \subset A_m \subset G_m$, luego $A_n \subset G_n \cap G_m \subset G_n$ y tomando medidas exteriores $m^*(A_n) \leq m(G_n \cap G_m) \leq m(G_n)$. Entonces $m(G_n) = m(G_n \cap G_m)$ para todo $n \leq m$ y, así,

$$m(G_n \setminus G_m) = m(G_n \setminus G_m \cap G_n) = m(G_n) - m(G_m \cap G_n) = 0.$$

Definimos $H_n = \cup_{i=1}^n G_i \in \Sigma$ para $n = 1, 2, \ldots$. Es claro que $\cup_{n=1}^\infty H_n = \cup_{i=1}^\infty G_i \supset \cup_{i=1}^\infty A_i$. Por tanto, $b - a = m^*\left(\cup_{i=1}^\infty A_i\right) \le m\left(\cup_{n=1}^\infty H_n\right) \le b - a$ y así $m\left(\cup_{n=1}^\infty H_n\right) = b - a$, luego $\lim_n m(H_n) = b - a$.

Para acabar la prueba demostramos que

$$m^*(A_n) = m(G_n) = m(H_n)$$

para cada $n \in \mathbb{N}$. En efecto:

$$m(H_n) - m(G_n) = m(H_n \setminus G_n) = m\left(\cup_{i=1}^n (G_i \setminus G_n)\right) \le \sum_{i=1}^n m(G_i \setminus G_n) = 0$$

por la primera afirmación. □

Lema A.1.3. *Sean $A \subset G \subset \mathbb{R}$ con G medible tal que $m^*(A) = m(G)$. Si $B \subset G$ es medible, entonces*

$$m^*(A \cap B) = m(B).$$

Demostración. La medibilidad de B implica

$$m^*(A \cap B) + m^*(A \setminus B) = m^*(A) = m(G) = m(B) + m(G \setminus B).$$

Como $A \subset G$, $m(B) = m(B \cap G) \ge m^*(B \cap A)$ y $m(G \setminus B) \ge m^*(A \setminus B)$. Por tanto

$$m(B) = m^*(A \cap B) \quad \text{y} \quad m(G \setminus B) = m^*(A \setminus B).$$

□

Lema A.1.4. *Sean $A \subset G \subset \mathbb{R}$ y $f : G \longrightarrow [0, \infty)$ una función tales que*

- *G es medible y $m^*(A) = m(G)$;*
- *f es medible y $f(t) \le M$ para todo $t \in A$.*

Entonces $\int_G f \le m(G)M$.

Demostración. El teorema de la convergencia monótona y la posibilidad de aproximar la función medible f por una sucesión creciente de funciones medibles simples reduce la prueba al caso f *simple*. Si escribimos $f = \sum_i \chi_{B_i} b_i$, entonces $\int_G f = \sum_i b_i m(G \cap B_i)$. Si $m(G \cap B_i) > 0$, entonces $B_i \cap A \ne \emptyset$ (véase A.1.3) y $b_i \le M$. Esto completa la prueba. □

Lema A.1.5. *Sean $A \subset G \subset \mathbb{R}$, con G medible y $m^*(A) = m(G)$. Supongamos que $f_n : G \longrightarrow \mathbb{K}$, $n = 1, 2, \ldots$, es una sucesión de funciones medibles tal que*

i) converge hacia $f : G \longrightarrow \mathbb{K}$ en casi todo punto de G y

ii) existe $g \in L^1(G)$ tal que $|f_n| \le g$ en todo punto de A para cada $n \in \mathbb{N}$.

Entonces $f \in L^1(G)$ y $\lim_n \int_G |f_n - f| = 0$.

Demostración. Por el teorema de la convergencia dominada sólo hay que garantizar la existencia de un conjunto medible $E \subset G$ tal que $m(G \setminus E) = 0$ y $|f_n| \leq g$ en cada punto de E para cada $n \in \mathbb{N}$.

Definimos

$$B_{k,n} = \left\{ t \in G : \; |f_n(t)| - g(t) \geq \frac{1}{k} \right\},$$

que es medible Lebesgue para cada $k, n \in \mathbb{N}$. Aplicamos A.1.3:

$$m(B_{k,n}) = m^*(A \cap B_{k,n}) = m^*(\emptyset) = 0$$

por *ii)*, para cada $k, n \in \mathbb{N}$. Por tanto,

$$B = \bigcup_{k,n \in \mathbb{N}} B_{k,n}$$

es un conjunto medible de medida nula tal que $|f_n| \leq g(t)$ para cada $t \in G \setminus B$ y $n \in \mathbb{N}$. Esto completa la prueba. $\square$

Conjuntos Uniformemente Integrables

Definición A.1.6. *Sea (Ω, Σ, μ) un espacio de medida. Se dice que un subconjunto $F \subset \mathcal{L}^1(\mu)$ es* uniformemente absolutamente continuo *si para cada $\epsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que todo $E \in \Sigma$ de medida menor que δ satisface $\int_E |f| < \epsilon$ para cualquier $f \in F$. Si además F es $\|.\|_1$-acotado, lo llamaremos* uniformemente integrable.

Podemos adaptar [11, Teorema VII.14] al caso de la medida de Lebesgue en $[a, b]$ y obtener la siguiente versión del *criterio de Dieudonné-Grothendieck*.

Teorema A.1.7. *Un subconjunto $K \subset \mathcal{L}^1[a, b]$ es uniformemente absolutamente continuo si y sólo si para cada sucesión de abiertos disjuntos $(G_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de $[a, b]$*

$$\lim_n \sup_{f \in K} \int_{G_n} |f| = 0.$$

El siguiente resultado es clásico [29, 13.38].

Teorema A.1.8 (Vitali). *Sea (Ω, Σ, μ) un espacio de medida finita. Sea $f_1, f_2, \ldots$ una sucesión en $\mathcal{L}^1(\mu)$ tal que*

- *converge en casi todo punto a una función medible $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{K}$ y*
- *$\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es uniformemente absolutamente continuo.*

Entonces $f \in \mathcal{L}^1(\mu)$ y $\lim_n \|f_n - f\|_1 = 0$.

Separabilidad de los Espacios L^p.

Definición A.1.9. *Sea (Ω, Σ, μ) un espacio de medida finita. Su* seudométrica asociada *es la aplicación $d : \Sigma \times \Sigma \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $d(A, B) = \mu(A \Delta B)$. En estas condiciones (Σ, d) es un espacio seudométrico. Lo llamaremos* espacio seudométrico asociado *al espacio de medida (Ω, Σ, μ).*

El siguiente resultado puede encontrarse en [7, Proposición 3.4.5.].

Proposición A.1.10. *Sea (Ω, Σ, μ) un espacio de medida σ-finita y $1 \leq p < \infty$. Si Σ es contablemente generada (i.e. existe un subconjunto contable suyo S de modo que Σ es la menor σ-álgebra en Ω que contiene a S), entonces $(L^p(\mu), \|.\|_p)$ es separable.*

Si (Ω, Σ, μ) es cualquier espacio de medida finita y (Σ, d) su seudométrico asociado, podemos definir $i : (\Sigma, d) \longrightarrow L^1(\mu)$ mediante $i(E) = \chi_E$. Es inmediato que i preserva distancias. Si además Σ es contablemente generada, el resultado previo nos dice que $L^1(\mu)$ es $\|.\|_1$-separable y, por tanto, $i(\Sigma)$ es $\|.\|_1$-separable. Como i conserva distancias, es claro que (Σ, d) es separable.

Corolario A.1.11. *Sean Σ y m la σ-álgebra y medida de Lebesgue en un intervalo $[a, b] \subset \mathbb{R}$. El espacio seudométrico asociado a $([a, b], \Sigma, m)$ es separable.*

Demostración. La σ-álgebra de Borel $\mathcal{B}([a, b])$ es contablemente generada (por ejemplo, por la colección de los intervalos contenidos en $[a, b]$ de extremos racionales) y, por tanto, el espacio seudométrico asociado a $([a, b], \mathcal{B}([a, b]), m)$ es separable. Sea S un subconjunto denso numerable de dicho espacio seudométrico.

Si $E \in \Sigma$, existe $B \in \mathcal{B}([a, b])$ tal que $B \subset E$ y $m(E) = m(B)$ (véase [7, Capítulo 1]). Podemos encontrar una sucesión $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de elementos de S tal que

$$\lim_n m(B_n \Delta B) = 0.$$

Basta observar ahora que

$$\begin{aligned} m(B_n \Delta E) &= m(B_n \setminus E) + m(B_n \cap E) \\ &\leq m(B_n \setminus B) + m(B_n \cap B) + m(B_n \cap (E \setminus B)) = m(B_n \Delta B) \end{aligned}$$

para cada $n \in \mathbb{N}$. Esto prueba que S también es denso en el seudométrico asociado a $([a, b], \Sigma, m)$. □

A.2 Medidas vectoriales

Un *álgebra* en un conjunto Ω es una familia no vacía de subconjuntos de Ω cerrada para complementarios y uniones finitas. Si es cerrada para uniones numerables se dice σ-álgebra.

Definición A.2.1. *Sea $\mathcal{F}$ un álgebra en el conjunto Ω y $G : \mathcal{F} \longrightarrow X$ una aplicación. Se dice que G es una* medida vectorial *si para cada par de elementos disjuntos A y B de $\mathcal{F}$ se cumple*

$$G(A \cup B) = G(A) + G(B).$$

Dicha medida vectorial se llama contablemente aditiva *si para cada sucesión de elementos disjuntos $E_1, E_2, \dots \in \mathcal{F}$ tales que $\cup_{n=1}^{\infty} E_n \in \mathcal{F}$, entonces*

$$G(\cup_{n=1}^{\infty} E_n) = \sum_{n=1}^{\infty} G(E_n).$$

En lo que sigue todas las álgebras estarán definidas sobre un conjunto Ω.

Definición A.2.2. *Sea G una medida vectorial definida en un álgebra $\mathcal{F}$ con valores en X. Dado $E \in \mathcal{F}$*

i) Se llama variación *de G en E a*

$$|G|(E) = \sup\{\sum_{i=1}^{n} \|G(E_i)\| : E = \cup_{i=1}^{n} E_i, E_i \in \mathcal{F} \textit{ disjuntos dos a dos}\}.$$

ii) Se llama semivariación *de G en E a*

$$\|G\|(E) = \sup\{|x^*G|(E) : x^* \in B_{X^*}\}$$

(cada x^*G es una medida vectorial con valores en $\mathbb{K}$).

A continuación exponemos una serie de resultados que empleamos en la memoria. El lector interesado puede consultar las demostraciones en el primer capítulo de [13].

Proposición A.2.3. *Para una medida vectorial $G : \mathcal{F} \longrightarrow X$ son equivalentes:*

i) Para cada sucesión $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de elementos disjuntos del álgebra $\mathcal{F}$ la serie $\sum_{n=1}^{\infty} G(E_n)$ es convergente en norma.

ii) Para cada sucesión $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de elementos disjuntos del álgebra $\mathcal{F}$

$$\lim_n \sup_{x^*\in B_{X^*}} \left| \sum_{m=n}^{\infty} x^*G(E_m) \right| = 0.$$

iii) Si $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ son elementos disjuntos de $\mathcal{F}$, entonces $\lim_n \|G(E_n)\| = 0$.

iv) Si $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ son elementos disjuntos de $\mathcal{F}$, entonces $\lim_n \|G\|(E_n) = 0$.

v) Para cada sucesión $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de elementos disjuntos del álgebra $\mathcal{F}$

$$\lim_n \sup_{x^*\in B_{X^*}} \left(\sum_{m=n}^{\infty} |x^*G|(E_m) \right) = 0.$$

Una medida G que cumpla estas condiciones se dice fuertemente aditiva*.*

De aquí en adelante $\mathcal{F}$ denotará una σ-álgebra en un conjunto Ω.

Teorema A.2.4. *Sea $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ un espacio de medida finita. Para una medida vectorial contablemente aditiva $G : \mathcal{F} \longrightarrow X$ son equivalentes:*

i) $G(E) = 0$ para cada $E \in \mathcal{F}$ tal que $\mu(E) = 0$.

ii) Dado $\epsilon > 0$, existe un $\delta > 0$ de manera que si $E \in \mathcal{F}$ satisface $\mu(E) < \delta$, entonces $\|G(E)\| < \epsilon$.

En tal caso, G se dice μ-continua *(o* absolutamente continua respecto de μ*), y lo denotamos mediante $G \ll \mu$.*

Proposición A.2.5. *Sean $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ un espacio de medida finita, X un espacio de Banach y $G : \mathcal{F} \longrightarrow X$ una medida vectorial que satisface la condición ii) del teorema A.2.4. Entonces, G es contablemente aditiva.*

Demostración. Si $\{E_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de conjuntos medibles disjuntos, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n)$ es convergente (hacia $\mu\left(\cup_{n=1}^{\infty} E_n\right)$) y

$$\lim_N \mu\left(\cup_{n\geq N} E_n\right) = 0.$$

Por la hipótesis, $\lim_N G\left(\cup_{n\geq N} E_n\right) = 0$ en X y, así,

$$\lim_N \left\| G\left(\cup_{n=1}^{\infty} E_n\right) - \sum_{k=1}^{N-1} G(E_k) \right\| = \lim_N \left\| G\left(\cup_{n\geq N} E_n\right)\right\| = 0$$

gracias a la aditividad finita de G. □

Sucesiones de Medidas Vectoriales

Teorema A.2.6 (Vitali-Hahn-Saks). *Sea $G_n : \mathcal{F} \longrightarrow \mathbb{K}$, $n = 1, 2, \ldots$ una sucesión de medidas escalares contablemente aditivas tales que para cada $E \in \mathcal{F}$ existe el límite*

$$\lim_n G_n(E) = G(E) \in \mathbb{K}.$$

Entonces, $G : \mathcal{F} \longrightarrow \mathbb{K}$ es una medida escalar contablemente aditiva.

Para una elegante demostración de este teorema, basada en el *teorema de la categoría de Baire*, consúltese [14, III.7.4].

Proposición A.2.7. *Sea $G_n : \mathcal{F} \longrightarrow X$, $n = 1, 2, \ldots$ una sucesión de medidas vectoriales contablemente aditivas de manera que para cada $E \in \mathcal{F}$ existe el límite*

$$\omega - \lim_n G_n(E) = G(E).$$

Entonces, $G : \Sigma \longrightarrow X$ es una medida contablemente aditiva.

Demostración. Si $x^* \in X^*$, la sucesión de medidas escalares contablemente aditivas $\{x^* G_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ satisface la hipótesis del teorema de Vitali-Hahn-Saks (A.2.6) y, por tanto, $x^* G : \Sigma \longrightarrow \mathbb{K}$ es contablemente aditiva. Entonces para cada sucesión de elementos disjuntos de $\mathcal{F}$, digamos $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$, se cumple

$$x^*\left(G\left(\cup_{i=1}^{\infty} E_i\right)\right) = \sum_{i=1}^{\infty} x^* G(E_i)$$

para todo $x^* \in X^*$. Es decir,

$$G\left(\cup_{i=1}^{\infty} E_i\right) = \omega - \sum_{i=1}^{\infty} G(E_i).$$

Esto prueba que, dada cualquier sucesión $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de elementos disjuntos de $\mathcal{F}$ y cualquier subsucesión $n_1 < n_2 < \cdots \in \mathbb{N}$, la serie $\sum_{k=1}^{\infty} G(E_{n_k})$ es débilmente convergente. Por el teorema de Orlicz-Pettis A.3.4, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} G(E_n)$ es incondicionalmente convergente, en particular convergente hacia su límite débil $G\left(\cup_{i=1}^{\infty} E_i\right)$. Esto completa la demostración. □

A.3 Series incondicionalmente convergentes

Una serie $\sum_n x_n$ en un espacio de Banach X se dice *incondicionalmente convergente* si satisface las siguientes condiciones equivalentes [17, Capítulo 1]:

i) Si $\pi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ es cualquier biyección, la serie $\sum_{k=1}^{\infty} x_{\pi(k)}$ es convergente.

ii) Para cada sucesión $n_1 < n_2 < \cdots \in \mathbb{N}$ la serie $\sum_{k=1}^{\infty} x_{n_k}$ es convergente.

iii) Existe $x \in X$ tal que para cada $\epsilon > 0$ podemos encontrar un $F_0 \subset \mathbb{N}$ finito de manera que

$$\left\| \sum_{i\in F} x_i - x \right\| < \epsilon$$

para cualquier $F_0 \subset F \subset \mathbb{N}$ finito.

En tal caso, x es la suma de cualquier serie de las que aparecen en *i*).

Lemas Elementales

Lema A.3.1. *Sea $\sum_n x_n$ una serie incondicionalmente convergente en el espacio de Banach X. Dado $\epsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que*

$$\sum_{n=N}^{\infty} |x^*(x_n)| < \epsilon$$

para todo $x^* \in B_{X^*}$.

Demostración. Supongamos por reducción al absurdo que existe $a > 0$ tal que para cada $n \in \mathbb{N}$ existe $x_n^* \in B_{X^*}$ de manera que

$$\sum_{k\geq n} |x_n^*(x_k)| \geq a.$$

Es posible encontrar entonces una sucesión creciente $n_1 < n_2 < \ldots$ tal que $\sum_{i=n_k}^{n_{k+1}-1} |x_{n_k}^*(x_i)| \geq \frac{a}{2}$ para cada $k \in \mathbb{N}$. La proposición A.7.1 nos permite extraer subconjuntos $S_k \subset \{n_k, n_k+1, \ldots, n_{k+1}-1\}$ tales que

$$\begin{aligned} \pi \left| \sum_{i \in S_k} x_{n_k}^*(x_i) \right| &= \pi \left| x_{n_k}^* \left(\sum_{i \in S_k} x_i \right) \right| \\ &\geq \sum_{i=n_k}^{n_{k+1}-1} |x_{n_k}^*(x_i)| \quad \geq \quad \frac{a}{2}. \end{aligned}$$

De aquí

$$\left\| \sum_{i \in S_k} x_i \right\| \geq \frac{a}{2\pi}$$

para cada $k \in \mathbb{N}$. Esto contradice la convergencia incondicional de $\sum_n x_n$. $\square$

Lema A.3.2. *Dada una serie $\sum_n x_n$ incondicionalmente convergente en el espacio de Banach X y dados $a_1, a_2, \dots \in \mathbb{K}$ de módulo ≤ 1, la serie $\sum_n a_n x_n$ es incondicionalmente convergente.*

Demostración. Sea $\pi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ una biyección cualquiera. Vamos a demostrar que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_{\pi(n)} x_{\pi(n)}$ es convergente en X aplicando el criterio de Cauchy. Fijado $\epsilon > 0$, el lema A.3.1 nos proporciona $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$\sum_{k \geq N} |x^*(x_k)| < \epsilon \tag{A.1}$$

para cada $x^* \in B_{X^*}$. Tomamos $K \in \mathbb{N}$ tal que $\pi(k) \geq N$ para cada $k \geq K$. Dados $K \leq n \leq m$ en $\mathbb{N}$, existe (por el teorema de Hahn-Banach) $x_{n,m}^* \in B_{X^*}$ tal que

$$\left| x_{n,m}^* \left(\sum_{k=n}^{m} a_{\pi(k)} x_{\pi(k)} \right) \right| = \left\| \sum_{k=n}^{m} a_{\pi(k)} x_{\pi(k)} \right\|.$$

De (A.1) se deduce

$$\left\| \sum_{k=n}^{m} a_{\pi(k)} x_{\pi(k)} \right\| \leq \sum_{k=n}^{m} |x_{n,m}^*(x_{\pi(k)})| < \epsilon$$

para cada $K \leq n \leq m$. Esto completa la prueba. $\square$

Teoremas Básicos

Teorema A.3.3 (Dvoretzki-Rogers). *Un espacio de Banach X es de dimensión finita si y sólo si toda serie $\sum_n x_n$ incondicionalmente convergente es absolutamente convergente (es decir, $\sum_n \|x_n\| < \infty$).*

Demostración. Puede encontrarse en [11, Capítulo VI]. □

Los dos siguientes resultados se obtienen en [13, Corolarios 4-5] como aplicación de la teoría de medidas vectoriales:

Teorema A.3.4 (Orlicz-Pettis). *Sea $\sum_n x_n$ una serie en el espacio de Banach X de tal manera que para cualquier sucesión $n_1 < n_2 < \cdots \in \mathbb{N}$ la serie*

$$\sum_{k=1}^{\infty} x_{n_k}$$

es débilmente convergente. Entonces, la serie $\sum_n x_n$ es incondicionalmente convergente.

Teorema A.3.5 (Bessaga-Pelczynski). *Para un espacio de Banach X son equivalentes:*

i) X no contiene subespacios isomorfos a c_0.

ii) Cualquier serie $\sum_n x_n$ en X que cumpla

$$\sum_{n=1}^{\infty} |x^*(x_n)| < \infty \quad \text{para todo } x^* \in X^*$$

es incondicionalmente convergente.

A.4 Medibilidad, integral de Bochner y Pettis

El lector puede encontrar una introducción básica a estos temas en [13, Capítulo II]. En lo que sigue (Ω, Σ, μ) es un espacio de medida finita y X un espacio de Banach.

A.4.1 Medibilidad e integración Bochner

Una función $f : \Omega \longrightarrow X$ se dice *simple* si existen $x_1, \ldots, x_n \in X$ y $A_1, \ldots, A_n \in \Sigma$ tales que $f = \sum_{i=1}^{n} \chi_{A_i} x_i$. Diremos que f es σ-simple si existe una sucesión $x_1, x_2, \cdots \in X$ y otra sucesión $A_1, A_2, \ldots$ de conjuntos medibles disjuntos dos a dos tales que $f = \sum_{i=1}^{\infty} \chi_{A_i} x_i$.

Definición A.4.1. *Se dice que f es fuertemente medible, medible Bochner o μ-medible si existe una sucesión de funciones simples $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tal que*

$$\lim_n f_n(w) = f(w) \text{ en casi todo } w \in \Omega.$$

El siguiente resultado [13, Teorema 1, Corolario 2] juega un papel fundamental.

Teorema A.4.2 (De medibilidad de Pettis). *Las siguientes condiciones son equivalentes:*

i) f *es medible Bochner.*

ii) $x^* f : \Omega \longrightarrow \mathbb{K}$ *es* μ*-medible para cada* $x^* \in X^*$ *y existe* $E \in \Sigma$ *conulo (es decir* $\mu(\Omega \setminus E) = 0$*) tal que* $f(E)$ *es separable.*

iii) Existe una sucesión de funciones σ*-simples* $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *que converge uniformemente hacia* f *en un conjunto medible conulo.*

El conjunto de las funciones medibles Bochner de Ω en X es un espacio vectorial (con las operaciones obvias) que contiene a las funciones simples y σ-simples y es cerrado para límites de sucesiones convergentes en casi todo punto. Si $f : \Omega \longrightarrow X$ es medible Bochner, entonces $\|f\|$ es μ-medible.

Nota A.4.3. *Dada una función* $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{K}$*, diremos que es* medible *si* $f^{-1}(A) \in \Sigma$ *para cada abierto* $A \subset \mathbb{K}$*. En general la medibilidad Bochner es más débil:* f *es* μ*-medible si y sólo si coincide en casi todo punto con una función medible. Ambos conceptos coinciden cuando el espacio de medida es completo (en el sentido de [7, Capítulo 1]), en particular si* $\Omega = [a, b]$*,* Σ *es la* σ*-álgebra de Lebesgue y* $\mu = m$ *es la medida de Lebesgue.*

Integral de Bochner

Si $f : \Omega \longrightarrow [0, \infty)$ es medible Bochner, entonces coincide en casi todo punto con una función medible no negativa g. Podemos definir la *integral* de f como

$$(B) \int_\Omega f \, d\mu = (L) \int_\Omega g \, d\mu,$$

donde *(L)* denota la integral clásica de Lebesgue [53, Capítulo 1].

Sea $f = \sum_{i=1}^n \chi_{A_i} x_i$ una función simple. Se define la *integral de Bochner* de f como

$$\int_\Omega f \, d\mu = \sum_{i=1}^n \mu(A_i) x_i.$$

Definición A.4.4. *Una función* $f : \Omega \longrightarrow X$ *medible Bochner se dice* integrable Bochner *si existe una sucesión de funciones simples* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *tal que*

$$\lim_n (B) \int_\Omega \|f - f_n\| \, d\mu = 0.$$

En tal caso, existe el límite $\lim_n \int_\Omega f_n \, d\mu$ *(la* integral de Bochner *de* f*) y no depende de la sucesión* (f_n)*. Se denotará por* $\int_\Omega f \, d\mu$*,* $(B) \int_\Omega f \, d\mu$ *ó* $\int f$ *si no hay posibilidad de confusión.*

El conjunto $\mathcal{L}^1(\mu, X)$ de las funciones de Ω en X integrables Bochner es un espacio vectorial (con las operaciones naturales) y la integral es una forma lineal sobre él. Si f es integrable Bochner, entonces para cada $x^* \in X^*$ la composición x^*f es integrable Bochner con integral

$$(B)\int_\Omega x^*f\ d\mu = x^*\left((B)\int_\Omega f\ d\mu\right).$$

Si f es integrable Bochner y $E \in \Sigma$, entonces $g = \chi_E f$ es integrable Bochner en Ω y $f\restriction_E$ es integrable Bochner con respecto a (E, Σ_E, μ_E) (ambas integrales coinciden).

La siguiente caracterización es bastante útil [13, Teorema II.2.2].

Proposición A.4.5. *Para una función medible Bochner $f : \Omega \longrightarrow X$ son equivalentes*

i) *Es integrable Bochner.*

ii) $(B)\int_\Omega \|f\|\ d\mu < \infty$.

En tal caso, $\left\|(B)\int_\Omega f d\mu\right\| \leq (B)\int_\Omega \|f\|\ d\mu$.

La aplicación $\|.\|_1 : \mathcal{L}^1(\mu, X) \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$\|f\|_1 = (B)\int_\Omega \|f\|$$

es una seminorma. El espacio normado cociente, que denotaremos por $L^1(\mu, X)$, es un espacio de Banach.

Nota A.4.6. *Una función $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{K}$ es integrable en sentido Bochner si y sólo si es integrable Lebesgue.*

A.4.2 Integral de Pettis

Definición A.4.7. *Se dice que $f : \Omega \longrightarrow X$ es*

i) escalarmente medible *si la composición x^*f es medible para cada $x^* \in X^*$;*

ii) integrable Dunford *si para cada $x^* \in X^*$ la composición $x^*f : \Omega \longrightarrow \mathbb{K}$ es integrable Bochner;*

iii) integrable Pettis *si es integrable Dunford y para cada $E \in \Sigma$ existe un $\nu(E) \in X$ tal que*

$$x^*(\nu(E)) = \int_E x^*f$$

para todo $x^* \in X^*$.

El siguiente resultado es básico [13, Lema II.3.1].

Proposición A.4.8. *Sea $f : \Omega \longrightarrow X$ integrable Dunford. Se verifica:*

i) Existe $K > 0$ tal que

$$\int_\Omega |x^* f| \, d\mu \leq K$$

para cada $x^* \in B_{X^*}$.

ii) Si $E \in \Sigma$ y definimos $\nu(E) : X^* \longrightarrow \mathbb{K}$ mediante

$$\nu(E)(x^*) = \int_E x^* f,$$

entonces $\nu(E) \in X^{**}$.

La aplicación $\nu : \Sigma \longrightarrow X^{**}$ se llama *integral indefinida* de f *(de Dunford o Pettis)*. Es claro que f es integrable Pettis si y sólo si ν toma valores en X.

Lema A.4.9. *Sea $f : \Omega \longrightarrow X$ una función tal que $f : \Omega \longrightarrow \tilde{X}$ es integrable Pettis, donde $\tilde{X}$ denota el espacio de Banach real asociado de manera natural a X. Entonces $f : \Omega \longrightarrow X$ es integrable Pettis.*

Demostración. Sea $\nu : \Sigma \longrightarrow X$ la integral indefinida de $f : \Omega \longrightarrow \tilde{X}$. Si $x^* \in X^*$, entonces $u = \Re(x^*) \in \tilde{X}^*$ (lema A.7.4) y

$$x^*(x) = u(x) - iu(ix)$$

para cada $x \in X$. Es claro que la función $v : X \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $v(x) = u(ix)$ es un elemento de $\tilde{X}^*$ y, así, $uf, vf \in \mathcal{L}^1(\mu)$. Por tanto, $x^*(f) = uf - ivf \in \mathcal{L}^1(\mu)$ y para cada $E \in \Sigma$

$$\begin{aligned} \int_E x^* f &= \int_E (uf - ivf) \\ &= \int_E uf - i \int_E vf \\ &= u(\nu(E)) - iv(\nu(E)) \\ &= x^*(\nu(E)). \end{aligned}$$

Esto prueba que $f : \Omega \longrightarrow X$ es integrable Pettis. □

Proposición A.4.10. *Toda función $f : \Omega \longrightarrow X$ integrable Bochner es integrable Pettis y*

$$\nu(E) = (B) \int_E f \, d\mu$$

para cada $E \in \Sigma$.

El siguiente teorema (consecuencia del *teorema de Orlicz-Pettis* A.3.4) contiene una de las propiedades más interesantes de la integral de Pettis. Para la prueba puede consultarse [13, Teorema II.3.5].

Teorema A.4.11. *Si $f : \Omega \longrightarrow X$ es integrable Pettis, su integral indefinida $\nu : \Sigma \longrightarrow X$ es una medida vectorial contablemente aditiva.*

La siguiente proposición caracteriza cuándo una función σ-simple es integrable Pettis.

Proposición A.4.12. *Sean (Ω, Σ, μ) un espacio de medida finita y $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de conjuntos medibles disjuntos. Dada una sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en el espacio de Banach X, definimos la siguiente función σ-simple de Ω en X*

$$f = \sum_{n=1}^{\infty} \chi_{E_n} x_n.$$

Son equivalentes:

i) f es integrable Pettis.

ii) La serie $\sum_n \mu(E_n)x_n$ es incondicionalmente convergente en X.

Demostración. $i) \Rightarrow ii)$ Denotamos por $\nu : \Omega \longrightarrow X$ a la integral indefinida de Pettis de f. Dada cualquier biyección $\pi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ vamos a demostrar que

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mu(E_{\pi(k)})x_{\pi(k)} = \nu\left(\cup_{i=1}^{\infty} E_i\right).$$

Para ello comenzamos observando que

$$\sum_{k=1}^{N} \mu(E_{\pi(k)})x_{\pi(k)} = \nu\left(\cup_{k=1}^{N} E_{\pi(k)}\right). \tag{A.2}$$

para cada $N \in \mathbb{N}$. En efecto, si $x^* \in X^*$ entonces:

$$x^*\left(\nu\left(\cup_{k=1}^{N} E_{\pi(k)}\right)\right) = \int_{\cup_{k=1}^{N} E_{\pi(k)}} x^* f \, d\mu =$$
$$\int_{\Omega} \left(\sum_{k=1}^{N} \chi_{E_{\pi(k)}} x^*(x_{\pi(k)})\right) d\mu = \sum_{k=1}^{N} \mu(E_{\pi(k)})x^*(x_{\pi(k)}) =$$
$$= x^*\left(\sum_{k=1}^{N} \mu(E_{\pi(k)})x_{\pi(k)}\right).$$

Ahora (A.2) es consecuencia del teorema de Hahn-Banach.

La aditividad contable de ν (véase A.4.11) permite pasar al límite en (A.2) y obtener

$$\lim_N \sum_{k=1}^{N} \mu(E_{\pi(k)})x_{\pi(k)} = \lim_N \nu\left(\cup_{k=1}^{N} E_{\pi(k)}\right) = \nu\left(\cup_{i=1}^{\infty} E_i\right),$$

como se quería demostrar.

ii) $\Rightarrow$ *i*) En primer lugar debemos verificar que f *es integrable Dunford.* Para ello tomamos $x^* \in X^*$ arbitrario. Es claro que $x^*f = \sum_{n=1}^{\infty} \chi_{E_n} x^*(x_n)$ es medible Lebesgue. Para ver que es integrable empleamos el teorema de la convergencia monótona:

$$(L)\int_{\Omega} |x^*f| \; d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} |x^*(x_n)|\mu(E_n),$$

y esta serie es convergente porque la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n)x^*(x_n)$$

es incondicionalmente convergente en $\mathbb{K}$ ya que la serie $\sum_n \mu(E_n)x_n$ es incondicionalmente convergente en X por hipótesis. Esto prueba que f es integrable Dunford.

Para probar que f *es integrable Pettis* tomamos $E \in \Sigma$ arbitrario. Vamos a demostrar que

$$\nu(E) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n \cap E)x_n \in X,$$

donde ν es la integral indefinida de Dunford de f. En efecto: la convergencia de esta última serie está garantizada por el lema A.3.2 (simplemente hay que utilizar que $\mu(E_n \cap E) \leq \mu(E_n)$ para cada n). Si $x^* \in X^*$, entonces

$$\begin{aligned} x^*\left(\sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n \cap E)x_n\right) &= \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n \cap E)x^*(x_n) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \int_E \chi_{E_n} x^*(x_n) \; d\mu \\ &= \int_E x^*f \; d\mu \quad = \quad \nu(E)(x^*), \end{aligned}$$

donde la penúltima igualdad es consecuencia del teorema de la convergencia dominada de Lebesgue ($x^*f \in \mathcal{L}^1(\mu)$ y $\sum_{n=1}^{N} \chi_{E_n}|x^*(x_n)| \leq |x^*f|$ para todo N). Por tanto, $\nu(E) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n \cap E)x_n \in X$ y la proposición queda demostrada. $\square$

Caracterizaciones de la Integrabilidad Pettis

Definición A.4.13. *Sea f una función de un conjunto Ω en un espacio de Banach X. Se define*

$$Z_f = \{x^*f : \; x^* \in B_{X^*}\} \subset \mathbb{K}^{\Omega}.$$

El siguiente teorema es una caracterización bien conocida de la integrabilidad Pettis. Para la prueba consúltese [55, Teorema 4-2-3].

Teorema A.4.14. *Sean (Ω, Σ, μ) un espacio de medida finita y $f : \Omega \longrightarrow X$ una función integrable Dunford. Denotemos por τ_p la topología de la convergencia puntual en $\mathbb{K}^{\Omega}$. Son equivalentes:*

i) *f es integrable Pettis.*

ii) *La inclusión natural $i : (Z_f, \tau_p) \longrightarrow (L^1(\mu), \omega)$ es continua.*

Si el espacio de medida es $[a, b]$ dotado de la σ-álgebra y medida de Lebesgue, disponemos del siguiente criterio. La prueba es una versión ampliada de la que podemos encontrar en [20, Proposición 2B].

Teorema A.4.15 (Drewnowski, Fremlin, Mendoza).
Sea $f : [a, b] \longrightarrow X$ una función integrable Dunford (con integral indefinida ν) tal que $\nu(I) \in X$ para cada intervalo cerrado $I \subset [a, b]$. Son equivalentes:

i) *f es integrable Pettis.*

ii) *Para cada sucesión de intervalos cerrados $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ contenidos en $[a, b]$ que no se solapen, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \nu(I_n)$ converge en X.*

iii) *$Z_f \subset \mathcal{L}^1[a, b]$ es uniformemente absolutamente continuo.*

iv) *$\nu : \Sigma \longrightarrow X^{**}$ es absolutamente continua con respecto a la medida de Lebesgue.*

v) *$\nu : \Sigma \longrightarrow X^{**}$ es contablemente aditiva.*

Demostración. *i)* $\Rightarrow$ *ii)* Basta observar que $\{int(I_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de subconjuntos medibles disjuntos tales que $\nu(int(I_n)) = \nu(I_n)$ para todo n, y aplicar la aditividad contable de ν (A.4.11).

ii) $\Rightarrow$ *iii)* Nos basamos en el criterio de Dieudonné-Grothendieck (teorema A.1.7). Para ello consideramos una sucesión arbitraria de abiertos de $[a, b]$ disjuntos, $G_1, G_2, \ldots$. Necesitamos ver que

$$\limsup_n \left\{ \int_{G_n} |x^* f| : \ x^* \in B_{X^*} \right\} = 0, \tag{A.3}$$

para lo cual basta comprobar que dada cualquier sucesión $(x_n^*)_{n\in\mathbb{N}}$ se cumple $w_n = \int_{G_n} |x_n^* f| \to 0$ cuando $n \to \infty$. Dada una tal sucesión, fijamos $n \in \mathbb{N}$ y afirmamos que *existe $F_n \subset G_n$ unión finita de subintervalos abiertos disjuntos de $[a, b]$ tal que*

$$\int_{F_n} |x_n^* f| \geq w_n - \frac{1}{n}. \tag{A.4}$$

En efecto: podemos suponer sin pérdida de generalidad que cada $G_n \subset (0, 1)$ y, como todo abierto de $\mathbb{R}$ es unión numerable de sus componentes conexas, escribimos $G_n = \cup_k G_{n,k}$, donde los $G_{n,k}$ son intervalos abiertos disjuntos. Como

$x_n^* f \in L^1[a,b]$, la medida $\int_{\_} |x^* f| : \Sigma \longrightarrow [0,\infty)$ es contablemente aditiva. Por tanto

$$\lim_N \int_{\cup_{k=1}^N G_{n,k}} |x_n^* f| = \lim_N \sum_{k=1}^N \int_{G_{n,k}} |x_n^* f| = \int_{G_n} |x_n^* f| = w_n$$

y podemos tomar $F_n = \cup_{k=1}^{N_n} G_{n,k}$ para un adecuado N_n.

Por otro lado, tenemos

$$\|\nu\|(F_n) = \sup_{f \in B_{X^{***}}} |f\nu|(F_n) \geq \sup_{x^* \in B_{X^*}} |\nu_{x^*}|(F_n),$$

donde $\nu_{x^*} : \Sigma \longrightarrow \mathbb{K}$ es la medida escalar contablemente aditiva definida por

$$\nu_{x^*}(E) = \nu(E)(x^*) = \int_E x^* f$$

para cada $E \in \Sigma$. Es conocido (véase [53, Capítulo 6]) que su variación es $|\nu_{x^*}|(E) = \int_E |x^* f|$ y (A.4) implica

$$\|\nu\|(F_n) \geq \sup_{x^* \in B_{X^*}} \int_{F_n} |x^* f| \geq \int_{F_n} |x_n^* f| \geq w_n - \frac{1}{n}$$

para cada $n \in \mathbb{N}$.

Por tanto, para demostrar que $\lim w_n = 0$ basta ver que la medida vectorial $\nu : \mathcal{F} \longrightarrow X$ es fuertemente aditiva (proposición A.2.3), donde $\mathcal{F}$ denota el álgebra de subconjuntos de $[0,1]$ engendrada por los intervalos (está formada por $\emptyset$ y las uniones finitas de subintervalos –también unipuntuales– de $[0,1]$). Observamos que $F_n \in \mathcal{F}$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Para ello fijamos una sucesión $\{E_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de elementos disjuntos de $\mathcal{F}$. Cada miembro de $\mathcal{F}$ es una unión finita de intervalos disjuntos (quizás unipuntuales) y podemos encontrar una sucesión de intervalos disjuntos $I_1, I_2, \ldots$ (quizás alguno unipuntual) y una sucesión $1 = n_1 < n_2 < \cdots \in \mathbb{N}$ tales que $E_k = \cup_{i=n_k}^{n_{k+1}-1} I_i$ para cada $k \in \mathbb{N}$. Se aprecia que $\overline{I_1}, \overline{I_2}, \ldots$ es una sucesión de intervalos cerrados que no se solapan (quizás alguno unipuntual) y la hipótesis implica que $\sum_{i=1}^\infty \nu(I_i)$ converge en X. Por tanto

$$\sum_{k=1}^\infty \nu(E_k) = \sum_{k=1}^\infty \sum_{i=n_k}^{n_{k+1}-1} \nu(I_i)$$

converge en norma. Esto prueba que $\nu : \mathcal{F} \longrightarrow X$ es fuertemente aditiva y completa la demostración de *ii)* $\Rightarrow$ *iii)*.

iii) $\Rightarrow$ *iv)* Basta tener en cuenta que $\nu(E) \in X^{**}$ para cada $E \in \Sigma$ y

$$\|\nu(E)\| = \sup_{x^* \in B_{X^*}} \left| \int_E x^* f \right| \leq \sup_{x^* \in B_{X^*}} \int_E |x^* f|.$$

iv) $\Rightarrow$ *v)* Es consecuencia de A.2.5.

$v) \Rightarrow i)$ Comenzamos probando que $\nu(G) \in X$ *para cada abierto* $G \subset (0,1)$. En efecto, como ya comentamos en la prueba de $ii) \Rightarrow iii)$, podemos escribir $G = \cup_n I_n$ (unión contable) con los I_n intervalos abiertos disjuntos. Así, la aditividad contable de ν nos lleva a que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \nu(I_n) = \nu(G)$$

en X^{**}. Pero por hipótesis $\nu(I_n) \in X$ para cada $n \in \mathbb{N}$ (y X es cerrado visto como subespacio de X^{**}), luego $\nu(G) \in X$.

Por otro lado, el teorema A.2.4 implica que $iv)$ también se satisface. Dado $E \subset (0,1)$ medible, existe (regularidad de la medida de Lebesgue) una sucesión de abiertos $G_1, G_2, \dots \subset (0,1)$ tales que $E \subset G_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$ y

$$\lim_n m(G_n \setminus E) = 0.$$

De $iv)$ deducimos $\lim_n \nu(G_n \setminus E) = 0$, es decir,

$$\lim_n \nu(G_n) = \nu(E) \in X$$

porque ν es finitamente aditiva y $\nu(G_n) \in X$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Esto completa la demostración. □

Separabilidad del Rango de la Integral Indefinida

Proposición A.4.16. *Si* $f : [a,b] \longrightarrow X$ *es integrable Pettis y* $\nu : \Sigma \longrightarrow X$ *es su integral indefinida, entonces* $\nu(\Sigma)$ *es separable.*

Demostración. Consideramos el espacio seudométrico (Σ, d) asociado a la medida de Lebesgue m en $[a,b]$ (definición A.1.9). Es fácil ver que

$$\nu : (\Sigma, d) \longrightarrow X$$

es continua (ya que $\nu \ll m$). Como (Σ, d) es separable (corolario A.1.11), su imagen por la anterior aplicación es separable. □

PIP-Lebesgue

Finalizamos estas notas acerca de la integral de Pettis hablando de la *propiedad de integrabilidad Pettis* de un espacio de Banach (véase [15]).

Definición A.4.17. *Un espacio de Banach X tiene la* propiedad de integrabilidad Pettis respecto de la medida de Lebesgue *(abreviadamente PIP-Lebesgue) cuando toda función* $f : [a,b] \longrightarrow X$ *acotada y escalarmente medible es integrable Pettis.*

La clase de los espacios de Banach con la PIP-Lebesgue contiene a todos los que son Lindeloff respecto a la topología débil. En particular contiene a los espacios de Banach débilmente compactamente generados (abreviadamente WCG) (es decir, aquéllos para los que existe un subconjunto débilmente compacto que genera un subespacio vectorial denso). Ejemplos típicos de espacios WCG son los separables, los reflexivos, $c_0(\Gamma)$ y $L^1(\mu)$ si μ es σ-finita. Para más información sobre espacios débilmente Lindeloff y WCG consúltese [17, Capítulos 11 y 12].

A.5 La propiedad de Bourgain

En esta sección (Ω, Σ, μ) será un espacio de medida finita y τ la topología producto en $\mathbb{R}^\Omega$ (es decir, la topología de la convergencia puntual).

Definición A.5.1. *Se dice que un conjunto de funciones $F \subset \mathbb{R}^\Omega$ tiene la* propiedad de Bourgain *si para cada $A \in \Sigma$ de medida positiva y cada $a > 0$ existen subconjuntos medibles $B_i \subset A$ $(i = 1, \ldots, n)$ de medida positiva tales que para cualquier $f \in F$ existe $1 \leq i \leq n$ de manera que*

$$\sup f(B_i) - \inf f(B_i) < a.$$

Definición A.5.2. *Sea f una función de Ω en un espacio de Banach real X. Diremos que f* tiene la propiedad de Bourgain *si Z_f la tiene (definición A.4.13).*

Un resultado esencial sobre familias con la propiedad de Bourgain es el siguiente [52, Teorema 11].

Teorema A.5.3 (Bourgain). *Si $F \subset \mathbb{R}^\Omega$ es una familia de funciones con la propiedad de Bourgain y $g \in \overline{F}^\tau$, entonces*

- *g es μ-medible.*
- *g es límite en casi todo punto de una* sucesión *contenida en F.*

Demostración. Antes de comenzar introducimos la siguiente notación. Si $B \in \Sigma$ y $a > 0$, definimos

$$F(B, a) = \{f \in F : \ \sup f(B) - \inf f(B) < a\}.$$

Como $g \in \overline{F}^\tau$, existe un ultrafiltro $\mathcal{U}$ en F tal que $g \in \overline{\mathcal{U}}^\tau$ (es decir, g es un punto de aglomeración del ultrafiltro o, lo que es lo mismo, cualquier entorno de g en la topología τ corta a cada elemento de $\mathcal{U}$).

Afirmación: para cada $A \in \Sigma$ de medida positiva y cada $a > 0$ existe $B \subset A$ medible tal que $\mu(B) > 0$ y $F(B, a) \in \mathcal{U}$. En efecto, la propiedad de Bourgain F garantiza la existencia de $B_1, \ldots, B_n \subset A$ medibles con medida positiva tales que $F = \cup_{i=1}^n F(B_i, a)$. Por ser $\mathcal{U}$ un ultrafiltro en F, dado cualquier $G \subset F$ o bien G o bien $F \setminus G$ está en $\mathcal{U}$. Utilizando que $\mathcal{U}$ es cerrado para intersecciones finitas y no contiene a $\emptyset$ obtenemos que existe $1 \leq i \leq n$ tal que $F(B_i, a) \in \mathcal{U}$.

Para cada $a > 0$ existe una familia maximal $\mathcal{P}_a$ de conjuntos medibles (de medida positiva) disjuntos dos a dos tal que $F(B, a) \in \mathcal{U}$ para todo $B \in \mathcal{P}_a$. En efecto: sea $\mathcal{S}$ el conjunto (ordenado por inclusión) de todas las familias $\mathcal{P}$ de subconjuntos medibles (de medida positiva) disjuntos dos a dos tales que $F(B, a) \in \mathcal{U}$ para cada $B \in \mathcal{P}$. La afirmación anterior garantiza que $\mathcal{S} \neq \emptyset$. Sea ahora $\mathcal{S}_0 \subset \mathcal{S}$ un subconjunto totalmente ordenado. Sea $\mathcal{P}_0 = \cup_{\mathcal{P} \in \mathcal{S}_0} \mathcal{P}$, que es claramente una familia de conjuntos medibles (de medida positiva) tal que cada $B \in \mathcal{P}_0$ satisface $F(B, a) \in \mathcal{U}$. Que $\mathcal{S}_0$ esté totalmente ordenado por inclusión nos permite deducir que dos elementos distintos de $\mathcal{P}_0$ son disjuntos (al estar contenidos en una misma familia $\mathcal{P} \in \mathcal{S}_0$). Por tanto, $\mathcal{P} \in \mathcal{S}$ y es obviamente una cota superior de $\mathcal{S}_0$. Hemos probado que $\mathcal{S}$ es inductivo y el resultado se sigue de aplicar el lema de Zorn.

Observamos que

1. $\mathcal{P}_a$ es numerable para cada $a > 0$: por construcción $\mathcal{P}_a$ está formado por elementos de medida positiva y, así, $\mathcal{P}_a = \cup_{n=1}^{\infty}\{B \in \mathcal{P}_a : \mu(B) > \frac{1}{n}\}$. Además, cada $\{B \in \mathcal{P}_a : \mu(B) > \frac{1}{n}\}$ es finito. Para verlo tomamos un subconjunto finito suyo $\mathcal{T}$ y comprobamos que $|\mathcal{T}| \leq n\mu(\Omega)$. En efecto, $\mathcal{P}_a$ (y, por tanto, $\mathcal{T}$) está compuesto por conjuntos medibles disjuntos dos a dos, luego
$$\infty > \mu(\Omega) \geq \mu(\cup_{B\in\mathcal{T}} B) = \sum_{B\in\mathcal{T}} \mu(B) \geq |\mathcal{T}|\frac{1}{n}$$
y, por tanto, $|\mathcal{T}| \leq n\mu(\Omega)$. Esto prueba la numerabilidad de $\mathcal{P}_a$. La unión de sus elementos es un miembro de Σ.

2. $\mu(\Omega \setminus \cup_{B\in\mathcal{P}_a} B) = 0$ para todo $a > 0$. En efecto: en caso contrario la primera afirmación de la prueba permitiría encontrar un conjunto medible de medida positiva $B \subset \Omega \setminus \cup_{C\in\mathcal{P}_a} C$ tal que $F(B, a) \in \mathcal{U}$. Por tanto $\mathcal{P}_a \subsetneq \mathcal{P}_a \cup \{B\} \in \mathcal{S}$, contradiciendo la maximalidad de $\mathcal{P}_a$.

3. Si $A \subset \mathbb{R}^+$ es finito y tomamos para cada $a \in A$ un subconjunto finito $\mathcal{P}'_a \subset \mathcal{P}_a$, entonces
$$g \in \overline{\cap_{a\in A} \cup_{B\in\mathcal{P}'_a} F(B, a)}^{\tau}.$$
En efecto, $F(B, a) \in \mathcal{U}$ para cualquier $a \in A$ y cada $B \in \mathcal{P}'_a \subset \mathcal{P}_a$. Por tanto, $\cap_{a\in A}\cup_{B\in\mathcal{P}'_a} F(B, a) \in \mathcal{U}$ y, así, g está en su adherencia (es un punto de aglomeración de $\mathcal{U}$).

La primera observación nos permite escribir para cada $m \in \mathbb{N}$
$$\mathcal{P}_{\frac{1}{m}} = \{A_{m,1}, A_{m,2}, \dots\}. \tag{A.5}$$
Definimos $B = \cap_{m=1}^{\infty} \cup_{n=1}^{\infty} A_{m,n} \in \Sigma$. Para cada $n, m \in \mathbb{N}$ elegimos un punto $w_{m,n} \in A_{m,n}$ ($A_{m,n}$ tiene medida positiva y no es vacío). Podemos definir la siguiente función medible $f_m : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$
$$f_m = \sum_{n=1}^{\infty} g(w_{m,n})\chi_{A_{m,n}}$$
para cada m ($\mathcal{P}_{\frac{1}{m}}$ consta de conjuntos medibles disjuntos).

Vamos a demostrar que
$$\lim_m f_m = g \text{ uniformemente en } B. \tag{A.6}$$
Sean $M \in \mathbb{N}$ fijo y $x \in B = \cap_{m=1}^{\infty} \cup_{n=1}^{\infty} A_{m,n}$. *Afirmamos que si* $m > M$ *entonces*
$$|f_m(x) - g(x)| < \frac{3}{M}.$$

Dado $m > M$, existe $n = n(m,x) \in \mathbb{N}$ tal que $x \in A_{m,n}$. La observación *3* nos dice que $g \in \overline{F(A_{m,n}, \frac{1}{m})}$, por lo que existe $h \in F(A_{m,n}, \frac{1}{m})$ tal que

$$|h(x) - g(x)| < \frac{1}{M} \quad \text{y} \quad |h(w_{m,n}) - g(w_{m,n})| < \frac{1}{M}.$$

Como $x, w_{m,n} \in A_{m,n}$,

$$|h(x) - h(w_{m,n})| \leq \sup h(A_{m,n}) - \inf h(A_{m,n}) < \frac{1}{m} < \frac{1}{M}.$$

Además $f_m(x) = g(w_{m,n})$, luego

$$|f_m(x) - g(x)| \leq |g(w_{m,n}) - h(w_{m,n})| + |h(w_{m,n}) - h(x)| + |h(x) - g(x)| < \frac{3}{M}.$$

Esto prueba (A.6).

Es claro que $\Omega \setminus B = \cup_{m=1}^{\infty} (\Omega \setminus \cup_{n=1}^{\infty} A_{m,n})$ tiene medida cero por la observación *2*. Así, g es límite (uniforme) en casi todo punto de una sucesión de funciones medibles y, por tanto, es μ-medible.

Para probar la segunda afirmación del enunciado tomamos, en virtud de 3,

$$h_m \in \bigcap_{i=1}^{m} \bigcap_{n=1}^{m} F\left(A_{i,n}, \frac{1}{i}\right) \text{ tal que } |h_m(w_{i,n}) - g(w_{i,n})| < \frac{1}{i} \text{ si } 1 \leq i, n \leq m \tag{A.7}$$

para cada $m \in \mathbb{N}$. Vamos a demostrar que si $w \in B$, entonces

$$\lim_m h_m(w) = g(w).$$

Sea $\epsilon > 0$. Fijamos $M \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{3}{M} < \epsilon$ y $|f_M(w) - g(w)| < \frac{\epsilon}{3}$ (la sucesión $(f_m)_m$ converge uniformemente, y en particular puntualmente, hacia g en B). Como $w \in B$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $w \in A_{M,N}$. Para todo $m \geq \max\{M, N\}$ tenemos

- $|h_m(w_{M,N}) - g(w_{M,N})| < \frac{1}{M}$ gracias a (A.7) y
- $|h_m(w) - h_m(w_{M,N})| < \frac{1}{M}$ porque $w, w_{M,N} \in A_{M,N}$ y $h_m \in F(A_{M,N}, \frac{1}{M})$.

Utilizando la desigualdad triangular

$$|h_m(w) - g(w)| \leq \frac{2}{M} + |g(w_{M,N}) - g(w)| = \frac{2}{M} + |f_M(w) - g(w)| < \epsilon.$$

Esto prueba $\lim_m h_m = g$ en B y finaliza la demostración del teorema. $\square$

Como aplicación inmediata obtenemos [56, Corolario 6]:

Corolario A.5.4. *Si $\mathcal{F} \subset \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\mu)$ es uniformemente absolutamente continuo y tiene la propiedad de Bourgain, entonces la inclusión natural*

$$i : (\mathcal{F}, \tau) \longrightarrow (L^1(\mu), \|.\|_1)$$

es continua.

Demostración. Basta comprobar que $i(\overline{A}^{\tau}) \subset \overline{i(A)}^{\|\cdot\|}$ para cada $A \subset \mathcal{F}$ (aquí τ denota la topología de la convergencia puntual relativa en $\mathcal{F}$). Fijamos un subconjunto A de $\mathcal{F}$ y $g \in \overline{A}^{\tau}$. Es claro que A tiene la propiedad de Bourgain y el teorema A.5.3 garantiza la existencia de una sucesión $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ contenida en $\mathcal{F}$ convergente hacia g en casi todo punto. Aplicando el *teorema de Vitali* A.1.8 obtenemos que $\lim_n \|g_n - g\|_1 = 0$, es decir, $\lim_n i(g_n) = i(g)$. Por tanto $i(g) \in \overline{i(A)}^{\|\cdot\|}$, como se quería demostrar. □

Si fortalecemos la hipótesis de este último resultado, podemos aplicar el teorema de la convergencia dominada para obtener de manera análoga:

Corolario A.5.5. *Si $\mathcal{F} \subset \mathcal{L}^{\infty}_{\mathbb{R}}(\mu)$ es $\|.\|_\infty$-acotado y tiene la propiedad de Bourgain, entonces la inclusión natural $(\mathcal{F}, \tau) \longrightarrow (L^p(\mu), \|.\|_p)$ (que lleva cada función a su clase de equivalencia en L^p) es continua para cualquier $1 \le p < \infty$.*

Corolario A.5.6. *Sea X un espacio de Banach real. Si $f : \Omega \longrightarrow X$ es una función integrable Dunford tal que Z_f*

- *es uniformemente absolutamente continuo y*
- *tiene la propiedad de Bourgain,*

entonces

i) *f es integrable Pettis y*

ii) *Z_f es $\|.\|_1$-compacto (visto como subconjunto de $L^1(\mu)$).*

Demostración. La integrabilidad Pettis de f se sigue de A.4.14 y A.5.4. Este último resultado garantiza la continuidad de la inclusión natural

$$i : (Z_f, \tau) \longrightarrow (L^1(\mu), \|.\|_1).$$

Por tanto, para completar la demostración sólo tenemos que ver que (Z_f, τ) es compacto, y esto es evidente porque (B_{X^*}, ω^*) es compacto (*teorema de Alaouglu* [9, V.3.1]) y podemos dar una aplicación continua y suprayectiva

$$j : (B_{X^*}, \omega^*) \longrightarrow (Z_f, \tau)$$

mediante $j(x^*) = x^* f$. □

Corolario A.5.7. *Sea X un espacio de Banach real. Si $f : \Omega \longrightarrow X$ es una función integrable Dunford tal que Z_f*

- *es un subconjunto acotado de $\mathcal{L}^{\infty}(\mu)$ y*
- *tiene la propiedad de Bourgain,*

entonces f es integrable Pettis y Z_f es $\|.\|_p$-compacto (visto como subconjunto de $L^p(\mu)$) para cada $1 \le p < \infty$.

Demostración. La integrabilidad Pettis de f es consecuencia del resultado anterior. La compacidad se razona como en la prueba precedente, empleando A.5.5 en lugar de A.5.4. □

A.6 Espacios de Banach

BASES DE SCHAUDER

Sea X un espacio de Banach. Se llama *base de Schauder* de X a una sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de vectores de X tal que para cada $x \in X$ existe una *única* sucesión de escalares $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tal que

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n.$$

Definición A.6.1. *Sea X un espacio de Banach. Sea $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de vectores en X. Se dice que es una* sucesión básica *si es una base de Schauder de $X = \overline{span}\{x_n\}$.*

La existencia de sucesiones básicas está garantizada por la siguiente proposición [4, Proposición II.1.3].

Proposición A.6.2 (Banach). *Sea X un espacio de Banach de dimensión infinita. Entonces X contiene una sucesión básica.*

ESPACIOS UNIFORMEMENTE CONVEXOS

Sea $(X, \|.\|)$ un espacio de Banach. Se dice que es *uniformemente convexo* si satisface las siguientes condiciones equivalentes:

i) Para cada $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que para cada $x, y \in B_X$, si $\|x+y\| > 2-\delta$, entonces $\|x - y\| < \epsilon$.

ii) Para cada $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que para cada $x, y \in S_X$, si $\|x+y\| > 2-\delta$, entonces $\|x - y\| < \epsilon$.

iii) Si $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ e $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ son sucesiones en S_X tales que $\left\|\frac{x_n+y_n}{2}\right\| \longrightarrow 1$, entonces $\|x_n - y_n\| \longrightarrow 0$.

La prueba de los dos siguientes teoremas puede encontrarse en [17, Teorema 9.3] y [12, Teorema 1, página 74] respectivamente.

Teorema A.6.3. *Sean (Ω, Σ, μ) un espacio de medida y $1 < p < \infty$. Entonces $(L^p(\mu), \|.\|_p)$ es uniformemente convexo.*

Teorema A.6.4 (N.I. Gurarii y V.I Gurarii). *Sea $(X, \|.\|)$ un espacio de Banach uniformemente convexo con base de Schauder normalizada $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Existen $p > 1$ y una constante $A > 0$ de manera que para cada sucesión de escalares $\{a_n\}n \in \mathbb{N}$ tal que $x = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n$ converja se cumple la siguiente desigualdad:*

$$\|x\| \leq A \left(\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Definición A.6.5. *Un espacio de Banach* $(X, \|.\|)$ *es* localmente uniformemente convexo *si para toda sucesión* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *contenida en* S_X *y* $x \in S_X$

$$\lim_n \left\| \frac{x_n + x}{2} \right\| = 1 \quad \textit{implica} \quad \lim_n \|x_n - x\| = 0.$$

Un espacio de Banach con esta propiedad se suele llamar también *localmente uniformemente rotundo* (o se dice que su norma es *localmente uniformemente rotunda, LUR*). Evidentemente, todo espacio uniformemente convexo tiene norma LUR.

Otros Teoremas Clásicos

Teorema A.6.6 (Mazur). *Si* $C \subset X$ *es convexo, entonces* $\overline{C}^{\|\cdot\|} = \overline{C}^{\omega}$.

Teorema A.6.7 (Eberlein-Smulian). *Un subconjunto* $A \subset X$ *es débilmente (relativamente) compacto si y sólo si es débilmente (relativamente) sucesionalmente compacto.*

Teorema A.6.8 (Josefson-Nissenzweig). *Dado un espacio de Banach* X *de dimensión infinita existe una sucesión* $(x_n^*)_{n\in\mathbb{N}}$ *en* S_{X^*} *que converge hacia* 0 *en la topología* ω^*.

El lector interesado puede encontrar las demostraciones en [17, Teorema 3.19] y [11, Capítulos III y XII] respectivamente.

Subespacios Normantes

El objetivo de esta sección es caracterizar, como indicábamos en 5.2, las topologías débiles generadas por subespacios totales que tienen la propiedad W como aquéllas que están generadas por subespacios normantes.

En lo que sigue $(X, \|.\|)$ es un espacio de Banach y Z un subespacio (algebraico) total de X^*. Recordemos que esto quiere decir que para cada $x \in X$, $x \neq 0$, existe $z^* \in Z$ tal que $z^*(x) \neq 0$. Diremos que Z es normante si además para cada $x \in X$

$$\|x\| = \sup\{|z^*(x)| : z^* \in Z \cap B_{X^*}\}.$$

Lema A.6.9. *Si* Z *es normante, entonces* $\sigma(X, Z) \in W(X, \|.\|)$.

Demostración. Supongamos por reducción al absurdo que existen $0 < d < 1$ y una red $(x_\alpha)_{\alpha\in A}$ contenida en S_X que es $\sigma(X, Z)$-convergente a un vector $x \in S_X$ y verifica $\inf_{a\in[0,1]} \|ax_\alpha + (1-a)x\| < d$ para cada $\alpha \in A$. Tomemos $a_\alpha \in [0, 1]$ cumpliendo

$$\|a_\alpha x_\alpha + (1 - a_\alpha)x\| < d < 1 \quad \text{para todo } \alpha \in A. \tag{A.8}$$

Evidentemente, $a_\alpha x_\alpha + (1-a_\alpha)x = x + a_\alpha(x_\alpha - x) \to x$ en la topología $\sigma(X, Z)$ (la red $(a_\alpha)_{\alpha\in A}$ es acotada y $\sigma(X, Z) - \lim_\alpha x_\alpha = x$). Así, para cada $x^* \in Z \cap B_{X^*}$ se tiene que $\lim_\alpha x^*(a_\alpha x_\alpha + (1 - a_\alpha)x) = x^*(x)$ y de (A.8) deducimos

$$|x^*(x)| = \lim_\alpha |x^*(a_\alpha x_\alpha + (1 - a_\alpha)x)| \leq d.$$

Esta desigualdad es válida para todo $x^* \in Z \cap B_{X^*}$ y, como Z es normante, $\|x\| \leq d < 1$, contradicción. $\square$

Es preciso recordar en este momento un par de resultados elementales de la teoría de espacios localmente convexos. Podemos encontrar la demostración en [17, Teorema 4.25] y [17, Proposición 4.28].

Teorema A.6.10. *Sea (E, τ) un espacio localmente convexo Hausdorff con dual topológico E'. Si $C \subset E$ es cerrado y convexo, entonces para cualquier $x \in E \setminus C$ existe $f \in E'$ tal que*

$$Re(f(x)) > \sup\{Re(f(y)) : \; y \in C\}.$$

Lema A.6.11. *Sea E un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$ y F un subconjunto del dual algebraico de E. Entonces el dual topológico del espacio localmente convexo $(E, \sigma(E, F))$ es precisamente $span(F)$.*

El siguiente resultado es parte del Ejercicio 4.16 de [17].

Proposición A.6.12. *Si B_X es $\sigma(X, Z)$-cerrada, entonces Z es normante.*

Demostración. Para cada $x \in X$ definimos

$$\|x\|_Z = \sup\{|z^*(x)| : \; z^* \in Z \cap B_{X^*}\}.$$

Se trata de ver que $\|x\|_Z = \|x\|$ para cualquier $x \in X$. Si $x = 0$ no hay nada que demostrar. En caso contrario, como Z es total, resulta que $\|x\|_Z > 0$ y $x' = \frac{1}{\|x\|_Z} \cdot x$ verifica $\|x'\|_Z = 1$. Para acabar la prueba basta ver que $\|x'\| = 1$.

Es claro que $\|x'\| \geq \|x'\|_Z = 1$. Supongamos por reducción al absurdo que $\|x'\| > 1$. Entonces $x' \notin B_X$, que es $\sigma(X, Z)$-cerrada y convexa. El anterior *teorema de separación* A.6.10 asegura la existencia de $f \in (X, \sigma(X, Z))'$ tal que $Re(f(x')) > \sup\{Re(f(y)) : \; y \in B_X\}$. El lema previo garantiza que $f \in Z \subset X^*$. Obsérvese que para cualquier $y \in B_X$ con $f(y) \neq 0$ se tiene que $y' = \frac{|f(y)|}{f(y)} \cdot y \in B_X$ y $Re(f(y')) = |f(y)|$, por lo que

$$|f(x')| > \sup\{|f(y)| : \; y \in B_X\} = \|f\|.$$

Evidentemente esta desigualdad garantiza que $\|f\| > 0$ y así $f' = \frac{1}{\|f\|} \cdot f$ satisface $|f'(x')| > 1$. Pero $f' \in Z \cap B_{X^*}$, luego $\|x'\|_Z \geq |f'(x')| > 1$, contradicción. $\square$

Proposición A.6.13 (Raja). *Si τ es una topología vectorial Hausdorff en X que tiene la propiedad W respecto de $\|.\|$, entonces B_X es τ-cerrada.*

Demostración. Supongamos que B_X no es τ-cerrada. Entonces existe una red $(x_\alpha)_{\alpha \in A}$ contenida en B_X y τ-convergente a un punto $x \notin B_X$.

Observamos que para cada $\alpha \in A$ existe $t_\alpha > 1$ de manera que

$$y_\alpha = t_\alpha(x_\alpha - x) + x$$

cumple $\|y_\alpha\| = \|x\|$. En efecto, para cada $\alpha \in A$ la función $t \mapsto \|t(x_\alpha - x) + x\|$ es continua, toma un valor menor que $\|x\|$ en $t = 1$ y $\lim_{t\to\infty} \|t(x_\alpha - x) + x\| = +\infty$ porque $\|t(x_\alpha - x) + x\| \geq \big|\, |t| \cdot \|x_\alpha - x\| - \|x\| \,\big|$ para todo $t \in \mathbb{R}$.

Además, para cada $\alpha \in A$ se cumple $\|t_\alpha(x_\alpha - x)\| \leq \|y_\alpha\| + \|x\| = 2\|x\|$, luego

$$|t_\alpha| \leq \frac{2\|x\|}{\|x - x_\alpha\|} \leq \frac{2\|x\|}{\|x\| - 1}.$$

Por tanto, la red $(t_\alpha)_{\alpha\in A}$ está acotada y resulta que $\tau - \lim_\alpha y_\alpha = x$. Definimos $y'_\alpha = \frac{1}{\|x\|} \cdot y_\alpha \in S_X$ para cada $\alpha \in A$ y $x' = \frac{1}{\|x\|} \cdot x \in S_X$. Claramente

$$\tau - \lim_\alpha y'_\alpha = x'.$$

Sin embargo, para cualquier $\alpha \in A$ tenemos $0 < \frac{1}{t_\alpha} < 1$ y

$$\left\| \frac{1}{t_\alpha} \cdot (y'_\alpha - x') + x' \right\| = \left\| \frac{1}{\|x\|} \cdot x_\alpha \right\| \leq \frac{1}{\|x\|} < 1.$$

Por tanto, τ no tiene la propiedad W respecto de $\|.\|$. $\square$

Como consecuencia del lema A.6.9 y las dos anteriores proposiciones tenemos la caracterización anunciada en la Sección 5.2:

Corolario A.6.14. *Son equivalentes:*

i) La topología $\sigma(X, Z)$ tiene la propiedad W respecto de $\|.\|$.

ii) El subespacio Z es normante.

A.7 Miscelánea

En [53, 6.3] se demuestra la siguiente

Proposición A.7.1. *Sea $C = \frac{1}{\pi}$. Para cada $z_1, \ldots, z_n \in \mathbb{C}$ existe un subconjunto $S \subset \{1, \ldots, n\}$ tal que*

$$C \sum_{i=1}^{n} |z_i| \leq \left| \sum_{i\in S} z_i \right|.$$

De hecho, esta propiedad es extensible (y caracteriza, como se pone de manifiesto en [6, Teorema 1.9.16]) a los espacios de Banach de dimensión finita.

Proposición A.7.2. *Si X es un espacio de Banach de dimensión finita, existe una constante $C > 0$ tal que para cada $z_1, \ldots, z_n \in X$ existe $S \subset \{1, \ldots, n\}$ de manera que*

$$C \sum_{i=1}^{n} \|z_i\| \leq \left\| \sum_{i\in S} z_i \right\|.$$

Lema A.7.3. *Si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión débilmente convergente a x en el espacio de Banach X,*

$$\|x\| \leq \overline{\lim}_n \|x_n\|.$$

Demostración. El teorema de Hahn-Banach garantiza la existencia de $x^* \in B_{X^*}$ tal que $|x^*(x)| = \|x\|$. La convergencia débil implica

$$\|x\| = \lim_n |x^*(x_n)| \leq \overline{\lim_n} \|x_n\|,$$

como se quería demostrar. □

Todo espacio de Banach X tiene, de manera natural, una estructura de espacio de Banach real, que denotaremos mediante $\tilde{X}$ (se obtiene restringiendo el producto por escalares a los reales).

Lema A.7.4. *Las aplicaciones*

- $\Re : X^* \longrightarrow \tilde{X}^*$ *(que toma la parte real de cada forma);*
- $\tilde{X}^* \longrightarrow X^*$ *dada por* $g(x) \mapsto g(x) - ig(ix)$*;*

establecen biyecciones mutuamente inversas entre X^* y $\tilde{X}^*$ que preservan la norma.

Los detalles se pueden consultar en [17, Capítulo 2].

Bibliografía

[1] A. Alexiewicz, W. Orlicz. *Remarks on Riemann-integration of vector-valued functions*. Studia Math. 12 (1951), 125-132.

[2] T. Apostol. *Análisis Matemático*. Reverté (1988).

[3] J. Arias de Reyna, J. Diestel, V. Lomonosov, L. Rodríguez-Piazza. *Some observations about the space of weakly continuous functions from a compact space into a Banach space*. Quaestiones Mathematicae 15 (1992), 415-425.

[4] B. Beauzamy. *Introduction to Banach Spaces and their Geometry*. Mathematics Studies 68. North-Holland (1982).

[5] S.S. Cao. *The Henstock integral for Banach-valued functions*. SEA Bull. Math. 16, no. 1 (1992), 35-40.

[6] B. Cascales, J.M. Mira. *Análisis Funcional*. Serie Textos Guías. Universidad de Murcia (2002).

[7] D.L. Cohn. *Measure Theory*. Birkhäuser (1993).

[8] W. Congxin, Y. Xiaobo. *A Riemann-type definition of the Bochner integral*. J. Math. Study 27, no. 1 (1994), 32-36.

[9] J.B. Conway. *A course in Functional Analysis*. Springer Verlag (1985).

[10] L. Di Piazza, K. Musial. *A characterization of variationally McShane integrable Banach-space valued functions*. Illinois Journal of Mathematics 45, no. 1 (2001), 279-289.

[11] J. Diestel. *Sequences and series in Banach spaces*. Springer-Verlag (1984).

[12] J. Diestel. *Geometry of Banach Spaces. Selected topics*. Springer (1975).

[13] J. Diestel, J.J. Uhl. *Vector Measures*. Mathematical Surveys and Monographs 15. American Mathematical Society (1977).

[14] N. Dunford, J.T. Schwartz. *Linear operators. Part I*. Interscience (1958).

[15] G.A. Edgar. *Measurability in a Banach space, II.* Indiana University Mathematics Journal 28, no. 4 (1979), 559-580.

[16] H.W. Ellis. *On the limits of Riemann sums.* Journal London Math. Soc. 34, no. 1 (1959), 93-100.

[17] M. Fabian, P. Habala, P. Hajek, V. Montesinos, J. Pelant, V. Zizler. *Functional Analysis and Infinite-Dimensional Geometry.* Springer (2001).

[18] D.H. Fremlin. *The Henstock and McShane integrals of vector-valued functions.* Illinois Journal of Mathematics 38, no. 3 (1994), 471-479.

[19] D.H. Fremlin. *The generalized McShane integral.* Illinois Journal of Mathematics 39, no. 1 (1995), 39-67.

[20] D.H. Fremlin, J. Mendoza. *On the integration of vector-valued functions.* Illinois Journal of Mathematics 38, no. 1 (1994), 127-147.

[21] R.A. Gordon. *Riemann integration in Banach spaces.* Rocky Mountain Journal of Mathematics 21, no. 3 (1991), 923-949.

[22] R.A. Gordon. *The McShane integral of Banach-valued functions.* Illinois Journal of Mathematics 34, no. 3 (1990), 557-567.

[23] R.A. Gordon. *Some comments on the McShane and Henstock integrals.* Real Analysis Exchange 23, no. 1 (1997/8), 329-342.

[24] I. Halperin, N. Miller. *An inequality of Steinitz and the limits of Riemann sums.* Trans. Roy. Soc. Canada Sect. III (3) 48 (1954), 27-29.

[25] P. Hartman. *On the limits of Riemann approximating sums.* Quarterly J. Math. Oxford Ser. 18 (1947), 124-127.

[26] P. Hartman. *On limits of Riemann sums and the range of integrals.* Math. Annalen 176 (1968), 208-220.

[27] R. Henstock. *Theory of Integration.* Butterworths (1963).

[28] R. Henstock. *A Riemann-type integral of Lebesgue power.* Canadian Journal of Math. 20 (1968), 79-87.

[29] E. Hewitt, K. Stromberg. *Real and Abstract Analysis.* Springer-Verlag (1975).

[30] T.H. Hildebrandt. *Integration in abstract spaces.* Bull. Amer. Math. Soc. 59 (1953), 111-139.

[31] S. Hu, V. Lakshmikantham. *Some remarks on generalized Riemann integral.* Journal of Mathematical Analysis and Applications 137 (1989), 515-527.

[32] R.L. Jeffery. *Limit points of Riemann sums.* Trans. Roy. Soc. Canada Sect. III. (3) 44 (1950), 43-49.

[33] M.I. Kadets, V.M. Kadets. *Conditions for the convexity of the set of limits of Riemann sums of a vector-valued function.* Math. Notes 35, no. 1-2 (1984), 85-88.

[34] M.I. Kadets, V.M. Kadets. *Series in Banach Spaces.* Operator Theory, Advances and Applications, vol 94. Birkhäuser Verlag (1997).

[35] V.M. Kadets. *The domain of weak limits of integral Riemann sums of an abstract function.* Soviet Math. (Iz. VUZ) 32, no. 9 (1988), 56-66.

[36] V.M. Kadets. *On the Riemann integrability of weakly continuous functions.* Quaestiones Mathematicae 17, no. 17 (1994), 33-35

[37] V.M. Kadets, L.M. Tseytlin. *On "integration" of non-integrable vector-valued functions.* Mat. Fiz. Anal. Geom. 7, no. 1 (2001), 49-65.

[38] V.M. Kadets, B. Shumyatskiy, R. Shvidkoy, L. Tseytlin, K. Zheltukhin. *Some remarks on vector-valued integration.* Mat. Fiz. Anal. Geom. 9, no. 1 (2002), 48-65.

[39] J.L. Kelley. *General Topology.* D. van Nostrand (1957).

[40] Y. Kubota. *A note in McShane's integral.* Math. Japonica 30, no. 1 (1985), 57-62.

[41] J. Kurzweil. *Generalized ordinary differential equations and continuous dependence on a parameter.* Czechoslovak Math. Jour. 7 (82) (1957), 418-446.

[42] R. McLeod. *The generalized Riemann integral.* Carus Mathematical Monographs 20. Math. Association of America (1980).

[43] E.J. McShane. *A Riemann-type integral that includes Lebesgue-Stieltjes, Bochner and stochastic integrals.* Memoirs of the American Mathematical Society, no. 88 (1969).

[44] E.J. McShane. *Unified Integration.* Academic Press (1983).

[45] M. Nakamura, I. Amemiya. *On the limits of Riemann sums of functions in Banach spaces.* J. Fac. Sci. Hokkaido Univ. Ser. I 19, no. 3-4 (1966), 135-145.

[46] L. Narici, E. Beckenstein. *Topological Vector Spaces.* Marcel Dekker (1985).

[47] A.S. Nemirovskii, M.Y. Ochan, R. Rejouani. *On the conditions for Riemann integrability of functions with values in a Banach space.* Moscow University Mathematics Bulletin 27, no. 4 (1972), 62-65.

[48] J.M. Ortega. *Introducción al Análisis Matemático*. Labor (1993).

[49] A. Pelczynski. *On Banach spaces containing* $L^1(\mu)$. Studia Mathematica 30 (1968), 231-246.

[50] R. Rejouani. *On the question of the Riemann integrability of functions with values in a Banach space* (En ruso). Vestnik Moscov. Univ. Ser. I Math. Meh. 26, no. 4 (1971), 75-79.

[51] R. Rejouani. *The Riemann integral in Banach spaces*. Moscow University Mathematics Bulletin 27, no. 5 (1972), 44-49.

[52] L. Riddle, E. Saab. *On functions that are universally Pettis integrable*. Illinois Journal of Mathematics 29, no. 3 (1985), 509-531.

[53] W. Rudin. *Análisis Real y Complejo*. McGraw-Hill (1987).

[54] V.A. Skvortsov, A.P. Solodov. *A variational integral for Banach-valued functions*. Real Analysis Exchange 24, no. 2 (1998/9), 799-806.

[55] M. Talagrand. *Pettis integral and measure theory*. Memoirs of the American Mathematical Society, 307 (1984).

[56] G. Vera. *Pointwise compactness and continuity of the integral*. Revista Matemática de la Universidad Complutense de Madrid, Volumen 9 (1996), 221-245.

[57] C. Wang, Z. Yang. *Some topological properties of Banach spaces and Riemann integration*. Rocky Mountain Journal of Mathematics 30, no. 1 (2000), 393-400.

[58] R.L. Wheeden, A. Zygmund. *Measure and Integral*. Marcel Dekker (1977).