

A

Sucesiones y series de funciones

Convergencia puntual y convergencia uniforme. Condición de Cauchy y criterio de Weierstrass. Teoremas sobre continuidad, derivabilidad e integrabilidad del límite de una sucesión de funciones. Versiones para series

En este capítulo, que se desarrolla en el ámbito de las funciones reales de una variable real, se estudia cuando el límite de una sucesión de funciones continuas, integrables o derivables hereda la correspondiente propiedad. Ejemplos sencillos muestran que la convergencia puntual es insuficiente para este propósito, y este inconveniente motiva la introducción de la convergencia uniforme, con la que se consigue la conservación de la continuidad, de la integrabilidad, así como el paso al límite bajo la integral (teoremas A.6 y A.7). El tercer resultado central de este capítulo (teorema A.11) se refiere a la derivabilidad del límite de una sucesión de funciones, y a la validez de la derivabilidad término a término (la derivada del límite es el límite de las derivadas). Para este resultado la hipótesis adecuada es la convergencia uniforme de la sucesión de derivadas junto con la convergencia de la sucesión en algún punto.

Estos resultados tienen sus correspondientes versiones para series de funciones y para establecer la convergencia uniforme de estas series son muy útiles el criterio de Weierstrass, y los criterios de Abel y Dirichlet. La trascendencia del criterio de Weierstrass se pone de manifiesto al utilizarlo para definir funciones patológicas, como el célebre ejemplo de Weierstrass de una función continua que no es derivable en ningún punto.

En relación con el problema del paso al límite bajo la integral se mencionan en este capítulo, sin demostración, otros resultados más generales que garantizan el paso al límite bajo una integral impropia en términos de la existencia de una función dominadora (un anticipo modesto de los potentes resultados que proporciona la integral de Lebesgue). Aunque no se demuestren estos resultados se ven algunos ejemplos de aplicación y se proponen algunos ejercicios sobre este asunto.

A.1. Convergencia puntual y uniforme

Una sucesión de funciones $f_n : T \rightarrow \mathbb{R}$ definidas en un conjunto $T \subset \mathbb{R}$ se dice que converge puntualmente cuando para cada $t \in T$ la sucesión de números reales $f_n(t)$ es convergente. En este caso el límite puntual de la sucesión f_n es la función $f : T \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(t) = \lim_n f_n(t)$.

Ejemplo A.1 La sucesión $f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $f_n(t) = t^n$, converge puntualmente hacia la función discontinua $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, que vale 0 si $0 \leq t < 1$, y $f(1) = 1$. (Véase *Figura 1*).

Si f es el límite puntual de f_n , dados $t \in T$, y $\epsilon > 0$ existe $n(\epsilon, t) \in \mathbb{N}$ tal que $n \geq n(\epsilon, t) \Rightarrow |f_n(t) - f(t)| \leq \epsilon$. Es decir, la ϵ -aproximación al límite se consigue a partir de un valor de n que depende de t . Al considerar otro punto $t' \in T$, puede ocurrir que con este valor de n no se logre la aproximación $|f_n(t') - f(t')| \leq \epsilon$, y sea necesario avanzar más en la sucesión hasta conseguirla. En el ejemplo A.1 se aprecia gráficamente que al tomar puntos t cada vez más próximos a 1 la sucesión $f_n(t)$ va tardando más tiempo en entrar en el entorno $(-\epsilon, \epsilon)$ de su límite $f(t) = 0$. Con este ejemplo se pone de manifiesto que la convergencia puntual no garantiza la continuidad del límite de una sucesión de funciones continuas.

El ejemplo que sigue muestra que la convergencia puntual tampoco garantiza la integrabilidad del límite de una sucesión de funciones integrables.

Ejemplo A.2 Sea $\{r_n : n \in \mathbb{N}\}$ una enumeración de $\mathbb{Q} \cap [0, 1]$, y $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f_n(x) = 1$ si $x \in \{r_k : 1 \leq k \leq n\}$, $f_n(x) = 0$ si $x \notin \{r_k : 1 \leq k \leq n\}$. Cada f_n es integrable Riemann en $[0, 1]$ con $\int_0^1 f_n(t) dt = 0$, pero la sucesión f_n converge puntualmente hacia la función no integrable

$$f(x) = 1 \text{ si } x \in \mathbb{Q}, \quad f(x) = 0 \text{ si } x \notin \mathbb{Q}$$

Con el siguiente ejemplo (véase ([5] prob.12, pág. 222) queda patente que el paso al límite bajo la integral tampoco es lícito cuando la función límite es integrable y la convergencia es puntual.

Ejemplo A.3 Si $p \geq 1$, en el intervalo $[0, 1]$ la sucesión $f_n(x) = n^p x(1 - x^2)^n$ converge puntualmente hacia la función idénticamente nula $f \equiv 0$. Sin embargo no converge hacia $0 = \int_0^1 f(x) dx$ la sucesión de las integrales, ya que

$$\int_0^1 n^p x(1 - x^2)^n dx = \left[-\frac{n^p}{2} \frac{(1 - x^2)^{n+1}}{n+1} \right]_0^1 = \frac{n^p}{2(n+1)}$$

(Véase *Figura 2* .)

En los teoremas A.6 y A.7 veremos que con la noción de convergencia uniforme, formulada en la siguiente definición, se evitan las patologías de los ejemplos anteriores

Definición A.4 Se dice que la sucesión $f_n : T \rightarrow \mathbb{R}$ converge uniformemente hacia $f : T \rightarrow \mathbb{R}$ si para cada $\epsilon > 0$ existe $n(\epsilon) \in \mathbb{N}$ (que depende sólo de ϵ) tal que para todo $n \geq n(\epsilon)$ y todo $t \in T$ se cumple $|f_n(t) - f(t)| \leq \epsilon$.

Es inmediato que la convergencia uniforme implica la convergencia puntual y el ejemplo A.1 pone de manifiesto que el recíproco es falso. La convergencia uniforme es más fuerte que la convergencia puntual porque en ella el valor de n a partir del cual se consigue la aproximación prefijada $|f_n(t) - f(t)| \leq \epsilon$, es independiente del punto $t \in T$, es decir, se exige aproximación uniforme al límite en todos los puntos.

Si $K \subset T$ y la sucesión $f_n|_K$ converge puntualmente (resp. uniformemente) se dice, más brevemente, que la sucesión f_n converge puntualmente (resp. uniformemente) sobre K . Con el fin de formular la condición de convergencia uniforme de modo más conciso conviene introducir la siguiente notación: Si $K \subset T$, dadas $f, g : T \rightarrow \mathbb{R}$, definimos $\rho_K(f, g) = \sup\{|f(t) - g(t)| : t \in K\} \leq +\infty$. Ahora, el hecho de que la sucesión $f_n : T \rightarrow \mathbb{R}$ sea uniformemente convergente hacia $f : T \rightarrow \mathbb{R}$ se escribe en la forma $\lim_n \rho_T(f_n, f) = 0$. Análogamente, la convergencia uniforme sobre $K \subset T$ se expresa mediante la condición $\lim_n \rho_K(f_n, f) = 0$.

A veces ocurre que una sucesión de funciones $f_n : T \rightarrow \mathbb{R}$, no converge uniformemente sobre todo T , pero la convergencia es uniforme sobre cada conjunto A de cierta familia \mathcal{A} de subconjuntos de T . En ese caso se dice que la sucesión converge uniformemente sobre los conjuntos de \mathcal{A} . Como caso particular, cuando \mathcal{A} es la familia de los subconjuntos compactos de T , se habla de convergencia uniforme sobre compactos.

Proposición A.5 [Condición de Cauchy] Una sucesión de funciones $f_n : T \rightarrow \mathbb{R}$ converge uniformemente sobre $K \subset T$ si y sólo si cumple:

Para cada $\epsilon > 0$ existe $n(\epsilon) \in \mathbb{N}$ tal que $[k > n \geq n(\epsilon), t \in K] \Rightarrow |f_n(t) - f_k(t)| \leq \epsilon$.

DEM: La demostración de que la condición es necesaria es inmediata y se deja al cuidado del lector. La condición es suficiente: La sucesión es puntualmente convergente porque, para cada $t \in K$, la sucesión $f_n(t)$ cumple la condición de Cauchy. Sea $f : K \rightarrow \mathbb{R}$ el límite puntual de la sucesión. Veamos que la convergencia es uniforme. Dado $\epsilon > 0$, si $k > n \geq n(\epsilon)$, para todo $t \in K$ se cumple $|f_n(t) - f_k(t)| \leq \epsilon$. Fijando $t \in K$ y pasando al límite cuando $k \rightarrow +\infty$ la desigualdad se convierte en $|f_n(t) - f(t)| \leq \epsilon$, que resulta válida para todo $t \in K$ y todo $n \geq n(\epsilon)$. ■

OBSERVACIÓN: La condición de Cauchy para la convergencia uniforme sobre $K \subset T$ se puede expresar de modo conciso asociando a la sucesión de funciones $f_n : T \rightarrow \mathbb{R}$ la sucesión numérica $\alpha_n = \sup_{k \geq n} \sup_{t \in K} |f_n(t) - f_k(t)| \leq +\infty$. Así la condición de Cauchy para la convergencia uniforme sobre K equivale a que $\lim_n \alpha_n = 0$. Basta observar que la implicación $[k > n \geq n(\epsilon), t \in K] \Rightarrow |f_n(t) - f_k(t)| \leq \epsilon$ se traduce en la forma siguiente: $n \geq n(\epsilon) \Rightarrow 0 \leq \alpha_n \leq \epsilon$.

A.2. Continuidad, derivabilidad e integrabilidad del límite

Teorema A.6 *Si la sucesión $f_n : T \rightarrow \mathbb{R}$ converge uniformemente hacia $f : T \rightarrow \mathbb{R}$ y cada f_n es continua en $a \in T$ entonces el límite f también lo es. En particular, si las funciones f_n son continuas en todo punto, el límite uniforme f también lo es.*

DEM: Dado $\epsilon > 0$, en virtud de la convergencia uniforme, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que para todo $t \in T$ se cumple $|f_m(t) - f(t)| \leq \epsilon/3$. Por la continuidad de f_m en a , existe $r > 0$ tal que si $|t - a| < r$ y $t \in T$ se cumple $|f_m(t) - f_m(a)| \leq \epsilon/3$, luego $|f(t) - f(a)| \leq |f(t) - f_m(t)| + |f_m(t) - f_m(a)| + |f_m(a) - f(a)| \leq \epsilon$. ■

Obsérvese que, en las condiciones del teorema anterior, para conseguir la continuidad del límite f en un punto concreto $a \in T$ basta suponer que las funciones de la sucesión son continuas en a y que la convergencia de la sucesión es uniforme en $V_a \cap T$ donde V_a es un entorno de a . Por lo tanto la continuidad global del límite f se conseguirá cuando las funciones de la sucesión sean continuas en todo punto y cada $a \in T$ tenga un entorno abierto V_a tal que la sucesión sea uniformemente convergente sobre $T \cap V_a$. Cuando ocurra esto diremos que hay *convergencia uniforme local*. Es claro que la convergencia uniforme sobre todo T implica la convergencia uniforme local pero la afirmación recíproca es falsa: La sucesión considerada en el ejemplo A.1 no converge uniformemente sobre $T = (0, 1)$, pero para cada $a \in (0, 1)$, la sucesión converge uniformemente en $(a - r, a + r) \subset (0, 1)$, donde $0 < a - r < a + r < 1$.

Es fácil ver que la convergencia uniforme local implica la convergencia uniforme sobre compactos y que el recíproco es cierto cuando $T \subset \mathbb{R}$ es un intervalo.

Teorema A.7 *Sea $f_n : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una sucesión de funciones integrables Riemann que converge uniformemente hacia $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. Entonces f es integrable Riemann en $[a, b]$ y $\int_a^b f(t)dt = \lim_n \int_a^b f_n(t)dt$.*

DEM: Sabemos que la sucesión $\rho_n = \sup\{|f_n(t) - f(t)| : t \in [a, b]\} \leq +\infty$, converge hacia 0, luego existe n_0 tal que $\rho_n < +\infty$, para todo $n \geq n_0$. Para $n > n_0$ y todo $t \in [a, b]$ se cumple $f_n(t) - \rho_n \leq f(t) \leq f_n(t) + \rho_n$, luego f es acotada en $[a, b]$. Además, para todo $n \in \mathbb{N}$, en virtud de la monotonía de la integral inferior y de la integral superior se cumple

$$\int_a^b (f_n(t) - \rho_n)dt \leq \underline{\int_a^b} f \leq \overline{\int_a^b} f \leq \int_a^b (f_n(t) + \rho_n)dt$$

luego

$$0 \leq \overline{\int_a^b} f - \underline{\int_a^b} f \leq 2\rho_n(b - a)$$

y pasando al límite se obtiene $\overline{\int_a^b} f = \underline{\int_a^b} f$, es decir, f es integrable sobre $[a, b]$.

Por otra parte, usando la desigualdad $|f(t) - f_n(t)| \leq \rho_n$, válida para todo $t \in [a, b]$, y todo $n \in \mathbb{N}$, resulta

$$\left| \int_a^b f_n(t) dt - \int_a^b f(t) dt \right| \leq \int_a^b |f(t) - f_n(t)| dt \leq \rho_n(b-a)$$

luego, $\lim_n \int_a^b f_n(t) dt = \int_a^b f(t) dt$. ■

La sucesión del ejemplo A.2 pone de manifiesto que en el teorema anterior la hipótesis de convergencia uniforme es esencial para conseguir la integrabilidad de la función límite. Por otra parte, el ejemplo A.3 muestra que el paso al límite bajo la integral tampoco es lícito cuando el límite es integrable y sólo se supone convergencia puntual. Cuando la función límite es integrable Riemann los siguientes resultados (teoremas A.8 y A.9) garantizan el paso al límite bajo la integral con hipótesis más débiles que la convergencia uniforme.

Teorema A.8 *Sea $f_n : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una sucesión de funciones integrables Riemann que converge puntualmente hacia una función integrable Riemann $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. Si la sucesión f_n es uniformemente acotada, (existe $C > 0$ tal que $|f_n(t)| \leq C$ para todo $t \in [a, b]$, y todo $n \in \mathbb{N}$) entonces, $\int_a^b f = \lim_n \int_a^b f_n$.*

Recordemos que $f : (\alpha, \beta) \rightarrow \mathbb{R}$ se dice que es localmente integrable (Riemann) cuando es integrable Riemann sobre cada $[a, b] \subset (\alpha, \beta)$. En lo que sigue diremos que la sucesión $f_n : (\alpha, \beta) \rightarrow \mathbb{R}$ está dominada por la función $g : (\alpha, \beta) \rightarrow [0, +\infty)$ cuando para todo $t \in (\alpha, \beta)$ y todo $n \in \mathbb{N}$ se cumple $|f_n(t)| \leq g(t)$.

Teorema A.9 *Sea $f_n : (\alpha, \beta) \rightarrow \mathbb{R}$ una sucesión de funciones localmente integrables que converge puntualmente hacia una función $f : (\alpha, \beta) \rightarrow \mathbb{R}$ localmente integrable. Se supone que*

i) Las integrales impropias $\int_\alpha^\beta f_n(t) dt$ son absolutamente convergentes.

ii) La sucesión f_n está dominada por una función localmente integrable Riemann $g : (\alpha, \beta) \rightarrow [0, +\infty)$ con $\int_\alpha^\beta g(t) dt < +\infty$.

Entonces la integral impropia $\int_\alpha^\beta f(t) dt$ es absolutamente convergente y se verifica $\int_\alpha^\beta f(t) dt = \lim_n \int_\alpha^\beta f_n(t) dt$.

La demostración directa de los teoremas A.8, A.9, con los recursos propios de la integral de Riemann es técnicamente complicada y no la expondremos aquí. Estos dos teoremas son versiones particulares de resultados generales sobre la integral de Lebesgue que el lector interesado puede consultar en el capítulo 10 de [2]. Esperamos que estos resultados sirvan de motivación para que el lector se interese por la integral de Lebesgue, más potente y flexible que la de Riemann.

Con los teoremas A.6 y A.7 ha quedado establecido que la continuidad y la integrabilidad Riemann se conservan por convergencia uniforme. No ocurre lo mismo con la derivabilidad, como se verá más adelante en el ejemplo A.17. Incluso cuando el límite es derivable, no se puede garantizar que la derivada del límite de una sucesión uniformemente convergente sea el límite de las derivadas:

Ejemplo A.10 La sucesión $f_n(x) = x/(1 + n^2x^2)$ converge uniformemente hacia la función idénticamente nula, $f(x) \equiv 0$, pero en el punto $x = 0$, las derivadas $f'_n(0) = 1$ no convergen hacia $f'(0) = 0$.

En efecto, es claro que la sucesión de este ejemplo converge puntualmente hacia la función nula $f(x) \equiv 0$, y es fácil ver que la función $|f_n(x) - f(x)| = |f_n(x)|$ alcanza un máximo absoluto en $x = 1/n$, luego $\sup\{|f_n(x) - f(x)| : x \in \mathbb{R}\} = |f_n(1/n)| = \frac{1}{2n}$, de donde se sigue que la sucesión f_n es uniformemente convergente. Sin embargo la sucesión $f'_n(0) = 1$ no converge hacia $f'(0) = 0$. ■

Según los ejemplos A.17 y A.10 para conseguir un resultado sobre derivación término a término de una sucesión de funciones, la convergencia uniforme de la sucesión no es la hipótesis adecuada. Según el siguiente teorema las hipótesis adecuadas son la convergencia de la sucesión en algún punto y la convergencia uniforme de la sucesión de derivadas

Teorema A.11 Sea $f_n : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ una sucesión de funciones derivables en un intervalo acotado $(a, b) \subset \mathbb{R}$, que converge en algún $x_0 \in (a, b)$. Si la sucesión de derivadas f'_n converge uniformemente en (a, b) entonces la sucesión f_n converge uniformemente en (a, b) hacia una función derivable $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$, y para todo $x \in (a, b)$ se cumple $\lim_n f'_n(x) = f'(x)$.

DEM: Consideremos la sucesión de funciones continuas $g_n : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$,

$$g_n(x) = \frac{f_n(x) - f_n(x_0)}{x - x_0} \text{ si } x \neq x_0, g_n(x_0) = f'_n(x_0)$$

(la continuidad de g_n en x_0 es consecuencia de la definición de derivada, y la continuidad en los restantes puntos es inmediata).

a) La sucesión g_n converge uniformemente en (a, b) , pues cumple la condición de Cauchy para la convergencia uniforme A.5:

Si $p > q$, y $x_0 \neq x \in (a, b)$, aplicando el teorema del valor medio a la función derivable $f_p - f_q$ en el intervalo de extremos x, x_0 podemos escribir

$$g_p(x) - g_q(x) = \frac{(f_p(x) - f_q(x)) - (f_p(x_0) - f_q(x_0))}{x - x_0} = f'_p(\xi) - f'_q(\xi)$$

donde ξ es un punto del intervalo de extremos x, x_0 . Por otra parte, cuando $x = x_0$, se tiene $g_p(x_0) - g_q(x_0) = f'_p(x_0) - f'_q(x_0)$, luego, para todo $x \in (a, b)$ se cumple

$$|g_p(x) - g_q(x)| \leq \sup\{|f'_p(t) - f'_q(t)| : t \in (a, b)\}$$

Como la sucesión f'_n verifica la condición de Cauchy para la convergencia uniforme en (a, b) , esta desigualdad implica que la sucesión g_n también la cumple.

b) Sea $y_0 = \lim_n f_n(x_0)$ y $g : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ la función continua que se obtiene como límite uniforme de la sucesión de funciones continuas g_n . Utilizando que la función $(x - x_0)$ es acotada en el intervalo acotado (a, b) se obtiene fácilmente que la sucesión $f_n(x) = f_n(x_0) + (x - x_0)g_n(x)$ converge uniformemente en (a, b) hacia la función

$f(x) = y_0 + (x - x_0)g(x)$. Como $f(x_0) = y_0$, y g es continua en x_0 se sigue que existe el límite

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = g(x_0)$$

luego f es derivable en x_0 y $f'(x_0) = g(x_0) = \lim_n g_n(x_0) = \lim_n f'_n(x_0)$.

Queda demostrado que f es derivable en x_0 , y que $f'(x_0) = \lim_n f'_n(x_0)$. Como ya hemos visto que $f_n(t)$ converge en cada $t \in (a, b)$, reemplazando x_0 por t en toda la demostración anterior, se obtiene que también existe la derivada $f'(t)$, y que $f'(t) = \lim_n f'_n(t)$.

NOTA: Añadiendo la hipótesis de que las derivadas f'_n son continuas, siguiendo el siguiente esquema se puede dar una demostración más breve: Sea $y_0 = \lim_n f_n(x_0)$. Según el teorema A.6, la función $\varphi(t) = \lim_n f'_n(t)$ es continua en (a, b) , luego $f(x) = y_0 + \int_{x_0}^x \varphi(t)dt$ es una función derivable en (a, b) , con derivada $f'(x) = \varphi(x)$. Por otra parte, usando la representación integral $f_n(x) = f_n(x_0) + \int_{x_0}^x f'_n(t)dt$ se demuestra fácilmente que la sucesión f_n converge uniformemente hacia la función f . Entonces, en virtud del teorema fundamental del cálculo, se concluye que en cada $x \in (a, b)$, f es derivable y $f'(x) = \varphi(x) = \lim_n f'_n(x)$. ■

La demostración del último teorema muestra que para una sucesión f_n de funciones derivables en un intervalo (a, b) , la convergencia uniforme de la sucesión de derivadas f'_n se transmite a la sucesión f_n , bajo la hipótesis de que esta sucesión sea convergente en algún punto. Por otra parte, ejemplos sencillos muestran que la convergencia uniforme de una sucesión de funciones derivables no garantiza la convergencia uniforme de la sucesión de derivadas (véase el ejercicio resuelto A.21). El siguiente ejemplo es más sorprendente: Una sucesión de funciones derivables uniformemente convergente tal que la sucesión de derivadas no converge en ningún punto.

Ejemplo A.12 La sucesión $f_n(x) = [\text{sen}(2\pi nx)]/\sqrt{n}$ converge uniformemente en \mathbb{R} hacia la función nula, pero la sucesión de las derivadas $f'_n(x) = 2\pi\sqrt{n} \cos(2\pi nx)$ no converge en ningún punto.

DEM: La sucesión de las derivadas $f'_n(x) = 2\pi\sqrt{n} \cos(2\pi nx)$ no es convergente cuando x es racional, pues si $x = p/q$, donde $p, q \in \mathbb{Z}$, $q > 0$, con $n_k = kq$ se obtiene la subsucesión $f'_{n_k}(x) = 2\pi\sqrt{n_k} \cos(2\pi kp) = 2\pi\sqrt{n_k}$ que no es convergente. Consideremos ahora el caso $x \notin \mathbb{Q}$. Dado $\epsilon \in (0, 1)$, usando la continuidad uniforme de la función $\cos t$ podemos encontrar $\delta > 0$ que cumple

$$|s - t| < \delta \Rightarrow |\cos s - \cos t| < \epsilon$$

Utilizamos ahora la siguiente propiedad de los números irracionales cuya demostración se verá después: Si $x \notin \mathbb{Q}$ el conjunto $A_\beta(x) = \{n \in \mathbb{N} : \exists m \in \mathbb{Z} |nx - m| < \beta\}$ es infinito para cada $\beta > 0$. Usando esta propiedad con $\beta = \delta/2\pi$, obtenemos la subsucesión $f_{n_k}(x)$, donde $\{n_1 < n_2 < n_3 < \dots\} = A_\beta(x)$. Según la definición de $A_\beta(x)$ para cada $k \in \mathbb{N}$ existe $m_k \in \mathbb{Z}$ verificando $|n_k x - m_k| < \beta$, es decir, $|2\pi n_k x - 2\pi m_k| < 2\pi\beta = \delta$, luego $|\cos(2\pi n_k x) - 1| < \epsilon$, de donde se sigue que $\cos(2\pi n_k x) > 1 - \epsilon > 0$. Por lo tanto la sucesión $f'_n(x)$ no es convergente porque tiene una subsucesión $f'_{n_k}(x) = 2\pi\sqrt{n_k} \cos(2\pi n_k x) > 2\pi(1 - \epsilon)\sqrt{n_k}$ que no converge.

Para terminar demostramos la propiedad de los irracionales que hemos usado. Sea $x \notin \mathbb{Q}$ y $\beta > 0$. Es claro que para cada $k \in \mathbb{N}$ existe $q_k \in \mathbb{Z}$ tal que $\alpha_k = q_k + kx \in [0, 1)$. Si $m \in \mathbb{N}$ y $1/m < \beta$, descomponiendo el intervalo $[0, 1]$ en m subintervalos contiguos de longitud $1/m$, es claro que alguno de los subintervalos contiene dos puntos distintos α_i, α_j con $1 \leq i < j \leq m+1$, luego $|\alpha_i - \alpha_j| \leq 1/m < \beta$, es decir $|q_i - q_j + (i - j)x| < \beta$, y esto demuestra que $(i - j) \in A_\beta(x)$. Así queda justificado que $A_\beta(x) \neq \emptyset$ para cada $\beta > 0$. Para ver que $A_\beta(x)$ es infinito no es restrictivo suponer la condición $0 < \beta < 1/2$ y así tenemos garantizado que para cada $n_k \in A_\beta(x)$ existe un único $m_k \in \mathbb{Z}$ verificando $|n_k x - m_k| < \beta$. Razonamos por reducción al absurdo suponiendo que el conjunto $A_\beta(x) = \{n_1 < n_2 < \dots < n_p\}$ es finito. Como $x \notin \mathbb{Q}$ podemos elegir un número $0 < \eta < \min\{|n_k x - m_k| : 1 \leq k \leq p\}$ para el que se cumple que $A_\eta(x) \neq \emptyset$. Obsérvese que, en virtud de la unicidad de los m_k antes mencionada, la elección de η garantiza que $A_\beta(x)$ y $A_\eta(x)$ son disjuntos. Por otra parte, al ser $\eta < \beta$ se debe cumplir que $\emptyset \neq A_\eta(x) \subset A_\beta(x)$ y con esta contradicción termina la demostración. ■

A.3. Series de funciones

Hasta ahora sólo hemos considerado sucesiones de funciones reales definidas en un subconjunto T de la recta real. Es claro que las nociones de convergencia puntual y uniforme se extienden de forma natural al caso de funciones con valores complejos $f_n : T \rightarrow \mathbb{C}$ definidas en un conjunto arbitrario T . En esta situación más general es obvio que sigue valiendo la condición de Cauchy para la convergencia uniforme. También sigue valiendo el teorema de conservación de la continuidad A.6, siempre que tenga sentido hablar de continuidad, como ocurre cuando T es un subconjunto de \mathbb{C} (o más generalmente, un espacio métrico). En lo que sigue, con el fin de poder considerar más adelante las series de potencias de variable compleja, consideraremos siempre series $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(t)$ de funciones $f_n : T \rightarrow \mathbb{C}$, definidas en un conjunto T , que habitualmente será un subconjunto de \mathbb{R} ó \mathbb{C} .

En esta situación la definición de convergencia uniforme tiene su correspondiente versión para series $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(t)$, formulada en términos de la sucesión de sumas parciales $S_n = \sum_{j=1}^n f_j$. Se dice que una serie converge uniformemente sobre $K \subset T$ cuando la sucesión de sus sumas parciales converge uniformemente sobre K . El siguiente resultado es muy útil a la hora de establecer la convergencia uniforme de una serie:

Teorema A.13 [Criterio de Weierstrass] *Una condición suficiente para que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(t)$ de funciones $f_n : T \rightarrow \mathbb{C}$ sea uniformemente convergente sobre $K \subset T$ es que exista una serie numérica convergente $\sum_{n=1}^{\infty} \rho_n$ verificando: $|f_n(t)| \leq \rho_n$ para todo $t \in K$ y todo $n \in \mathbb{N}$.*

DEM: Basta demostrar que la sucesión de sumas parciales $S_n(t) = \sum_{j=1}^n f_j(t)$ cumple la condición de Cauchy para la convergencia uniforme sobre K , es decir, que la sucesión numérica $\alpha_n := \sup_{k > n} \sup_{t \in K} |S_n(t) - S_k(t)|$ converge hacia 0. Obsérvese

que para todo $k > n$ y todo $t \in K$ se cumple

$$|S_n(t) - S_k(t)| = \left| \sum_{j=n+1}^k f_j(t) \right| \leq \sum_{j=n+1}^k |f_j(t)| \leq \sum_{j=n+1}^k \rho_j$$

luego $0 \leq \alpha_n \leq \sum_{j=n+1}^{\infty} \rho_j$, de donde se sigue que $\lim_n \alpha_n = 0$. ■

Cuando se aplica el criterio de Weierstras, además de la convergencia uniforme se obtiene la convergencia absoluta de la serie, de modo que este criterio no sirve para obtener convergencia uniforme de series que no son absolutamente convergentes. Para establecer la convergencia uniforme de series de funciones que no son absolutamente convergentes son muy útiles los criterios de Dirichlet y Abel, recogidos en los siguientes teoremas cuya demostración se basa en la siguiente fórmula de sumación parcial, cuya comprobación se deja al cuidado del lector:

Dadas dos sucesiones finitas de números reales (o complejos) $\{a_j : 1 \leq j \leq n\}$, $\{b_j : 1 \leq j \leq n\}$, para $n \geq 2$ se verifica

$$S_n = a_n B_n + \sum_{j=1}^{n-1} B_j(a_j - a_{j+1}), \quad \text{donde } S_n = \sum_{k=1}^n a_k b_k, \quad B_j = \sum_{k=1}^j b_k$$

Teorema A.14 [Dirichlet] *Una serie de la forma $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n(t)b_n(t)$, con $a_n : T \rightarrow \mathbb{R}$, $b_n : T \rightarrow \mathbb{C}$, converge uniformemente sobre $K \subset T$ cuando se cumple a) y b):*

- a) *La sucesión $B_n(t) = \sum_{j=1}^n b_j(t)$ está uniformemente acotada sobre $K \subset T$.*
 b) *La sucesión $a_n(t)$ es monótona decreciente para cada $t \in K$ y converge uniformemente hacia 0 sobre K .*

DEM: Por hipótesis existe $M > 0$ tal que $|B_n(t)| \leq M$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y todo $t \in K$ y la sucesión $\rho_n = \sup_{t \in K} |a_n(t)|$ converge hacia 0. Según la fórmula de sumación parcial las sumas $S_n(t) = \sum_{k=1}^n a_k(t)b_k(t)$ se pueden escribir en la forma

$$S_n(t) = a_n(t)B_n(t) + \sum_{j=1}^{n-1} B_j(t)(a_j(t) - a_{j+1}(t))$$

Para cada $t \in K$ la sucesión $a_n(t)B_n(t)$ converge hacia 0 (porque es el producto de una sucesión acotada por una sucesión que converge hacia 0) y la serie $\sum_{j=1}^{\infty} B_j(t)(a_j(t) - a_{j+1}(t))$ es absolutamente convergente porque

$$\sum_{j=1}^{\infty} |B_j(t)(a_j(t) - a_{j+1}(t))| \leq M \sum_{j=1}^{\infty} (a_j(t) - a_{j+1}(t)) = Ma_1(t)$$

Se sigue que la sucesión de sumas parciales $S_n(t)$ converge puntualmente en K hacia la función $S(t) = \sum_{j=1}^{\infty} B_j(t)(a_j(t) - a_{j+1}(t))$ que verifica $|S(t)| \leq Ma_1(t)$.

Para terminar debemos demostrar que la sucesión $S_m(t)$ converge hacia $S(t)$ uniformemente sobre K . La serie $\sum_{j=m+1}^{\infty} a_j(t)b_j(t)$ cumple las mismas hipótesis que

la serie original, la única diferencia es que ahora las sumas $B_n^*(t) = \sum_{j=m+1}^n b_j(t)$ están uniformemente acotadas sobre K por la constante $2M$. Según el razonamiento anterior esta serie converge puntualmente sobre K y para todo $t \in K$ se verifica

$$\left| \sum_{j=m+1}^{\infty} a_j(t)b_j(t) \right| \leq 2Ma_{m+1}(t) \leq 2M\rho_{m+1}$$

luego

$$|S(t) - S_m(t)| = \left| \sum_{j=m+1}^{\infty} a_j(t)b_j(t) \right| \leq 2M\rho_{m+1}$$

y así se obtiene que la sucesión S_m converge uniformemente sobre K . ■

Teorema A.15 [Abel] *Una serie de la forma $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n(t)b_n(t)$, con $a_n : T \rightarrow \mathbb{R}$, $b_n : T \rightarrow \mathbb{C}$, converge uniformemente sobre $K \subset T$ cuando se cumple a) y b):*

- a) *La serie $\sum_{n=1}^m b_n(t)$ converge uniformemente sobre $K \subset T$.*
 b) *La sucesión $a_n(t)$ es monótona decreciente para cada $t \in K$ y está uniformemente acotada sobre K .*

DEM: La idea de la demostración consiste en utilizar la fórmula de sumación parcial para ver que la sucesión de sumas parciales $S_n(t) = \sum_{j=1}^n a_j(t)b_j(t)$ cumple la condición de Cauchy para la convergencia uniforme sobre K . Así, para $m > n$ la suma $S_m(t) - S_n(t) = \sum_{j=n+1}^m a_j(t)b_j(t)$ la podemos escribir en la forma

$$S_m(t) - S_n(t) = a_m(t)B_{nm}(t) + \sum_{j=n+1}^{m-1} B_{nj}(t)(a_j(t) - a_{j+1}(t))$$

donde $B_{nj}(t) = \sum_{k=n+1}^j b_k(t)$. Según las hipótesis existe $C > 0$ tal que $|a_j(t)| \leq C$ para todo $t \in K$ y todo $j \in \mathbb{N}$ y además la serie $\sum_{j=1}^{\infty} b_j(t)$ converge uniformemente sobre K , lo que significa (según la condición de Cauchy) que para cada $\epsilon > 0$ existe $n(\epsilon) \in \mathbb{N}$ tal que $[j > n \geq n(\epsilon), t \in K] \Rightarrow |B_{nj}(t)| \leq \epsilon$. Entonces, usando la desigualdad triangular, se obtiene

$$|S_m(t) - S_n(t)| \leq \epsilon|a_m(t)| + \sum_{j=n+1}^{m-1} \epsilon(a_j(t) - a_{j+1}(t))$$

Teniendo en cuenta $\sum_{j=n+1}^{m-1} (a_j(t) - a_{j+1}(t)) = a_{n+1}(t) - a_m(t)$ se obtiene que

$$|S_m(t) - S_n(t)| \leq 3C\epsilon$$

Como esta desigualdad es válida para $m > n \geq n(\epsilon)$ y todo $t \in K$ queda establecido que la sucesión de sumas parciales $S_n(t)$ cumple la condición de Cauchy para la convergencia uniforme sobre K . ■

Los resultados sobre continuidad, integrabilidad y derivabilidad del límite de una sucesión de funciones A.6, A.7, A.11 tienen su correspondiente versión para series

$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(t)$ de funciones reales $f_n : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. Las versiones para series se obtienen de modo inmediato considerando la sucesión de las sumas parciales. A título de ejemplo estableceremos el resultado referente a la integral de la suma de una serie dejando al cuidado del lector los referentes a continuidad y derivabilidad de la suma.

Proposición A.16 *Sea $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(t)$ una serie de funciones $f_n : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ integrables Riemann. Si la serie converge uniformemente entonces la suma $f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t)$ es integrable en $[a, b]$ y se cumple $\int_a^b f = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b f_n$.*

DEM: La sucesión $S_n = \sum_{j=1}^n f_j$, converge uniformemente sobre $[a, b]$ hacia f , y en virtud de A.7 la sucesión $\int_a^b S_n = \sum_{j=1}^n (\int_a^b f_j)$ converge hacia $\int_a^b f$ luego $\sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b f_n = \int_a^b f$. ■

Funciones patológicas definidas por series. En 1875 Weierstrass descubrió el siguiente ejemplo una serie uniformemente convergente de funciones indefinidamente derivables cuya suma es continua pero no es derivable en ningún punto.

Ejemplo A.17 [Weierstrass] *Si $m \in \mathbb{N}$ es impar y $2m > 2mb > 2 + 3\pi$, entonces la serie $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} b^k \cos(m^k \pi x)$ converge uniformemente y define una función continua acotada $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ que no es derivable en ningún punto. (Véase Figura 3)*

La convergencia uniforme de la serie que interviene en el ejemplo anterior es consecuencia directa del criterio de Weierstrass A.13 ya que, al ser $0 < b < 1$, la serie geométrica $\sum_{k=0}^{\infty} b^k$ es convergente, y es claro que para todo $n \in \mathbb{N}$, y todo $x \in \mathbb{R}$ se cumple $|b^k \cos(m^k \pi x)| \leq b^k$. Como la serie está formada por funciones continuas, aplicando el teorema A.6 a la sucesión de sumas parciales $S_n(x) = \sum_{k=1}^n f_k(x)$ se obtiene la continuidad de f . El hecho sorprendente de que esta función no sea derivable en ningún punto es más difícil de establecer, y remitimos a la página 258 del libro [14], donde el lector interesado puede encontrar una demostración.

En 1916 Hardy logró demostrar que lo que ocurre en el ejemplo A.17 se sigue cumpliendo cuando sólo se supone que $m > mb > 1$. Hardy también proporcionó otro ejemplo, similar al de Weierstrass, que resolvía una conjetura de Riemann: La suma de la serie uniformemente convergente $\sum_{k=1}^{\infty} n^{-2} \operatorname{sen}(\pi n^2 x)$ define una función continua que no es derivable en ningún punto. Las sucesivas sumas parciales de esta serie se pueden visualizar en H 1)H 2) H 3)H 4) H 5)H 6)

El siguiente es el clásico ejemplo de Peano de una trayectoria continua y plana cuya imagen llena un cuadrado. Los detalles se pueden ver en [2] pág 225.

Ejemplo A.18 *Sea $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la función continua periódica de periodo 2, cuya restricción al intervalo $[0, 2]$ viene dada por*

$$\begin{array}{ll} \varphi(t) = 0 & \text{si } t \in [0, 1/3] \cup [5/3, 2] \\ \varphi(t) = 1 & \text{si } t \in [2/3, 4/3] \end{array} \quad \begin{array}{ll} \varphi(t) = 3t - 1 & \text{si } t \in [1/3, 2/3] \\ \varphi(t) = 5 - 3t & \text{si } t \in [4/3, 5/3] \end{array}$$

Para cada $t \in [0, 1]$ sea $x(t) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} \varphi(3^{2n-2}t)$; $y(t) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} \varphi(3^{2n-1}t)$. Entonces $\mathbf{f}(t) = (x(t), y(t))$ define una función continua $\mathbf{f} : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ cuya imagen es el cuadrado $[0, 1] \times [0, 1]$.

En [5] págs. 238 y 240 se pueden ver los siguientes ejemplos:

Ejemplo A.19 Sea $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ periódica de periodo 4 determinada por los valores $\varphi(x) = |x|$ para $|x| \leq 2$. La serie $f(x) = \sum_{n \geq 0} 4^{-n} \varphi(4^n x)$ define una función continua $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ que no es derivable en ningún punto

Ejemplo A.20 Para cada $x \in \mathbb{R}$ sea $f_n(x) = nx - [nx]$ (donde $[nx]$ es la parte entera de nx). La serie $f(x) = \sum_{n \geq 0} f_n(x) n^{-2}$ define una función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continua en cada x irracional y discontinua en cada x racional.

A.4. Ejercicios resueltos

Ejercicio A.21 Compruebe que la sucesión de funciones $f_n(x) = e^{-n^2 x^2} / n$ converge uniformemente hacia 0, en \mathbb{R} , pero la sucesión de sus derivadas $f'_n(x) = -2nx e^{-n^2 x^2}$ no converge uniformemente en ningún entorno de 0.

SOLUCIÓN

([5] pág. 222) La primera afirmación es obvia, pues $\max\{f_n(x) : x \in \mathbb{R}\} = f_n(0) = 1/n$. Por otra parte, es fácil ver que la sucesión de derivadas $f'_n(x)$ converge hacia 0 en todo $x \in \mathbb{R}$. Con un esquema de la gráfica de f'_n se observa que $|f'_n|$ alcanza un máximo absoluto en el punto $x_n = 1/(n\sqrt{2})$, cuyo valor es $|f'_n(x_n)| = \sqrt{2}/e$. Si $V \subset \mathbb{R}$ es un entorno de 0, sea $m \in \mathbb{N}$ tal que $n \geq m \Rightarrow x_n \in V$. Entonces, para todo $n \geq m$ se cumple $\sup\{|f'_n(x)| : x \in V\} = |f'_n(x_n)| = \sqrt{2}/e$, luego la sucesión f'_n no converge uniformemente sobre V . ■

Ejercicio A.22 Estudie la convergencia uniforme, en $[0, +\infty)$ de la sucesión

$$f_n(x) = \frac{\log(x+n)}{ne^x}$$

SOLUCIÓN

Si $x \geq 0$ la sucesión $\log(x+n)/n$ converge hacia 0, pues según la regla de l'Hôpital,

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\log(x+t)}{t} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{x+t} = 0$$

Se sigue que para cada $x \geq 0$ existe $\lim_n f_n(x) = 0$, luego la sucesión f_n converge puntualmente, en $[0, +\infty)$, hacia la función idénticamente nula $f \equiv 0$.

Para estudiar la convergencia uniforme sobre $[0, +\infty)$ consideramos la sucesión numérica $\rho_n = \sup\{f_n(x) : x \geq 0\}$ y para calcularla comenzamos estudiando el signo de la derivada

$$f'_n(x) = \frac{1 - (n+x) \log(x+n)}{(n+x)ne^x}$$

Con este fin consideramos la función auxiliar $\varphi(t) = 1 - t \log t$, que crece en $(0, 1/e)$, tiene un máximo absoluto para $t = 1/e$ y decrece en $(1/e, +\infty)$. Como $\varphi(1) = 1 > 0$ y $\varphi(e) = 1 - e < 0$ con el teorema de Bolzano se obtiene que φ se anula en un punto $\alpha \in (1, e)$ y se sigue que $\varphi(t) < 0$ para todo $t > \alpha$.

Cuando $n \geq 3$, para todo $x \geq 0$ se cumple $n + x \geq 3 > \alpha$, luego $\varphi(n + x) < 0$ y por lo tanto $f'_n(x) < 0$. Es decir, para $n \geq 3$, la función f_n es decreciente en $[0, +\infty)$ y por lo tanto $\rho_n = f_n(0) = (\log n)/n$. Como $\lim_n \rho_n = 0$, se concluye que f_n converge hacia 0 uniformemente sobre $[0, +\infty)$. ■

Ejercicio A.23 Demuestre que la sucesión $f_n(x) = (n/x) \log(1 + x/n)$ converge uniformemente sobre $(0, b]$ para todo $b > 0$ pero no converge uniformemente sobre $(0, +\infty)$.

SOLUCIÓN

Como $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\log(1+t)}{t} = 1$ es claro que para cada $x > 0$ existe el límite

$$\lim_n f_n(x) = \lim_n \frac{\log(1 + x/n)}{x/n} = 1$$

luego la sucesión converge puntualmente en $(0, +\infty)$ hacia la función constante 1. Para estudiar la convergencia uniforme en un intervalo $I \subset (0, +\infty)$ hemos de considerar la sucesión numérica $\rho_n(I) = \sup_{x \in I} |f_n(x) - 1|$. Para calcular este supremo conviene estudiar el comportamiento (crecimiento, decrecimiento) de f_n en el intervalo I . Este comportamiento lo proporciona el signo de la derivada $f'_n(x)$ que coincide con el de la expresión

$$\frac{x/n}{1 + x/n} - \log(1 + x/n)$$

Para estudiarlo consideramos la función auxiliar $\varphi(t) = t/(1+t) - \log(1+t)$. Como φ es decreciente en $[0, +\infty)$ (porque $\varphi'(t) \leq 0$) y $\varphi(0) = 0$, se cumple que $\varphi(t) \leq 0$ para todo $t \geq 0$. Se sigue de esto que para todo $n \in \mathbb{N}$ y todo $x \geq 0$ es $f'_n(x) \leq 0$, luego todas las funciones f_n son decrecientes en $(0, +\infty)$. Como $\lim_{x \rightarrow 0} f_n(x) = 1$, se sigue que $|f_n(x) - 1| = 1 - f_n(x)$. Como $1 - f_n(x)$ es creciente en $(0, +\infty)$ se sigue que para $I = (0, b]$ se cumple

$$\rho_n(I) = \sup_{x \in I} |f_n(x) - 1| = \sup_{x \in I} (1 - f_n(x)) = 1 - f_n(b)$$

luego $\lim_n \rho_n(I) = 0$, y la sucesión (f_n) converge uniformemente sobre $I = (0, b]$. Por otra parte, para $J = (0, +\infty)$ se cumple

$$\rho_n(J) = \sup_{x > 0} |f_n(x) - 1| = \sup_{x > 0} (1 - f_n(x)) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (1 - f_n(x)) = 1$$

y por ello la sucesión (f_n) no converge uniformemente sobre $J = (0, +\infty)$. ■

Ejercicio A.24 Se considera la sucesión $f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, definida por $f_n(x) = n^p x(1 - x^2)^n$, Estudie los valores de $p > 0$ para los que la sucesión es uniformemente convergente y los valores de $p > 0$ para los que se cumplen las hipótesis del teorema A.9.

SOLUCIÓN

([5] prob.12, pág. 222) Si $0 < x < 1$ y $r = 1 - x^2$ entonces $0 < r < 1$, luego $\log r < 0$ y por lo tanto la sucesión $n^p r^n = n^p e^{n \log r}$ tiene límite 0 para todo $p \in \mathbb{R}$. Por lo tanto $f_n(x)$ converge hacia 0 para todo $x \in (0, 1)$. Como las sucesiones $f_n(0)$ y $f_n(1)$ también convergen hacia 0, queda establecido que la sucesión f_n converge puntualmente, en $[0, 1]$, hacia la función constante 0.

En virtud del teorema A.7, y teniendo en cuenta el ejemplo A.3, podemos asegurar que para $p \geq 1$ la sucesión f_n no converge uniformemente sobre $[0, 1]$. Veamos directamente que la sucesión converge uniformemente si y sólo si $p < 1/2$. Con un cálculo rutinario que se deja al cuidado del lector se obtiene que el máximo de $f_n(x) \geq 0$ en $[0, 1]$ se alcanza en $x_n = 1/\sqrt{2n+1}$, y vale

$$f_n(x_n) = \frac{n^p}{\sqrt{2n+1}} \left(1 - \frac{1}{2n+1}\right)^n$$

y es claro que esta sucesión converge hacia 0 si y sólo si $p < 1/2$.

Obsérvese que, para $p \in [1/2, 1)$, la sucesión f_n no es uniformemente convergente, y sin embargo, según los cálculos del ejemplo A.3 se cumple que $\lim_n \int_0^1 f_n = \int_0^1 f$. Veamos si en este caso existe una función dominadora de la sucesión f_n que justifique, de acuerdo con el teorema A.9, el paso al límite bajo la integral. Buscamos una función localmente integrable $g : (0, 1] \rightarrow [0, +\infty)$, con integral finita $\int_0^1 g(x) dx < +\infty$, que verifique

$$f_n(x) = n^p x(1 - x^2)^n \leq g(x), \text{ para todo } x \in [0, 1] \text{ y todo } n \in \mathbb{N}.$$

Si $p > 1/2$ el máximo de f_n en $[0, 1]$ tiende hacia infinito y se alcanza en un punto x_n , cada vez más próximo 0. Por lo tanto, la función dominadora, si la hay, no está acotada en los entornos de 0 por lo que es natural buscarla de la forma $g(t) = C/t^\alpha$, con $\alpha < 1$, ya que así se cumplirá la condición $\int_0^1 g(x) dx < +\infty$. En definitiva, basta encontrar $\alpha < 1$, de modo que la sucesión

$$\varphi_n(x) = n^p x^{\alpha+1} (1 - x^2)^n$$

esté uniformemente acotada por alguna constante $C > 0$. Calculando el máximo de φ_n en $[0, 1]$ se observa que con $\alpha \in [2p - 1, 1)$ y $C = 1$ se consigue una función dominadora (recuérdese que en el caso que estamos considerando es $2p - 1 < 1$). ■

Ejercicio A.25 Sea $f_n : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una sucesión de funciones continuas que converge uniformemente hacia una función f tal que $0 \notin f([a, b])$. Demuestre que para n suficientemente grande $0 \notin f_n([a, b])$ y la sucesión $1/f_n$ converge uniformemente sobre $[a, b]$.

SOLUCIÓN

Las funciones f_n son continuas y la convergencia es uniforme, luego la función límite f también es continua. Como $[a, b]$ es cerrado y acotado existe $z \in [a, b]$ donde la función continua $|f|$ alcanza el mínimo absoluto $\min\{|f(x)| : x \in [a, b]\} = |f(z)|$. Por la hipótesis $\mu = |f(z)| > 0$ y en virtud de la convergencia uniforme, existe n_0 tal que para $n \geq n_0$ y todo $x \in [a, b]$ se cumple $|f_n(x) - f(x)| \leq \mu/2$. Esto implica que $0 \notin f_n([a, b])$ cuando $n \geq n_0$ (si fuese $f_n(x) = 0$ para algún $y \in [a, b]$, sería $|f(y)| < \mu/2$, ¡absurdo!).

Si $n \geq n_0$ y $x \in [a, b]$ se cumple $|f_n(x)| \geq |f(x)| - |f(x) - f_n(x)| \geq \mu - \mu/2 = \mu/2$, luego

$$\left| \frac{1}{f_n(x)} - \frac{1}{f(x)} \right| \leq \frac{|f(x) - f_n(x)|}{|f(x)||f_n(x)|} \leq \frac{2}{\mu^2} |f(x) - f_n(x)| \leq \frac{2}{\mu^2} \rho_n$$

donde $\rho_n = \sup_{x \in [a, b]} |f_n(x) - f(x)|$ converge hacia 0. Se sigue que

$$r_n = \sup_{x \in [a, b]} \left| \frac{1}{f_n(x)} - \frac{1}{f(x)} \right| \leq 2\mu^{-2} \rho_n$$

converge hacia 0, lo que significa que $1/f_n$ converge hacia $1/f$ uniformemente sobre $[a, b]$. ■

Ejercicio A.26 Sea $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua tal que $g(x) > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Demuestre que la sucesión de funciones $f_n(x) = ng(x)/(1 + ng(x))$ converge uniformemente sobre cada intervalo acotado $[a, b] \subset \mathbb{R}$. Estudie la convergencia uniforme sobre intervalos no acotados cuando $g(x) = e^x$.

SOLUCIÓN

Para todo $x \in \mathbb{R}$ existe $\lim_n f_n(x) = 1$, es decir, la sucesión f_n converge puntualmente hacia la función constante 1. Para estudiar la convergencia uniforme en un intervalo $I \subset \mathbb{R}$, se considera la sucesión numérica

$$\rho_n(I) = \sup\{|f_n(x) - 1| : x \in I\} = \sup\{1/(1 + ng(x)) : x \in I\}$$

Cuando $I = [a, b] \subset \mathbb{R}$, es claro que $\rho_n([a, b]) = 1/(1 + n\alpha)$ donde $\alpha > 0$ es el mínimo absoluto de la función continua g sobre el intervalo compacto $[a, b]$ (obsérvese que $\alpha = g(x_0)$ para algún $x_0 \in [a, b]$, luego $\alpha > 0$). Como $\lim_n \rho_n([a, b]) = 0$, podemos afirmar que la sucesión f_n converge uniformemente sobre $[a, b]$.

Cuando $g(x) = e^x$, se verifica

$$\rho_n([a, +\infty)) = 1/(1 + ne^a), \quad \rho_n((-\infty, b]) = 1$$

luego la sucesión f_n converge uniformemente sobre los intervalos $[a, +\infty)$, pero no converge uniformemente sobre los intervalos $(-\infty, b]$. ■

Para los ejercicios que siguen se suponen conocidas las funciones elementales de variable compleja: La función exponencial e^z y la validez de la ecuación funcional $e^{z+w} = e^z e^w$, así como la definición habitual de las funciones de variable compleja

$$\operatorname{sen} z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}, \quad \cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \quad \operatorname{tg} z = \frac{\operatorname{sen} z}{\cos z}, \quad \operatorname{cot} z = \frac{\cos z}{\operatorname{sen} z}$$

Ejercicio A.27 *Se considera la función exponencial de variable compleja*

$$e^z = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}$$

Si $|z| \leq m \in \mathbb{N}$, establezca las desigualdades

$$\left| e^z - \left(1 + \frac{z}{m}\right)^m \right| \leq e^{|z|} - \left(1 + \frac{|z|}{m}\right)^m \leq \frac{|z|^2 e^{|z|}}{m}$$

Deduzca de ellas que, para cada $R > 0$, la sucesión $(1 + z/n)^n$ converge hacia e^z uniformemente sobre $\{z : |z| \leq R\}$.

SOLUCIÓN

$e^z - (1 + z/m)^m = D_m + R_m$ donde

$$D_m(z) = \sum_{n=0}^m \frac{z^n}{n!} - \left(1 + \frac{z}{m}\right)^m, \quad R_m(z) = \sum_{n=m+1}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}.$$

Usando la fórmula del binomio de Newton

$$D_m(z) = \frac{z^2}{2!} \left(1 - \frac{m-1}{m}\right) + \frac{z^3}{3!} \left(1 - \frac{(m-1)(m-2)}{m^2}\right) + \cdots + \frac{z^m}{m!} \left(1 - \frac{m!}{m^m}\right)$$

Aplicando la desigualdad triangular y teniendo en cuenta que en la expresión anterior los paréntesis son positivos se obtiene que $|D_m(z)| \leq D_m(|z|)$.

Por otra parte, es inmediato que $|R_m(z)| \leq R_m(|z|)$, luego

$$\left| e^z - \left(1 + \frac{z}{m}\right)^m \right| \leq D_m(|z|) + R_m(|z|) = e^{|z|} - \left(1 + \frac{|z|}{m}\right)^m$$

En virtud de la desigualdad $1 + x \leq e^x$, válida para todo $x \in \mathbb{R}$, se cumple

$$\left(1 + \frac{x}{m}\right)^m \leq e^x, \quad \left(1 - \frac{x}{m}\right)^m \leq e^{-x},$$

y cuando $0 \leq x \leq m$ se obtienen las desigualdades

$$\begin{aligned} 0 &\leq e^x - \left(1 + \frac{x}{m}\right)^m \leq e^x \left[1 - e^{-x} \left(1 + \frac{x}{m}\right)^m\right] \leq \\ &\leq e^x \left[1 - \left(1 - \frac{x}{m}\right)^m \left(1 + \frac{x}{m}\right)^m\right] = e^x \left[1 - \left(1 - \frac{x^2}{m^2}\right)^m\right] = \\ &= e^x \frac{x^2}{m^2} \left[1 + \left(1 - \frac{x^2}{m^2}\right) + \left(1 - \frac{x^2}{m^2}\right)^2 + \cdots + \left(1 - \frac{x^2}{m^2}\right)^{m-1}\right] \leq \\ &\leq e^x \frac{x^2}{m^2} m = \frac{x^2 e^x}{m} \end{aligned}$$

Con $x = |z|$ se obtiene la segunda desigualdad del enunciado. En virtud de las desigualdades establecidas, si $|z| \leq R$, se verifica

$$\left| e^z - \left(1 + \frac{z}{m}\right)^m \right| \leq \frac{R^2 e^R}{m}$$

luego

$$\lim_m \left(1 + \frac{z}{m}\right)^m = e^z \quad \text{uniformemente en } \{z : |z| \leq R\}.$$

■

Ejercicio A.28 *Se supone que la sucesión $f_n : K \rightarrow \mathbb{C}$ converge uniformemente sobre K hacia una función $f = u + iv$ cuya parte real u está acotada superiormente sobre K . Demuestre que la sucesión $e^{f_n(z)}$ converge uniformemente sobre K .*

SOLUCIÓN

Se supone que $u(z) \leq M$ para todo $z \in K$. Entonces cuando $z \in K$ se cumple

$$\begin{aligned} |e^{f_n(z)} - e^{f(z)}| &= |e^{f(z)}| |e^{f_n(z)-f(z)} - 1| \leq \\ &\leq e^{u(z)} |e^{f_n(z)-f(z)} - 1| \leq e^M |e^{f_n(z)-f(z)} - 1| \end{aligned}$$

Como e^z es continua en $z = 0$, dado $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que

$$|w| < \delta \Rightarrow |e^w - 1| < \epsilon e^{-M}.$$

Por la convergencia uniforme de f_n existe $n(\delta) \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq n(\delta)$ entonces para todo $z \in K$ se cumple $|f_n(z) - f(z)| < \delta$. Combinando las dos afirmaciones anteriores se concluye que para todo $n \geq n(\delta)$ y todo $z \in K$ se verifica

$$|e^{f_n(z)} - e^{f(z)}| \leq e^M |e^{f_n(z)-f(z)} - 1| \leq e^M \epsilon e^{-M} = \epsilon$$

■

Ejercicio A.29 *Demuestre que $\lim_{n \rightarrow \infty} \operatorname{tg} nz = -i$, y que para cada $\epsilon > 0$ el límite es uniforme sobre el semiplano $H_\epsilon := \{z : \operatorname{Im} z < -\epsilon\}$.*

SOLUCIÓN

$$\operatorname{tg} nz = \frac{\operatorname{sen} nz}{\operatorname{cos} nz} = \frac{1}{i} \frac{e^{inz} - e^{-inz}}{e^{inz} + e^{-inz}} = \frac{1}{i} \frac{e^{i2nz} - 1}{e^{i2nz} + 1}$$

luego

$$|\operatorname{tg} nz + i| = \left| \operatorname{tg} nz - \frac{1}{i} \right| = \left| \frac{e^{i2nz} - 1}{e^{i2nz} + 1} - 1 \right| = \left| \frac{2}{e^{i2nz} + 1} \right|$$

de donde se sigue que para todo $z \in H_\epsilon$ se verifica

$$|\operatorname{tg} nz + i| \leq \frac{2}{|e^{i2nz}| - 1} = \frac{2}{e^{-2ny} - 1} \leq \frac{2}{e^{2n\epsilon} - 1}$$

Como la sucesión $2/(e^{2n\epsilon} - 1)$ converge hacia 0, la última desigualdad nos asegura que $\lim_n \operatorname{tg} nz = -i$, uniformemente sobre H_ϵ . ■

Ejercicio A.30 Demuestre que $\lim_n \cotg(x+in) = -i$, y que el límite es uniforme respecto de $x \in \mathbb{R}$.

SOLUCIÓN

Para todo $z = x + iy$ se cumple

$$|\cotg z + i| = \left| i \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{e^{iz} - e^{-iz}} + i \right| = \left| \frac{2e^{i2z}}{e^{i2z} - 1} \right| \leq \frac{2e^{-2y}}{1 - e^{-2y}}$$

donde la función $h(y) = 2e^{-2y}/(1 - e^{-2y})$ converge hacia 0 cuando $y \rightarrow +\infty$. Como para todo $x \in \mathbb{R}$ se cumple la desigualdad $|\cot(x + in) + i| \leq h(n)$ se concluye que la sucesión $f_n(x) = \cot(x + in)$ converge hacia $-i$ uniformemente respecto de $x \in \mathbb{R}$.

■

A.5. Ejercicios propuestos

◇ **A.5.1** Muestre que la sucesión $f_n(x) = 1/(1+n^2x^2)$ no converge uniformemente sobre $[0, 1]$ pero su límite puntual f verifica $\int_0^1 f(x)dx = \lim_n \int_0^1 f_n(x)dx$. (Obsérvese que esta sucesión cumple las hipótesis del teorema A.8)

◇ **A.5.2** Si la sucesión $f_n : T \rightarrow \mathbb{R}$ converge uniformemente sobre T demuestre que la sucesión $\sin f_n(t)$ también converge uniformemente sobre T .

◇ **A.5.3** Se considera la sucesión de funciones $f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ definida por:

$$f_n(x) = n^2x(1-nx) \text{ si } x \in [0, 1/n]; \quad f_n(x) = 0 \text{ si } x \in (1/n, 1]$$

Demuestre que la sucesión converge puntualmente hacia 0, pero no converge uniformemente sobre $[0, 1]$. ¿Sobre qué intervalos $I \subset [0, 1]$ la convergencia es uniforme?

◇ **A.5.4** Dada una sucesión estrictamente creciente $a_n \in [0, 1]$ estudie la convergencia puntual y uniforme de la sucesión de funciones $f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, definida así:

$$f_n(x) = \frac{(x-a_n)(x-a_{n+1})}{(a_{n+1}-a_n)^2} \quad \text{si } x \in [a_n, a_{n+1}]$$

$$f_n(x) = 0 \quad \text{si } x \notin [a_n, a_{n+1}].$$

◇ **A.5.5** Estudie la convergencia puntual y uniforme de la sucesión

$$g_n(x) = x^{2n}/(1+x^{2n})$$

sobre \mathbb{R} y sobre $\{x \in \mathbb{R} : |x| \geq a\}$, con $a > 0$.

◇ **A.5.6** En cada uno de los siguientes casos estudie los intervalos $I \subset \mathbb{R}$ sobre los que la sucesión de funciones $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es uniformemente convergente.

$$a) \quad f_n(x) = \frac{1}{1+x^{2n}}; \quad b) \quad f_n(x) = \frac{x}{1+x^{2n}};$$

$$c) \quad f_n(x) = \frac{n^2x}{1+n^3x^2}; \quad d) \quad f_n(x) = \frac{x^2}{x^2+(x-n)^2};$$

$$e) \quad f_n(x) = \frac{x^2}{1+n|x|}; \quad f) \quad f_n(x) = \frac{x}{1+nx^2};$$

$$g) \quad f_n(x) = \frac{1}{1+(x-n)^2}; \quad h) \quad f_n(x) = \frac{|x-n|+|x|}{n};$$

Para las sucesiones de los apartados f) y g) estudie la validez de la derivación término a término.

◇ **A.5.7** Se consideran las sucesiones $s_n(t) = \operatorname{sen}(\lambda nt)e^{-nt}$, $c_n(t) = \operatorname{cos}(\lambda nt)e^{-nt}$ definidas en $[0, +\infty)$, donde $\lambda \neq 0$ es un parámetro real.

a) Obtenga los límites puntuales de ambas sucesiones, y justifique que, para cada $a > 0$ las dos sucesiones convergen uniformemente sobre $[a, +\infty)$.

b) Estimando la sucesión $d_n := \sup\{|s_n(t)| : t > 0\}$, deduzca que la sucesión s_n no converge uniformemente sobre $[0, +\infty)$. Justifique sin cálculos que la sucesión c_n tampoco converge uniformemente sobre $[0, +\infty)$.

◇ **A.5.8** Estudie, según los valores del parámetro real $a > 0$, los intervalos $I \subset \mathbb{R}$ sobre los que la sucesión $f_n(x) = \frac{nx}{1+n^ax^2}$ es uniformemente convergente.

◇ **A.5.9** Para $p = 1, 2$, estudie los intervalos $I \subset \mathbb{R}$ sobre los que es uniformemente convergente la sucesión $f_n(x) = \frac{nx^p}{1+n^2x^2}$.

◇ **A.5.10** Si $g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ es continua, demuestre que la sucesión $x^n g(x)$ converge uniformemente en $[0, 1]$ si y sólo si $g(1) = 0$.

◇ **A.5.11** Se supone que $f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ es una sucesión de funciones continuas que converge uniformemente hacia f . Demuestre que

$$\int_0^1 f(x)dx = \lim_n \int_0^{1-1/n} f_n(x)dx$$

◇ **A.5.12** Si una sucesión de funciones continuas $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ converge uniformemente sobre (a, b) demuestre que también converge uniformemente sobre $[a, b]$. Demuestre que la sucesión $f_n(x) = x^2/(1+x^{2n})$ converge uniformemente sobre cada intervalo $[-r, r] \subset (-1, 1)$ pero no converge uniformemente sobre $(-1, 1)$.

◇ **A.5.13** Demuestre que la sucesión

$$f_n(x) = \frac{x^2}{x^2 + (1-nx)^2}$$

converge puntualmente hacia 0 pero no posee subsucesiones uniformemente convergentes.

◇ **A.5.14** Sean $f_n, g_n : T \rightarrow \mathbb{R}$ sucesiones uniformemente convergentes hacia $f, g : T \rightarrow \mathbb{R}$, respectivamente. Si f y g son acotadas, demuestre que la sucesión producto $f_n g_n$ converge uniformemente hacia fg .

◇ **A.5.15** Se considera la sucesión de funciones $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f_n(x) = 1/n \text{ si } x = 0 \text{ o si } x \text{ es irracional}$$

$$f_n(x) = 1/n + q \text{ si } x = p/q, \text{ fracción irreducible, con } p, q \in \mathbb{Z}, q > 0.$$

Sea $g_n(x) = (1 + 1/n)x$. Compruebe que las sucesiones f_n , g_n convergen uniformemente sobre $[-R, R]$, pero el producto $f_n g_n$ no converge uniformemente sobre $[-R, R]$.

(Ejercicio 9.2) de [2])

◇ **A.5.16** Sea $f_n : T \rightarrow \mathbb{R}$ una sucesión de funciones continuas, definidas en un intervalo $T \subset \mathbb{R}$ que converge puntualmente hacia la función $f : T \rightarrow \mathbb{R}$. Demuestre que son equivalentes:

- f_n converge uniformemente sobre cada intervalo cerrado y acotado $[a, b] \subset T$.
- f es continua y para cada sucesión $x_n \in T$ convergente hacia un punto $x \in T$, existe el límite $\lim_n f_n(x_n)$

◇ **A.5.17** Compruebe que para cada $m \in \mathbb{N}$ y cada $x \in \mathbb{R}$ existe el límite puntual $f_m(x) = \lim_n (\cos m! \pi x)^{2^n}$. Demuestre que cada f_m es integrable Riemann sobre $[0, 1]$, pero su límite puntual $f(x) = \lim_m f_m(x)$ no lo es.

◇ **A.5.18** Demuestre que la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n(t)b_n(t)$ converge uniformemente sobre $K \subset T$ cuando las sucesiones de funciones $a_n, b_n : T \rightarrow \mathbb{R}$ verifican:

- La serie $\sum_{n=1}^{\infty} b_n(t)$ converge uniformemente sobre $K \subset T$.
- Existe $C > 0$ tal que $|a_1(t)| + \sum_{n=1}^{\infty} |a_n(t) - a_{n+1}(t)| \leq C$ para todo $t \in K$.

Obtenga como corolario el criterio de Abel A.15.

◇ **A.5.19** Demuestre que la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n(t)b_n(t)$ converge puntualmente sobre $K \subset T$ cuando las sucesiones de funciones $a_n, b_n : T \rightarrow \mathbb{R}$ verifican:

- La sucesión $B_n(t) = \sum_{j=1}^n b_j(t)$ está uniformemente acotada sobre $K \subset T$.
- La sucesión de funciones $a_n(t)$ converge puntualmente hacia 0 sobre K , y la serie $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n(t) - a_{n+1}(t)|$ converge uniformemente sobre K .

Obtenga como corolario el criterio de Dirichlet A.14.

◇ **A.5.20** Demuestre que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} x^n(1-x)$ no converge uniformemente sobre $[0, 1]$, pero la serie $\sum_{n=1}^{\infty} (-x)^n(1-x)$ si converge uniformemente sobre $[0, 1]$,

◇ **A.5.21** Demuestre que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1+x^n}{n}$ converge uniformemente sobre cada intervalo $[a, b] \subset (-1, 1)$, pero no converge absolutamente en ningún punto del intervalo $(-1, 1)$.

◇ **A.5.22** Sea $f_n(x) = 0$ si $x < 1/(n+1)$; $f_n(x) = \text{sen}^2(\pi/x)$ si $x \in [1/(n+1), 1/n]$, $f_n(x) = 0$ si $x > 1/n$. Demuestre que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ es absolutamente convergente pero la convergencia no es uniformemente en ningún entorno de 0.

◇ **A.5.23** Compruebe que la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} ne^{-nx}$ converge uniformemente sobre $[a, +\infty)$, para cada $a > 0$. Utilice el teorema de integración término a término de series funcionales para obtener su suma.

◇ **A.5.24** Compruebe que la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} e^{-nx}/(1+n^2)$ converge para $x \geq 0$ y define en $[0, +\infty)$ una función continua que es derivable en cada $x > 0$.

◇ **A.5.25** Demuestre que la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{x+n}\right)$ converge para todo $x \geq 0$ y que su suma $S(x)$ es una función continua estrictamente creciente en $[0, +\infty)$.

◇ **A.5.26** Se considera la serie de funciones $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{1+n^2|x|}$.

Determine los valores de x para los que la serie converge. ¿En qué intervalos la convergencia de la serie no es uniforme? ¿En qué puntos es continua la función f definida por la suma de la serie? ¿Es f acotada?

◇ **A.5.27** Estudie la convergencia puntual y la convergencia uniforme sobre intervalos de las series

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{1+x^n}, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x}{1+x^n}$$

En cada caso estudie la derivabilidad de la suma de la serie en el interior de su dominio de convergencia.

◇ **A.5.28** Justifique que la serie de funciones

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^2}{(1+x^2)^n}$$

converge puntualmente en todo \mathbb{R} , y que para cada $\epsilon > 0$ hay convergencia uniforme en $\{x : |x| > \epsilon\}$ y no hay convergencia uniforme en $\{x : |x| < \epsilon\}$.

◇ **A.5.29** Se (a_n) una sucesión decreciente de números reales con $\lim_n a_n = 0$. Justifique que, para cada $\delta \in (0, 1)$ la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n x^n$ converge uniformemente en $A_\delta = [-1, 1 - \delta]$. Muestre que la serie converge uniformemente sobre $[-1, 1)$ si $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n < +\infty$,

◇ **A.5.30** Estudie la convergencia uniforme de las series

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}; \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^x}$$

y demuestre que la suma de la primera define en $(1, +\infty)$ una función derivable

$$S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x} \text{ con derivada } S'(x) = - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\log n}{n^x}.$$

◇ **A.5.31** Sea $x_n \in (a, b)$ una sucesión de puntos distintos y $f_n : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ la función definida por $f_n(x) = 0$ si $x \leq x_n$, $f_n(x) = 1$ si $x > x_n$. Demuestre que la suma serie $f(x) = \sum_n 2^{-n} f_n(x)$, define en (a, b) una función, que es continua en $x \in (a, b)$ si y sólo si $x \notin \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$. Deduzca de ello que existe una función estrictamente creciente $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, que es continua en cada $x \notin \mathbb{Q}$ y discontinua en cada $x \in \mathbb{Q}$.

◇ **A.5.32** Demuestre que la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} (-x^2)^n (\log x)^2$ converge uniformemente sobre cada $[a, b] \subset (0, 1)$ y que su suma $f(x)$ posee una integral impropia convergente, cuyo valor es

$$\int_0^1 f(x) dx = 2 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^3}$$