B

Complementos al capítulo 2

B.1. La recta real

Realizamos aquí un breve repaso de las propiedades topológicas de la recta real, haciendo énfasis en aquellos aspectos donde interviene el orden.

Las propiedades que caracterizan al cuerpo $\mathbb{R}$ de los números reales se resumen diciendo que $\mathbb{R}$, con la relación de desigualdad usual $\leq$, es un cuerpo ordenado completo respecto al orden. Esto significa que la relación de orden es compatible con las operaciones del cuerpo:

$$x, y \in \mathbb{R}, \quad 0 \leq x, \quad 0 \leq y \quad \Rightarrow \quad 0 \leq x + y, \quad 0 \leq xy$$

y que todo conjunto no vacío acotado superiormente $M \subset \mathbb{R}$ tiene extremo superior, es decir, existe una cota superior mínima de M, denotada $\sup M$.

Con la función valor absoluto $|x|$ se define la distancia entre dos números $d(x, y) = |x - y|$, y con ella la noción de sucesión convergente y de sucesión de Cauchy: Una sucesión de números reales $x_n \in \mathbb{R}$ es de Cauchy si para cada $\epsilon > 0$ existe $n(\epsilon) \in \mathbb{N}$ tal que

$$p, q \in \mathbb{N}, \quad p \geq q \geq n(\epsilon) \Rightarrow |x_p - x_q| < \epsilon$$

Usando que $\mathbb{R}$ es completo respecto al orden se demuestra fácilmente:

i) Toda sucesión de Cauchy de números reales es convergente

ii) $\mathbb{R}$ es un cuerpo ordenado arquimediano: Para cada par de números reales $x > 0$, $y > 0$ existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $nx > y$.

Estas dos propiedades caracterizan al cuerpo de los números reales: Si $(\mathbb{K} \leq)$ es un cuerpo ordenado que contiene a $\mathbb{Q}$ como subcuerpo ordenado, entonces las tres propiedades que siguen son equivalentes:

a) $(\mathbb{K}, \leq)$ es un cuerpo ordenado completo respecto al orden.

b) $(\mathbb{K}, \leq)$ es un cuerpo ordenado arquimediano en el que toda sucesión de Cauchy es convergente.

c) $(\mathbb{K}, \leq)$ es isomorfo, como cuerpo ordenado, al cuerpo de los números reales $\mathbb{R}$.

Una consecuencia notable de estas propiedades es el hecho de que $\mathbb{R}$ no es numerable. Usando la distancia $d(x,y) = |x-y|$ se definen las nociones topológicas usuales de la recta real que se consideran más adelante en el contexto general de los espacios métricos. De momento nos limitamos a recordar brevemente aquellas propiedades topológicas que son características de $\mathbb{R}$.

La primera de ellas se refiere a la estructura de los conjuntos abiertos: Todo abierto $\Omega \subset \mathbb{R}$ se puede descomponer, de modo único, como unión de una familia numerable de intervalos abiertos (en sentido amplio) disjuntos, es decir, $\Omega = \bigcup_{n \in M} I_n$ donde $M \subset \mathbb{N}$ y los I_n son intervalos disjuntos de la forma $I_n = (a_n, b_n)$ con $-\infty \leq a_n < b_n \leq +\infty$. Si Ω no está acotado superiormente (resp. inferiormente) habrá un intervalo de la forma $I_p = (a_p, +\infty)$, (resp. $I_q = (-\infty, b_q)$).
Esta propiedad, en el lenguaje de la topología general, se expresa diciendo que en $\mathbb{R}$ las componentes conexas de los abiertos son intervalos abiertos (sólo puede haber una cantidad numerable de estos intervalos porque cada intervalo abierto no vacío contiene un número racional).

Nociones específicas para sucesiones de números reales son las de límite superior y límite inferior: El límite superior (resp. inferior) de una sucesión acotada de números reales x_n es el límite de la sucesión decreciente acotada $b_k = \sup\{x_n : n \geq k\}$ (resp. creciente acotada $a_k = \inf\{x_n : n \geq k\}$), es decir

$$\overline{\lim}_n x_n = \lim_k \sup_{n \geq k} x_n, \quad \underline{\lim}_n x_n = \lim_k \inf_{n \geq k} x_n$$

Si x_n es una sucesión acotada de números reales, $a = \underline{\lim}_n x_n$ y $b = \overline{\lim}_n x_n$ son puntos de aglomeración de la sucesión x_n, es decir, son límites de subsucesiones convergentes extraídas de la sucesión. Además a y b son, respectivamente, el menor y el mayor punto de aglomeración de la sucesión y la sucesión x_n es convergente si y sólo sí $\underline{\lim}_n x_n = \overline{\lim}_n x_n$, lo que ocurre si y sólo si la sucesión tiene un único punto de aglomeración.

Por último, recordemos que para un conjunto $K \subset \mathbb{R}$ son equivalentes

a) K es cerrado y acotado.

b) De cada sucesión $x_n \in K$ se puede extraer una subsucesión convergente hacia un punto de K

c) De todo cubrimiento abierto de K se puede extraer un subcubrimiento finito.

Los conjuntos $K \subset \mathbb{R}$ que cumplen estas propiedades equivalentes se llaman compactos. La propiedad c) es la que se adopta para dar la definición general de conjunto compacto en un espacio topológico general.

Como $\mathbb{R}$ no es compacto, para diversas cuestiones conviene ampliar la recta real y considerar la recta real ampliada $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$ que se obtiene añadiendo un primer elemento, $-\infty$, y un último elemento, $+\infty$, es decir, se adopta la validez, para todo $x \in \mathbb{R}$, de las desigualdades $-\infty \leq x \leq +\infty$ y se escribe $\overline{\mathbb{R}} = [-\infty, +\infty]$.

En la recta real ampliada $\overline{\mathbb{R}}$ todo subconjunto tiene extremo superior y extremo inferior. Si $M \subset \mathbb{R}$ no está acotado superiormente (resp. inferiormente) se verifica $\sup M = +\infty$ (resp. $\inf M = -\infty$).

Los entornos de $+\infty$ (resp. $-\infty$) en $\overline{\mathbb{R}}$ son los conjuntos que contienen a un intervalo de la forma $(a, +\infty]$ (resp. $[-\infty, b)$) y los subconjuntos de $\overline{\mathbb{R}}$ que son entornos de todos sus puntos se llaman abiertos. De esta forma $\overline{\mathbb{R}}$ resulta compacto, es decir, de todo cubrimiento abierto de $\overline{\mathbb{R}}$ se puede extraer un subcubrimiento finito. Ahora toda sucesión en $\overline{\mathbb{R}}$ tiene una subsucesión convergente. Si la sucesión está contenida en $\mathbb{R}$ y no está acotada superiormente (resp. inferiormente) en $\mathbb{R}$ entonces hay una subsucesión que converge hacia $+\infty$ (resp. $-\infty$).

B.2. Completitud y compacidad

En un espacio métrico (E, d) todo conjunto compacto $M \subset E$ es completo ya que, según el teorema 2.7, toda sucesión de Cauchy en el espacio métrico (M, d_M), posee una subsucesión convergente hacia un punto de M, y por lo tanto converge en este espacio. El siguiente objetivo es demostrar la validez del recíproco cuando se cumple una propiedad que se define a continuación:

Definición B.1 *Un subconjunto M del espacio métrico (E, d) se dice que es totalmente acotado cuando para cada $\epsilon > 0$ existe un conjunto finito $H \subset E$ tal que $M \subset \bigcup_{\mathbf{a} \in H} B(\mathbf{a}, \epsilon)$.*

La definición de conjunto totalmente acotado es equivalente a la que resulta considerando bolas cerradas en lugar de bolas abiertas, y se sigue de esto que si M es totalmente acotado, su clausura $\overline{M}$ también lo es. Es inmediato que todo conjunto compacto es totalmente acotado y que todo conjunto totalmente acotado es acotado. El problema 2.6.28 sirve para ver que el recíproco es falso: En el espacio $(C([0,1], \| \ \|_\infty)$ la bola cerrada $\{f \in C([0,1]) : \|f\|_\infty \leq 1\}$ es un conjunto acotado y completo que no compacto luego, en virtud del siguiente teorema, no es totalmente acotado.

Teorema B.2 *Un subconjunto K de un espacio métrico (E, d) es compacto si y sólo si es completo y totalmente acotado.*

Dem: Basta demostrar que todo conjunto completo y totalmente acotado $K \subset E$ es compacto y esto lo obtendremos viendo que todo conjunto infinito $M \subset K$ tiene un punto de acumulación en K (teorema 2.7).

Como K es totalmente acotado el subconjunto $M \subset K$ se puede recubrir con un número finito de bolas de radio 1, y alguna de ellas, que denotamos $B(\mathbf{a}_1, 1)$, cumple que $M_1 = M \cap B(\mathbf{a}_1, 1)$ es infinito. Razonando en forma similar con el conjunto infinito $M_1 \subset K$ y con bolas de radio $1/2$ se obtiene una bola $B(\mathbf{a}_2, 1/2)$ con la propiedad de que $M_2 = M \cap B(\mathbf{a}_2, 1/2)$ es infinito. De modo recurrente obtenemos una sucesión de bolas $B(\mathbf{a}_n, 1/n)$ y una sucesión decreciente de conjuntos infinitos $M_n \subset B(\mathbf{a}_n, 1/n)$. Consideramos la sucesión decreciente de conjuntos cerrados no vacíos $C_n = \overline{M_n} \subset K$ que, en virtud del lema 2.13, verifica

$\text{diam}(C_n) = \text{diam}(M_n) \leq 2/n$. Como estamos suponiendo que el espacio métrico (K, d_K) es completo, según el teorema 2.14, existe un punto $\mathbf{x} \in \bigcap_n C_n \subset K$. Es claro que $\mathbf{x}$ es punto de acumulación de M (cada bola $B(\mathbf{x}, \epsilon)$ contiene infinitos puntos de M pues si $2/k < \epsilon$ el conjunto infinito M_k está contenido en $C_k \subset \overline{B(\mathbf{x}, 2/k)} \subset B(\mathbf{x}, \epsilon)$). ■

La noción de conjunto totalmente acotado no es topológica: $\mathbb{R}$ con la distancia usual no es totalmente acotado, pero lo es con la distancia equivalente d' considerada en el problema 2.6.5. Es fácil comprobar que toda aplicación uniformemente continua $\mathbf{f} : (E, d) \to (F, \rho)$ transforma conjuntos totalmente acotados en conjuntos totalmente acotados. En particular, en el contexto de los espacios normados se verifica:

Proposición B.3 *Dos normas equivalentes en un espacio vectorial E (real o complejo) producen los mismos conjuntos totalmente acotados.*

Dem: Es una consecuencia sencilla de la proposición 2.4 y se deja como ejercicio. ■

Las tres normas que hemos considerado en $\mathbb{R}^n$ producen los mismos conjuntos totalmente acotados porque son equivalentes. Con la norma $\| \|_\infty$ es fácil ver que las bolas cerradas $\overline{B_\infty(\mathbf{0}, r)}$ son totalmente acotadas: Todo cubo n-dimensional $[-r, r] \times [-r, r] \times \overset{n}{\cdots} \times [-r, r]$ se puede descomponer en un número finito de cubos de lados iguales, tan pequeños como se quiera. Se sigue de esto que un subconjunto de $\mathbb{R}^n$ es totalmente acotado si y sólo si es acotado. El teorema B.2, que se puede contemplar como una generalización del teorema 2.9, pone de manifiesto que los conjuntos totalmente acotados desempeñan en los espacios métricos generales un papel similar al que desempeñan los conjuntos acotados en $\mathbb{R}^n$.

Corolario B.4 *Un subconjunto M de un espacio métrico completo es totalmente acotado si y sólo si $\overline{M}$ es compacto. Un subconjunto K de un espacio métrico completo es compacto si y sólo si es cerrado y totalmente acotado.*

Dem: Si M es totalmente acotado $\overline{M}$ también lo es y basta aplicar el teorema B.2 para obtener que $\overline{M}$ es compacto. El recíproco es inmediato. La segunda afirmación es consecuencia directa de la primera. ■

B.3. Espacios de sucesiones

El espacio l^2. Es el formado por las sucesiones de números reales $\mathbf{x} = (x(k))$ que cumplen $\sum_{k=1}^{\infty} x(k)^2 < +\infty$. En l^2 están definidas las operaciones naturales

$$\mathbf{x} + \mathbf{y} = (x(1) + y(1), x(2) + y(2), \cdots,); \quad \mu\mathbf{x} = (\mu x(1), \mu x(2), \cdots).$$

y con ellas l^2 es un espacio vectorial real infinito dimensional.

Efectivamente, si $\mu \in \mathbb{R}$ y $\mathbf{x} \in l^2$ es inmediato que $\mu\mathbf{x} \in l^2$. Para ver que la suma de dos sucesiones $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in l^2$ es una sucesión de l^2 observemos en primer lugar que para cada $m \in \mathbb{N}$, según la desigualdad de Cauchy-Schwarz en $\mathbb{R}^m$, se cumple

$$\sum_{k=1}^{m} |x(k)y(k)| \leq \sqrt{\sum_{k=1}^{m} x(k)^2}\sqrt{\sum_{k=1}^{m} y(k)^2} \leq \|\mathbf{x}\|_2 \|\mathbf{y}\|_2.$$

Como esta desigualdad es cierta para todo $m \in \mathbb{N}$ se obtiene la desigualdad:

$$[\mathrm{C}] \qquad \sum_{k=1}^{\infty} |x(k)y(k)| \leq \|\mathbf{x}\|_2 \|\mathbf{y}\|_2$$

luego

$$\sum_{k=1}^{\infty}(x(k) + y(k))^2 \leq \sum_{k=1}^{\infty}(x(k)^2 + y(k)^2 + 2|x(k)y(k)|) < +\infty$$

y queda demostrado que $\mathbf{x} + \mathbf{y} \in l^2$.

Por otra parte, si $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in l^2$, en virtud de la desigualdad [C] es convergente la serie que interviene en la fórmula

$$\langle \mathbf{x} \mid \mathbf{y} \rangle = \sum_{k=1}^{\infty} x(k)y(k)$$

y es fácil comprobar que así queda definido un producto escalar en l^2 cuya norma asociada es $\|\mathbf{x}\|_2 = \sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} x(k)^2}$.

Seguidamente demostramos que el espacio normado $(l^2, \|\ \|_2)$ es completo: Sea $\mathbf{x}_n = (x_n(1), x_n(2), \cdots x_n(k), \cdots)$ una sucesión de Cauchy en l^2. Para cada $k \in \mathbb{N}$ se cumple $|x_p(k) - x_q(k)| \leq \|\mathbf{x}_p - \mathbf{x}_q\|_2$ luego todas las sucesiones de números reales $(x_n(k))_{n=1}^{\infty}$ son de Cauchy y podemos asegurar que existen los límites $\lim_n x_n(k) = x(k)$. Entonces $\mathbf{x} = (x(1), x(2), \cdots x(k), \cdots)$ pertenece a l^2 y $\lim_n \|\mathbf{x}_n - \mathbf{x}\|_2 = 0$. Efectivamente, dado $\epsilon > 0$ existe $n(\epsilon) \in \mathbb{N}$ tal que

$$p > q \geq n(\epsilon) \Rightarrow \|\mathbf{x}_p - \mathbf{x}_q\|_2^2 < \epsilon^2$$

Si $p > q \geq n(\epsilon)$, para cada $m \in \mathbb{N}$ se cumple $\sum_{k=1}^{m}(x_p(k) - x_q(k))^2 < \epsilon^2$. En esta suma finita podemos pasar al límite, cuando $p \to +\infty$, y obtenemos

$$q \geq n(\epsilon) \Rightarrow \sum_{k=1}^{m}(x(k) - x_q(k))^2 < \epsilon^2$$

Si $q \geq n(\epsilon)$, la desigualdad de la derecha se cumple para todo $m \in \mathbb{N}$, luego $\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_q\|_2^2 \leq \epsilon^2$. Se sigue que $\mathbf{x} = \mathbf{x}_q + (\mathbf{x} - \mathbf{x}_q) \in l^2$ y $\lim_q \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_q\|_2 = 0$. ■

El espacio l^1. Es el espacio vectorial real formado por las sucesiones de números reales $\mathbf{x} = (x(n))$ que cumplen $\sum_{k=1}^{\infty} |x(k)| < +\infty$.
Es inmediato que $\|\mathbf{x}\|_1 = \sum_{k=1}^{\infty} |x(k)|$ es una norma sobre l^1, y con un razonamiento similar al efectuado con l^2 se demuestra que el espacio normado $(l^1, \|\ \|_1)$ es completo.

El espacio l^∞. Es el espacio vectorial real formado por las sucesiones acotadas de números reales. Es inmediato que $\|\mathbf{x}\|_\infty = \sup\{|x(k)| : k \in \mathbb{N}\}$ es una norma sobre l^∞ y se demuestra fácilmente que el espacio normado $(l^\infty, \|\ \|_\infty)$ es completo.

Ejercicio B.5 *Sean* $p > 1$, *números reales que verifican* $1/p + 1/q = 1$. *Establezca las siguientes desigualdades:*

a) (Young) Si $a \geq 0, b \geq 0$ *entonces* $ab \leq a^p/p + b^q/q$.

b) (Hölder) Si (a_n), (b_n) *son sucesiones de números reales no negativos, tales que* $\sum_n a_n^p < +\infty$, $\sum_n b_n^q < +\infty$ *entonces*

$$\sum_n a_n b_n \leq \left(\sum_n a_n^p\right)^{1/p} \left(\sum_n b_n^q\right)^{1/q}$$

Estudie las condiciones para que la desigualdad anterior sea una igualdad.

c) (Minkowski) Si (a_n), (b_n) *son sucesiones en* $\mathbb{R}$ *tales que* $\sum_n |a_n|^p < +\infty$, $\sum_n |b_n|^p < +\infty$ *entonces*

$$\left(\sum_n |a_n + b_n|^p\right)^{1/p} \leq \left(\sum_n |a_n|^p\right)^{1/p} + \left(\sum_n |b_n|^p\right)^{1/p}$$

Estudie las condiciones para que la desigualdad anterior sea una igualdad.

Para $1 \leq p < +\infty$ *sea* l^p *el conjunto de las sucesiones de números reales* $\mathbf{x} = (x_n)$ *tales que* $\sum_n |x_n|^p < +\infty$. *Demuestre que, con las operaciones naturales,* l^p *es un espacio vectorial y que*

$$\|\mathbf{x}\|_p = \left(\sum_n |x_n|\right)^{1/p}$$

es una norma l^p. *Demuestre que el espacio normado* $(l^p, \| \ \|_p)$ *es completo*

solución

Véase [6], ejercicio resuelto 2.14, en pág. 87. ■

Ejercicio B.6 *Dada una sucesión de números positivos* $r_n > 0$, *en el espacio* $(l^2, \| \ \|_2)$ *se considera el conjunto* Q_r *formado por las sucesiones* $\mathbf{x} = (x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *tales que* $\{n : x_n \neq 0\}$ *es finito y* $|x_n| \leq r_n$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$. *Demuestre que* Q_r *es relativamente compacto si y sólo si* $\sum_n r_n^2 < +\infty$

solución

Véase [6], ejercicio 2.31 propuesto en pág. 118 y resuelto en pág. 134. ■

B.4. Formas lineales y producto escalar

El resultado que se expone en la siguiente proposición B.8 será la clave para extender la noción de gradiente al caso de funciones diferenciables $f : \Omega \to \mathbb{R}$ definidas en un abierto Ω de un espacio normado completo $(E, \| \ \|)$ cuya norma procede de un producto escalar, aunque el espacio no sea de dimensión finita.

Observemos en primer lugar que para cada $\mathbf{z} \in E$ la aplicación lineal $L_{\mathbf{z}} : E \to \mathbb{R}$ definida por $L_{\mathbf{z}}(\mathbf{h}) = \langle \ \mathbf{z} \mid \mathbf{h} \ \rangle$ es continua ya que, en virtud de la desigualdad de Cauchy-Schwarz, para todo $\mathbf{h} \in E$ se cumple $|L_{\mathbf{z}}(\mathbf{h})| \leq \|\mathbf{z}\| \, \|\mathbf{h}\|$.

Proposición B.7 *Sea $(E, \| \ \|)$ un espacio normado completo cuya norma procede de un producto escalar y $A \subset E$ un subconjunto es cerrado convexo. Entonces existe un único $\mathbf{a} \in A$ que verifica $\|\mathbf{a}\| = \min\{\|\mathbf{x}\| : \mathbf{x} \in A\}$.*

Dem: La demostración, que se basa en la identidad del paralelogramo (problema 2.6.1):

$$\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\|^2 + \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^2 = 2\|\mathbf{x}\|^2 + 2\|\mathbf{y}\|^2 \quad \text{para todo } \mathbf{x}, \mathbf{y} \in E$$

se puede ver en el Capítulo 4 del texto *Análisis real y complejo* de W. Rudin ■

Teorema B.8 *Sea $(E, \| \ \|)$ un espacio normado completo, cuya norma $\| \ \|$ es la asociada a un producto escalar $\langle \ | \ \rangle$. Entonces, para cada aplicación lineal continua $L : E \to \mathbb{R}$ existe un (único) vector $\mathbf{z} \in E$ que verifica $L(\mathbf{h}) = \langle \ \mathbf{z} \mid \mathbf{h} \ \rangle$ para todo $\mathbf{h} \in E$.*

Dem: Como L es lineal y continua $M = \{\mathbf{x} \in E : L(\mathbf{x}) = 0\}$ es un subespacio cerrado de E. Si $M = E$, el vector $\mathbf{z} = 0$ cumple la condición deseada. En otro caso, si $M \neq E$, existe $\mathbf{y} \in E$ tal que $L(\mathbf{y}) \neq 0$. El subespacio afín $\mathbf{y} + M$ es un subconjunto cerrado convexo de E y según existe un elemento $\mathbf{w} \in \mathbf{y} + M$ de norma mínima (obsérvese que la condición $\mathbf{y} \notin M$ implica que $\mathbf{0} \notin \mathbf{y} + M$, luego $\mathbf{w} \neq 0$). Entonces para todo $t \in \mathbb{R}$ y todo $\mathbf{u} \in M$ se cumple $\mathbf{w} + t\mathbf{u} \in \mathbf{y} + M$ luego $0 < \|\mathbf{w}\|^2 \leq \|\mathbf{w} + t\mathbf{u}\|^2$ es decir

$$\langle \ \mathbf{w} \mid \mathbf{w} \ \rangle \leq \langle \ \mathbf{w} + t\mathbf{u} \mid \mathbf{w} + t\mathbf{u} \ \rangle \ \text{ para todo } \ t \in \mathbb{R}$$

Usando la bilinealidad del producto escalar resulta

$$0 \leq 2t\langle \ \mathbf{w} \mid \mathbf{u} \ \rangle + t^2\langle \ \mathbf{u} \mid \mathbf{u} \ \rangle \ \text{ para todo } t \in \mathbb{R}$$

y esta última condición implica que $\langle \mathbf{w} | \mathbf{u} \rangle = 0$.

Hemos probado así que existe un vector $0 \neq \mathbf{w} \in E$ ortogonal a M, que podemos suponer normalizado con $\|\mathbf{w}\| = 1$. Para cada $\mathbf{x} \in E$, el vector $\mathbf{v} = L(\mathbf{x})\mathbf{w} - L(\mathbf{w})\mathbf{x}$ pertenece a M, luego

$$0 = \langle \ \mathbf{w} \mid \mathbf{v} \ \rangle = L(\mathbf{x}) \|\mathbf{w}\|^2 - L(\mathbf{w})\langle \ \mathbf{w} \mid \mathbf{x} \ \rangle$$

es decir $L(\mathbf{x}) = L(\mathbf{w})\langle \ \mathbf{w} \mid \mathbf{x} \ \rangle$ luego $\mathbf{z} = L(\mathbf{w})\mathbf{w}$ cumple la condición requerida. ■

B.5. Espacios complejos con producto interior

Un producto interior sobre un espacio vectorial complejo E es una aplicación

$$\langle \ | \ \rangle : E \times E \to \mathbb{C}, \quad (\mathbf{x}, \mathbf{y}) \to \langle \mathbf{x} \mid \mathbf{y} \rangle$$

que verifica

i) $\langle \mathbf{x} \mid \mathbf{y} \rangle = \overline{\langle \mathbf{y} \mid \mathbf{x} \rangle}$ para cada $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in E \times E$.

ii) Para cada $\mathbf{y} \in E$ la aplicación $\mathbf{x} \to \langle \mathbf{x} \mid \mathbf{y} \rangle$ es lineal.

iii) $\langle \mathbf{x} \mid \mathbf{x} \rangle \geq 0$ para cada $\mathbf{x} \in E$ y $\langle \mathbf{x} \mid \mathbf{x} \rangle = 0$ si y sólo si $\mathbf{x} = 0$.

Obsérvese que, en virtud de i) y ii), fijado $\mathbf{x} \in E$, la aplicación $\mathbf{y} \to \langle \mathbf{x} \mid \mathbf{y} \rangle$ es antilineal, es decir para cada $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in E$ y cada $\mu \in \mathbb{C}$ se verifica

$$\langle \mathbf{x} \mid \mathbf{y} + \mathbf{z} \rangle = \langle \mathbf{x} \mid \mathbf{y} \rangle + \langle \mathbf{x} \mid \mathbf{z} \rangle, \quad \langle \mathbf{x} \mid \mu \mathbf{y} \rangle = \overline{\mu} \langle \mathbf{x} \mid \mathbf{y} \rangle$$

De manera similar a como se ha visto en 2.2 al producto interior se le puede asociar una norma de espacio vectorial complejo $\|\mathbf{x}\|_2 = \sqrt{\langle \mathbf{x} \mid \mathbf{y} \rangle}$, que cumple la desigualdad de Cauchy-Schwarz:

$$|\langle \mathbf{x} \mid \mathbf{y} \rangle| \leq \|\mathbf{x}\| \, \|\mathbf{y}\| \text{ para cada } \mathbf{x}, \mathbf{y} \in E$$

Efectivamente, dados $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in E$, y $\mu \in \mathbb{C}$, para todo $t \in \mathbb{R}$ se cumple

$$0 \leq h(t) = \langle \mathbf{x} + t\mu \mathbf{y} \mid \mathbf{x} + t\mu \mathbf{y} \rangle$$

y usando las propiedades del producto interior se obtiene:

$$0 \leq h(t) = \langle \mathbf{x} \mid \mathbf{x} \rangle + t\mu \langle \mathbf{y} \mid \mathbf{x} \rangle + t\overline{\mu} \langle \mathbf{x} \mid \mathbf{y} \rangle + t^2 \mu \overline{\mu} \langle \mathbf{y} \mid \mathbf{y} \rangle =$$

$$= \|\mathbf{x}\|^2 + 2t\text{Real}(\overline{\mu} \langle \mathbf{x} \mid \mathbf{y} \rangle) + t^2 |\mu|^2 \|\mathbf{y}\|^2$$

Eligiendo $\mu \in \mathbb{C}$ de modo que $\mu \langle \mathbf{x} \mid \mathbf{y} \rangle = |\langle \mathbf{x} \mid \mathbf{y} \rangle|$ se consigue que para todo $t \in \mathbb{R}$ se cumpla la desigualdad

$$0 \leq h(t) = \|\mathbf{x}\|^2 + 2|\langle \mathbf{x} \mid \mathbf{y} \rangle| + t^2 \|\mathbf{y}\|^2$$

y razonando como en la proposición 2.2 se termina la demostración. ■

En el espacio vectorial complejo $\mathbb{C}^n$ se define el producto interior de los vectores $\mathbf{z} = (z_1, z_2, \cdots, z_n)$, $\mathbf{w} = (w_1, w_2, \cdots, w_n)$ mediante la fórmula

$$\langle \mathbf{z} \mid \mathbf{z} \rangle = \sum_{i=1}^{n} z_i \overline{y_i}$$

que lleva asociada la norma $\|\mathbf{z}\|_2 = \sqrt{\langle \mathbf{z} \mid \mathbf{z} \rangle} = \sqrt{\sum_{i=1}^n |z_i|^2}$.

En $\mathbb{C}^n$ también se pueden definir las normas

$$\|\mathbf{z}\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |z_i|, \quad \|\mathbf{z}\|_\infty = \text{máx}\{|z_j| : 1 \leq j \leq n\}$$

que son equivalentes a la anterior en virtud de las desigualdades

$$\|\mathbf{z}\|_1 / n \leq \|\mathbf{z}\|_2 \leq \|\mathbf{z}\|_1 ; \quad \|\mathbf{z}\|_\infty \leq \|\mathbf{z}\|_2 \leq \sqrt{n} \, \|\mathbf{z}\|_\infty$$

(En el teorema 3.18 se establecerá que en $\mathbb{C}^n$ todas las normas sobre son equivalentes).

Finalizamos mostrando ejemplos de espacios normados complejos de funciones continuas similares a los considerados en el caso real. Sea $C([0,1],\mathbb{C})$ el espacio vectorial complejo formado por las funciones continuas $f:[a,b]\to\mathbb{C}$.

Si $f(t)=f_1(t)+if_2(t)$ se define

$$\int_a^b f(t)dt=\int_a^b f_1(t)dt+i\int_a^b f_2(t)dt$$

y es fácil comprobar que la integral $f\to\int_a^b f(t)dt$ es una forma lineal sobre el espacio vectorial complejo $C([a,b],\mathbb{C})$. La fórmula $\langle f\mid g\rangle=\int_a^b f(t)\overline{g(t)}dt$ define un producto interior sobre este espacio, que lleva asociada la norma $\|f\|_2=\sqrt{\int_a^b |f(t)|^2dt}$.

En forma similar a como se ha hecho en el caso real, en $C([0,1],\mathbb{C})$ se pueden definir las normas $\|\ \|_1$, $\|\ \|_\infty$ y también ocurre que las topologías asociadas a las normas $\|\ \|_p$, $p\in\{1,2,\infty\}$ son distintas.