# C

# Complementos al capítulo 3

## C.1. Intercambio de limites

La demostración de algunos teoremas importantes del Análisis Matemático se reduce en última instancia a la posibilidad de cambiar el orden en dos procesos sucesivos de paso al límite. El teorema 3.31 se puede interpretar como un resultado sobre intercambio de límites: Si una sucesión de funciones continuas $\mathbf{f}_n : T \to F$ converge uniformemente hacia $\mathbf{f} : T \to F$, la continuidad del límite $\mathbf{f}$ significa que para cada $a \in T$ se cumple $\mathbf{f}(a) = \lim_{t \to a} \mathbf{f}(t)$, es decir, $\lim_n \mathbf{f}_n(a) = \lim_{t \to a}(\lim_n \mathbf{f}_n(t))$. En virtud de la continuidad de $\mathbf{f}_n$, podemos sustituir $\mathbf{f}_n(a) = \lim_{t \to a} \mathbf{f}_n(t)$, y resulta

$$\lim_n(\lim_{t \to a} \mathbf{f}_n(t)) = \lim_{t \to a}(\lim_n \mathbf{f}_n(t))$$

En el ejercicio 3.38 se obtuvo un resultado análogo. La proposición 3.2 también proporciona un resultado sobre intercambio de límites para una función de dos variables reales $f : M \to \mathbb{R}$ definida en $M \supset \{(s,t) \in \mathbb{R}^2 : 0 < |s-a| < r, 0 < |t-b| < r\}$. Si existe el límite doble $\lim_{(s,t) \to (a,b)} f(s,t)$ y para $0 < |s-a| < r$, $0 < |t-b| < r$, existen los límites parciales $\lim_{t \to b} f(s,t) = \alpha(s)$, $\lim_{s \to a} f(s,t) = \beta(t)$, entonces existen los dos límites iterados y valen lo mismo que el límite doble:

$$\lim_{s \to a}(\lim_{t \to b} f(s,t)) = \lim_{(s,t) \to (a,b)} f(s,t) = \lim_{t \to b}(\lim_{s \to a} f(s,t))$$

**Noción general de límite**
Con el fin de dar un tratamiento unificado a la cuestión de la permutabilidad de límites, conviene empezar dando la noción general de límite según una base de filtro que incluye, como casos particulares, a las distintas nociones de límite que intervienen en el Análisis Matemático: Límite de una sucesión, límite de una función en un punto, límite de sumas de Riemann, límite de sumas finitas, límite de una red, etc.

Una base de filtro $\mathcal{B}$ en un conjunto $T \neq \emptyset$ es una familia no vacía de partes no vacías de $T$, que verifica

[* ] Para cada par $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ existe $B \in \mathcal{B}$ tal que $B \subset B_1 \cap B_2$.

En particular $B_1 \cap B_2 \neq \emptyset$ para cada par $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$.

**Definición C.1** *Sea* $(F, \rho)$ *un espacio métrico y* $\mathcal{B}$ *una base de filtro en* $T$.
*Se dice que* $\mathbf{f} : T \to F$ *tiene límite* $\mathbf{b}$ *según la base de filtro* $\mathcal{B}$ *cuando para cada* $\epsilon > 0$ *existe* $B_\epsilon \in \mathcal{B}$ *tal que para todo* $t \in B_\epsilon$ *se cumple* $\rho(\mathbf{f}(t), \mathbf{b}) \leq \epsilon$.
*En este caso se escribe* $\mathcal{B} - \lim_t \mathbf{f}(t) = \mathbf{b}$.

Cuando se sobreentiende por el contexto la base de filtro $\mathcal{B}$ que se considera en $T$, escribiremos, más brevemente, $\lim_t \mathbf{f}(t)$ en lugar de $\mathcal{B} - \lim_t \mathbf{f}(t)$.

**Ejemplos C.2**

a) Si en $T = \mathbb{N}$, se considera la base de filtro de Fréchet

$$\mathcal{F} = \{F_m : m \in \mathbb{N}\}, \quad \text{con} \quad F_m = \{n \in \mathbb{N} : n \geq m\}$$

entonces la convergencia de una sucesión $(\mathbf{x}_n)$ en el espacio métrico $(F, \rho)$ es precisamente la convergencia, según la base de filtro $\mathcal{F}$, de la aplicación $\mathbf{f}(n) = \mathbf{x}_n$.
b) Si $T = M$, donde $M$ es un subconjunto de un espacio métrico $(E, d)$, y $a \in M'$, la noción de límite funcional $\lim_{t \to a} \mathbf{f}(t)$ es la que resulta cuando en $M$ se considera la base de filtro

$$\mathcal{B}_a = \{B_a(r) : r > 0\}, \quad \text{con } B_a(r) = \{t \in M : 0 < d(t, a) < r\}$$

c) Si $T = \mathbb{R}^n$, la noción de límite $\lim_{t \to \infty} \mathbf{f}(t)$ es la que resulta considerando la base de filtro $\mathcal{B}_\infty = \{B_\infty(r) : r > 0\}$ donde $B_\infty(r) = \{x \in \mathbb{R}^n : \|\mathbf{x}\| > r\}$.
d) Una familia infinita $\{\mathbf{x}_j : j \in J\}$ de vectores en un espacio vectorial normado $(E, \| \ \|)$ se dice que es *sumable*, con suma $\mathbf{s}$ cuando se verifica lo siguiente:
Para cada $\epsilon > 0$ existe un conjunto finito $H_\epsilon \subset J$, tal que si $H \subset T$ es finito y $H_\epsilon \subset H$, entonces $\left\| \sum_{j \in H} \mathbf{x}_j - \mathbf{s} \right\| < \epsilon$.
La noción de familia sumable se puede formular, en términos de las sumas finitas $\mathbf{s}_H = \sum_{j \in H} \mathbf{x}_j$, como otro caso particular de la noción de límite según una base de filtro: Si $H \subset J$ es finito, y $[H]$ es la familia de los subconjuntos finitos de $J$ que contienen a $H$, entonces $\mathcal{B} = \{[H] : H \subset J, H \text{ finito}\}$ es una base de filtro en el conjunto de las partes finitas de $J$. Decir que $\{\mathbf{x}_j : j \in J\}$ es sumable, con suma $\mathbf{s}$ es lo mismo que decir que la aplicación $H \to \mathbf{s}_H$ tiene límite $\mathbf{s}$ según esta base de filtro. ■

El teorema 3.3 es una versión particular del siguiente resultado general

**Proposición C.3** [Condición de Cauchy] *Sea* $(F, \rho)$ *un espacio métrico completo y* $T$ *un conjunto no vacío dotado de una base de filtro* $\mathcal{B}$. *La siguiente condición es necesaria y suficiente para que* $\mathbf{f} : T \to F$ *tenga límite según* $\mathcal{B}$:
*Para cada* $\epsilon > 0$ *existe* $B_\epsilon \in \mathcal{B}$ *tal que* $x, y \in B_\epsilon \Rightarrow \rho(\mathbf{f}(x), \mathbf{f}(y)) < \epsilon$.

Dem: La necesidad de la condición es una consecuencia inmediata de la definición de límite. Para demostrar que la condición es suficiente empezamos viendo que si $t_n \in B_{1/n}$ entonces la sucesión $(\mathbf{f}(t_n))$ es de Cauchy.

Dado $\epsilon > 0$, sea $n \in \mathbb{N}$ tal que $2/n < \epsilon$. Si $p > q \geq n$, en virtud de [*] podemos elegir $z \in B_{1/p} \cap B_{1/q}$. Como $z, t_p \in B_{1/p}$, y $z, t_q \in B_{1/q}$, se cumple $\rho(\mathbf{f}(t_p), \mathbf{f}(z)) < 1/p$, $\rho(\mathbf{f}(t_q), \mathbf{f}(z)) < 1/q$, luego

$$\rho(\mathbf{f}(t_p), \mathbf{f}(t_q)) \leq \rho(\mathbf{f}(t_p), \mathbf{f}(z)) + \rho(\mathbf{f}(z), \mathbf{f}(t_q)) \leq 1/p + 1/q \leq 2/n < \epsilon$$

Como el espacio métrico $(F, \rho)$ es completo, la sucesión de Cauchy $(\mathbf{f}(t_n))$ es convergente y para terminar la demostración basta ver que su límite $\mathbf{b} \in F$ es el límite de $\mathbf{f}$ según $\mathcal{B}$: Dado $\epsilon > 0$, existe $m \in \mathbb{N}$ verificando $2/m < \epsilon$, y $\rho(\mathbf{f}(t_m), \mathbf{b}) < \epsilon/2$. Para todo $t \in B_{1/m}$, se tiene $t, t_m \in B_{1/m}$, luego $\rho(\mathbf{f}(t), \mathbf{f}(t_m)) < 1/m < \epsilon/2$ y se sigue que

$$\rho(\mathbf{f}(t), \mathbf{b}) \leq \rho(\mathbf{f}(t), \mathbf{f}(t_m)) + \rho(\mathbf{f}(t_m), \mathbf{b}) \leq \epsilon/2 + \epsilon/2 = \epsilon$$

■

**Relación entre los límites iterados y el límite doble.**
Para dar un tratamiento general al problema de la permutabilidad de límites suponemos el lo que sigue que $S, T$ son conjuntos no vacíos dotados, respectivamente con las bases de filtro $\mathcal{A}, \mathcal{B}$. Es fácil ver que

$$\mathcal{U} = \mathcal{A} \times \mathcal{B} = \{A \times B : A \in \mathcal{A},\ B \in \mathcal{B}\}$$

es una base de filtro en $S \times T$. Dada una aplicación $\mathbf{f} : S \times T \to F$, se pueden considerar, si existen, los límites iterados

$$\mathcal{A} - \lim_s [\mathcal{B} - \lim_t \mathbf{f}(s,t)], \quad \mathcal{B} - \lim_t [\mathcal{A} - \lim_s \mathbf{f}(s,t)]$$

y el límite doble $\mathcal{U} - \lim_{(s,t)} \mathbf{f}(s,t)$, que en lo sucesivo, para simplificar la notación, escribiremos de modo más breve

$$\lim_s [\lim_t \mathbf{f}(s,t)], \quad \lim_t [\lim_s \mathbf{f}(s,t)], \quad \lim_{(s,t)} \mathbf{f}(s,t)$$

El siguiente resultado es una versión abstracta del obtenido en la proposición 3.2

**Proposición C.4** *Sea supone que* $\mathbf{f} : S \times T \to F$ *verifica*

*a) Para cada* $s \in S$ *existe el límite parcial* $\lim_t \mathbf{f}(s,t) = \alpha(s)$*;*

*b) Existe el límite doble* $\lim_{(s,t)} \mathbf{f}(s,t) = \mathbf{b}$*;*

*Entonces existe el límite iterado* $\lim_s \alpha(s) = \mathbf{b}$*, es decir,* $\lim_s [\lim_t \mathbf{f}(s,t)] = \lim_{(s,t)} \mathbf{f}(s,t)$*. En particular, si existe el límite doble y los dos límites iterados,* $\lim_s [\lim_t \mathbf{f}(s,t)]$, $\lim_t [\lim_s \mathbf{f}(s,t)]$, *los tres límites son iguales.*

DEM: Según b), para cada $\epsilon > 0$ existe $U_\epsilon = A_\epsilon \times B_\epsilon \in \mathcal{A} \times \mathcal{B}$ tal que

$$(s,t) \in A_\epsilon \times B_\epsilon \Rightarrow \rho(\mathbf{f}(s,t), \mathbf{b}) < \epsilon/2$$

Según a), para cada $s \in A_\epsilon$ existe $B_s \in \mathcal{B}$ tal que

$$t \in B_s \Rightarrow \rho(\mathbf{f}(s,t), \alpha(s)) < \epsilon/2$$

Como $B_s \cap B_\epsilon \neq \emptyset$, para cada $s \in A_\epsilon$ podemos elegir $t_s \in B_s \cap B_\epsilon$, y se obtiene

$$\rho(\alpha(s), \mathbf{b}) \leq \rho(\alpha(s), \mathbf{f}(s, t_s)) + \rho(\mathbf{f}(s, t_s), \mathbf{b}) \leq \epsilon/2 + \epsilon/2 = \epsilon$$

■

Las tres proposiciones siguientes proporcionan condiciones suficientes, en términos de límites iterados, para la existencia del límite doble.

**Proposición C.5** *Se supone que* $\mathbf{f} : S \times T \to F$ *verifica*

*a) Para cada* $s \in S$ *existe el límite parcial* $\lim_t \mathbf{f}(s,t) = \alpha(s)$ *y el límite es uniforme respecto de* $s \in S$ *(es decir, para todo* $\epsilon > 0$ *existe* $B_\epsilon \in \mathcal{B}$ *tal que si* $t \in B_\epsilon$ *entonces todo* $s \in S$ *cumple* $\rho(\mathbf{f}(s,t), \alpha(s)) < \epsilon$*).*

*b) Existe el límite iterado* $\lim_s[\lim_t \mathbf{f}(s,t)] = \lim_s \alpha(s) = \mathbf{b}$.

*Entonces existe el límite doble y vale lo mismo que el límite iterado:*

$$\lim_{(s,t)} \mathbf{f}(s,t) = \lim_s [\lim_t \mathbf{f}(s,t)]$$

Dem: Dado $\epsilon > 0$, sea $B_\epsilon \in \mathcal{B}$ el proporcionado por la condición a). Según b) existe $A_\epsilon \in \mathcal{A}$ tal que $s \in A_\epsilon \Rightarrow \rho(\alpha(s), \mathbf{b}) < \epsilon$. Entonces $U_\epsilon = A_\epsilon \times B_\epsilon \in \mathcal{U}$ cumple

$$(s,t) \in U_\epsilon \Rightarrow \rho(\mathbf{f}(s,t), \mathbf{b}) \leq \rho(\mathbf{f}(s,t), \alpha(s)) + \rho(\alpha(s), \mathbf{b}) \leq \epsilon + \epsilon = 2\epsilon$$

■

nota: Sea $\mathbf{f}_n : M \to F$ una sucesión de funciones continuas que converge uniformemente hacia $\mathbf{f} : M \to F$. Dado $a \in M$, podemos considerar $M$ dotado del filtro $\mathcal{B}_a$ (véase C.2 b)), y $T = \mathbb{N}$ dotado del filtro de Fréchet. Entonces la aplicación $(s, n) \to \mathbf{f}_n(s)$ cumple las hipótesis de la proposición C.5 (obsérvese que existe el límite iterado $\lim_n \lim_s \mathbf{f}_n(s) = \lim_n \mathbf{f}_n(a) = \mathbf{f}(a)$) y se concluye que existe el otro límite iterado y vale lo mismo, es decir $\lim_s \lim_n \mathbf{f}_n(s) = \lim_s \mathbf{f}(s) = \mathbf{f}(a)$, lo que significa que $\mathbf{f}$ es continua en $a$. Vemos así que el teorema 3.31 se puede considerar como un caso particular de la proposición C.5.

El resultado obtenido en el ejercicio 3.39 también es otro caso particular de esta proposición. Si $\mathbf{f}_n : M \to F$ es una sucesión de funciones equicontinuas en $a \in M$, que converge puntualmente hacia $\mathbf{f} : M \to F$, podemos considerar $T = M$, dotado del filtro $\mathcal{B}_a$ y $S = \mathbb{N}$ con el filtro de Fréchet. Ahora la aplicación $(n, t) \to \mathbf{f}_n(t)$ cumple las hipótesis de la proposición C.5 (La equicontinuidad en $a$ significa que el límite $\lim_t \mathbf{f}_n(t) = \mathbf{f}_n(a)$ es uniforme respecto de la variable $n \in \mathbb{N}$, y la convergencia puntual de la sucesión hace que se cumpla b).

Entonces, en virtud de la proposición C.5 existen y son iguales los dos límites iterados $\lim_n[\lim_t \mathbf{f}_n(t)] = \lim_t[\lim_n \mathbf{f}_n(t)]$ es decir, $\mathbf{f}(a) = \lim_t \mathbf{f}(t)$, y por lo tanto $\mathbf{f}$ es continua en $a$.

**Proposición C.6** *Se supone que* $\mathbf{f} : S \times T \to F$ *verifica*

*a) Para cada* $s \in S$ *existe el límite parcial* $\lim_t \mathbf{f}(s,t) = \alpha(s)$, *y el límite es uniforme respecto de* $s \in S$.

*b) Existe el límite iterado* $\lim_t[\lim_s \mathbf{f}(s,t)] = \mathbf{b}$.

*Entonces existe el límite doble y el otro límites iterado y los tres límites son iguales:*

$$\lim_{(s,t)} \mathbf{f}(s,t) = \lim_s(\lim_t \mathbf{f}(s,t)) = \lim_t(\lim_a \mathbf{f}(s,t))$$

Dem: Basta demostrar que existe el límite doble $\lim_{(s,y)} \mathbf{f}(s,t) = \mathbf{b}$ y aplicar luego la proposición C.4 para obtener la existencia del otro límite iterado y la igualdad de los tres límites.

Según b) la función $\beta(t) = \lim_s \mathbf{f}(s,t)$ está definida para todo $t \in T$, y tiene límite $\mathbf{b}$ según la base de filtro $\mathcal{B}$. Por la definición de límite, para cada $\epsilon > 0$ existe $B'_\epsilon \in \mathcal{B}$ tal que $t \in B'_\epsilon \Rightarrow \rho(\beta(t), \mathbf{b}) < \epsilon/3$.

Por otra parte, de a) se deduce que existe $B_\epsilon \in \mathcal{B}$ tal que si $t, t' \in B_\epsilon$ entonces todo $s \in S$ cumple $\rho(\mathbf{f}(s,t), \mathbf{f}(s,t') < \epsilon/3$. En virtud de la propiedad [*] de las bases de filtro, existe $B''_\epsilon \in \mathcal{B}$, $B''_\epsilon \subset B_\epsilon \cap B'_\epsilon$.

Fijando un punto $t' \in B''_\epsilon$, y utilizando que $\beta(t') = \lim_s \mathbf{f}(s,t')$, obtenemos $A_\epsilon \in \mathcal{A}$ tal que $s \in A_\epsilon \Rightarrow \rho(\mathbf{f}(s,t'), \beta(t')) < \epsilon/3$. Entonces todo $(s,t) \in A_\epsilon \times B''_\epsilon$ cumple

$$\rho(\mathbf{f}(s,t), \mathbf{b}) \le \rho(\mathbf{f}(s,t), \mathbf{f}(s,t')) + \rho(\mathbf{f}(s,t'), \beta(t')) + \rho(\beta(t'), \mathbf{b}) \le \epsilon/3 + \epsilon/3 + \epsilon/3 = \epsilon$$

■

**Proposición C.7** *Se supone que* $(F, \rho)$ *es completo y que* $\mathbf{f} : S \times T \to F$ *verifica*

*a) Para cada* $s \in S$ *existe el límite parcial* $\lim_t \mathbf{f}(s,t) = \alpha(s)$, *y el límite es uniforme respecto de* $s \in S$.

*b) Para todo* $t \in T$ *existe* $\lim_s \mathbf{f}(s,t) = \beta(t)$.

*Entonces existe el límite doble y los dos límites iterados y valen lo mismo*

$$\lim_{(s,t)} \mathbf{f}(s,t) = \lim_s(\lim_t \mathbf{f}(s,t)) = \lim_t(\lim_a \mathbf{f}(s,t))$$

Dem: Para demostrar que existe el límite doble basta ver que se cumple la condición de Cauchy C.3. Según a), dado $\epsilon > 0$ existe $B_\epsilon \in \mathcal{B}$ tal que si $t, t' \in B_\epsilon$ entonces todo $s \in S$ cumple $\rho(\mathbf{f}(s,t), \mathbf{f}(s,t')) < \epsilon/3$. Fijado $t'' \in B_\epsilon$, en virtud de b), existe $A_\epsilon \in \mathcal{A}$ tal que para cualquier par $s, s' \in A_\epsilon$ se verifica $\rho(\mathbf{f}(s,t''), \mathbf{f}(s',t'')) < \epsilon/3$.

Entonces para todo par de puntos $(s,t), (s',t') \in A_\epsilon \times B_\epsilon$ se verifica

$$\rho(\mathbf{f}(s,t), \mathbf{f}(s',t')) \le \rho(\mathbf{f}(s,t), \mathbf{f}(s,t'')) + \rho(\mathbf{f}(s,t''), \mathbf{f}(s',t'')) + \rho(\mathbf{f}(s',t''), \mathbf{f}(s',t')) \le$$

$$\le \epsilon/3 + \epsilon/3 + \epsilon/3 = \epsilon$$

Con esto queda probado que existe el límite doble, y aplicando la proposición C.4 se termina la demostración. ■

NOTA: Sea $\mathbf{f}_n : M \to F$ una sucesión de funciones que converge uniformemente hacia $\mathbf{f} : M \to F$, tal que cada $\mathbf{f}_n$ tiene límite en $a \in M'$. Si tomamos $S = M$, dotado del filtro $\mathcal{B}_a$ considerado en C.2 b) y $T = \mathbb{N}$, dotado del filtro de Fréchet, es claro que la aplicación $(s, n) \to \mathbf{f}_n(s)$ cumple las hipótesis de la proposición anterior, lo que pone de manifiesto que 3.38 es un caso particular de esta proposición.

## C.2. Convergencia uniforme de series de funciones vectoriales

**Teorema C.8** [Weierstrass] *Si el espacio normado $(F, \| \ \|)$ es completo, una condición suficiente para que una serie $\sum_{n=1} \mathbf{f}_n$ de funciones $\mathbf{f}_n : T \to F$, sea uniformemente convergente es que sea convergente la serie numérica*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|\mathbf{f}_n\|_T < +\infty$$

DEM: Como $(F, \| \ \|)$ es completo, basta ver que la sucesión de sumas parciales $\mathbf{s}_n(t) = \sum_{k=1}^{n} \mathbf{f}_k(t)$ cumple la condición de Cauchy para la convergencia uniforme (véase 3.35). Como la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \|\mathbf{f}_n\|_T$ converge, dado $\epsilon > 0$, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $\sum_{n>m} \|\mathbf{f}_n\|_T < \epsilon$. Si $p > q \geq n(\epsilon)$, para todo $t \in T$ se cumple

$$\|\mathbf{s}_p(t) - \mathbf{s}_q(t)\| = \left\| \sum_{k=q+1}^{p} \mathbf{f}_k(t) \right\| \leq \sum_{k=q+1}^{p} \|\mathbf{f}_k(t)\| \leq \sum_{k>q} \|\mathbf{f}_k\|_T \leq \sum_{k>m} \|\mathbf{f}_k\|_T \leq \epsilon$$

■

En las aplicaciones del criterio de Weierstrass, generalmente no es preciso calcular explícitamente los valores $\|\mathbf{f}_n\|_T$. Basta encontrar una serie numérica convergente $\sum_{n=1}^{\infty} M_n$ tal que, desde un valor de $n$ en adelante, se cumpla $\|f_n(t)\| \leq M_n$ para todo $t \in T$.

El siguiente teorema proporciona criterios útiles para establecer convergencia uniforme de series que no son absolutamente convergentes.

**Teorema C.9** [Abel y Dirichlet] *Sea $(F, \| \ \|)$ un espacio normado completo y $\sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{f}_n$ una serie de funciones de la forma $\mathbf{f}_n(t) = a_n(t)\mathbf{b}_n(t)$, donde $a_n : T \to \mathbb{R}$, $\mathbf{b}_n : T \to F$. Cada una de las siguientes condiciones es suficiente para la convergencia uniforme de la serie.*

*a) La serie $\sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{b}_n$ converge uniformemente, la sucesión de funciones $a_n$ es uniformemente acotada y para cada $t \in T$ la sucesión $a_n(t)$ es monótona.*

*b) La serie $\sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{b}_n$ converge uniformemente y existe $C > 0$ tal que, para todo $t \in T$, se cumple $|a_1(t)| + \sum_{n=1}^{\infty} |a_n(t) - a_{n+1}(t)| \leq C$.*

c) *La sucesión de sumas* $\sum_{n=1}^{m} \mathbf{b}_n$ *está uniformemente acotada, la sucesión de funciones* $a_n$ *converge uniformemente hacia* $0$ *y la sucesión* $a_n(t)$ *es monótona para cada* $t \in T$.

d) *La sucesión de sumas* $\sum_{n=1}^{m} \mathbf{b}_n$ *está uniformemente acotada, la sucesión de funciones* $a_n$ *converge uniformemente hacia* $0$, *y la serie* $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n(t) - a_{n+1}(t)|$ *converge uniformemente.*

Dem: La demostración se basa en la fórmula de sumación parcial de Abel:

$$F_n^m(t) = a_m(t) B_n^m(t) + \sum_{j=n}^{m-1} B_n^j(t)(a_j(t) - a_{j+1}(t)) \qquad [*]$$

donde

$$F_n^m(t) = \sum_{j=n}^{m} \mathbf{f}_j(t), \quad B_n^m(t) = \sum_{j=n}^{m} \mathbf{b}_j(t)$$

Para establecerla se supone, por comodidad, que $n = 1$:

$$a_m(\mathbf{b}_1+\mathbf{b}_2+\cdots+\mathbf{b}_m)+(a_1-a_2)\mathbf{b}_1+(a_2-a_3)(\mathbf{b}_1+\mathbf{b}_2)+\cdots+(a_{m-1}-a_m)(\mathbf{b}_1+\mathbf{b}_2+\cdots+\mathbf{b}_{m-1}) =$$

$$= a_m(\mathbf{b}_1+\mathbf{b}_2+\cdots+\mathbf{b}_m)+(a_1-a_m)\mathbf{b}_1+(a_2-a_m)\mathbf{b}_2+(a_3-a_m)\mathbf{b}_3+\cdots+(a_{m-1}-a_m)\mathbf{b}_{m-1} =$$

$$= a_1\mathbf{b}_1 + a_2\mathbf{b}_2 + \cdots + a_m\mathbf{b}_m = \mathbf{f}_1 + \mathbf{f}_2 + \cdots + \mathbf{f}_m = F_1^m$$

Utilizando [*] vamos a demostrar si se cumple b) ó d) entonces se verifica la condición de Cauchy para la convergencia uniforme. Para ello se introducen las sucesiones

$$\epsilon(n) = \sup_{m \geq n} \|B_n^m\|_T ; \quad \delta(n) = \sup_{m \geq n} \|F_n^m\|_T .$$

Si se cumple b), la condición de Cauchy para la convergencia uniforme de la serie $\sum_n \mathbf{b}_n$ se traduce en que $\lim_n \epsilon(n) = 0$.

Observemos en primer lugar que si $t \in T$, y $m \in \mathbb{N}$ se verifica

$$|a_m(t)| \leq |a_1(t)| + |a_m(t) - a_1(t)| \leq |a_1(t)| + \sum_{i=1}^{m-1} |a_{i+1}(t) - a_i(t)| \leq C$$

Por otra parte, para cada $j \geq n$ y cada $t \in T$ se cumple $|B_n^j(t)| \leq \epsilon(n)$, y aplicando [*] se obtiene

$$|F_n^m(t)| \leq C\epsilon(n) + \epsilon(n) \sum_{j=1}^{m-1} |a_j(t) - a_{j+1}(t)| \leq 2C\epsilon(n)$$

de donde se sigue que $\delta(n) \leq 2C\epsilon(n)$, y por lo tanto $\lim_n \delta(n) = 0$, lo que significa que la serie $\sum_n \mathbf{f}_n$ cumple la condición de Cauchy para la convergencia uniforme.

Si se cumple d), sea $R > 0$ tal que $|B_1^m(t)| \leq R$ para todo $t \in T$ y todo $m \in \mathbb{N}$. Entonces $|B_n^m(t)| \leq 2R$, y utilizando [*] se deduce que para todo $t \in T$ y todo $m \geq n$ se cumple:

$$|F_n^m(t)| \leq 2R \left( \|a_m\|_T + \sum_{j=n}^{\infty} |a_j(t) - a_{j+1}(t)| \right)$$

luego $\delta(n) \leq 2R(\alpha(n) + \beta(n))$ donde,

$$\alpha(n) = \sup_{m \geq n} \|a_m\|_T\,, \quad \beta(n) = \sup_{t \in T} \sum_{j=n}^{\infty} |a_j(t) - a_{j+1}(t)|$$

En virtud de las hipótesis, $\text{lím}_n\, \alpha(n) = \text{lím}_n\, \beta(n) = 0$, luego $\text{lím}_n\, \delta(n) = 0$, y se concluye como antes que la serie $\sum_n \mathbf{f}_n$ cumple la condición de Cauchy para la convergencia uniforme.

Para terminar la demostración del teorema basta observar que a) $\Rightarrow$ b), y c) $\Rightarrow$ d). Efectivamente, si se cumple a) y $|a_n(t)| \leq M$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y todo $t \in T$, suponiendo que cada sucesión $a_n(t)$ es decreciente, se obtiene

$$\sum_{n=1}^{m} |a_n(t) - a_{n+1}(t)| = a_1(t) - a_2(t) + a_2(t) - a_3(t) + \cdots + a_m(t) - a_{m+1}(t) =$$

$$= a_1(t) - a_{m+1}(t) \leq 2M$$

luego se verifica b), ya que

$$|a_1(t)| + \sum_{n=1}^{\infty} |a_n(t) - a_{n+1}(t)| \leq M + 2M = 3M \text{ para todo } t \in T$$

Por otra parte, si se cumple c) y cada sucesión $a_n(t)$ es decreciente, es claro que la sucesión de funciones $\sum_{n=1}^{m} |a_n(t) - a_{n+1}(t)| = a_1(t) - a_{m+1}(t)$ converge uniformemente hacia la función $a_1(t)$ y por lo tanto se cumple d). ■

NOTA: El apartado *a*) del teorema C.9 es el clásico criterio de Abel, [2, Ejer.9.13]; y el apartado *b*) es una ligera mejora de este. El apartado *c*) es el criterio de Dirichlet, [2, teo. 9.15], y el apartado *d*) es una versión algo más general del mismo.