G

Funciones analíticas

G.1. Funciones analíticas

En el caso de funciones de una sola variable es bien conocido que hay funciones de clase C^∞ cuya serie de Taylor en un cierto punto no converge hacia la función en ningún entorno del punto. Un ejemplo típico lo proporciona la función $f(x) = e^{-1/x^2}$ si $x \neq 0$, $f(0) = 0$, cuyas derivadas sucesivas en $x = 0$ son todas nulas, con lo cual todos los polinomios de Taylor de f en $x = 0$ son idénticamente nulos. Las funciones de clase C^∞ que no presentan esta patología se llaman analíticas.

La definición de función analítica de varias variables reales requiere la consideración de series de potencias en varias variables reales.

Series de potencias. Una serie de potencias de n variables reales $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$, centrada en $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \cdots a_n) \in \mathbb{R}^n$, con coeficientes en un espacio normado completo $(F, \| \|)$, es una serie de la forma

$$\sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{A}_k(\mathbf{x} - \mathbf{a}) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{|\mathbf{p}|=k} \mathbf{a}_\mathbf{p}(\mathbf{x} - \mathbf{a})^\mathbf{p} \right)$$

donde el término $\mathbf{A}_k(\mathbf{x} - \mathbf{a}) = \sum_{|\mathbf{p}|=k} \mathbf{a}_\mathbf{p}(\mathbf{x} - \mathbf{a})^\mathbf{p}$ es un polinomio homogéneo de grado k en la variable $\mathbf{h} = \mathbf{x} - \mathbf{a} = (x_1 - a_1, x_2 - a_2, \cdots, x_n - a_n)$, con coeficientes $\mathbf{a}_\mathbf{p} \in F$. Se suele escribir, más brevemente, en la forma $\sum_\mathbf{p} \mathbf{a}_\mathbf{p}(\mathbf{x} - \mathbf{a})^\mathbf{p}$.

En lo que sigue, para simplificar la escritura, supondremos frecuentemente que la series de potencias están centradas en $\mathbf{a} = \mathbf{0}$. Esto no es restrictivo ya que, con el cambio de variable $\mathbf{h} = \mathbf{x} - \mathbf{a}$, la serie de potencias $\sum_\mathbf{p} \mathbf{a}_\mathbf{p}(\mathbf{x} - \mathbf{a})^\mathbf{p}$ se transforma en una serie de potencias $\sum_\mathbf{p} \mathbf{a}_\mathbf{p}\mathbf{h}^\mathbf{p}$ centrada en $\mathbf{0}$. Si $\mathbf{r} = (r_1, r_2, \cdots r_n)$ con $r_j > 0$ para $1 \leq j \leq n$, introducimos las notaciones $B(\mathbf{r}) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : |x_k| < r_k, 1 \leq k \leq n\}$; $K(\mathbf{r}) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : |x_k| \leq r_k, 1 \leq k \leq n\}$ para denotar el bloque abierto y el bloque cerrado de centro $\mathbf{0}$ y lados $2r_j$.

Por otra parte, dado $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \cdots x_n) \in \mathbb{R}^n$, el vector $(|x_1|, |x_2|, \cdots, |x_n|)$ lo designaremos con la notación abreviada $|\mathbf{x}|$. De acuerdo con esta notación, si $\mathbf{p} = (p_1, p_2, \cdots, p_n)$ se tiene, $|\mathbf{x}|^\mathbf{p} = |x_1|^{p_1}|x_2|^{p_2} \cdots |x_n|^{p_n} = |x_1^{p_1} x_2^{p_2} \cdots x_n^{p_n}| = |\mathbf{x}^\mathbf{p}|$.

Si la serie $\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{|\mathbf{p}|=k}\|\mathbf{a_p}\|\,|\mathbf{x}|^{\mathbf{p}}$ es convergente se dice que la serie de potencias $\sum_{\mathbf{p}}\mathbf{a_p}\mathbf{x}^{\mathbf{p}}$ es absolutamente convergente en el punto $\mathbf{x}$. En este caso, como el espacio normado $(F,\|\ \|)$ es completo, la serie $\sum_{k=0}^{\infty}\mathbf{A}_k(\mathbf{x})$ es convergente: En efecto, aplicando la desigualdad triangular a cada suma finita $\mathbf{A}_k(\mathbf{x})=\sum_{|\mathbf{p}|=k}\mathbf{a_p}\mathbf{x}^{\mathbf{p}}$ resulta $\|\mathbf{A}_k(\mathbf{x})\|\leq\alpha_k(\mathbf{x})$ donde $\alpha_k(\mathbf{x})=\sum_{|\mathbf{p}|=k}\|\mathbf{a_p}\|\,|\mathbf{x}|^{\mathbf{p}}$ es el término general de una serie convergente. Por el criterio de comparación $\sum_{k=0}^{\infty}\|\mathbf{A}_k(\mathbf{x})\|<+\infty$, y como $(F,\|\ \|)$ es completo se concluye que la serie $\sum_{k=0}^{\infty}\mathbf{A}_k(\mathbf{x})$ converge.

Más aún, si la serie converge absolutamente en un punto $\mathbf{r}=(r_1,r_2,\cdots r_n)$ con $r_j>0$ para $1\leq j\leq n$, entonces también converge absolutamente en cada punto del bloque compacto $K(\mathbf{r})$. Además la serie $\sum_{k=0}^{\infty}\mathbf{A}_k(\mathbf{x})$ converge uniformemente sobre $K(\mathbf{r})$ pues razonando como antes es claro que para todo $\mathbf{x}\in K(\mathbf{r})$ se cumple $\|\mathbf{A}(\mathbf{x})\|\leq\alpha_k(\mathbf{r})$ y aplicando el criterio de Weierstrass C.8 se obtiene el resultado.

Volvemos a insistir, para el lector que desee situarse en una situación más concreta, no hay inconveniente en suponer $F=\mathbb{R}$. Sin embargo, en este caso particular apenas se simplifica el asunto pues los resultados y razonamientos que siguen son esencialmente los mismos que intervienen en el caso de funciones con valores reales.

Definición G.1 *Una función $\mathbf{f}:\Omega\to\mathbb{R}$, definida en un abierto $\Omega\subset\mathbb{R}^n$, con valores en un espacio normado completo $(F,\|\ \|)$, se dice que es analítica en $\mathbf{a}\in\Omega$ si existe una bola $B(\mathbf{a},r)\subset\Omega$ donde $\mathbf{f}$ se puede representar mediante una serie de potencias absolutamente convergente, centrada en $\mathbf{a}$:*

$$\mathbf{f}(\mathbf{x})=\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{|\mathbf{p}|=k}\mathbf{a_p}(\mathbf{x}-\mathbf{a})^{\mathbf{p}}\ \textit{para todo}\ \mathbf{x}\in B(\mathbf{a},r)$$

Si $\mathbf{f}$ es analítica en cada $\mathbf{a}\in\Omega$ se dice que es analítica en Ω.

Teorema G.2 *Sea $\mathbf{f}(\mathbf{x})=\sum_{\mathbf{p}}\mathbf{a_p}\mathbf{x}^{\mathbf{p}}$, una serie de potencias, con coeficientes $\mathbf{a_p}$ en un espacio normado completo, que converge absolutamente en un punto $\mathbf{r}=(r_1,r_2,\cdots,r_n)$ con todas las coordenadas positivas. Entonces $\mathbf{f}$ es de clase C^{∞} en el bloque abierto $B(\mathbf{r})$ y sus derivadas parciales sucesivas admiten desarrollos en serie de potencias que se obtienen derivando término a término la serie dada, y estas series de potencias siguen siendo absolutamente convergentes en $\Omega_{\mathbf{z}}$.*

Dem: Para las derivadas primeras, con el fin de simplificar la escritura, consideramos el caso de la derivación respecto a la variable x_1. Para las derivadas segundas el resultado se obtendrá repitiendo el proceso con las series obtenidas para las derivadas primeras y así sucesivamente. Como pretendemos derivar respecto a la variable x_1, es conveniente escribir cada $\mathbf{x}\in B(\mathbf{r})$ en la forma $\mathbf{x}=(x_1,\mathbf{y})$, donde $\mathbf{y}=(x_2,x_3,\cdots,x_n)$, y cada multi-índice $\mathbf{p}=(p_1,p_2,\cdots,p_n)$ en la forma $\mathbf{p}=(p_1,\mathbf{q})$ donde $\mathbf{q}=(p_2,p_3,\cdots,p_n)$, de modo que $\mathbf{x}^{\mathbf{p}}=x_1^k\mathbf{y}^{\mathbf{q}}$, con $k=p_1$.

Si $\mathbf{x}\in B(\mathbf{r})$, la serie absolutamente convergente $\sum_{\mathbf{p}}\mathbf{a_p}\mathbf{x}^{\mathbf{p}}$ se puede sumar por paquetes organizados según las potencias de x_1:

$$\sum_{\mathbf{p}}\mathbf{a_p}\mathbf{x}^{\mathbf{p}}=\sum_{(k,\mathbf{q})}\mathbf{a}_{(k,\mathbf{q})}x_1^k\mathbf{y}^{\mathbf{q}}=\sum_{k=0}^{\infty}\left(\sum_{\mathbf{q}}\mathbf{a}_{(k,\mathbf{q})}\mathbf{y}^{\mathbf{q}}\right)x_1^k=\sum_{k=0}^{\infty}\boldsymbol{\varphi}_k(\mathbf{y})x_1^k$$

donde las series $\boldsymbol{\varphi}_k(\mathbf{y}) = \sum_{\mathbf{q}} \mathbf{a}_{(k,\mathbf{q})}\mathbf{y}^{\mathbf{q}}$ siguen siendo absolutamente convergentes. Cuando se deriva en el punto $\mathbf{x}$ respecto x_1 el vector $\mathbf{y} = (x_2, \cdots x_n) \in \mathbb{R}^{n-1}$ permanece fijo, y la serie

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{f}(x_1, \mathbf{y}) = \sum_{k=0}^{\infty} \boldsymbol{\varphi}_k(\mathbf{y}) x_1^k$$

hay que considerarla como una serie de potencias en la variable x_1 que converge absolutamente en $I_1 = \{x_1 : |x_1| < r_1|\}$, donde se puede derivar término a término.

Para cada $\mathbf{p} = (k, \mathbf{q})$ con $k \geq 1$ sea $\mathbf{p}'$ el multi-índice $\mathbf{p}' = (k-1, \mathbf{q})$. Entonces $x_1^{k-1}\mathbf{y}^{\mathbf{q}} = \mathbf{x}^{\mathbf{p}'}$, y la derivada de cada término de la serie adopta la forma

$$k x_1^{k-1} \boldsymbol{\varphi}_k(\mathbf{y}) = \sum_{p_1=k} k \mathbf{a}_{\mathbf{p}} \mathbf{x}^{\mathbf{p}'} = \sum_{p_1=k} D_1(\mathbf{a}_{\mathbf{p}} \mathbf{x}^{\mathbf{p}})$$

luego

$$D_1 \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \sum_{k=1}^{\infty} k x_1^{k-1} \boldsymbol{\varphi}_k(\mathbf{y}) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{p_1=k} \mathbf{a}_{\mathbf{p}} D_1(\mathbf{x}^{\mathbf{p}}) = \sum_{\mathbf{p}} \mathbf{a}_{\mathbf{p}} D_1(\mathbf{x}^{\mathbf{p}})$$

Pasa obtener la última igualdad basta observar que la serie iterada

$$\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{p_1=k} \mathbf{a}_{\mathbf{p}} D_1(\mathbf{x}^{\mathbf{p}})$$

se obtiene formando paquetes en la serie $\sum_{\mathbf{p}} \mathbf{a}_{\mathbf{p}} D_1(\mathbf{x}^{\mathbf{p}})$, y para justificar esta sumación por paquetes debemos demostrar que

$$\sum_{\mathbf{p}} \|\mathbf{a}_{\mathbf{p}}\| \, |D_1(\mathbf{x}^{\mathbf{p}})| < +\infty$$

Para ello consideramos la serie $g(\mathbf{s}) = \sum_{\mathbf{p}} \|\mathbf{a}_{\mathbf{p}}\| \, \mathbf{s}^{\mathbf{p}}$, en un punto $\mathbf{s} = (s_1, s_2, \cdots, s_n)$ tal que $|x_j| < s_j < r_j$. Como todos los términos de esta serie son positivos lo mismo le ocurre a la serie que se obtiene derivando cada término respecto a la variable s_1, lo que justifica la igualdad

$$\sum_{\mathbf{p}} \|\mathbf{a}_{\mathbf{p}}\| \, D_1(\mathbf{s}^{\mathbf{p}}) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{p_1=k} p_1 \|\mathbf{a}_{\mathbf{p}}\| \, \mathbf{s}^{\mathbf{p}'} < +\infty$$

donde la suma de la derecha es finita (porque su suma es $D_1 g(\mathbf{s})$, en virtud del mismo razonamiento empleado al iniciar el cálculo de la derivada $D_1\mathbf{f}(\mathbf{x})$). Teniendo en cuenta que $|x_j| < s_j < r_j$, $1 \leq j \leq n$, se obtiene la desigualdad

$$\sum_{\mathbf{p}} \|\mathbf{a}_p\| \, |D_1(\mathbf{x}^{\mathbf{p}})| \leq \sum_{\mathbf{p}} \|\mathbf{a}_p\| \, D_1(\mathbf{s}^{\mathbf{p}}) < +\infty$$

Así queda demostrado que en cada $\mathbf{x} \in B(\mathbf{r})$ existe la derivada parcial $D_1\mathbf{f}(\mathbf{x})$ que coincide con la suma de la serie derivada

$$D_1\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{p}} D_1(\mathbf{a}_p \mathbf{x}^{\mathbf{p}})$$

Para las derivadas parciales de orden superior observemos que dado un multi-índice de derivación $\mathbf{q} = (q_1, q_2, \cdots q_n)$, el operador $D^{\mathbf{q}}$ sólo produce resultado no nulo en los términos $\mathbf{x}^{\mathbf{p}}$ con $\mathbf{p} \geq \mathbf{q}$ (e.d. $p_j \geq q_j$, para $1 \leq j \leq n$): Como

$$\frac{\partial(x_1^{p_1} x_2^{p_2} \cdots, x_n^{p_n})}{\partial x_1^{q_1} \partial x_2^{q_2} \cdots \partial x_n^{q_n}} = \frac{p_1! x_1^{p_1-q_1}}{(p_1-q_1)!} \frac{p_2! x_2^{p_2-q_2}}{(p_2-q_2)!} \cdots \frac{p_n! x_n^{p_n-q_n}}{(p_n-q_n)!}$$

el resultado $D^{\mathbf{q}}\mathbf{x}^{\mathbf{p}}$ adopta la forma

$$D^{\mathbf{q}}\mathbf{x}^{\mathbf{p}} = \frac{\mathbf{p}!}{(\mathbf{p}-\mathbf{q})!}\mathbf{x}^{\mathbf{p}-\mathbf{q}}, \quad \text{luego} \quad D^{\mathbf{q}}\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{p} \geq \mathbf{q}} \frac{\mathbf{p}!}{(\mathbf{p}-\mathbf{q})!}\mathbf{a}_{\mathbf{p}}\mathbf{x}^{\mathbf{p}-\mathbf{q}}$$

■

Una consecuencia directa del teorema G.2 es que toda función analítica es de clase C^∞ y sus derivadas parciales sucesivas siguen siendo analíticas.

Ejemplo G.3

Si $|x_1| < 1$ y $|x_2| < 1$, efectuando el producto de convolución de las dos series geométricas absolutamente convergentes

$$\frac{1}{1-x_1} = 1 + x_1 + x_1^2 + \cdots + x_1^k + \cdots$$

$$\frac{1}{1-x_2} = 1 + x_2 + x_2^2 + \cdots + x_2^k + \cdots$$

se obtiene un desarrollo en serie de potencias de la función de dos variables reales

$$\frac{1}{(1-x_1)(1-x_2)} = \sum_{k=1}^{\infty}\left[\sum_{i+j=k} x_1^i x_2^j\right]$$

válido en el cuadrado $U = \{(x_1, x_2) : |x_1| < 1, |x_2| < 1\}$. En este caso $A_0(x_1, x_2) = 1$, $A_1(x_1, x_2) = x_1 + x_2$, $A_2(x_1, x_2) = x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2$, $A_3(x_1, x_2) = x_1^3 + x_1^2x_2 + x_1x_2^2 + x_2^3$; etc. Con la notación abreviada la última igualdad se escribe en la forma

$$\frac{1}{(1-x_1)(1-x_2)} = \sum_{\mathbf{p}} \mathbf{x}^{\mathbf{p}}$$

donde $\mathbf{p}$ recorre los índices de la forma $\mathbf{p} = (p_1, p_2)$ con $p_1, p_2 \in \{0, 1, 2, \cdots\}$.

Análogamente, si $|x_k| < 1$ para $1 \leq k \leq n$, resulta el desarrollo en serie de potencias de n variables

$$\frac{1}{(1-x_1)(1-x_2)\cdots(1-x_n)} = \sum_{\mathbf{p}} \mathbf{x}^{\mathbf{p}} = \sum_{k=0}^{\infty} A_k(\mathbf{x})$$

Ahora $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \cdots x_n)$, $\mathbf{p}$ recorre los índices de la forma $\mathbf{p} = (p_1, p_2, \cdots p_n)$ con $p_1, p_2, \cdots p_n \in \{0, 1, 2, \cdots\}$ y $A_k(\mathbf{x}) = \sum_{|\mathbf{p}|=k} x_1^{p_1} x_2^{p_2} \cdots x_n^{p_n}$.

Con un cálculo rutinario se obtiene la derivada $D^{\mathbf{q}} f(\mathbf{x})$, de la función

$$f(\mathbf{x}) = \frac{1}{(1-x_1)(1-x_2)\cdots(1-x_n)}$$

$$D^{\mathbf{q}} f(\mathbf{x}) = \frac{q_1!}{(1-x_1)^{1+q_1}} \frac{q_2!}{(1-x_2)^{1+q_2}} \cdots \frac{q_2!}{(1-x_n)^{1+q_n}}$$

Si $0 < t < 1$ el valor de esta derivada en el punto $\mathbf{t} = (t, t, \cdots t)$ viene dado por

$$D^{\mathbf{q}} f(\mathbf{t}) = \frac{\mathbf{q}!}{(1-t)^{n+|\mathbf{q}|}}$$

Por otra parte, derivando la serie de potencias, según la regla obtenida anteriormente, y sustituyendo luego $\mathbf{x} = \mathbf{t}$, resulta

$$D^{\mathbf{q}} f(\mathbf{t}) = \sum_{\mathbf{p} \geq \mathbf{q}} \frac{\mathbf{p}!}{(\mathbf{p}-\mathbf{q})!} t^{|\mathbf{p}-\mathbf{q}|}$$

Se obtiene así la siguiente igualdad que será utilizada en el teorema G.4

$$\sum_{\mathbf{p} \geq \mathbf{q}} \frac{\mathbf{p}!}{(\mathbf{p}-\mathbf{q})!} t^{|\mathbf{p}-\mathbf{q}|} = \frac{\mathbf{q}!}{(1-t)^{n+|\mathbf{q}|}} \quad \text{si} \quad 0 < t < 1.$$

El siguiente teorema proporciona una condición, bastante útil en la práctica, para justificar que una función concreta es analítica.

Teorema G.4 *Si $\mathbf{f} : \Omega \to \mathbf{F}$ es de clase C^∞ en un abierto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, con valores en un espacio completo $(F, \| \ \|)$, son equivalentes:*

a) $\mathbf{f}$ es analítica en Ω.

b) Para cada compacto $K \subset \Omega$ existen constantes $M > 0$ y $r > 0$ tales que

$$\mathbf{x} \in K, \quad |\mathbf{p}| = k \Rightarrow |D^{\mathbf{p}} \mathbf{f}(\mathbf{x})| \leq M k! R^k$$

Dem: b) $\Rightarrow$ a): Para cada $\mathbf{a} \in \Omega$ aplicamos la hipótesis b) a una bola compacta $K = \overline{B(\mathbf{a}, \delta)} \subset \Omega$, y obtenemos que se cumple la condición que interviene en el teorema 7.15, luego hay una bola $B(\mathbf{a}, \rho) \subset \Omega$ donde $\mathbf{f}|_{B(\mathbf{a},\rho)}$ se puede representar mediante la suma de su serie de Taylor en $\mathbf{a}$.
a) $\Rightarrow$ b): Cada $\mathbf{a} \in \Omega$ posee un entorno $B_\infty(\mathbf{a}, \delta) \subset \Omega$ donde $\mathbf{f}$ se puede representar mediante una serie de potencias absolutamente convergente

$$\mathbf{f}(\mathbf{a} + \mathbf{h}) = \sum_{\mathbf{p}} \mathbf{a}_{\mathbf{p}} \mathbf{h}^{\mathbf{p}} \quad \text{si} \quad \|\mathbf{h}\|_\infty < \delta$$

Sea $\mathbf{r} = (r_1, r_2, \cdots r_n)$ un punto, con $\eta = \min\{r_j : 1 \leq j \leq n\} > 0$, tal que $\sum_{\mathbf{p}} \mathbf{a}_{\mathbf{p}} \mathbf{r}^p$ es absolutamente convergente. En este punto todos los términos de la serie están acotados y podemos considerar el supremo

$$C = \sup_{\mathbf{p}} \{\|\mathbf{a}_{\mathbf{p}}\| \, \mathbf{r}^{\mathbf{p}}\}$$

Sea $0 < t < 1$ tal que $\rho = t\eta < \delta$. Si $\|\mathbf{h}\|_\infty < \rho$, para todo $j \in \{1, 2, \cdots n\}$ se cumple $|h_j| \le tr_j$. Con el desarrollo en serie de $D^{\mathbf{q}}\mathbf{f}(\mathbf{a}+\mathbf{h})$ obtenido inmediatamente antes del ejemplo G.3 se obtiene

$$\|D^{\mathbf{q}}\mathbf{f}(\mathbf{a}+\mathbf{h})\| \le \sum_{\mathbf{p}\ge\mathbf{q}} \|\mathbf{a_p}\| \frac{\mathbf{p}!}{(\mathbf{p}-\mathbf{q})!} t^{|\mathbf{p}-\mathbf{q}|} \mathbf{r}^{\mathbf{p}-\mathbf{q}} \le \frac{C}{\mathbf{r}^{\mathbf{q}}} \sum_{\mathbf{p}\ge\mathbf{q}} \frac{\mathbf{p}!}{(\mathbf{p}-\mathbf{q})!} t^{|\mathbf{p}-\mathbf{q}|}$$

Usando la igualdad

$$\sum_{\mathbf{p}\ge\mathbf{q}} \frac{\mathbf{p}!}{(\mathbf{p}-\mathbf{q})!} t^{|\mathbf{p}-\mathbf{q}|} = \frac{\mathbf{q}!}{(1-t)^{n+|\mathbf{q}|}}$$

establecida antes de la definición G.1, resulta

$$\|D^{\mathbf{q}}\mathbf{f}(\mathbf{a}+\mathbf{h})\| \le \frac{C}{(1-t)^n} \frac{\mathbf{q}!}{\mathbf{r}^{\mathbf{q}}(1-t)^{|\mathbf{q}|}} \le \frac{C}{(1-t)^n} \frac{\mathbf{q}!}{\eta^{|\mathbf{q}|}(1-t)^{|\mathbf{q}|}}$$

Tomando $M = C/(1-t)^n$, y $1/R = \eta(1-t)$, para todo índice $\mathbf{q}$ y todo $\mathbf{x} \in B(\mathbf{a}, \rho)$, se cumple $\|D^{\mathbf{q}}\mathbf{f}(\mathbf{x})\| \le MR^k k!$, con $k = |\mathbf{q}|$, (pues $k!/\mathbf{q}!$ es un entero ≥ 1).

Finalmente, si $K \subset \Omega$ es compacto, por el razonamiento anterior, para cada $\mathbf{a} \in K$ hay una bola $B(\mathbf{a}, \rho(\mathbf{a})) \subset \Omega$, y constantes $M(\mathbf{a}) > 0$, $R(\mathbf{a}) > 0$, tales que para todo $\mathbf{x} \in B(\mathbf{a}, \rho(\mathbf{a}))$ y todo índice $\mathbf{q}$ se cumple

$$\|D^{\mathbf{q}}\mathbf{f}(\mathbf{x})\| \le M(\mathbf{a})R(\mathbf{a})^k k!, \quad \text{donde } \; k = |\mathbf{p}|.$$

Con un número finito de estas bolas $B(\mathbf{a}_j, \rho(\mathbf{a}_j))$, $1 \le j \le m$, se recubre el compacto K y las constantes

$$M = \max\{M(\mathbf{a}_j) : 1 \le j \le m\}, \quad R = \max\{R(\mathbf{a}_j) : 1 \le j \le m\}$$

cumplen la condición b) del enunciado. ■

Otros resultados.

- En las condiciones del teorema G.2 la función $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{p}} \mathbf{a}_p \mathbf{x}^{\mathbf{p}}$, definida en un bloque $B(\mathbf{r}) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : |x_j| < r_j\}$ por una serie de potencias es analítica. Más aún, para cada $\mathbf{a} \in B(\mathbf{r})$ la función $\mathbf{f}$ se puede desarrollar en serie de potencias en

$$B(\mathbf{a}, \mathbf{s}) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : |x_j - a_j| < s_j\}, \quad \text{donde } \; 0 < s_j = r_j - |a_j|, \; 1 \le j \le n$$

- La función $\mathbf{f} : \Omega \to \mathbb{R}^m$ es analítica en un abierto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ si y sólo si cada componente $f_j : \Omega \to \mathbb{R}$ lo es. En este caso, si $\mathbf{g} : V \to F$ es analítica en un abierto $V \subset \mathbb{R}^m$ y $\mathbf{f}(\Omega) \subset V$, la función compuesta $\mathbf{g} \circ \mathbf{f}$ también es analítica en Ω.
- *Principio de prolongación analítica:* Si $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ es un abierto conexo y $\mathbf{f}, \mathbf{g} : \Omega \to \mathbb{R}$ son funciones analíticas que coinciden en un abierto no vacío $U \subset \Omega$, entonces $\mathbf{f} = \mathbf{g}$.
- En general, dada una función analítica $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, puede ocurrir que f no admita una representación global mediante una serie de potencias convergente en todo $\mathbb{R}^n$: Ya en el caso $n = 1$ hay funciones como $f(x) = 1/(1 + x^2)$, que son analíticas en todo $\mathbb{R}$ y sin embargo su desarrollo en serie de potencias alrededor de un punto $a \in \mathbb{R}$ nunca converge en todo $\mathbb{R}$ (esta afirmación resultará evidente para el lector que conozca la teoría de las funciones analíticas de variable compleja).