H

Dependencia funcional. Subvariedades diferenciables

H.1. Dependencia e independencia funcional

Definición H.1 *Sean $f, f_1, \ldots, f_p : \Omega \to \mathbb{R}$ funciones de clase $C^k(\Omega)$ definidas en un abierto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, donde $1 \leq p \leq n$, y $k \geq 1$. Se dice que f depende funcionalmente de $f_1, \ldots, f_p$ en el punto $\mathbf{a} \in \Omega$ si existen un entorno abierto de $\mathbf{a}$, $V \subset \Omega$, un entorno abierto de $\mathbf{b} = (f_1(\mathbf{a}), \ldots, f_p(\mathbf{a}))$, $U \subset \mathbb{R}^p$ y una función $F : U \longrightarrow \mathbb{R}$, de clase $C^k(U)$, tales que $U = \{(f_1(\mathbf{x}), \ldots, f_p(\mathbf{x})) : \mathbf{x} \in V\}$ y*

$$f(\mathbf{x}) = F(f_1(\mathbf{x}), \ldots, f_p(\mathbf{x})), \text{ para todo } \mathbf{x} \in V.$$

Teorema H.2 *Sean $f, f_1, \ldots, f_p : \Omega \to \mathbb{R}$ funciones de clase $C^k(\Omega)$ definidas en un abierto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, donde $1 \leq p \leq n$, y $k \geq 1$, y sea $\mathbf{a} \in \Omega$ un punto tal que las formas lineales $df_1(\mathbf{a}), \ldots, df_p(\mathbf{a})$ son linealmente independientes.*

Si las formas lineales $df(\mathbf{x}), df_1(\mathbf{x}), \ldots, df_p(\mathbf{x})$ son linealmente dependientes en todos los puntos $\mathbf{x}$ de algún entorno $\Omega_{\mathbf{a}}$ de $\mathbf{a}$, entonces f depende funcionalmente de $f_1, \ldots, f_p$ en el punto $\mathbf{a}$.

DEM: Puesto que los vectores $\nabla f_1(\mathbf{a}), \ldots, \nabla f_p(\mathbf{a})$ son linealmente independientes, la matriz cuyas filas son estos vectores es de rango p, y reordenando las variables si es necesario, podemos suponer que no es nulo el determinante

$$\frac{\partial(f_1, \ldots, f_p)}{\partial(x_1, \ldots, x_p)}(\mathbf{a}) \neq 0$$

Sea $\mathbf{b} = (f_1(\mathbf{a}), \ldots, f_p(\mathbf{a}))$. Consideremos la función $\Phi : \Omega \to \mathbb{R}^n$ definida por:

$$\Phi(x_1, \ldots, x_n) = (f_1(\mathbf{x}), f_2(x), \ldots, f_p(\mathbf{x}), x_{p+1}, \ldots, x_n)$$

Es claro que en todo $\mathbf{x} \in \Omega$ se cumple

$$\frac{\partial(\Phi_1, \ldots, \Phi_n)}{\partial(x_1, \ldots, x_n)}(\mathbf{x}) = \frac{\partial(f_1, \ldots, f_p)}{\partial(x_1, \ldots, x_p)}(\mathbf{x})$$

Como el determinante anterior no es nulo cuando $\mathbf{x} = \mathbf{a}$, según el teorema de la función inversa, existe $V \subset \Omega_{\mathbf{a}}$, entorno abierto de $\mathbf{a}$ y B' entorno abierto de $\mathbf{b}' = (\mathbf{b}, a_{p+1}, \dots, a_n)$, tales que $\Phi|_V : V \to B'$ es un C^k-difeomorfismo. No hay inconveniente en suponer que $B' = U \times W$, donde $U \subset \mathbb{R}^p$ es un entorno de $\mathbf{b}$ y $W = \{(y_{p+1}, \dots, y_n) : |y_j - a_j| < \varepsilon, p < j \leq n\}$. Tampoco es restrictivo suponer que $\frac{\partial(\Phi_1,\dots,\Phi_n)}{\partial(x_1,\dots,x_n)}(\mathbf{x}) \neq 0$, para todo $\mathbf{x} \in V$, lo que significa que las formas lineales $d\Phi_1(\mathbf{x}), \dots, d\Phi_n(\mathbf{x})$ son linealmente independientes para todo $\mathbf{x} \in V$. Según la definición de las componentes de Φ, esto significa que las formas lineales $df_1(\mathbf{x}), \dots, df_p(\mathbf{x}), dx_{p+1}, \dots, dx_n$ son linealmente independientes para todo $\mathbf{x} \in V$.

La función $F : U \times W \longrightarrow \mathbb{R}$, definida por $F = f \circ (\Phi|_V)^{-1}$, verifica $f|_V = F \circ \Phi|_V$ luego, según la regla de la cadena, para cada $\mathbf{x} \in V$ se cumple:

$$df(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial F}{\partial x_j}(\Phi(\mathbf{x}))d\Phi_j(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^{p} \frac{\partial F}{\partial x_j}(\Phi(\mathbf{x}))df_j(\mathbf{x}) + \sum_{j=p+1}^{n} \frac{\partial F}{\partial x_j}(\Phi(\mathbf{x}))dx_j.$$

Por hipótesis, las formas lineales $df(\mathbf{x}), df_1(\mathbf{x}) \dots, df_p(\mathbf{x})$ son linealmente dependientes, mientras que las n formas $df_1(\mathbf{x}), \dots, df_p(\mathbf{x}), dx_{p+1}, \dots, dx_n$ son linealmente independientes, luego la igualdad anterior implica que

$$\frac{\partial F}{\partial x_j}(\Phi(\mathbf{x})) = 0, \quad \forall \mathbf{x} \in V, \quad \forall j \in \{p+1, \dots, n\}$$

es decir:

$$\frac{\partial F}{\partial x_j}(\mathbf{y}) = 0, \quad \forall \mathbf{y} \in U \times W, \quad \forall j \in \{p+1, \dots, n\}.$$

Teniendo en cuenta que W es un paralelepípedo, la anulación de las derivadas parciales significa que F no depende de las variables $y_{p+1}, \dots, y_n$ en $U \times W$, o bien, que F sólo depende de $y_1, \dots, y_p$, por lo que podemos considerarla definida en $U \subset \mathbb{R}^p$.

Volviendo ahora a la relación $f|_V = F \circ \Phi|_V$, ésta significa que si $\mathbf{x} \in V$, entonces $f(\mathbf{x}) = F(f_1(\mathbf{x}), \dots, f_p(\mathbf{x}))$. Por otra parte, si $\mathbf{u} \in U$, entonces $(\mathbf{u}, a_{p+1}, \dots, a_n) \in U \times W$, por lo que existe $\mathbf{x} \in V$ tal que $\Phi(\mathbf{x}) = (\mathbf{u}, a_{p+1}, \dots, a_n)$, es decir $\mathbf{u} = (f_1(\mathbf{x}), \dots, f_p(\mathbf{x}))$. ■

Definición H.3 *Sean $f_1, \dots, f_p : \Omega \to \mathbb{R}$ funciones de clase $C^1(\Omega)$ definidas en un abierto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Se dice que $f_1, \dots, f_p$ son funcionalmente independientes en $\mathbf{a} \in \Omega$ si cada función real continua F, definida en un entorno de $\mathbf{b} = (f_1(\mathbf{a}), \dots, f_p(\mathbf{a}))$, que verifique $F(f_1(\mathbf{x}), \dots, f_p(\mathbf{x})) = 0$ en los puntos $\mathbf{x}$ de un entorno de $\mathbf{a}$, debe ser idénticamente nula en algún entorno de $\mathbf{b}$.*

Teorema H.4 *Sean $f_1, \dots, f_p : \Omega \to \mathbb{R}$ funciones de clase $C^1(\Omega)$ en un abierto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, con $p \leq n$. Si en el punto $\mathbf{a} \in \Omega$ el rango de la matriz $(D_i f_j(\mathbf{a}))_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq p}$ es p entonces las funciones $f_1, \dots, f_p$ son funcionalmente independientes en $\mathbf{a}$.*

DEM: Es consecuencia directa del teorema de la aplicación abierta aplicado a la función $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = (f_1(\mathbf{x}), \dots, f_p(\mathbf{x}))$. En virtud de la hipótesis, existe un entorno abierto

U de $\mathbf{a}$ tal que $\mathbf{f}|_U$ es abierta. En tal caso si F es una función continua definida en un entorno V de $\mathbf{b}$, si existe un entorno U_1 de $\mathbf{a}$ tal que

$$F(f_1(\mathbf{x}), \ldots, f_m(\mathbf{x})) = 0 \quad \forall \mathbf{x} \in U_1$$

debe cumplirse que $f(U_1) \subset V$, luego $W = \mathbf{f}(U \cap U_1)$ es un entorno de $\mathbf{b}$ tal que $F(\mathbf{y}) = 0$, para todo $y \in W$. ■

Un resultado análogo al anterior, en el caso de rango no máximo (pero constante) proporciona una condición suficiente de dependencia funcional.

Teorema H.5 *Sean $f_1, \ldots, f_m : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ funciones de clase $C^1(\Omega)$ en un abierto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Si existe un entorno de $\mathbf{a} \in \Omega$, $V \subset \Omega$, tal que para todo $x \in V$, el rango de la matriz $(D_i f_j(\mathbf{x}))_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m}$ es $p < m$, entonces $m - p$ de estas funciones dependen funcionalmente en $\mathbf{a}$ de las restantes.*

DEM: Sea $\mathbf{f} : \Omega \longrightarrow \mathbf{R}^m$, definida por $f(\mathbf{x}) = (f_1(\mathbf{x}), \ldots, f_m(\mathbf{x}))$. Podemos suponer que $\nabla f_1(\mathbf{a}), \ldots, \nabla f_p(\mathbf{a})$ son linealmente independientes (reordenando las funciones si es necesario). Por hipótesis, para cada $j \in \{p+1, \ldots, m\}$ $\mathbf{x} \in V$ el rango de $\mathbf{f}'(\mathbf{x})$ es siempre p, luego, para cada tenemos que las formas lineales $df_1(\mathbf{x}), \ldots, df_p(\mathbf{x}), df_j(\mathbf{x})$, son linealmente dependientes y aplicando el teorema H.1 se obtiene el resultado. ■

Por ejemplo, si en el teorema anterior, suponemos $p = m-1$ y $df_1(\mathbf{a}), \ldots, df_{m-1}(\mathbf{a})$ son linealmente independientes, entonces existe una función F de clase C^1 en un entorno de a tal que:

$$f_m(\mathbf{x}) = F(f_1(\mathbf{x}), \ldots, f_{m-1}(\mathbf{x}))$$

para $\mathbf{x}$ en un cierto entorno de $\mathbf{a}$.

Si $p = m - 2$ y y suponemos $df_1(\mathbf{a}), \ldots, df_{m-2}(\mathbf{a})$ linealmente independientes, existen funciones F_1, F_2 de clase C^1 en un entorno de $\mathbf{a}$ tales que:

$$\begin{aligned} f_{m-1}(\mathbf{x}) &= F_1(f_1(\mathbf{x}), \ldots, f_{m-2}(\mathbf{x})) \\ f_m(\mathbf{x}) &= F_2(f_1(\mathbf{x}), \ldots, f_{m-2}(\mathbf{x})) \end{aligned}$$

para $\mathbf{x}$ en un cierto entorno de $\mathbf{a}$.

Ejemplo H.6

Sean $f_1, f_2, f_3 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ dadas por:

$$\begin{aligned} f_1(r, \theta) &= r \cos \theta \\ f_2(r, \theta) &= r \operatorname{sen} \theta \\ f_3(r, \theta) &= r \end{aligned}$$

En un entorno de $(0, \theta_0)$ el rango de $df(r, \theta)$ no permanece constante, aunque siempre es menor que 3. Se satisface la relación funcional

$$f_1^2 + f_2^2 - f_3^2 = 0$$

pero no es posible expresar una de las funciones como una función de clase $\mathcal{C}^1$ de las otras dos: Basta observar que el punto $(0, 0, 0)$ es el vértice del cono $x^2 + y^2 - z^2 = 0$.

Este ejemplo muestra que en el teorema anterior la hipótesis «rango constante» (naturalmente también menor que m) es esencial. ■

H.2. Parametrizaciones regulares

Frecuentemente se asume sin demostración que la parametrización habitual de un trozo de esfera usando la longitud y la latitud como parámetros conduce a una parametrización regular. En el siguiente ejemplo se puede ver una demostración detallada de este hecho.

Ejemplo H.7 *Parametrización regular de un trozo de esfera*

Sea $U_{\alpha\beta} = \{(s,t) \in \mathbb{R}^2 : |s| < \beta,\ 0 < t < \beta\}$, donde $0 < \alpha \leq \pi/2$, $0 < \beta \leq 2\pi$. Si suponemos que s (resp. t) representa la latitud (resp. longitud) de un punto de la esfera $S = \{(x,y,z) : x^2 + y^2 + z^2 = R^2\}$, es fácil visualizar geométricamente el trozo de esfera $S_{\alpha\beta} = \boldsymbol{\varphi}(U_{\alpha\beta})$ obtenido como imagen de $U_{\alpha\beta}$ mediante la aplicación

$$\boldsymbol{\varphi}(s,t) = (R\cos s\ \cos t,\ R\cos s\ \operatorname{sen} t,\ R\operatorname{sen} s)$$

Seguidamente vemos con detalle que la parametrización $\boldsymbol{\varphi} : U_{\alpha\beta} \to \mathbb{R}^3$ es regular. Observemos en primer lugar que para todo $(s,t) \in U_{\alpha\beta}$ los vectores no nulos

$$\begin{aligned} D_1\boldsymbol{\varphi}(s,t) &= (-R\operatorname{sen} s\ \cos t,\ -R\operatorname{sen} s\ \operatorname{sen} t,\ R\cos s) \\ D_2\boldsymbol{\varphi}(s,t) &= (-R\cos s\ \operatorname{sen} t, R\cos s\ \cos t, 0) \end{aligned}$$

son linealmente independientes por ser ortogonales. También es fácil ver que $\boldsymbol{\varphi}$ es inyectiva en el abierto $U_{\alpha\beta}$: Sean $(s,t), (s',t') \in U_{\alpha\beta}$ tales que $\boldsymbol{\varphi}(s,t) = \boldsymbol{\varphi}(s',t')$, lo que significa que se cumplen las tres igualdades.

$$\cos s\ \cos t = \cos s'\ \cos t';\ \cos s\ \operatorname{sen} t = \cos s'\ \operatorname{sen} t',\ \operatorname{sen} s = \operatorname{sen} s'$$

Elevando al cuadrado las dos primeras y sumando resulta $\cos^2 s = \cos^2 s'$, y teniendo en cuenta que $\cos s > 0$ y $\cos s' > 0$ (porque $s, s' \in (\pi/2, \pi/2)$) resulta $\cos s = \cos s'$. Esta igualdad, combinada con la última, $\operatorname{sen} s = \operatorname{sen} s'$, conduce a que $s - s'$ es un múltiplo entero de 2π, y teniendo en cuenta que $s, s' \in (0, 2\pi)$, se obtiene $s = s'$. Ahora, utilizando las dos primeras igualdades y teniendo en cuenta que $\cos s = \cos s' > 0$ se obtiene que $\cos t = \cos t'$, $\operatorname{sen} t = \operatorname{sen} t'$, y con un argumento similar se concluye que $t = t'$.

Para terminar debemos demostrar que la inversa de la biyección $\boldsymbol{\varphi} : U_{\alpha\beta} \to \boldsymbol{\varphi}(U_{\alpha\beta})$ es continua. Lo haremos viendo que si $\mathbf{p}_j = \boldsymbol{\varphi}(s_j, t_j)$ es una sucesión en $\boldsymbol{\varphi}(U_{\alpha\beta})$ que converge hacia $\mathbf{p} = \boldsymbol{\varphi}(s,t) \in \boldsymbol{\varphi}(U_{\alpha\beta})$ entonces la sucesión $(s_j, t_j) \in U_{\alpha\beta}$ converge hacia $(s,t) \in U_{\alpha\beta}$ (véase el corolario 2.8). Como la sucesión (s_j, t_j) está contenida en el compacto $K = [-\pi/2, \pi/2] \times [0, 2\pi]$, bastará que ver que cualquier subsucesión convergente (s_{j_k}, t_{j_k}) converge hacia $(s,t) \in K$. En lo que sigue consideramos que $\boldsymbol{\varphi}$ está definida, por las mismas fórmulas, en el compacto $K = [-\pi/2, \pi/2] \times [0, 2\pi]$. Si la subsucesión (s_{j_k}, t_{j_k}) converge hacia $(s', t') \in K$, por continuidad se debe cumplir

$$\boldsymbol{\varphi}(s', t') = \lim_k \boldsymbol{\varphi}(s_{j_k}, t_{j_k}) = \lim_k \mathbf{p}_{j_k} = \mathbf{p} = \boldsymbol{\varphi}(s,t)$$

Como $|s| < \pi/2$, $|s'| \leq \pi/2$, $t \in (0, 2\pi)$, $t' \in [0, 2\pi]$ con el razonamiento realizado para demostrar que $\boldsymbol{\varphi}$ es inyectiva sobre $U_{\alpha\beta}$ se concluye que $(s,t) = (s',t')$. ■

La observación que sigue a la demostración del teorema 9.4 tiene una consecuencia interesante formulada en la proposición H.9, en términos de la siguiente definición:

Definición H.8 *Dos parametrizaciones, $\boldsymbol{\varphi}_j : U_j \to \mathbb{R}^n$, $j = 1, 2$, de clase C^m y dimensión k, se dice que son C^m-equivalentes cuando existe un C^m-difeomorfismo $\mathbf{g} : U_1 \to U_2$, tal que $\boldsymbol{\varphi}_1 = \boldsymbol{\varphi}_2 \circ \mathbf{g}$.*

Proposición H.9 *Dos parametrizaciones regulares $\boldsymbol{\varphi}_j : U_j \to \mathbb{R}^n$, $j = 1, 2$, de clase C^m y dimensión k, con la misma imagen son C^m-equivalentes.*

DEM: Si $\boldsymbol{\varphi}_2^{-1} : S \to U_2$ denota la inversa del homeomorfismo $\boldsymbol{\varphi}_2 : U_2 \to S$ entonces $\mathbf{g} = \boldsymbol{\varphi}_2^{-1} \circ \boldsymbol{\varphi}_1 : U_1 \to U_2$ es un homeomorfismo que verifica $\boldsymbol{\varphi}_1 = \boldsymbol{\varphi}_2 \circ \mathbf{g}$, y basta demostrar que $\mathbf{g}$ es de clase C^m (pues el mismo razonamiento, cambiando los papeles de los subíndices, asegurará que su inversa también es de clase C^m).

Esto lo haremos viendo que cada $\mathbf{a} \in U_1$ posee un entorno $O_\mathbf{a} \subset U_1$ donde $\mathbf{g}|_{O_\mathbf{a}}$ es de clase C^m. Según la observación que sigue al teorema 9.4 el punto $\mathbf{p} = \boldsymbol{\varphi}_1(\mathbf{a})$ de la subvariedad $S = \boldsymbol{\varphi}_2(U_2)$ posee un entorno abierto $W_\mathbf{p} \subset \mathbb{R}^n$, en el que hay definida una función $\boldsymbol{\Psi} : W_\mathbf{p} \to U_2$ de clase C^m, que verifica

$$\boldsymbol{\Psi}(\mathbf{x}) = \boldsymbol{\varphi}_2^{-1}(\mathbf{x}) \quad \text{para cada} \quad \mathbf{x} \in S \cap W_p$$

luego $O_\mathbf{a} = \boldsymbol{\varphi}_1^{-1}(W_p) \subset U_1$ es un entorno abierto de $\mathbf{a}$ tal que $\mathbf{g}|_{O_\mathbf{a}} = \boldsymbol{\Psi} \circ (\boldsymbol{\varphi}_1|_{O_\mathbf{a}})$. Como la composición de funciones de clase C^m es de clase C^m, se concluye que $\mathbf{g}|_{O_\mathbf{a}}$ es de clase C^m. ■

En lo que sigue a las subvariedades diferenciables de $\mathbb{R}^n$ consideradas en 9.6 a), que se pueden describir como imagen de una parametrización regular, las llamaremos *k-hipersuperficies paramétricas regulares* (*superficies paramétricas regulares* en el caso $n = 3$, $k = 2$). Con esta terminología la proposición H.9 dice que si M es una k-hipersuperficie paramétrica regular de clase C^m, entonces todas sus representaciones paramétricas regulares de clase C^m son C^m-equivalentes.

Espacio tangente a una parametrización. Si $\boldsymbol{\varphi} : U \to \mathbb{R}^n$ es una parametrización, de clase C^m y dimensión k, a cada $\mathbf{u} \in U$, le podemos asociar el espacio vectorial $E(\boldsymbol{\varphi}, \mathbf{u}) := d\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{u})(\mathbb{R}^k) \subset \mathbb{R}^n$, generado por los vectores $D_j\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{u})$, $1 \le j \le k$.

Sabemos que los vectores de $E(\boldsymbol{\varphi}, \mathbf{u})$, son tangentes a $M = \boldsymbol{\varphi}(U)$ en el punto $\mathbf{p} = \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{u})$, es decir $E(\boldsymbol{\varphi}, \mathbf{u}) \subset T_\mathbf{p}(M)$, y por ello se suele decir que $E(\boldsymbol{\varphi}, \mathbf{u})$ es el espacio vectorial tangente a la parametrización $\boldsymbol{\varphi}$, en el punto $\mathbf{p} = \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{u})$, para el valor $\mathbf{u}$ del parámetro (se puede prescindir de la última frase si $\boldsymbol{\varphi}$ es inyectiva).

Proposición H.10 *Sean $\boldsymbol{\varphi}_i : U_i \to \mathbb{R}^n$, ($i = 1, 2$), parametrizaciones C^m-equivalentes y $\mathbf{g} : U_1 \to U_2$, un C^m difeomorfismo con $\boldsymbol{\varphi}_1 = \boldsymbol{\varphi}_2 \circ \mathbf{g}$. Si $\mathbf{v} = \mathbf{g}(\mathbf{u}) \in U_2$, se cumple*

$$E(\boldsymbol{\varphi}_2, \mathbf{v}) = E(\boldsymbol{\varphi}_1, \mathbf{u})$$

DEM: En virtud de la regla de la cadena $d\boldsymbol{\varphi}_2(\mathbf{v}) \circ d\mathbf{g}(\mathbf{u}) = d\boldsymbol{\varphi}_1(\mathbf{u})$, y teniendo en cuenta que la aplicación lineal $d\mathbf{g}(\mathbf{u}) : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^k$ es sobreyectiva resulta

$$E(\boldsymbol{\varphi}_1, \mathbf{u}) = d\boldsymbol{\varphi}_1(\mathbf{u})(\mathbb{R}^k) = d\boldsymbol{\varphi}_2(\mathbf{v}))[d\mathbf{g}(\mathbf{u})(\mathbb{R}^k)] = d\boldsymbol{\varphi}_2(\mathbf{v})(\mathbb{R}^k) = E(\boldsymbol{\varphi}_2, \mathbf{v})$$

■

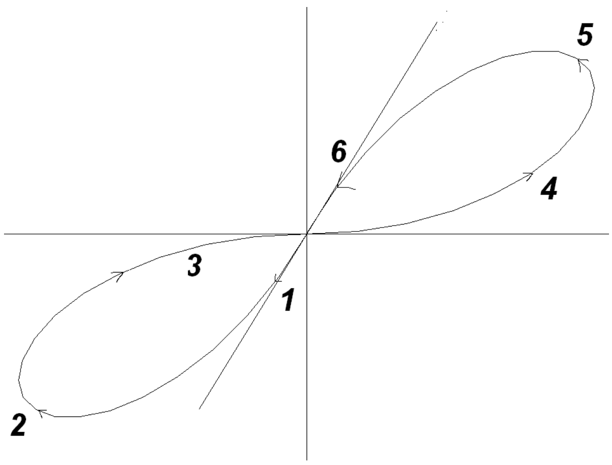
OBSERVACIÓN: Cuando la parametrización $\boldsymbol{\varphi}$ es regular sabemos que $M = \boldsymbol{\varphi}(U)$ es una subvariedad diferenciable y por lo tanto, para cada $\mathbf{p} = \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{u}) \in M$, se cumple la igualdad $E(\boldsymbol{\varphi}, \mathbf{u}) = T_{\mathbf{p}}(M)$, lo que significa que $E(\boldsymbol{\varphi}, \mathbf{u})$ sólo depende de la imagen $M = \boldsymbol{\varphi}(U)$ y del punto $\mathbf{p} \in M$. Pero conviene advertir que en general, para una parametrización no regular, el espacio tangente $E(\boldsymbol{\varphi}, \mathbf{u})$ depende de $\boldsymbol{\varphi}$, y de $\mathbf{u}$. Además, puede ocurrir que siendo $\boldsymbol{\varphi}$ inyectiva, y $E(\boldsymbol{\varphi}, \mathbf{u})$ un espacio vectorial de dimensión k, sin embargo $T_{\mathbf{p}}(M)$ no sea espacio vectorial y $E(\boldsymbol{\varphi}, \mathbf{u}) \subsetneq T_{\mathbf{p}}(M)$ (es claro que entonces $M = \boldsymbol{\varphi}(U)$ no es subvariedad diferenciable de $\mathbb{R}^n$). Esto se pone de manifiesto con el ejemplo H.11, referente al caso $n = 2$, $k = 1$.

Ejemplo H.11 *Una parametrización inyectiva no regular*

Consideremos la parametrización $\boldsymbol{\varphi} : U \to \mathbb{R}^2$, definida en el intervalo $U = (-\pi/3, \pi/3)$ mediante las ecuaciones

$$\boldsymbol{\varphi}(t) = (\operatorname{sen} 3t \cos t, \operatorname{sen} 3t |\operatorname{sen} t|)$$

Su imagen es una curva en forma de 8 recorrida en el sentido indicado en la figura. Obsérvese que para $t \in [0, \pi/3)$ es $\boldsymbol{\varphi}(t) = (\operatorname{sen} 3t \cos t, \operatorname{sen} 3t \operatorname{sen} t)$ luego $\boldsymbol{\varphi}([0, \pi/3))$ está en el primer cuadrante y coincide con el arco de curva cuya ecuación en coordenadas polares es $r = \operatorname{sen} 3t$, $0 \leq t \leq \pi/3$, luego r crece desde 0 hasta 1 en el intervalo $0 \leq t \leq \pi/6$, y decrece desde 1 hasta 0 (sin llegar a valer 0) en el intervalo $\pi/6 \leq t < \pi/3$. Es fácil comprobar que para $t \in (-\pi/3, t]$ es $\boldsymbol{\varphi}(t) = -\boldsymbol{\varphi}(-t)$. Con esta información se aprecia que cuando t recorre U en sentido creciente, su imagen $\boldsymbol{\varphi}(t)$ recorre la curva $S = \boldsymbol{\varphi}(U)$ en el sentido que muestra la figura:



$\boldsymbol{\varphi}(t)$ arranca en el tercer cuadrante muy cerca de $(0,0)$, según la dirección de la recta $y = \sqrt{3}x$, pasa por $(0,0)$ en el instante $t = 0$, con tangente horizontal, y entra en el primer cuadrante, con tangente horizontal, para finalizar su recorrido acercándose a $(0,0)$ según la dirección de la recta $y = \sqrt{3}x$.

Es fácil ver que $\boldsymbol{\varphi}$ es inyectiva y de clase C^1, con $\boldsymbol{\varphi}'(t) \neq 0$ para todo $t \in U$ (obsérvese que $\lim_{t \to 0+} \boldsymbol{\varphi}'(t) = \lim_{t \to 0-} \boldsymbol{\varphi}'(t) = (3,0)$), es decir $\boldsymbol{\varphi}$ es una parametrización inyectiva de clase C^1 y dimensión 1, cuyo espacio tangente, para $t = 0$, es la recta $E(\boldsymbol{\varphi}, 0) = \{(x,y) : y = 0\}$. Es geométricamente evidente que el conjunto de vectores tangentes en $\mathbf{0} = (0,0)$ al conjunto $S = \boldsymbol{\varphi}(U)$ no es espacio vectorial:

$$T_{\mathbf{0}}(S) = \{(x,y) : y = \sqrt{3}x\} \cup \{(x,y) : y = 0\}$$

Obsérvese que la parametrización $\boldsymbol{\varphi}$ no es regular porque $\boldsymbol{\varphi} : U \to S$ no es homeomorfismo: Hay puntos de S tan próximos a $(0,0) = \boldsymbol{\varphi}(0)$ como queramos que son imágenes de puntos t con $1 < |t| < \pi/3$. ■

H.3. Subvariedades orientables

Sea $M \subset \mathbb{R}^n$ una subvariedad diferenciable de clase C^m y dimensión $k \leq n$ y para cada $\mathbf{p} \in M$ sea $O_{\mathbf{p}}$ una orientación del espacio tangente $T_{\mathbf{p}}(M)$. Se dice que $\{O_{\mathbf{p}} : \mathbf{p} \in M\}$ es un *sistema continuo de orientaciones* de M cuando cada $\mathbf{p} \in M$ posee un entorno abierto $G_{\mathbf{p}}$ tal que en $G_{\mathbf{p}} \cap M$ se puede definir una función continua $\beta : G_{\mathbf{p}} \cap M \to (\mathbb{R}^n)^k$ tal que para cada $\mathbf{y} \in G_{\mathbf{p}} \cap M$, $\beta(\mathbf{y}) = (\beta_1(\mathbf{y}), \beta_2(\mathbf{y}), \cdots \beta_k(\mathbf{y})$ es una base de $T_{\mathbf{p}}(M)$ positiva para la orientación $O_{\mathbf{y}}$.

Definición H.12 *Una subvariedad diferenciable $M \subset \mathbb{R}^n$, de clase C^m y dimensión $k \leq n$, se dice que es orientable cuando admite un sistema continuo de orientaciones. En ese caso, una vez que se ha fijado en M un sistema continuo de orientaciones se dice que M está orientada.*

Si $M \subset \mathbb{R}^n$ es una subvariedad orientada mediante el sistema continuo de orientaciones $\{O_{\mathbf{p}} : \mathbf{p} \in M\}$, dado un abierto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ con $M \cap \Omega = M_0 \neq \emptyset$ es inmediato que M_0 es una subvariedad orientable con la orientación inducida, que es la definida por el sistema continuo de orientaciones $\{O_{\mathbf{p}} : \mathbf{p} \in M_0\}$.

Un ejemplo trivial de subvariedad orientable lo proporciona cualquier subespacio vectorial $M \subset \mathbb{R}^n$. En este caso $T_{\mathbf{p}}(M) = M$ para todo $\mathbf{p} \in M$, y si orientamos M como espacio vectorial eligiendo una base $\beta = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \cdots \mathbf{e}_k)$ de M, es evidente que la aplicación constante $\beta(\mathbf{y}) = \beta$ define en M un sistema continuo de orientaciones, por lo que M queda orientado como subvariedad diferenciable.

Proposición H.13 *Si $M = \boldsymbol{\varphi}(U)$ es la imagen de una parametrización regular $\boldsymbol{\varphi} : U \to \mathbb{R}^n$ de clase C^m $(m \geq 1)$ definida en un abierto $U \subset \mathbb{R}^k$, entonces M es una subvariedad orientable. Si $O_{\mathbf{p}}$ es la orientación de $T_{\mathbf{p}}(M)$ definida por la base*

$$(D_1\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{\varphi}^{-1}(\mathbf{p}), D_2\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{\varphi}^{-1}(\mathbf{p})), \cdots D_k\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{\varphi}^{-1}(\mathbf{p})))$$

entonces $\{O_{\mathbf{p}} : \mathbf{p} \in M\}$ es un sistema continuo de orientaciones en M.

Dem: Basta observar que al ser $\boldsymbol{\varphi} : U \to M$ un homeomorfismo entonces

$$(D_1\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{\varphi}^{-1}(\mathbf{p}), D_2\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{\varphi}^{-1}(\mathbf{p})), \cdots D_k\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{\varphi}^{-1}(\mathbf{p})))$$

es una base de $T_\mathbf{p}(M)$ que depende continuamente de $\mathbf{p} \in M$, y por lo tanto define un sistema continuo de orientaciones en M. ■

En las condiciones de la última proposición la subvariedad M queda orientada eligiendo una de sus parametrizaciones regulares. La orientación que la parametrización regular $\boldsymbol{\varphi}$ define en M es la indicada en el enunciado de esta proposición.

En lo que sigue $\mathbb{R}^n$ siempre se supondrá orientado con la orientación usual para la que la base canónica es positiva. Un subespacio vectorial $T \subset \mathbb{R}^n$ de dimensión k se puede orientar eligiendo un sistema de $n-k$ vectores linealmente independientes $(\mathbf{z}_1, \cdots \mathbf{z}_{n-k})$ tales que $\mathbf{z}_j \notin T$ para todo $j \in [1, \cdots n-k]$. Se comprueba fácilmente que todas las bases $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \cdots \mathbf{v}_k)$ de T tales que $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \cdots \mathbf{v}_k, \mathbf{z}_1, \cdots \mathbf{z}_{n-k})$ es una base positiva de $\mathbb{R}^n$ tienen la misma orientación. Diremos que ésta es la orientación de T definida por el sistema de vectores linealmente independientes $(\mathbf{z}_1, \cdots \mathbf{z}_{n-k})$. En particular, un hiperplano $T \subset \mathbb{R}^n$ queda orientado mediante un vector $\mathbf{z} \notin T$. Las subvariedades diferenciables de $\mathbb{R}^n$ se pueden orientar usando un procedimiento análogo:

Proposición H.14 *Sea $M \subset \mathbb{R}^n$ una subvariedad diferenciable de clase C^m y dimensión $k \le n$ y para cada $\mathbf{p} \in M$ sea $(\mathbf{z}_1(\mathbf{p}), \cdots \mathbf{z}_{n-k}(\mathbf{p}))$ un sistema de vectores linealmente independientes que dependen continuamente de $\mathbf{p}$, y tal que $\mathbf{z}_j(\mathbf{p}) \notin T_\mathbf{p}(M)$ para todo $\mathbf{p} \in M$ y cada $j \in [1, 2 \cdots n-k]$. Si $O_\mathbf{p}$ es la orientación de $T_\mathbf{p}(M)$ definida por el sistema de vectores linealmente independientes $(\mathbf{z}_1(\mathbf{p}), \cdots \mathbf{z}_{n-k}(\mathbf{p}))$, entonces $\{O_\mathbf{p} : \mathbf{p} \in M\}$ es un sistema continuo de orientaciones en M.*

Dem: Cada $\mathbf{p} \in M$ tiene un entorno abierto $\Omega_\mathbf{p} \subset \mathbb{R}^n$ tal que $M \cap \Omega_\mathbf{p} = \boldsymbol{\varphi}(U)$ donde $\boldsymbol{\varphi} : U \to \mathbb{R}^n$ es una parametrización regular de clase C^m, que podemos suponer definida en una abierto conexo $U \subset \mathbb{R}^k$, para tener garantizado que su imagen $M \cap \Omega_\mathbf{p}$ también es conexa. Para cada $\mathbf{y} \in M \cap \Omega_\mathbf{p}$ y cada $j \in [1, \cdots k]$ sea $\mathbf{v}_j(\mathbf{y}) = D_j\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{\varphi}^{-1}(\mathbf{y}))$. Entonces $(\mathbf{v}_1(\mathbf{y}), \cdots \mathbf{v}_k(\mathbf{y}))$ es una base de $T_\mathbf{y}(M)$, que depende continuamente de $\mathbf{y} \in M \cap \Omega_\mathbf{p}$ luego, en virtud de las hipótesis,

$$(\mathbf{v}_1(\mathbf{y}), \cdots \mathbf{v}_k(\mathbf{y}), \mathbf{z}_1(\mathbf{y}), \cdots \mathbf{z}_{n-k}(\mathbf{y}))$$

es una base de $\mathbb{R}^n$ que depende continuamente de $\mathbf{y} \in M \cap \Omega_\mathbf{p}$. Su determinante $\Delta(\mathbf{y})$ es una función continua que no se anula en el conjunto conexo $M \cap \Omega_\mathbf{p}$, y por lo tanto conserva un signo constante. Podemos suponer, (cambiando $\mathbf{v}_k(\mathbf{y})$ por $-\mathbf{v}_k(\mathbf{y})$ si es preciso) que $\Delta(\mathbf{y}) > 0$ para todo $\mathbf{y} \in M \cap \Omega_\mathbf{p}$, luego la base $(\mathbf{v}_1(\mathbf{y}), \cdots \mathbf{v}_k(\mathbf{y}))$ de $T_\mathbf{y}(M)$ es positiva para la orientación $O_\mathbf{y}$, Así queda establecido que $\{O_\mathbf{p} : \mathbf{p} \in M\}$ es un sistema continuo de orientaciones en M. ■

Corolario H.15 *Sea* $M = \{\mathbf{x} \in \Omega : g_1(\mathbf{x}) = g_2(\mathbf{x}) = \cdots = g_{n-k}(\mathbf{x}) = 0\}$ *donde* $g_1, g_2, \cdots g_{n-k} : \Omega \to \mathbb{R}^{n-k}$ *son funciones de clase* C^m *(*$m \geq 1$*) definidas en un abierto* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$*, tales que para todo* $\mathbf{p} \in M$ *los vectores* $(\nabla g_1(\mathbf{p}), \nabla g_2(\mathbf{p}), \cdots \nabla g_{n-k}(\mathbf{p}))$ *son linealmente independientes. Entonces* M *es una subvariedad orientable.*

Una orientación de M *es la definida por el sistema de vectores linealmente independientes* $(\nabla g_1(\mathbf{p}), \nabla g_2(\mathbf{p}), \cdots \nabla g_{n-k}(\mathbf{p}))$.

DEM: Es una consecuencia directa de la proposición H.14 ■