J

Cambio de variable en la integral de Riemann

J.1. Preliminares

En esta sección se recogen algunos resultados preliminares que intervienen en la demostración del teorema del cambio de variable, que tienen interés por sí mismos.

Si todos los lados de un intervalo cerrado $Q = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \cdots \times [a_n, b_n] \subset \mathbb{R}^n$ tienen la misma longitud $b_j - a_j = l$, diremos que Q es un cubo cerrado de lado l y centro $\mathbf{c} = (c_1, c_2, \cdots, c_n)$, con $c_j = (a_j + b_j)/2$. Análogamente se define el cubo abierto de centro $\mathbf{c}$ y lado l. Para el estudio de las cuestiones de cálculo integral que se abordan en este capítulo es conveniente utilizar en $\mathbb{R}^n$ la norma $\| \ \|_\infty$ porque con ella una bola cerrada (resp. abierta) de centro $\mathbf{c}$ y radio $r > 0$, no es otra cosa que el cubo cerrado (resp.abierto) de centro $\mathbf{c}$ y lado $l = 2r$.

Lema J.1 *Para un conjunto $H \subset \mathbb{R}^n$ son equivalentes*

i) H tiene medida nula (resp. contenido nulo).

ii) Para cada $\epsilon > 0$ existe una sucesión infinita (resp. finita) de cubos cerrados (Q_j) tal que tal que $H \subset \bigcup_j Q_j$, y $\sum_j v(Q_j) < \epsilon$.

iii) Para cada $\epsilon > 0$ existe una sucesión infinita (resp. finita) de cubos abiertos (U_j) tal que tal que $H \subset \bigcup_j U_j$, y $\sum_j v(U_j) < \epsilon$.

DEM: Observación preliminar: Si $R = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \cdots \times [a_n, b_n]$ es un intervalo cerrado con lados de longitud racional $b_k - a_k = r_k \in \mathbb{Q}$, $1 \leq k \leq n$, entonces existe $p \in \mathcal{P}(R)$ que descompone a R en cubos cerrados que no se solapan

$$R = \bigcup \{S : S \in \Delta(p)\}, \quad \text{y} \quad v(R) = \sum_{S \in \Delta(p)} v(S)$$

Basta escribir los números racionales $r_k = n_k/m$ como fracciones con un denominador común m y descomponer cada intervalo $[a_k, b_k]$ en n_k intervalos de la misma longitud $1/m$ para conseguir una subdivisión p con la propiedad requerida.

i) $\Rightarrow$ ii) Si H tiene medida nula, para cada $\epsilon > 0$ existe una sucesión de rectángulos cerrados $\{E_k : k \in \mathbb{N}\}$ tal que $H \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k$, y $\sum_{k=1}^{\infty} v(E_k) < \epsilon/2$.

Para cada $k \in \mathbb{N}$ existe un rectángulo cerrado $R_k \supset E_k$ con todos sus lados de longitud racional, tal que $v(R_k) \leq v(E_k) + \epsilon/2^{k+1}$ (basta tener en cuenta que $\mathbb{Q}$ es denso en $\mathbb{R}$ y que el volumen de un rectángulo acotado depende continuamente de las longitudes de sus lados). Según la observación previa, cada R_k se descompone en una cantidad finita de cubos cerrados $\{Q_j : j \in M_k\}$ tal que $\sum_{j \in M_k} v(Q_j) = v(R_k)$, donde no hay inconveniente en suponer que los conjuntos $M_k \subset \mathbb{N}$ son disjuntos. Si $M = \cup_{k=1}^{\infty} M_k$, es claro que $\{Q_j : j \in M\}$ es una familia numerable de cubos cerrados que recubre H y verifica

$$\sum_{j \in M} v(Q_j) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j \in M_k} v(Q_j) = \sum_{k=1}^{\infty} v(R_k) \leq \sum_{k=1}^{\infty} (v(E_k) + \epsilon/2^{k+1}) \leq \epsilon/2 + \epsilon/2 = \epsilon$$

ii) $\Rightarrow$ iii) Sea (Q_j) una sucesión de cubos cerrados que cumple ii). Para cada j existe un cubo abierto $U_j \supset Q_j$, tal que $v(U_j) < \delta/2^j$, donde $\delta = \epsilon - \sum_j v(Q_j) > 0$, y es claro que la sucesión de cubos abiertos (U_j) cumple iii).
iii) $\Rightarrow$ i) Es inmediato.

La caracterización alternativa de los conjuntos de contenido nulo se deja al cuidado del lector. ■

Proposición J.2 *Sea $H \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto de medida nula (resp. contenido nulo). Si la aplicación $\mathbf{g} : H \to \mathbb{R}^n$ es lipschitziana entonces $\mathbf{g}(H)$ tiene medida nula (resp. contenido nulo).*

DEM: En $\mathbb{R}^n$ consideramos la norma $\| \ \|_\infty$ que tiene la propiedad de que sus bolas son cubos. Como todas las normas de $\mathbb{R}^n$ son equivalentes es fácil ver que $\mathbf{g}$ sigue siendo lipschitziana para esta norma, luego existe $C > 0$ tal que

$$\|\mathbf{g}(\mathbf{x}) - \mathbf{g}(\mathbf{y})\|_\infty \leq C \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|_\infty \quad \text{para todo par} \quad \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$$

Si $Q \subset \mathbb{R}^n$ es un cubo abierto de lado l tal que $H \cap Q \neq \emptyset$, entonces $\mathbf{g}(H \cap Q)$ está contenido en un cubo $U \subset \mathbb{R}^n$ de lado $2Cl$. (En efecto, si $\mathbf{a} \in H \cap Q$, para cada $\mathbf{x} \in H \cap Q$ se verifica $\|\mathbf{x} - \mathbf{a}\|_\infty < l$, y así, $\|\mathbf{g}(\mathbf{x}) - \mathbf{g}(\mathbf{a})\|_\infty < Cl$, luego $U = B_\infty(\mathbf{g}(\mathbf{a}), Cl)$ es un cubo abierto de lado $2Cl$ que contiene a $\mathbf{g}(H \cap Q)$.

Si H tiene medida nula, dado $\epsilon > 0$, en virtud de J.1 existe una una sucesión de cubos cerrados (Q_j) que cubre H y verifica $\sum_j v(Q_j) < (2C)^{-n}\epsilon$.

Si l_j es el lado del cubo Q_j existe un cubo U_j con lado $2Cl_j$ que contiene a $\mathbf{g}(H \cap Q_j)$. La sucesión de cubos (U_j) cubre a $\mathbf{g}(H) = \cup_j \mathbf{g}(H \cap Q_j)$, y verifica:

$$\sum_j v(U_j) = \sum_j (2Cl_j)^n = (2C)^n \sum_j v(Q_j) < \epsilon$$

La demostración del resultado alternativo, para el caso de un conjunto H de contenido nulo, se deja al cuidado del lector. ■

Proposición J.3 *Sea* $\mathbf{g} : \Omega \to \mathbb{R}^n$ *de clase* C^1 *en un abierto* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$.

a) Si H *tiene contenido nulo y* $\overline{H} \subset \Omega$, *entonces* $\mathbf{g}(H)$ *tiene contenido nulo.*

b) Si $H \subset \Omega$ *tiene medida nula, entonces* $\mathbf{g}(H)$ *tiene medida nula.*

Dem: a) Si H tiene contenido nulo entonces $\overline{H}$ es compacto (porque es cerrado y acotado). La hipótesis $\overline{H} \subset \Omega$ permite asegurar que la familia de los cubos abiertos Q con $\overline{Q} \subset \Omega$ es un cubrimiento abierto de $\overline{H}$ del que se puede extraer un subrecubrimiento finito $Q_1, Q_2, \cdots Q_r$. Como $\mathbf{g}$ es de clase $C^1(\Omega)$, la función $\mathbf{x} \to \|d\mathbf{g}(\mathbf{x})\|$ es continua en Ω, y por lo tanto está acotada sobre cada cubo compacto $\overline{Q}_j$, $(1 \leq j \leq r)$. Según el teorema del incremento finito 5.22 $\mathbf{g}|_{Q_j}$ es lipschitziana y la proposición J.2 nos dice que cada $\mathbf{g}(H \cap Q_j)$ tiene contenido nulo, luego $\mathbf{g}(H) = \cup_{j=1}^r \mathbf{g}(H \cap Q_j)$ tiene contenido nulo.
b) Sea (C_k) una sucesión de compactos cuya unión es Ω, por ejemplo

$$C_k = \{\mathbf{x} \in \Omega : d(\mathbf{x}, \Omega^c) \geq 1/k\} \cap \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \|\mathbf{x}\|_\infty \leq k\}$$

(donde $d(\mathbf{x}, \Omega^c) = \inf\{\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|_\infty : \mathbf{y} \in \Omega^c\}$). Cada conjunto $H_k = H \cap C_k$ tiene medida nula y $\overline{H_k} \subset C_k \subset \Omega$ es compacto. Razonando como en el apartado a), pero manejando series en vez de sumas finitas, se obtiene que cada $\mathbf{g}(H_k)$ tiene medida nula, de donde se sigue que $\mathbf{g}(H) = \cup_{k=1}^\infty \mathbf{g}(H_k)$ tiene medida nula. ■

nota: La hipótesis $\overline{H} \subset \Omega$ en el apartado a) de la proposición J.3 es esencial: La función $g(x) = \operatorname{Arc\,tg} x$, definida en $\Omega = (-\pi/2, \pi/2)$ transforma el conjunto $H = \{\pi/2 - 1/n : n \in \mathbb{N}\}$, que tiene contenido nulo, en un conjunto que no tiene contenido nulo porque no es acotado.

Ejercicio J.4 *Sea* $\mathbf{g} : S \to \mathbb{R}^n$ *una aplicación lipschitziana en un rectángulo cerrado* $S \subset \mathbb{R}^n$ *con constante de Lipschitz* μ, *es decir:*

$$\|\mathbf{g}(\mathbf{y}) - \mathbf{g}(\mathbf{x})\|_\infty \leq \mu \|\mathbf{y} - \mathbf{x}\|_\infty \quad \textit{para todo par } \mathbf{x}, \mathbf{y} \in S$$

Entonces $\mathbf{g}(S)$ *está contenido en un conjunto medible de contenido* $\leq 2\mu^n v(S)$.

Dem: Si S es un cubo, de centro $\mathbf{a}$ y lado $l = 2r$ el resultado es inmediato:

$$\mathbf{x} \in S \Rightarrow \|\mathbf{g}(\mathbf{x}) - \mathbf{g}(\mathbf{a})\|_\infty \leq \mu \|\mathbf{x} - \mathbf{a}\|_\infty \leq \mu r$$

luego $\mathbf{g}(S)$ está contenido en el cubo de centro $\mathbf{g}(\mathbf{a})$ y lado $2\mu r$, cuyo volumen es $\mu^n(2r)^n = \mu^n v(S)$. De aquí se sigue el resultado para el caso de un rectángulo cerrado S con lados de longitud racional, porque, mediante una partición apropiada, lo podemos descomponer en cubos. Un rectángulo cerrado arbitrario S lo podemos cubrir con un rectángulo cerrado R de lados racionales y volumen $v(R) \leq 2v(S)$, y según lo que acabamos de ver $\mathbf{g}(R)$ se puede cubrir con un conjunto medible Jordan de contenido $\mu^n v(R) \leq 2\mu^n v(S)$. ■

Ejercicio J.5 *Sea $H \subset \mathbb{R}^n$ y $\mathbf{g} : H \to \mathbb{R}^m$ una aplicación lipschitziana. Utilice el ejercicio 10.5.10 para demostrar las siguientes afirmaciones:*
a) Si $n < m$, $\mathbf{g}(H)$ tiene medida nula.
b) Si $n < m$ y H es acotado, $\mathbf{g}(H)$ tiene contenido nulo.

Ejercicio J.6 *Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ abierto y $\mathbf{g} : \Omega \to \mathbb{R}^m$ una aplicación de clase $C^1(\Omega)$. Justifique las siguientes afirmaciones:*

a) Si $n < m$ entonces $\mathbf{g}(\Omega)$ tiene medida nula.

b) Si $n < m$, H es acotado, y $\overline{H} \subset \Omega$, entonces $\mathbf{g}(H)$ tiene contenido nulo.

Muestre un ejemplo que ponga de manifiesto que no se cumple d) cuando la condición $\overline{H} \subset \Omega$ se sustituye por $H \subset \Omega$.

Transformaciones lineales de conjuntos medibles.

Lema J.7 *Toda aplicación lineal no singular $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, se puede expresar como composición de aplicaciones lineales elementales E de los siguientes tipos*

α) $E(\mathbf{x}) = \mathbf{y}$, donde hay una coordenada $i \in \{1, 2, \cdots n\}$, y un número real $\lambda \neq 0$, tales que $y_i = \lambda x_i$, $y_j = x_j$ para todo $j \neq i$.

β) $E(\mathbf{x}) = \mathbf{y}$, donde hay un par de coordenadas $i, k \in \{1, 2, \cdots n\}$ tales que $y_k = x_i$, $y_i = x_k$, $y_j = x_j$ para cada $j \notin \{i, k\}$.

γ) $E(\mathbf{x}) = \mathbf{y}$, donde hay un par de coordenadas $i, k \in \{1, 2, \cdots n\}$ tales que $y_k = x_k + x_i$, $y_j = x_j$ para cada $j \neq k$.

Dem: Sea $\mathcal{D}$ la clase de las aplicaciones lineales $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ que se pueden expresar como composición de aplicaciones lineales elementales de los tipos considerados en el enunciado. Es fácil ver que pertenecen a $\mathcal{D}$ las aplicaciones lineales $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ que son de la forma

δ) $L(\mathbf{x}) = \mathbf{y}$, donde hay un par de coordenadas $i, k \in \{1, 2, \cdots n\}$ y un número real $\lambda \neq 0$ tales que $y_k = x_k + \lambda x_i$, $y_j = x_j$, para cada $j \neq k$.

Una aplicación lineal no singular $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ queda determinada mediante los vectores linealmente independientes $\mathbf{v}_j = T^{-1}(\mathbf{e}_j)$, $1 \leq j \leq n$. Como el vector $\mathbf{v}_1 = (v_{11}, v_{12}, \cdots, v_{1n})$ no es nulo, para algún $k \in \{1, 2 \cdots, n)\}$ es $v_{1k} \neq 0$. Entonces, con aplicaciones lineales de los tipos α y β el vector $\mathbf{v}_1$ se puede transformar en un vector de la forma $\mathbf{v}'_1 = (1, v'_{12}, \cdots, v'_{1n})$ el cual, con aplicaciones lineales de tipo δ se transforma en $\mathbf{e}_1$. Queda establecido así que existe $A_1 \in \mathcal{D}$ tal que $A_1(\mathbf{v}_1) = \mathbf{e}_1$.

El vector $A_1(\mathbf{v}_2) = \mathbf{u}_2 = (u_{21}, u_{22}, \cdots, u_{2n})$ tiene alguna componente no nula $u_{2j} \neq 0$, con $j \geq 2$ (en caso contrario $A_1(\mathbf{v}_1) = \mathbf{e}_1$ y $A_1(\mathbf{v}_2) = t\mathbf{e}_1$ lo que es imposible porque A_1 es no singular y $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ son linealmente independientes). Procediendo como antes, con aplicaciones lineales de los tipos α y β que dejen fija la primera coordenada podemos transformar $\mathbf{u}_2$ en un vector de la forma $\mathbf{u}'_2 = (u'_{21}, 1, u'_{23}, \cdots, u'_{2n}))$, el cual, con aplicaciones lineales de tipo δ que dejan fija la primera coordenada, se puede transformar en $\mathbf{e}_2$. Puesto que las transformaciones lineales usadas en esta etapa dejan fijo el vector $\mathbf{e}_1$ queda justificado que existe $A_2 \in \mathcal{D}$ tal que $A_2 \circ A_1(\mathbf{v}_1) = \mathbf{e}_1$, y $A_2 \circ A_1(\mathbf{v}_2) = \mathbf{e}_2$. Continuando con el proceso se obtienen $A_3, \cdots A_n \in \mathcal{D}$ tales que para todo $j \in \{1, 2 \cdots n\}$ es $A_n \circ A_{n-1} \circ \cdots \circ A_2 \circ A_1(\mathbf{v}_j) = \mathbf{e}_j = T(\mathbf{v}_j)$, luego $T = A_n \circ \cdots \circ A_2 \circ A_1 \in \mathcal{D}$. ■

Teorema J.8 *Si $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ es lineal y $M \subset \mathbb{R}^n$ es medible Jordan entonces $T(M)$ es medible Jordan y $c_n(T(M)) = |\det T| c_n(M)$.*

DEM: i) Comenzamos suponiendo $\det T = 0$. En este caso $T(\mathbb{R}^n)$ tiene medida nula porque está contenido en un hiperplano H (esto es consecuencia directa del ejercicio 10.5.11). Si $M \subset \mathbb{R}^n$ es medible Jordan, $\overline{M}$ es compacto y $T(\overline{M}) \subset H$ es un compacto de medida nula, luego tiene contenido nulo. Se sigue que $T(M) \subset T(\overline{M})$ tiene contenido nulo, luego es medible Jordan y se cumple la igualdad $c_n(T(M)) = 0 = |\det T|\; c_n(M)$.
ii) En el caso $\det T \neq 0$ para ver que T transforma conjuntos medibles Jordan en conjuntos medibles Jordan utilizaremos que T es lipschitziana,

$$\|T(\mathbf{x}) - T(\mathbf{y})\| \leq \|T\|\, \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| \quad \text{para cada par } \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$$

y la proposición J.2 que nos dice que T transforma conjuntos de contenido nulo en conjuntos de contenido nulo. Como T y su inversa T^{-1} son continuas (por ser lineales) T es un homeomorfismo que establece una biyección entre la frontera de $M \subset \mathbb{R}^n$ y la frontera de su imagen, es decir $\partial T(M)) = T(\partial M)$. Si ∂M tiene contenido nulo también tiene contenido nulo su imagen $\partial T(M) = \mathbf{T}(\partial M)$, luego, en virtud del teorema 10.26, $T(M)$ es medible Jordan si M lo es.

Estableceremos la igualdad $c_n(T(M)) = |\det T|\; c_n(M)$ en varias etapas:
Primera etapa: Si $S \subset \mathbb{R}^n$ es un rectángulo cerrado y $E : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ es una aplicación lineal elemental de las consideradas en el lema J.7 se cumple la igualdad

$$c_n(E(S)) = |\det E|\; c_n(S)$$

i) Si E es de tipo (α), de la forma $E(x_1, x_2, \cdots x_i, \cdots x_n) = (x_1, x_2, \cdots \lambda x_i, \cdots x_n)$, entonces $|\det E| = |\lambda|$, y es inmediato que $c_n(E(S)) = |\lambda| c_n(S) = |\det E|\; c_n(S)$.

ii) Si E es de tipo (β), es claro que $|\det E| = 1$, y $c_n(E(S)) = c_n(S)$.

iii) Finalmente, cuando E es de tipo (γ), de la forma

$$E(x_1, x_2, \cdots x_k, \cdots x_n) = (x_1, x_2, \cdots x_k + x_i, \cdots x_n)$$

es fácil ver que $|\det E| = 1$. El contenido de $W = E(S)$ se puede calcular con el teorema de Fubini en $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}$ suponiendo, para simplificar la escritura, que $k = n$: Si $W^{\mathbf{y}} = \{t \in \mathbb{R} : (\mathbf{y}, t) \in W\}$, con $\mathbf{y} = (x_1, x_2, \cdots x_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-1}$, se tiene

$$c_n(E(S)) = \int c_1(W^{\mathbf{y}}) d\mathbf{y}$$

Teniendo en cuenta que

$$W^{\mathbf{y}} = \{t \in \mathbb{R} : (\mathbf{y}, t - x_n) \in S\} = \{t \in \mathbb{R} : t - x_n \in S^{\mathbf{y}}\} = x_n + S^{\mathbf{y}}$$

se obtiene que $c_1(W^{\mathbf{y}}) = c_1(S^{\mathbf{y}})$, luego

$$c_n(E(S)) = \int c_1(W^{\mathbf{y}})d\mathbf{y} = \int c_1(S^{\mathbf{y}})d\mathbf{y} = c_n(S) = |\det E|\ c_n(S)$$

(Obsérvese que $S^{\mathbf{y}}$ es un segmento y por lo tanto $W^{\mathbf{y}} = x_n + S^{\mathbf{y}}$ también lo es).
b) Si $E : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ es una aplicación lineal elemental (de las considerados en el lema J.7) entonces para todo conjunto medible Jordan $M \subset \mathbb{R}^n$ se cumple

$$c_n(E(M)) \leq |\det E|\ c_n(M)$$

Fijamos un rectángulo cerrado $A \supset M$. Para cada $p \in \mathcal{P}(A)$ se tiene:

$$E(M) \subset \bigcup_{S \in \Delta'(p)} E(S), \quad \text{donde} \quad \Delta'(p) = \{S \in \Delta(p) : S \cap M \neq \emptyset\}$$

y según 10.8 c) se cumple la desigualdad $c_n(E(M)) \leq \sum_{S\in\Delta'(p)} c_n(E(S))$. Según lo demostrado en la etapa a), $c_n(E(S)) = |\det E|\ c_n(S)$, y llegamos a la desigualdad

$$c_n(E(M)) \leq |\det E| \sum_{S\in\Delta'(p)} c_n(S) = |\det E|\ S(\chi_M, p)$$

válida para cada $p \in \mathcal{P}(A)$, luego $c_n(E(M)) \leq |\det E| \inf\{S(\chi_M, p) : p \in \mathcal{P}(A)\}$, es decir $c_n(E(M)) \leq |\det E| c_n(M)$.
c) Como consecuencia del lema J.7 y de lo establecido en la etapa b), para todo conjunto medible Jordan $M \subset \mathbb{R}^n$ y toda aplicación lineal no singular $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ se cumple la desigualdad $c_n(T(M)) \leq |\det T|\ c_n(M)$.
d) Terminamos viendo que para todo conjunto medible Jordan $M \subset \mathbb{R}^n$ y toda aplicación lineal no singular $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ se verifica $c_n(T(M)) = |\det T|\ c_n(M)$: Aplicando la desigualdad c) al conjunto medible Jordan $T(M)$ y a la aplicación lineal no singular T^{-1}, resulta $c_n(M) \leq |\det T^{-1}|\ c_n(T(M))$, y combinando esta desigualdad con la obtenida en c) obtenemos la desigualdad opuesta

$$c_n(T(M)) \leq |\det T|\ c_n(M) \leq |\det T|\ |\det T^{-1}|\ c_n(T(M)) = c_n(T(M))$$

luego $c_n(T(M)) = |\det T|\ c_n(M)$. ■

Corolario J.9 *Si $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ es una aplicación lineal que conserva el producto escalar entonces $|\det T| = 1$.*

Dem: T es una isometría para la norma euclídea $\| \|_2$ luego T transforma la bola $B_1 = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \|\mathbf{x}\| \leq 1\}$ en sí misma y aplicando el teorema J.8 con $M = B_1$ se obtiene el resultado. ■

J.2. La demostración del teorema de cambio de variable

Proposición J.10 *Sea* $\mathbf{g} : \Omega \to \mathbb{R}^n$ *una función de clase* C^1 *en un abierto* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *y* $M \subset \Omega$ *un conjunto medible Jordan tal que* $\overline{M} \subset \Omega$, *y* $\det \mathbf{g}'(\mathbf{x}) \neq 0$ *para todo* $\mathbf{x} \in M^\circ$. *Entonces* $\mathbf{g}(M)$ *es medible Jordan.*

DEM: Si M es medible Jordan, su frontera $\partial M \subset \overline{M} \subset \Omega$ es un conjunto cerrado de contenido nulo y en virtud de la proposición J.3 a), su imagen $\mathbf{g}(\partial M)$ tiene contenido nulo. Para obtener que $\mathbf{g}(M)$ es medible Jordan basta ver que su frontera $\partial\mathbf{g}(M)$ tiene contenido nulo. Esto es consecuencia de la inclusión $\partial\mathbf{g}(M) \subset \mathbf{g}(\partial M)$ que demostramos a continuación: Según el teorema 8.8 la restricción de $\mathbf{g}$ al interior de M es abierta y por lo tanto $\mathbf{g}(M^\circ)$ es un conjunto abierto, de modo que $\mathbf{g}(M^\circ) \subset \mathbf{g}(M)^\circ$. Por otra parte, como $\overline{M} \subset \Omega$ es compacto también lo es $\mathbf{g}(\overline{M})$ de donde se sigue que $\overline{\mathbf{g}(M)} \subset \mathbf{g}(\overline{M})$. Por continuidad se cumple $\mathbf{g}(\overline{M}) \subset \overline{\mathbf{g}(M)}$ y queda establecida la igualdad $\mathbf{g}(\overline{M}) = \overline{\mathbf{g}(M)}$, con la que se obtiene la inclusión

$$\partial\mathbf{g}(M) = \overline{\mathbf{g}(M)} \setminus \mathbf{g}(M)^\circ = \mathbf{g}(\overline{M}) \setminus \mathbf{g}(M)^\circ \subset \mathbf{g}(\overline{M}) \setminus \mathbf{g}(M^\circ) \subset \mathbf{g}(\partial M)$$

■

Lema J.11 *Sea* $\mathbf{g} : \Omega \to \mathbb{R}^n$ *una aplicación de clase* C^1 *en un abierto* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *tal que* $\det \mathbf{g}'(\mathbf{x}) \neq 0$ *para todo* $\mathbf{x} \in \Omega$. *Entonces las funciones* $h, k : \Omega \times \Omega \to \mathbb{R}$, *definidas por* $h(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \|d\mathbf{g}(\mathbf{y})^{-1} \circ d\mathbf{g}(\mathbf{x})\|$, $k(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = |\det \mathbf{g}'(\mathbf{y})|^{-1} |\det \mathbf{g}'(\mathbf{x})|$, *son continuas en* $\Omega \times \Omega$.
(En $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ *se considera la norma* $\|L\| = \sup\{\|L(\mathbf{x})\|_\infty : \|\mathbf{x}\|_\infty \leq 1\}$.*)*

DEM: Demostramos la continuidad de h, y dejamos al cuidado del lector el caso más sencillo de la continuidad de la función k.

En los espacios normados de dimensión finita todas las normas son equivalentes, de donde se sigue que todo isomorfismo algebraico entre dos espacios normados finito dimensionales es un homeomorfismo topológico, luego el espacio normado finito dimensional $(\mathcal{L}(\mathbb{R}^n), \|\ \|)$ se identifica algebraicamente y topológicamente con el espacio $\mathcal{M}$ formado por las matrices cuadradas $n \times n$ de números reales, dotado de la topología usual de $\mathbb{R}^{n^2}$. En la demostración del teorema 8.12 ya hemos visto que la aplicación $\det : \mathcal{M} \to \mathbb{R}$ es continua, luego el conjunto de las matrices invertibles $\{M \in \mathcal{M} : \det(M) \neq 0\}$ es un subconjunto abierto en $\mathcal{M}$, y se sigue de esto que $\Gamma = \{L \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n) : \det L \neq 0\}$ es un subconjunto abierto de $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ y que la aplicación $\operatorname{Inv} : \Gamma \to \Gamma$, $\operatorname{Inv}(L) = L^{-1}$, es continua.

En virtud de las hipótesis, $\mathbf{x} \to d\mathbf{g}(\mathbf{x})$ es una aplicación continua definida en Ω con valores en Γ (véase la proposición E.1), y según la regla de la cadena también es continua la aplicación $\mathbf{y} \to d\mathbf{g}(\mathbf{y})^{-1} = [\operatorname{Inv} \circ d\mathbf{g}](\mathbf{y})$. Queda establecida así la continuidad de $\Psi : \Omega \times \Omega \to \mathcal{L}(\mathbb{R}^n) \times \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$, definida por $\Psi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (d\mathbf{g}(\mathbf{y})^{-1}, d\mathbf{g}(\mathbf{x}))$.

Por otra parte, es fácil comprobar que si $L_1, L_2 \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$, y $L = L_1 \circ L_2$, entonces $\|L\| \leq \|L_1\|\ \|L_2\|$, de donde se sigue, con un razonamiento estandar, que la operación de composición $C : \mathcal{L}(\mathbb{R}^n) \times \mathcal{L}(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$, $C(L_1, L_2) = L_1 \circ L_2$ es continua. Invocando otra vez la regla de la cadena obtenemos la continuidad de la función $h(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \|C \circ \Psi(\mathbf{x}, \mathbf{y})\|$. ■

Lema J.12 *Sea* $\mathbf{g} : \Omega \to \mathbb{R}^n$ *una aplicación inyectiva de clase* C^1 *en un abierto* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *tal que* $\det \mathbf{g}'(\mathbf{x}) \neq 0$ *para todo* $\mathbf{x} \in \Omega$. *Si* $A \subset \Omega$ *es un rectángulo cerrado entonces* $\mathbf{g}(A)$ *es medible Jordan y*

$$c_n(\mathbf{g}(A)) \leq \int_A |\det \mathbf{g}'(\mathbf{x})| \, d\mathbf{x}$$

DEM: Según la proposición J.10 el conjunto $\mathbf{g}(A)$ es medible Jordan, y la demostración de la desigualdad del enunciado la desglosamos en dos etapas.
a) En la primera etapa suponemos que A es un cubo cerrado. En este caso, dado $\epsilon > 0$ existe $p \in \mathcal{P}(A)$ que descompone al cubo A en cubos cerrados $\{S_1, S_2, \cdots S_m\}$, del mismo lado, tales que si $\mathbf{a}_j$ es el centro de S_j, y $T_j = d\mathbf{g}(\mathbf{a}_j)$, se verifica

i) $c_n(\mathbf{g}(S_j)) \leq (1+\epsilon)^n |\det T_j| \; c_n(S_j)$

ii) $(1-\epsilon)|\det T_j| \; c_n(S_j) \leq \int_{S_j} |\det \mathbf{g}'(\mathbf{x})| \, d\mathbf{x}$.

Para demostrar esto consideramos las funciones

$$h(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \left\| d\mathbf{g}(\mathbf{y})^{-1} \circ d\mathbf{g}(\mathbf{x}) \right\|, \quad k(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = |\det \mathbf{g}'(\mathbf{y})|^{-1} |\det \mathbf{g}'(\mathbf{x})|$$

que según el lema J.11 son continuas en $\Omega \times \Omega$, y por lo tanto uniformemente continuas sobre el compacto $A \times A \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$. Por lo tanto existe $\delta > 0$ tal que

$$\left\{ \begin{array}{ll} \|\mathbf{x} - \mathbf{a}\|_\infty < \delta & \mathbf{x}, \mathbf{a} \in A \\ \|\mathbf{y} - \mathbf{b}\|_\infty < \delta & \mathbf{y}, \mathbf{b} \in A \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} |h(\mathbf{x}, \mathbf{y}) - h(\mathbf{a}, \mathbf{b})| < \epsilon \\ |k(\mathbf{x}, \mathbf{y}) - k(\mathbf{a}, \mathbf{b})| < \epsilon \end{array} \right\}$$

En particular, cuando $\mathbf{a} = \mathbf{b} = \mathbf{y} \in A$, $\mathbf{x} \in A$, resulta

$$\|\mathbf{x} - \mathbf{a}\|_\infty < \delta \Rightarrow |h(\mathbf{x}, \mathbf{a}) - 1| < \epsilon, \quad |k(\mathbf{x}, \mathbf{a}) - 1| < \epsilon,$$

luego, si $\mathbf{x}, \mathbf{a} \in A$ con $\|\mathbf{x} - \mathbf{a}\|_\infty < \delta$ se cumple $h(\mathbf{x}, \mathbf{a}) < 1 + \epsilon$, y $k(\mathbf{x}, \mathbf{a}) > 1 - \epsilon$.

Sea $p \in \mathcal{P}(A)$ una subdivisión del cubo A en cubos $\{S_1, S_2, \cdots S_m\}$ del mismo lado $2r < \delta$, y centros $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \cdots \mathbf{a}_m\}$. Si $\mathbf{x} \in S_j$ se cumple $\|\mathbf{x} - \mathbf{a}_j\|_\infty < \delta$, luego

i') $\mathbf{x} \in S_j \Rightarrow \left\| T_j^{-1} \circ d\mathbf{g}(\mathbf{x}) \right\| = h(\mathbf{x}, \mathbf{a}_j) < 1 + \epsilon$.

i") $\mathbf{x} \in S_j \Rightarrow |\det \mathbf{g}'(\mathbf{a}_j)|^{-1} |\det \mathbf{g}'(\mathbf{x})| = k(\mathbf{x}, \mathbf{a}_j) > 1 - \epsilon$

En lo que sigue escribimos $\mathbf{g}_j = T_j^{-1} \circ \mathbf{g}$. De acuerdo con la regla de la cadena, $d\mathbf{g}_j(\mathbf{x}) = T_j^{-1} \circ dg_(\mathbf{x})$, y según i') para todo $\mathbf{x} \in S_j$ se cumple $\|d\mathbf{g}_j(\mathbf{x})\| < 1 + \epsilon$. Entonces, con el teorema del incremento finito se obtiene que para todo $\mathbf{x} \in S_j$ vale la desigualdad $\|\mathbf{g}_j(\mathbf{x}) - \mathbf{g}_j(\mathbf{a}_j)\| \leq (1+\epsilon) \|\mathbf{x} - \mathbf{a}_j\|$ que nos dice que $\mathbf{g}_j(S_j)$

está contenido en un cubo de centro $\mathbf{g}_j(\mathbf{a}_j)$, con lado de longitud $\leq (1+\epsilon)$ lado(S_j), luego

$$c_n(\mathbf{g}_j(S_j)) \leq (1+\epsilon)^n c_n(S_j)$$

Según el teorema J.8 $c_n(\mathbf{g}_j(S_j)) = c_n(T_j^{-1}(\mathbf{g}(S_j)) = |\det T_j|^{-1} c_n(\mathbf{g}(S_j))$, y con la última desigualdad se obtiene i):

$$c_n(\mathbf{g}(S_j)) \leq |\det T_j|(1+\epsilon)^n c_n(S_j)$$

Por otra parte, según i") para todo $\mathbf{x} \in S_j$ se cumple $|\det \mathbf{g}'(\mathbf{x})| \geq (1-\epsilon)|\det T_j|$, e integrando sobre S_j se obtiene ii).

Con las desigualdades i) y ii) se llega a la desigualdad

$$c_n(g(S_j)) \leq \frac{(1+\epsilon)^n}{1-\epsilon} \int_{S_j} |\det \mathbf{g}'(\mathbf{x})| \, d\mathbf{x}$$

y teniendo en cuenta que $\mathbf{g}(A) = \cup_{j=1}^m \mathbf{g}(S_j)$ resulta

$$c_n(\mathbf{g}(A)) \leq \sum_{j=1}^m c_n(\mathbf{g}(S_j)) \leq \frac{(1+\epsilon)^n}{1-\epsilon} \sum_{j=1}^m \int_{S_j} |\det \mathbf{g}'(\mathbf{x})| d\mathbf{x} =$$

$$= \frac{(1+\epsilon)^n}{1-\epsilon} \int_A |\det \mathbf{g}'(\mathbf{x})| d\mathbf{x}$$

Si en esta desigualdad pasamos al límite cuando $\epsilon \to 0$ se obtiene la desigualdad

$$c_n(\mathbf{g}(A)) \leq \int_A |\det \mathbf{g}'(\mathbf{x})| d\mathbf{x}$$

b) En la segunda etapa suponemos que A es un rectángulo cerrado. Si las longitudes de todos sus lados son racionales, existe una partición $q \in \mathcal{P}(A)$ tal que cada $S \in \Delta(q)$ es un cubo. Utilizando lo demostrado en la primera etapa se obtiene

$$c_n(\mathbf{g}(A)) \leq \sum_{S\in\Delta(q)} c_n(\mathbf{g}(S)) \leq \sum_{S\in\Delta(q)} \int_S |\det \mathbf{g}'(\mathbf{x})| d\mathbf{x} = \int_A |\det \mathbf{g}'(\mathbf{x})| d\mathbf{x}$$

Si $A \subset \Omega$ es un rectángulo cerrado arbitrario, es fácil ver que existe una sucesión decreciente de rectángulos cerrados $\Omega \supset A_i \supset A_{i+1} \cdots \supset A$ tal que los lados de cada A_i son de longitud racional, y $\lim_i c_n(A_i \setminus A) = \lim_i [c_n(A_i) - c_n(A)] \to 0$.
Utilizando que la función continua $\mathbf{x} \to |\det \mathbf{g}'(\mathbf{x})|$ está acotada en el compacto A_1 se obtiene fácilmente que $\lim_i \int_{A_i} |\det \mathbf{g}'(\mathbf{x})| d\mathbf{x} = \int_A |\det \mathbf{g}'(\mathbf{x})| d\mathbf{x}$. Por lo que ya hemos demostrado sabemos que para cada $i \in \mathbb{N}$ se cumple la desigualdad

$$c_n(\mathbf{g}(A)) \leq c_n(\mathbf{g}(A_i)) \leq \int_{A_i} |\det \mathbf{g}'(\mathbf{x})| d\mathbf{x}$$

y pasando al límite obtenemos la desigualdad del enunciado para el caso de un rectángulo cerrado arbitrario $A \subset \Omega$. ■

Teorema J.13 [Primera versión] *Sea* $\mathbf{g} : \Omega \to \mathbb{R}^n$ *una aplicación inyectiva de clase* C^1 *en un abierto* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$*, tal que* $\det \mathbf{g}'(\mathbf{x}) \neq 0$ *para cada* $\mathbf{x} \in \Omega$*. Si* $\overline{M} \subset \Omega$ *y* M *es medible Jordan entonces* $\mathbf{g}(M)$ *también es medible Jordan. Además* $f : \mathbf{g}(M) \to \mathbb{R}$ *es integrable Riemann sobre* $\mathbf{g}(M)$ *si y sólo si* $(f \circ \mathbf{g})|\det \mathbf{g}'| : M \to \mathbb{R}$ *es integrable Riemann sobre* M *y en ese caso*

$$\int_{\mathbf{g}(M)} f(\mathbf{y}) d\mathbf{y} = \int_M f(\mathbf{g}(\mathbf{x}))|\det \mathbf{g}'(\mathbf{x})| \; d\mathbf{x}$$

Dem: En virtud del teorema 8.8 $U = \mathbf{g}(\Omega)$ es abierto y según el corolario 8.14 la inversa $\mathbf{g}^{-1} : U \to \Omega$ es de clase C^1 (es decir, $\mathbf{g}$ establece un C^1-difeomorfismo entre Ω y su imagen U). Ya hemos demostrado en la proposición J.10 que $E = \mathbf{g}(M)$ es medible Jordan. Es claro que los conjuntos

$$D(f, E) = \{\mathbf{y} \in E : f|_E \text{ es discontinua en } \mathbf{y}\}$$

$$D(f \circ \mathbf{g}, M) = \{\mathbf{x} \in M : (f \circ \mathbf{g})|_M \text{ es discontinua en } \mathbf{x}\}$$

se corresponden mediante $\mathbf{g} : \Omega \to U$, es decir $\mathbf{g}^{-1}(D(f, E)) = D(f \circ \mathbf{g}, M)$.

Entonces, según la proposición J.3, $D(f \circ \mathbf{g}, M)$ tiene medida nula si y sólo si $D(f, E)$ tiene medida nula y con el teorema 10.27 se obtiene que f es integrable sobre E si y sólo si $(f \circ \mathbf{g})$ es integrable sobre M. Como $|\det \mathbf{g}'|$ es una función continua que no se anula sobre M, y el producto de funciones integrables es integrable se sigue que $(f \circ \mathbf{g})$ es integrable sobre M si y sólo si $(f \circ \mathbf{g})|\det \mathbf{g}'|$ es integrable sobre M.

Observemos en primer lugar que la fórmula del cambio de variable basta establecerla para el caso de una función $f \geq 0$, y esto es lo que supondremos en lo que sigue. Desglosamos la demostración en tres etapas:

Primera etapa: Si $A \subset \Omega$ es un rectángulo cerrado entonces

$$\int_{\mathbf{g}(A)} f(\mathbf{y}) d\mathbf{y} \leq \int_A f(\mathbf{g}(\mathbf{x}))|\det \mathbf{g}'(\mathbf{x})| \; d\mathbf{x}$$

Dada una partición $p \in \mathcal{P}(A)$, como $\mathbf{g}(A) = \bigcup_{S \in \Delta(p)} \mathbf{g}(S)$, (unión que en general no es disjunta) obtenemos que $f\chi_{\mathbf{g}(A)} \leq \sum_{S \in \Delta(p)} f\chi_{\mathbf{g}(S)}$, luego

$$\int_{\mathbf{g}(A)} f(\mathbf{y}) \; d\mathbf{y} \leq \sum_{S \in \Delta(p)} \int_{\mathbf{g}(S)} f(\mathbf{y}) \; d\mathbf{y} \leq \sum_{S \in \Delta(p)} M(f \circ \mathbf{g}, S) c_n(\mathbf{g}(S))$$

donde $M(f \circ \mathbf{g}, S) = \sup\{f(\mathbf{g}(\mathbf{x}))) : \mathbf{x} \in S\}$. Utilizando la desigualdad establecida en el lema J.12 obtenemos

(D1) $\quad \int_{\mathbf{g}(A)} f(\mathbf{y}) \leq \sum_{S \in \Delta(p)} \int_S M(f \circ \mathbf{g}, S)|\det \mathbf{g}'(\mathbf{x})| \; d\mathbf{x}$

Como la función $\varphi := (f \circ \mathbf{g})|\det \mathbf{g}'|$ es integrable sobre A, dado $\epsilon > 0$ podemos encontrar $p \in \mathcal{P}(A)$ tal que

(D2) $\quad S(\varphi, p) = \sum_{S\in\Delta(p)} M(\varphi, S)v(S) \leq \int_A \varphi(\mathbf{x})\ d\mathbf{x} + \epsilon$

Por otra parte, como la función continua $\mathbf{x} \to \det \mathbf{g}'(\mathbf{x})$ es uniformemente continua sobre el compacto A, existe $\delta > 0$ tal que

$$\mathbf{x}, \mathbf{t} \in A,\ \|\mathbf{x} - \mathbf{t}\|_\infty < \delta \Rightarrow |\det \mathbf{g}'(\mathbf{x}) - \det \mathbf{g}'(\mathbf{t})| < \epsilon/K$$

donde $K > 0$ es una cota superior del conjunto $f(\mathbf{g}(A))$. Podemos suponer que la partición $p \in \mathcal{P}(A)$ ha sido elegida de modo que diam $(S) < \delta$ para cada $S \in \Delta(p)$. Entonces, si $\mathbf{x}, \mathbf{t} \in S \in \Delta(p)$ se cumple $\|\mathbf{x} - \mathbf{t}\|_\infty < \delta$ lo que lleva consigo la desigualdad

$$|\det \mathbf{g}'(\mathbf{x})| \leq |\det \mathbf{g}'(\mathbf{t})| + \epsilon/K$$

y multiplicando por $f(\mathbf{g}(\mathbf{t})) \geq 0$ se obtiene que para todo para $\mathbf{x}, \mathbf{t} \in S$ se cumple

$$f(\mathbf{g}(\mathbf{t}))|\det \mathbf{g}'(\mathbf{x})| \leq f(\mathbf{g}(\mathbf{t}))|\det \mathbf{g}'(\mathbf{t})| + \epsilon \leq M(\varphi, S) + \epsilon$$

Dejando $\mathbf{x} \in S$ fijo y tomando supremos en $\mathbf{t} \in S$ se llega a la desigualdad

$$M(f \circ \mathbf{g}, S)|\det \mathbf{g}'(\mathbf{x})| \leq M(\varphi, S) + \epsilon$$

Incorporando esta desigualdad a (D1) y teniendo en cuenta (D2) se llega a

$$\int_{\mathbf{g}(A)} f(\mathbf{y})\ d\mathbf{y} \leq \sum_{S\in\Delta(p)} (M(\varphi, S) + \epsilon)\, v(S) \leq \int_A \varphi(\mathbf{x})d\mathbf{x} + \epsilon + \epsilon v(A)$$

Como $\epsilon > 0$ es arbitrario se obtiene que $\int_{\mathbf{g}(A)} f(\mathbf{y})\ d\mathbf{y} \leq \int_A \varphi(\mathbf{x})d\mathbf{x}$.

Segunda etapa: Demostramos ahora que si $\overline{M} \subset \Omega$ y M es medible Jordan, entonces

$$\int_{\mathbf{g}(M)} f(\mathbf{y})d\mathbf{y} \leq \int_M f(\mathbf{g}(\mathbf{x}))|\det \mathbf{g}'(\mathbf{x})|\ d\mathbf{x}$$

Fijado un rectángulo cerrado $A \supset M$, utilizando que χ_M es integrable Riemann sobre A podemos encontrar, para cada $k \in \mathbb{N}$, una subdivisión $p_k \in \mathcal{P}(A)$ tal que

$$S(\chi_M, p_k) - s(\chi_M, p_k) < 1/k$$

No hay inconveniente en suponer que, de modo recurrente, hemos elegido p_{k+1} más fina que p_k. Entonces, para cada $k \in \mathbb{N}$, las figuras elementales

$$E_k = \bigcup\{S \in \Delta(p_k) : S \subset M\}, \quad F_k = \bigcup\{S \in \Delta(p_k) : S \cap M \neq \emptyset\}$$

verifican $E_k \subset E_{k+1} \subset M \subset F_{k+1} \subset F_k$, y

$$c_n(F_k \setminus E_k) = c_n(F_k) - c_n(E_k) = S(\chi_M, p_k) - s(\chi_M, p_k) < 1/k$$

Como $\overline{M} \subset \Omega$ se cumple que $\eta := \operatorname{dist}(\overline{M}, \Omega^c) > 0$ y podemos suponer que la partición p_1 ha sido elegida verificando $\max\{\operatorname{diam}(S) : S \in \Delta(p_1)\} < \eta$, y así tenemos asegurado que F_1 es un subconjunto compacto de Ω sobre el que la función continua $|\det \mathbf{g}'|$ está definida y es acotada. En lo que sigue

$$\alpha = \max\{|\det \mathbf{g}'(\mathbf{x})| : \mathbf{x} \in F_1\} < +\infty; \quad \beta = \sup\{f(\mathbf{y}) : \mathbf{y} \in \mathbf{g}(M)\}$$

$$\Delta'_k = \{S \in \Delta(p_k) : S \subset M\}, \quad \Delta''_k = \{S \in \Delta(p_k) : S \cap M \neq \emptyset\}$$

Como $f \geq 0$, y $\mathbf{g}(E_k) = \cup\{\mathbf{g}(S) : S \in \Delta'_k\}$, teniendo en cuenta lo demostrado en la primera etapa y la propiedad aditiva de la integral respecto al intervalo resulta

$$\int_{\mathbf{g}(E_k)} f(\mathbf{y})\ d\mathbf{y} \leq \sum_{S\in\Delta'_k} \int_{g(S)} f(\mathbf{y})\ d\mathbf{y} \leq \sum_{S\in\Delta'_k} \int_S f(\mathbf{g}(\mathbf{x}))|\det \mathbf{g}'(\mathbf{x})| d\mathbf{x} =$$

$$= \int_{E_k} f(\mathbf{g}(\mathbf{x}))|\det \mathbf{g}'(\mathbf{x})| d\mathbf{x} \leq \int_M f(\mathbf{g}(\mathbf{x}))|\det \mathbf{g}'(\mathbf{x})| d\mathbf{x}$$

La conclusión se obtendrá demostrando que $\lim_k \int_{\mathbf{g}(E_k)} f(\mathbf{y})\ d\mathbf{y} = \int_{\mathbf{g}(M)} f(\mathbf{y})\ d\mathbf{y}$, y pasando al límite en la desigualdad que acabamos de establecer

$$\int_{\mathbf{g}(E_k)} f(\mathbf{y})\ d\mathbf{y} \leq \int_M f(\mathbf{g}(\mathbf{x}))|\det \mathbf{g}'(\mathbf{x})| d\mathbf{x}$$

Teniendo en cuenta la desigualdad

$$\left|\int_{\mathbf{g}(M)} f - \int_{\mathbf{g}(E_k)} f\right| = \int_{\mathbf{g}(M)\setminus\mathbf{g}(E_k)} f \leq \beta\ c_n(\mathbf{g}(M \setminus E_k))$$

basta demostrar que $\lim_k c_n(\mathbf{g}(M \setminus E_k)) = 0$. En virtud de la inclusión

$$M \setminus E_k \subset F_k \setminus E_k \subset \bigcup\{S : S \in \Delta''_k \setminus \Delta'_k)\}$$

se cumple $\mathbf{g}(M \setminus E_k) \subset D_k$, con $D_k = \bigcup_{S\in\Delta''_k\setminus\Delta'_k} \mathbf{g}(S)$, luego

$$c_n(\mathbf{g}(M \setminus E_k)) \leq c_n(D_k) \leq \sum_{S\in\Delta''_k\setminus\Delta'_k} c_n(\mathbf{g}(S))$$

y con el lema J.12 se obtiene

$$\sum_{S\in\Delta''_k\setminus\Delta'_k} c_n(\mathbf{g}(S)) \leq \sum_{S\in\Delta''_k\setminus\Delta'_k} \int_S |\det \mathbf{g}'| = \sum_{S\in\Delta''_k} \int_S |\det \mathbf{g}'| - \sum_{S\in\Delta'_k} \int_S |\det \mathbf{g}'| =$$

$$= \int_{F_k} |\det \mathbf{g}'| - \int_{E_k} |\det \mathbf{g}'| = \int_{F_k\setminus E_k} |\det \mathbf{g}'| \leq \alpha c_n(F_k \setminus E_k)] \leq \alpha/k$$

Queda establecida así la desigualdad $c_n(\mathbf{g}(M \setminus E_k)) \leq \alpha/k$, con la que se obtiene el resultado deseado: $\lim_k c_n(\mathbf{g}(M \setminus E_k)) = 0$.

Tercera etapa: Ya hemos visto que en virtud del teorema 8.8 y el corolario 8.14, $U = \mathbf{g}(\Omega)$ es abierto g es un C^1-difeomorfismo entre Ω y su imagen U, luego la inversa $\mathbf{g}_1 = \mathbf{g}^{-1} : U \to \Omega$ cumple que $\det \mathbf{g}_1'(\mathbf{y}) \neq 0$ para cada $\mathbf{y} \in U$. También sabemos que el conjunto $M_1 = \mathbf{g}(M) \subset U$ es medible Jordan y que $\overline{M_1} = \mathbf{g}(\overline{M}) \subset \mathbf{g}(\Omega) = U$. Aplicando lo demostrado en la segunda etapa, a la función $f_1(\mathbf{x}) = f(\mathbf{g}(\mathbf{x}))|\det \mathbf{g}'(\mathbf{x})|$, y al conjunto medible Jordan M_1, con el cambio de variable $\mathbf{g}_1$, se obtiene la desigualdad

$$\int_{\mathbf{g}_1(M_1)} f_1(\mathbf{x})\ d\mathbf{x} \leq \int_{M_1} f_1(\mathbf{g}_1(\mathbf{y}))|\det \mathbf{g}_1'(\mathbf{y})|\ d\mathbf{y}$$

Como $f_1(\mathbf{g}_1(\mathbf{y})) = f(\mathbf{y})|\det \mathbf{g}'(\mathbf{g}_1(\mathbf{y})|$ resulta

$$\int_M f(\mathbf{g}(\mathbf{x}))|\det \mathbf{g}'(\mathbf{x})|\ d\mathbf{x} \leq \int_{\mathbf{g}(M)} f(\mathbf{y})|\det \mathbf{g}'(\mathbf{g}_1(\mathbf{y})||\det \mathbf{g}_1'(\mathbf{y})|\ d\mathbf{y}$$

Si $\mathbf{y} = \mathbf{g}(\mathbf{x})$ entonces $\mathbf{g}_1(\mathbf{y}) = \mathbf{x}$, y según el teorema 8.11 la matriz $\mathbf{g}_1'(\mathbf{y})$ es inversa de la matriz $\mathbf{g}'(\mathbf{x})$, luego $\det \mathbf{g}'(\mathbf{g}_1(\mathbf{y}) \det \mathbf{g}_1'(\mathbf{y}) = 1$, y se obtiene así la desigualdad opuesta a la obtenida en la segunda etapa:

$$\int_M f(\mathbf{g}(\mathbf{x}))|\det \mathbf{g}'(\mathbf{x})|\ d\mathbf{x} \leq \int_{\mathbf{g}(M)} f(\mathbf{y})|\ d\mathbf{y}$$

■

Teorema J.14 [Segunda versión] *Sea* $\mathbf{g} : \Omega \to \mathbb{R}^n$ *una transformación de clase* C^1 *definida en un abierto* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. *Sea* $M \subset \mathbb{R}^n$ *un conjunto medible Jordan tal que*

a) $\overline{M} \subset \Omega$

b) $\mathbf{g}$ *es inyectiva sobre* M°

c) $\det \mathbf{g}'(\mathbf{x}) \neq 0$ *para cada* $\mathbf{x} \in M^\circ$

Entonces $\mathbf{g}(M)$ *es medible Jordan, y si* $f : \mathbf{g}(M) \to \mathbb{R}$ *es integrable Riemann sobre* $\mathbf{g}(M)$, *la función* $(f \circ \mathbf{g})\ |\det \mathbf{g}'|$ *es integrable Riemann sobre* M *y vale la igualdad.*

$$\int_{\mathbf{g}(M)} f(\mathbf{y}) d\mathbf{y} = \int_M f(\mathbf{g}(\mathbf{x}))|\det \mathbf{g}'(\mathbf{x})|\ d\mathbf{x}$$

Dem: Según la proposición J.10 el conjunto $\mathbf{g}(M)$ es medible Jordan. Fijado un rectángulo cerrado $A \supset M$, para cada $\epsilon > 0$ existe una partición $p \in \mathcal{P}(A)$ tal que

$$E = \{S \in \Delta(p) : S \subset M^\circ\}, \quad F = \{S \in \Delta(p) : S \cap \overline{M} \neq \emptyset\}$$

son figuras elementales que verifican $c_n(F \setminus E) < \epsilon$, y $E \subset M^\circ \subset \overline{M} \subset F$ (recuérdese que al ser M medible Jordan es $c_n(\partial M) = 0$, de donde se sigue que M° y $\overline{M}$ son medibles Jordan, y $c_n(M^\circ) = c_n(M) = c_n(\overline{M})$).

Aplicando el teorema J.13 al cambio de variable $\mathbf{g}|_{M^\circ}$ y al conjunto cerrado medible Jordan $E \subset M^\circ$ se obtiene la igualdad

i) $\int_{\mathbf{g}(E)} f(\mathbf{y})\ d\mathbf{y} = \int_E f(\mathbf{g}(\mathbf{x})|\det \mathbf{g}'(\mathbf{x})|\ d\mathbf{x}$

Como F es compacto, y la función $\mathbf{x} \to \|d\mathbf{g}(\mathbf{x})\|$ es continua podemos asegurar que $\mu = \text{máx}\{\|d\mathbf{g}(\mathbf{x})\| : \mathbf{x} \in F\} < +\infty$. En virtud del teorema del incremento finito, para cada rectángulo cerrado $S \in \Delta(p)$ con $S \subset F$, se cumple

$$\mathbf{x}, \mathbf{y} \in S \Rightarrow \|\mathbf{g}(\mathbf{x}) - \mathbf{g}(\mathbf{y})\|_\infty \leq \mu \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|_\infty$$

luego, según el ejercicio J.4, $\mathbf{g}(S)$ está contenido en un conjunto medible Jordan de contenido $\leq 2\mu^n v(S)$. Como $F \setminus E$ está incluido en una unión finita de tales rectángulos S con suma de volúmenes $< \epsilon$, se sigue que $c_n(\mathbf{g}(F \setminus E)) \leq 2\mu^n \epsilon$.

Si $\alpha = \text{máx}\{|\det \mathbf{g}'(\mathbf{x})| : \mathbf{x} \in F\}$, y $\beta = \sup\{|f(\mathbf{x})| : \mathbf{y} \in \mathbf{g}(M)\}$, se verifica

ii) $\left|\int_{\mathbf{g}(M)} f(\mathbf{y})\ d\mathbf{y} - \int_{\mathbf{g}(E)} f(\mathbf{y})\ d\mathbf{y}\right| \leq \beta c_n(\mathbf{g}(M \setminus E)) \leq \beta c_n(\mathbf{g}(F \setminus E)) \leq \beta 2\mu^n \epsilon.$

iii) $\left|\int_M (f \circ \mathbf{g})|\det \mathbf{g}'| - \int_E (f \circ \mathbf{g})|\det \mathbf{g}'|\right| \leq \alpha\beta c_n(M \setminus E) \leq \alpha\beta c_n(F \setminus E) \leq \alpha\beta\epsilon.$

Combinando i), ii) y iii) y teniendo en cuenta que $\epsilon > 0$ es arbitrario se obtiene

$$\int_{\mathbf{g}(M)} f(\mathbf{y}) d\mathbf{y} = \int_M f(\mathbf{g}(\mathbf{x}))|\det \mathbf{g}'(\mathbf{x})|\ d\mathbf{x}$$

■

Para terminar vemos como la fórmula del cambio de variable se extiende al caso de integrales de Riemann impropias (de funciones absolutamente integrables, y de funciones no negativas localmente integrables).

Teorema J.15 [Tercera versión] *Sea $\mathbf{g} : \Omega \to U$ un C^1-difeomorfismo entre dos abiertos $\Omega, U \subset \mathbb{R}^n$, y $f : U \to \mathbb{R}$ una función localmente integrable Riemann sobre U. Entonces $(f \circ \mathbf{g})|\det \mathbf{g}'| : \Omega \to \mathbb{R}$ es localmente integrable Riemann sobre Ω y si $f \geq 0$ se cumple la igualdad (eventualmente con valor $= +\infty$)*

$$\int_U f(\mathbf{u})\ d\mathbf{u} = \int_\Omega f(\mathbf{g}(\mathbf{x}))|\det \mathbf{g}'(\mathbf{x})|\ d\mathbf{x}$$

Si la función $f : U \to \mathbb{R}$ es absolutamente integrable Riemann sobre U entonces $(f \circ \mathbf{g})|\det \mathbf{g}'|$ es absolutamente integrable Riemann sobre Ω y la igualdad anterior se cumple con valor finito.

DEM: El homeomorfismo $\mathbf{g} : \Omega \to U$ establece una biyección $K \to \mathbf{g}(K)$ entre los subconjuntos compactos de Ω y los subconjuntos compactos de U. En virtud de la proposición J.10, en esta biyección se corresponden los compactos medibles Jordan, es decir (con la notación del capítulo 12) $K \in \mathcal{K}_\Omega$ si y sólo si $H = \mathbf{g}(K) \in \mathcal{K}_U$. Más aún, es fácil comprobar que si $K_j \in \mathcal{K}_\Omega$ es una sucesión expansiva en Ω entonces $H_j = \mathbf{g}(K_j) \in \mathcal{K}_U$ es una sucesión expansiva en U.

Si $f : U \to \mathbb{R}$ es localmente integrable sobre U, para cada $K \in \mathcal{K}_\Omega$, f es integrable sobre $H = \mathbf{g}(K) \in \mathcal{K}_U$, y con el teorema J.13 se obtiene que $(f \circ \mathbf{g})|\det \mathbf{g}'|$ es integrable sobre $K \in \mathcal{K}_\Omega$, cumpliéndose la igualdad

$$\int_H f(\mathbf{u})\ d\mathbf{u} = \int_K f(\mathbf{g}(\mathbf{x}))|\det \mathbf{g}'(\mathbf{x})|\ d\mathbf{x}$$

Así queda demostrado que $(f \circ \mathbf{g})|\det \mathbf{g}'|$ es localmente integrable sobre Ω. Cuando $f \geq 0$, tomando supremos en la última igualdad se obtiene que

$$\sup_{H \in \mathcal{K}_U} \int_U f(\mathbf{u})\ d\mathbf{u} = \sup_{K \in \mathcal{K}_\Omega} \int_K f(\mathbf{g}(\mathbf{x}))|\det \mathbf{g}'(\mathbf{x})|\ d\mathbf{x} \leq +\infty$$

es decir, $\int_U f(\mathbf{u})\ d\mathbf{u} = \int_\Omega f(\mathbf{g}(\mathbf{x}))|\det \mathbf{g}'(\mathbf{x})|\ d\mathbf{x} \leq +\infty$.

Lo que acabamos de demostrar, aplicado a la función $|f|$, nos dice que si $f : U \to \mathbb{R}$ es absolutamente integrable sobre U, entonces $(f \circ \mathbf{g})|\det \mathbf{g}'|$ es absolutamente integrable sobre Ω. En este caso la igualdad del enunciado se obtiene pasando al límite en la igualdad

$$\int_{H_j} f(\mathbf{u})\ d\mathbf{u} = \int_{K_j} f(\mathbf{g}(\mathbf{x}))|\det \mathbf{g}'(\mathbf{x})|\ d\mathbf{x}$$

donde $K_j \in \mathcal{K}_\Omega$, es una sucesión expansiva en Ω y $H_j = \mathbf{g}(K_j) \in \mathcal{K}_U$ es la correspondiente sucesión expansiva en U. ■