K

Formas diferenciales

K.1. Producto mixto y producto vectorial

En lo que sigue E denotará un espacio euclídeo de dimensión k (habitualmente será un subespacio vectorial k-dimensional de $\mathbb{R}^n$, $1 \leq k \leq n$, con el producto escalar inducido por el producto escalar usual de $\mathbb{R}^n$). Fijada una base ortonormal $\beta = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \cdots, \mathbf{u}_k\}$ en E, este espacio euclídeo queda identificado con $\mathbb{R}^k$, mediante la aplicación lineal

$$T_\beta : \mathbb{R}^k \to E, \quad T_\beta(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^{k} x_j \mathbf{u}_j$$

Obsérvese que T_β conserva el producto escalar y por lo tanto es una isometría lineal.

Un conjunto $M \subset E$ se dice que es medible Jordan en E cuando $M_\beta = T_\beta^{-1}(M)$ es medible Jordan en $\mathbb{R}^k$, y en ese caso se define $c_E(M) = c_k(M_\beta)$. Esta definición no depende de la base ortonormal β fijada en E: Si $\beta' = \{\mathbf{u}'_1, \mathbf{u}'_2, \cdots, \mathbf{u}'_k\}$ es otra base ortonormal de E, la aplicación lineal $T = T_\beta^{-1} \circ T_{\beta'} : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^k$ es una isometría que conserva el producto escalar, luego $|\det T| = 1$ (esto, que es un resultado bien conocido de geometría euclídea, ha sido establecido en el corolario J.9). Como $T(M_{\beta'}) = M_\beta$, en virtud del teorema J.8 se cumple que M_β es medible Jordan si $M_{\beta'}$ es medible Jordan, y en ese caso $c_k(M_\beta) = |\det T| c_k(M_{\beta'}) = c_k(M_{\beta'})$.

En lo que sigue $\mathcal{M}_E$ será la familia de los conjuntos $M \subset E$ que son medibles Jordan, y $c_E : \mathcal{M}_E \to [0, +\infty)$ el contenido de Jordan en E que se acaba de definir.

Los resultados recogidos en el siguiente ejercicio, que se obtienen reformulando con las nuevas definiciones resultados conocidos, se dejan al cuidado del lector.

Ejercicio K.1 *Sean E, F espacios euclídeos de dimensión k.*

a) Si $G \subset E$ es un subespacio propio y $M \subset G$ es acotado entonces $M \in \mathcal{M}_E$ y $c_E(M) = 0$

b) Si $T : E \to F$ es una aplicación lineal y $M \in \mathcal{M}_E$ entonces $T(M) \in \mathcal{M}_F$ y $c_F(T(E)) = |\det T|\ c_E(M)$, donde $\det T$ es el determinante de T respecto a una base ortonormal en E y una base ortonormal en F.

El paralelepípedo definido por $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \cdots, \mathbf{v}_k \in E$ es el conjunto

$$P(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \cdots, \mathbf{v}_k) = L(Q)$$

donde $Q = [0,1]^k$, y $L : \mathbb{R}^k \to E$ es la aplicación lineal $L(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^k x_j \mathbf{v}_j$.

Si $\beta = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \cdots, \mathbf{u}_k\}$ es una base ortonormal de E, y $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \cdots, \mathbf{v}_k \in E$, utilizaremos la notación $\det_\beta(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \cdots, \mathbf{v}_k)$ para designar el determinante de la matriz cuadrada $(\alpha_{ij})_{1\le i,j\le k}$, formada con las coordenadas de los vectores $\mathbf{v}_i$ respecto a la base β, es decir $\mathbf{v}_i = \sum_{j=1}^k \alpha_{ij}\mathbf{u}_j$, $(1 \le i \le k)$.

Proposición K.2 *Si E es un espacio euclídeo k-dimensional, y $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \cdots, \mathbf{v}_k \in E$ entonces $P(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \cdots, \mathbf{v}_k)$ es medible Jordan en E, y su contenido vale*

$$c_E(P(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \cdots, \mathbf{v}_k)) = |\det{}_\beta(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \cdots, \mathbf{v}_k)| = \sqrt{|\det(\langle \mathbf{v}_i|\mathbf{v}_j\rangle)_{1\le i,j\le k}|}$$

donde $\beta = (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \cdots, \mathbf{u}_k)$ es una base ortonormal de E.

Dem: Supongamos en primer lugar que los vectores $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \cdots, \mathbf{v}_k$ son linealmente independientes. Consideremos las aplicaciones lineales $L, T_\beta : \mathbb{R}^k \to E$ definidas por

$$L(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^k x_j \mathbf{v}_j; \quad T_\beta(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^k x_j \mathbf{u}_j$$

Para justificar que $P := P(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \cdots, \mathbf{v}_k) = L(Q)$ es medible Jordan en E debemos comprobar que $T_\beta^{-1}(P)$ es medible Jordan en $\mathbb{R}^k$. Según la proposición J.8 esto ocurre porque $T_\beta^{-1}(P)$ es la imagen de $Q = [0,1]^k$ mediante la aplicación lineal $T = T_\beta^{-1} \circ L$. Además, teniendo en cuenta la definición de c_E, según esta proposición

$$c_E(P) = c_k(T_\beta^{-1}(P)) = c_k(T(Q)) = |\det T| c_k(Q) = |\det T|$$

Para terminar debemos ver que $|\det T|$ vale lo que figura en el enunciado. Según la definición, $\det_\beta(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \cdots, \mathbf{v}_k)$ es el determinante de la matriz $A = (\alpha_{ij})_{1\le i,j\le k}$, donde $\mathbf{v}_i = \sum_{j=1}^k \alpha_{ij}\mathbf{u}_j$. Obsérvese que $T_\beta(\sum_{i=1}^k \alpha_{ij}\mathbf{e}_j) = \sum_{i=1}^k \alpha_{ij}\mathbf{u}_j = \mathbf{v}_i$, luego

$$T(\mathbf{e}_i) = T_\beta^{-1} L(\mathbf{e}_i) = T_\beta^{-1}(\mathbf{v}_i) = (\alpha_{i1}, \alpha_{i2}, \cdots, \alpha_{ik}) \in \mathbb{R}^k$$

lo que significa que la matriz de la aplicación lineal $T = T_\beta^{-1} \circ L : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^k$ (respecto a la base canónica de $\mathbb{R}^k$) tiene como columnas las filas de la matriz $A = (\alpha_{ij})_{1\le i,j\le k}$, y por lo tanto $\det T = \det A = \det{}_\beta(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \cdots, \mathbf{v}_k)$.

Obsérvese que si los vectores $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \cdots, \mathbf{v}_k$ son linealmente dependientes el paralelepípedo $P(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \cdots, \mathbf{v}_k)$ es un conjunto acotado contenido en un subespacio propio de E y por lo tanto, según el ejercicio K.1, tiene contenido nulo, luego la primera igualdad del enunciado es evidente porque $\det_\beta(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \cdots, \mathbf{v}_k) = 0$.

Finalmente, para establecer la segunda igualdad del enunciado basta observar que $\langle \mathbf{v}_i|\mathbf{v}_j\rangle = \sum_{p=1}^k \alpha_{ip}\alpha_{jp}$, lo que significa que la matriz $B = (\langle \mathbf{v}_i|\mathbf{v}_j\rangle)_{1\le i,j\le k}$ coincide con el producto AA^t (donde A^t es la traspuesta de A). Se sigue de esto que $\det B = \det A \det A^t = (\det A)^2$, y queda establecido que

$$|\det{}_\beta(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \cdots, \mathbf{v}_k)| = \sqrt{|\det(\langle \mathbf{v}_i | \mathbf{v}_j \rangle)_{1\leq i,j\leq k}|}$$

■

Orientación de un espacio vectorial. Sea E un espacio vectorial de dimensión k, y $\beta = (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \cdots, \mathbf{u}_k)$, $\beta' = (\mathbf{u}'_1, \mathbf{u}'_2, \cdots, \mathbf{u}'_k)$, bases ordenadas de E. Sea $A = (\alpha_{ij})_{1\leq i,j\leq k}$ la matriz de la aplicación lineal que transforma la base β en la base β':

$$\mathbf{u}'_i = \sum_{j=1}^{k} \alpha_{ij}\mathbf{u}_j, \quad 1 \leq i \leq k.$$

Si $\det A > 0$ se dice que las dos bases tienen la misma orientación. Así queda definida una relación de equivalencia en la familia de las bases ordenadas de E con la que esta familia queda descompuesta en dos clases de equivalencia. Se dice que el espacio vectorial E está orientado cuando se ha elegido una de las dos clases de equivalencia que se declara como clase positiva. A la otra clase de equivalencia se le llama clase negativa y define en E la orientación opuesta. En la práctica, un espacio vectorial se orienta eligiendo una de las dos orientaciones posibles mediante uno de sus representantes, es decir eligiendo una base ordenada $\beta = (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \cdots \mathbf{u}_k)$, como base positiva. La orientación canónica del espacio $\mathbb{R}^n$ es la definida con la base canónica ordenada en la forma habitual, $\beta = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \cdots, \mathbf{e}_n)$.

Aunque $\mathbb{R}^n$ tiene una orientación canónica, sin embargo para un subespacio k-dimensional $E \subset \mathbb{R}^n$ no hay definida de forma natural una orientación canónica y para algunas de las cuestiones que se estudian más adelante convendrá elegir de forma adecuada las orientaciones de los subespacios que intervienen.

Dado un hiperplano $E = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \langle \mathbf{x} \mid \mathbf{z} \rangle = 0\}$ determinado por un vector normal $\mathbf{z} \neq 0$, es fácil comprobar que dos bases $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \cdots \mathbf{u}_{n-1}\}$, $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \cdots \mathbf{v}_{n-1}\}$ de E tienen la misma orientación si y sólo si $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \cdots \mathbf{u}_{n-1}, \mathbf{z}\}$ y $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \cdots \mathbf{v}_{n-1}, \mathbf{z}\}$ son bases de $\mathbb{R}^n$ con la misma orientación. Esto permite dar la siguiente definición: *La orientación inducida en E por el vector normal* $\mathbf{z}$ es la determinada por una base $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \cdots \mathbf{u}_{n-1}\}$ de E tal que $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \cdots \mathbf{u}_{n-1}, \mathbf{z}\}$ es una base positiva para la orientación canónica de $\mathbb{R}^n$. Es claro que para cada $t > 0$ (resp. $t < 0$) los vectores $\mathbf{z}$ y $t\mathbf{z}$ inducen la misma orientación (resp. orientaciones opuestas) en E.

Producto mixto. Sea E un espacio euclídeo orientado de dimensión k y $\beta = (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \cdots, \mathbf{u}_k)$ una base ortonormal positiva. El *producto mixto* de k vectores ordenados $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \cdots, \mathbf{v}_k) \in E^k$, denotado $[\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2 \cdots \mathbf{v}_k]$, se define como el valor del determinante

$$\det{}_\beta(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \cdots \mathbf{v}_n) = \det(v_{ij})_{1\leq i,j\leq n}, \quad \text{donde} \quad \sum_{j=1}^{k} v_{ij}\mathbf{u}_j = \mathbf{v}_i, \quad 1 \leq i \leq k$$

El producto mixto $[\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2 \cdots \mathbf{v}_k]$ es no nulo si y sólo si los vectores $\{\mathbf{v}_i : 1 \leq i \leq k\}$ son linealmente independientes, y en este caso, de acuerdo con la proposición K.2, si $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \cdots, \mathbf{v}_k)$ es una base positiva para la orientación de E, el producto mixto $[\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2 \cdots \mathbf{v}_k]$ coincide con el valor del contenido de Jordan en E del paralelepípedo $P(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \cdots, \mathbf{v}_k)$, y con el valor opuesto cuando $(\mathbf{v}_1, \cdots, \mathbf{v}_k)$ es una base negativa. Esto pone de manifiesto que el valor de $[\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2 \cdots \mathbf{v}_k] = \det_\beta(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \cdots, \mathbf{v}_k)$ es independiente de la base ortonormal positiva β que se ha elegido.

La aplicación $\Lambda : E^k \to \mathbb{R}$, $\Lambda(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \cdots, \mathbf{v}_k) = [\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2 \cdots \mathbf{v}_k]$ recibe el nombre de k-forma fundamental del espacio euclídeo orientado E. Aunque para el cálculo explícito de $[\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2 \cdots \mathbf{v}_k]$ hay que considerar una base ortonormal positiva de E sin embargo esta aplicación está definida de modo intrínseco, ya que sólo depende de la estructura euclídea y de la orientación de E. Conviene hacer notar que no es imprescindible usar siempre la misma base ortonormal positiva de E, por lo que desde el punto de vista práctico, para el cálculo de un valor concreto $[\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2 \cdots \mathbf{v}_k]$, puede resultar cómodo utilizar una base ortonormal positiva que dependa de $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \cdots, \mathbf{v}_k)$.

Producto vectorial. Sea E un espacio euclídeo orientado de dimensión k y $\beta = (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \cdots, \mathbf{u}_k)$ una base ortonormal positiva de E. Dados $(k-1)$ vectores ordenados $(\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_2, \cdots, \mathbf{v}_k)$ de E consideremos la aplicación $L : E \to \mathbb{R}$, definida por

$$L(\mathbf{x}) = [\mathbf{x} \cdot \mathbf{v}_1 \cdots \mathbf{v}_k] = \det{}_\beta(\mathbf{x}, \mathbf{v}_2, \cdots, \mathbf{v}_k)$$

Obsérvese que esta aplicación no depende de la base ortonormal positiva β que hayamos elegido y que, en virtud de las propiedades de los determinantes, L es lineal. Usando la identificación canónica entre vectores de un espacio euclídeo y formas lineales sobre el mismo (proposición B.8), existe un único vector $\mathbf{z} \in E$ tal que para todo $\mathbf{x} \in E$ se cumple $L(\mathbf{x}) = \langle \mathbf{x} \mid \mathbf{z} \rangle$, es decir

$$\langle \mathbf{x} \mid \mathbf{z} \rangle = [\mathbf{x} \cdot \mathbf{v}_2 \cdots \mathbf{v}_k] = \det{}_\beta(\mathbf{x}, \mathbf{v}_2, \cdots, \mathbf{v}_k)$$

Este vector, denotado $\mathbf{z} = \mathbf{v}_2 \times \mathbf{v}_2 \times \cdots \times \mathbf{v}_k$, recibe el nombre de *producto vectorial* los $(k-1)$ vectores ordenados $(\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_2, \cdots, \mathbf{v}_k)$. De la definición se deduce que $\mathbf{z}$ es ortogonal a los vectores $\{\mathbf{v}_j : 2 \leq j \leq k\}$, y que $\mathbf{z} \neq 0$ si y sólo si estos vectores son linealmente independientes. En este caso, sea $F \subset E$ el hiperplano de E generado por los vectores $\{\mathbf{v}_j : 2 \leq j \leq k\}$, y $\mathbf{n}$ el vector unitario ortogonal a F para el cual $(\mathbf{n}, \mathbf{v}_2, \cdots, \mathbf{v}_k)$ es una base positiva de E. Como $\langle \mathbf{n} \mid \mathbf{z} \rangle = \det_\beta(\mathbf{n}, \mathbf{v}_2, \cdots, \mathbf{v}_k) > 0$, se sigue que $\mathbf{z}$ tiene la dirección y el sentido de $\mathbf{n}$, luego $(\mathbf{z}, \mathbf{v}_2, \cdots \mathbf{v}_k)$ es una base positiva de E, y de acuerdo con la proposición K.2 y el ejercicio K.3

$$\|\mathbf{z}\|_2 = \langle \mathbf{n} \mid \mathbf{z} \rangle = \det{}_\beta(\mathbf{n}, \mathbf{v}_2, \cdots, \mathbf{v}_k) = c_E(P(\mathbf{n}, \mathbf{v}_2, \cdots, \mathbf{v}_k)) = c_F(P(\mathbf{v}_2, \cdots, \mathbf{v}_k))$$

es decir, la norma euclídea del producto vectorial $\mathbf{z} = \mathbf{v}_2 \times \cdots \times \mathbf{v}_k$ es el volumen $(k-1)$-dimensional del paralelepípedo generado por los vectores $(\mathbf{v}_2, \cdots, \mathbf{v}_k)$ luego, según la proposición K.2, también se cumple que

$$\|\mathbf{z}\|_2 = \sqrt{|\det(\langle \mathbf{v}_i | \mathbf{v}_j \rangle)_{2 \leq i,j \leq k}|}$$

Si se conocen las coordenadas de los vectores $\mathbf{v}_j$, $2 \leq j \leq k$ respecto a una base ortonormal positiva $\beta = (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \cdots, \mathbf{u}_k)$, $\mathbf{v}_i = \sum_{j=1}^k v_{ij} \mathbf{u}_j$, $2 \leq i \leq k$, para obtener las coordenadas del producto vectorial $\mathbf{z} = \mathbf{v}_2 \times \cdots \times \mathbf{v}_k$ respecto a esta base $\mathbf{z} = \sum_{j=1}^{k} z_j \mathbf{u}_j$, basta calcular los productos escalares

$$z_j = \langle \mathbf{u}_j \mid \mathbf{z} \rangle = [\mathbf{u}_j \cdot \mathbf{v}_2 \cdots \mathbf{v}_k] = \det{}_\beta(\mathbf{u}_j, \mathbf{v}_2, \cdots, \mathbf{v}_k)$$

luego

$$z_j = \begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 \\ v_{21} & v_{22} & \cdots & v_{2j} & \cdots & v_{2k} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ v_{k1} & v_{k2} & \cdots & v_{kj} & \cdots & v_{kk} \end{vmatrix}$$

es decir, el producto vectorial $\mathbf{v}_2 \times \cdots \times \mathbf{v}_k$ es el vector $\mathbf{z}$ que resulta cuando se desarrolla formalmente el determinante

$$\mathbf{z} = \begin{vmatrix} \mathbf{u}_1 & \mathbf{u}_2 & \cdots & \mathbf{u}_j & \cdots & \mathbf{u}_k \\ v_{21} & v_{22} & \cdots & v_{2j} & \cdots & v_{2k} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ v_{k1} & v_{k2} & \cdots & v_{kj} & \cdots & v_{kk} \end{vmatrix}$$

A continuación vemos el significado geométrico del valor absoluto de las coordenadas del producto vectorial $\mathbf{z} = \mathbf{v}_2 \times \cdots \times \mathbf{v}_k$ (respecto a una base ortonormal positiva $\beta = (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \cdots, \mathbf{u}_k)$ de E). Por comodidad en la notación razonamos, sin pérdida de generalidad, con la primera coordenada de $\mathbf{z}$.

Con la fórmula $z_1 = \det{}_\beta(\mathbf{u}_1, \mathbf{v}_2, \cdots, \mathbf{v}_k)$ y la proposición K.2 obtenemos que $|z_1|$ es el contenido en E del paralelepípedo $P(\mathbf{u}_1, \mathbf{v}_2, \cdots \mathbf{v}_k)$:

$$|z_1| = |\det{}_\beta(\mathbf{u}_1, \mathbf{v}_2, \cdots \mathbf{v}_k)| = c_E(P(\mathbf{u}_1, \mathbf{v}_2, \cdots, \mathbf{v}_k))$$

Desarrollando el determinante anterior por la primera fila se obtiene que

$$|z_1| = |\det{}_{\beta'}(\mathbf{v}'_2, \cdots \mathbf{v}'_k)|$$

donde $\beta' = (\mathbf{u}_2, \cdots, \mathbf{u}_k)$ y los vectores $\mathbf{v}'_i = \sum_{j=2}^{k} v_{ij} \mathbf{u}_j$ son las proyecciones ortogonal de los vectores $\mathbf{v}_i$ sobre el subespacio $F_1 = \{\mathbf{x} \in E : \langle \mathbf{x} \mid \mathbf{u}_1 \rangle = 0\}$.

Como β' es una base ortonormal de F_1 resulta que $|z_1|$ también es el contenido en F_1 del paralelepípedo $P(\mathbf{v}'_2, \cdots, \mathbf{v}'_k) \subset F_1$, es decir

$$|z_1| = c_{F_1}(P(\mathbf{v}'_2, \cdots, \mathbf{v}'_k))$$

Por otra parte $z_1 = \langle \mathbf{u}_1 \mid \mathbf{z} \rangle = \|\mathbf{z}\|_2 \cos\theta$, donde θ es el ángulo agudo formado por las rectas que generan $\mathbf{u}_1$ y $\mathbf{z}$. Obsérvese que esto está de acuerdo con el resultado del ejercicio K.4 según el cual $c_{F_1}(P(\mathbf{v}'_2, \cdots \mathbf{v}'_k)) = c_F(P(\mathbf{v}_2, \cdots \mathbf{v}_k)) \cos\theta$, ya que $P(\mathbf{v}'_2, \cdots, \mathbf{v}'_k)$ es la proyección ortogonal sobre F_1 del paralelepípedo $P(\mathbf{v}_2, \cdots, \mathbf{v}_k)$ y θ es el ángulo agudo que forman los hiperplanos F y F_1.

Análogamente, $|z_j|$ es el contenido, en el subespacio $F_j = \{\mathbf{x} \in E : \langle \mathbf{x} \mid \int \mathbf{u}_j \rangle = 0\}$, del la proyección ortogonal de $P(\mathbf{v}_2, \cdots \mathbf{v}_k)$ sobre este subespacio.

Ejercicio K.3 *Sean* $\{\mathbf{v}_i : 1 \leq i \leq k\}$ *vectores linealmente independientes de un espacio euclídeo* k*-dimensional* E*, y sea* $E_i \subset E$*, el subespacio* $(k-1)$*-dimensional generado por los vectores* $\{\mathbf{v}_1, \cdots, \mathbf{v}_{i-1}, \mathbf{v}_{i+1}, \cdots, \mathbf{v}_k\}$*. Se llama base* i*-ésima del paralelepípedo* $P(\mathbf{v}_1, \cdots, \mathbf{v}_k) \subset E$*, al paralelepípedo de dimensión* $(k-1)$

$$B_i = P(\mathbf{v}_1 \cdots, \mathbf{v}_{i-1}, \mathbf{v}_{i+1}, \cdots, \mathbf{v}_k) \subset E_i$$

La longitud de la altura correspondiente a esta base es $h_i = |\langle \mathbf{v}_i \mid \mathbf{n}_i \rangle|$*, donde* $\mathbf{n}_i \in E$ *es un vector unitario ortogonal a* E_i*. Demuestre que*

$$c_E(P(\mathbf{v}_1, \cdots, \mathbf{v}_k)) = c_{E_i}(B_i) h_i$$

(así, para $k = 3$*, el volumen de un paralelepípedo es igual al producto del área de una de sus bases por la longitud de la correspondiente altura).*

SOLUCIÓN

Por comodidad en la notación suponemos $i = 1$. Sea $\beta_1 = (\mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, \cdots, \mathbf{u}_k)$ una base ortonormal de E_1, y $\mathbf{u}_1 \in E$ un vector unitario ortogonal a E_1, de modo que $\beta = (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \cdots, \mathbf{u}_k)$ es una base ortonormal de E. Cambiando el signo de $\mathbf{u}_1$ si es preciso, podemos suponer que $h_1 = \langle \mathbf{v}_1 \mid \mathbf{u}_1 \rangle > 0$, de modo que es h_1 es la longitud de la altura que corresponde a la base $B_1 = P(\mathbf{v}_2, \cdots, \mathbf{v}_k)$.

Descomponiendo $\mathbf{v}_1 = \mathbf{y}_1 + \mathbf{z}_1$, con $\mathbf{y}_1 = \langle \mathbf{v}_1 \mid \mathbf{u}_1 \rangle\, \mathbf{u}_1$, $\quad \mathbf{z}_1 = \mathbf{v}_1 - \mathbf{y}_1$, es claro que $\langle \mathbf{z}_1 \mid \mathbf{u}_1 \rangle = 0$, luego $\mathbf{z}_1 \in E_1$. Como E_1 está generado por los vectores $\{\mathbf{v}_2, \cdots, \mathbf{v}_k\}$, se sigue que $\det_\beta(\mathbf{z}_1, \mathbf{v}_2, \cdots, \mathbf{v}_k) = 0$, luego

$$\det{}_\beta(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \cdots, \mathbf{v}_k) = \det{}_\beta(\mathbf{y}_1, \mathbf{v}_2, \cdots, \mathbf{v}_k) + \det{}_\beta(\mathbf{z}_1, \mathbf{v}_2, \cdots, \mathbf{v}_k) =$$

$$= \det{}_\beta(\mathbf{y}_1, \mathbf{v}_2, \cdots, \mathbf{v}_k)$$

La primera fila del último determinante, formada por las coordenadas de $\mathbf{y}_1$ respecto a la base β, es $(h_1, 0, \cdots, 0)$, donde $h_1 = \langle \mathbf{y}_1 \mid \mathbf{u}_1 \rangle = \langle \mathbf{v}_1 \mid \mathbf{u}_1 \rangle > 0$ es la longitud de la altura que corresponde a la base B_1. Para $i > 1$ la fila i-ésima de este determinante, formada por las coordenadas de $\mathbf{v}_i$ respecto a la base β de E, es de la forma $(0, \alpha_{i2}, \cdots, \alpha_{ik})$, donde $(\alpha_{i2}, \cdots, \alpha_{ik})$ son las coordenadas respecto a la base β_1 de E_1. Desarrollando el determinante $\det_\beta(\mathbf{y}_1, \mathbf{v}_2, \cdots, \mathbf{v}_k)$ por la primera fila se obtiene que su valor es $h_1 \det_{\beta_1}(\mathbf{v}_2, \cdots, \mathbf{v}_k)$ y así queda demostrado que

$$c_E(P(\mathbf{v}_1, \cdots, \mathbf{v}_k)) = h_1 c_{E_1}(P(\mathbf{v}_2, \cdots, \mathbf{v}_k))$$

Ejercicio K.4 *Sean* $F, G \subset E$ *hiperplanos distintos del espacio euclídeo* k*-dimensional* E*, y* θ *el ángulo agudo que forman estos hiperplanos. Si* $\pi : E \to G$ *es la proyección ortogonal de* E *sobre* G *y* $M \subset F$ *es medible Jordan en* F*, entonces* $\pi(M) \subset G$ *es medible Jordan en* G *y* $c_G(\pi(M)) = c_F(M) \cos\theta$*.*

SOLUCIÓN

$F \cap G \subset E$ es un subespacio de dimensión $(k-2)$, en el que podemos fijar una base ortonormal $(\mathbf{u}_3, \cdots, \mathbf{u}_k)$. Existen vectores unitarios $\mathbf{v} \in F$, $\mathbf{w} \in G$ tales que

$$\beta_F = (\mathbf{v}, \mathbf{u}_3, \cdots, \mathbf{u}_k), \quad \beta_G = (\mathbf{w}, \mathbf{u}_3, \cdots, \mathbf{u}_k)$$

son bases ortonormales de F y G respectivamente. Además, cambiando si es preciso el signo de $\mathbf{w}$, podemos suponer que $0 < \langle \mathbf{v} \mid \mathbf{w} \rangle = \cos\theta$, donde θ es el ángulo agudo entre los vectores $\mathbf{v}, \mathbf{w}$.

Sea $p : F \to G$ la restricción de la proyección ortogonal $\pi : E \to G$, que viene dada por $\pi(\mathbf{x}) = \mathbf{x} - \langle \mathbf{x} \mid \mathbf{n} \rangle \mathbf{n}$, donde $\mathbf{n} \in E$ es un vector unitario ortogonal a G.

La matriz de la aplicación lineal $p : F \to G$ respecto a las bases β_F, β_G tiene como columnas las coordenadas de $p(\mathbf{v})$, $p(\mathbf{u}_3)$, $\cdots$, $p(\mathbf{u}_k)$ respecto a la base $\beta_G = (\mathbf{w}, \mathbf{u}_3, \cdots, \mathbf{u}_k)$. Las coordenadas de $p(\mathbf{v})$ vienen dadas por los productos escalares

$$\langle p(\mathbf{v}) \mid \mathbf{w} \rangle = \langle \mathbf{v} \mid \mathbf{w} \rangle = \cos\theta; \quad \langle p(\mathbf{v}) \mid \mathbf{u}_j \rangle = \langle \mathbf{v} \mid \mathbf{u}_j \rangle = 0, \ \text{ si } j \geq 3$$

Por otra parte, para $j \geq 3$ es $p(\mathbf{u}_j) = \mathbf{u}_j$, de modo que la matriz de la aplicación lineal p respecto a las bases indicadas es diagonal, con diagonal $(\cos\theta, 1, 1, \cdots, 1)$. Si $M \subset F$ es medible Jordan en F, según el ejercicio K.1 b), $\pi(M) = p(M) \subset G$ es medible Jordan en G y se cumple $c_G(\pi(M)) = |\det p| \ c_F(M) = \cos\theta \ c_F(M)$. ■

K.2. Formas multilineales alternadas

Sea G_k el grupo de las permutaciones de $\{1, 2, \cdots k\}$. Para cada $\sigma \in G_k$ sea $\nu(\sigma)$ el número de parejas (i, j) tales que $1 \leq i < j \leq k$ y $\sigma(i) > \sigma(j)$ (número de inversiones de σ). La aplicación signatura $\varepsilon : G_k \to \{-1, 1\}$, definida por $\varepsilon(\sigma) = (-1)^{\nu(\sigma)}$ tiene las siguientes propiedades que la caracterizan:

i) $\varepsilon(\sigma) = 1$ si σ es la identidad;
ii) $\varepsilon(\sigma) = -1$ si σ es una transposición;
iii) $\varepsilon(\sigma\tau) = \varepsilon(\sigma)\varepsilon(\tau)$ para cada $\sigma, \tau \in G_k$.

En lo que sigue E es un espacio vectorial real de dimensión $n \geq k$.

Definición K.5 *Una aplicación multilineal $T : E^k \to \mathbb{R}$ se dice que es alternada (o antisimétrica) cuando $T(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \cdots \mathbf{x}_k) = 0$ siempre que $\mathbf{x}_i = \mathbf{x}_j$ para algún par (i, j) con $1 \leq i < j \leq k$.*

Para una aplicación multilineal $T : E^k \to \mathbb{R}$ son equivalentes

a) T es alternada;
b) $T(\mathbf{x}_1, \cdots \mathbf{x}_k) = \varepsilon(\sigma) T(\mathbf{x}_{\sigma(1)}, \cdots \mathbf{x}_{\sigma(k)})$ para cada $\sigma \in G_k$ y cada $(\mathbf{x}_1, \cdots \mathbf{x}_k) \in E^k$

Es inmediato que b) $\Rightarrow$ a). La demostración de a) $\Rightarrow$ b) basta hacerla cuando σ es una transposición: Dada una pareja de indices $1 \leq i < j \leq k$, utilizando a) y el carácter multilineal de T se obtiene el resultado: Si $\mathbf{x}'_i = \mathbf{x}_j$, y $\mathbf{x}'_j = \mathbf{x}_i$, resulta

$$\begin{aligned} 0 = \ & T(\mathbf{x}_1, \cdots \mathbf{x}_{i-1}, \mathbf{x}_i + \mathbf{x}_j, \mathbf{x}_{i+1}, \cdots \mathbf{x}_{j-1}, \mathbf{x}_j + \mathbf{x}_i, \mathbf{x}_{j+1} \cdots \mathbf{x}_k) = \\ & T(\mathbf{x}_1, \cdots \mathbf{x}_i, \cdots \mathbf{x}_j, \cdots \mathbf{x}_k) + T(\mathbf{x}_1, \cdots \mathbf{x}'_i, \cdots \mathbf{x}'_j, \cdots \mathbf{x}_k) \end{aligned}$$

Se llama *alternada o antisimetrizada* de la aplicación multilineal $B : E^k \to \mathbb{R}$ a la aplicación multilineal $B_{\mathcal{A}} : E^k \to \mathbb{R}$ definida por

$$B_{\mathcal{A}}(\mathbf{x}_1, \cdots \mathbf{x}_k) = \sum_{\sigma \in G_k} \varepsilon(\sigma) B(\mathbf{x}_{\sigma(1)}, \cdots \mathbf{x}_{\sigma(k)})$$

Se deja al cuidado del lector la comprobación de que $B_{\mathcal{A}}$ es multilineal alternada, y que B es alternada si y sólo si $B_{\mathcal{A}} = k!B$.

En lo que sigue $\Gamma_k(E)$ denotará el espacio vectorial formado por todas las aplicaciones multilineales alternadas $T : E^k \to \mathbb{R}$. En particular $\Gamma_1(E) = E^*$ es el espacio dual, y conviene introducir el convenio $\Gamma_0(E) = \mathbb{R}$. A los elementos de $\Gamma_k(E)$ se les suele llamar k-formas exteriores sobre E, k-formas de grado k, y también k-covectores.

El producto tensorial $f_1 \otimes f_2 \otimes \cdots \otimes f_k$ de k formas lineales $f_1, f_2, \cdots f_k \in E^*$, es la aplicación multilineal $B : E^k \to \mathbb{R}$ definida por

$$B(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \cdots \mathbf{x}_k) = f_1(\mathbf{x}_1) f_2(\mathbf{x}_2) \cdots f_k(\mathbf{x}_k))$$

y su producto exterior, denotado $f_1 \wedge f_2 \wedge \cdots \wedge f_k$, es la aplicación multilineal alternada $B_{\mathcal{A}}$ asociada al producto tensorial, es decir

$$(f_1 \wedge f_2 \wedge \cdots \wedge f_k)(\mathbf{x}_1, \cdots \mathbf{x}_k) = \sum_{\sigma \in G_k} \varepsilon(\sigma) f_1(\mathbf{x}_{\sigma(1)}) \cdots f_k(\mathbf{x}_{\sigma(k)}) = \det(f_i(\mathbf{x}_j))_{1 \leq i,j \leq k}$$

Es fácil comprobar que el producto exterior $(f_1, f_2, \cdots f_k) \to f_1 \wedge \cdots \wedge f_k$ es una aplicación multilineal alternada, definida en $(E^*)^k$, y con valores en $\Gamma_k(E)$, es decir, para cada permutación $\sigma \in G_k$ se cumple

$$f_{\sigma(1)} \wedge f_{\sigma(2)} \wedge \cdots \wedge f_{\sigma(k)} = \varepsilon(\sigma) f_1 \wedge f_2 \wedge \cdots \wedge f_k$$

Se deduce de esto que $f_1 \wedge f_2 \wedge \cdots \wedge f_k = 0$ cuando hay dos factores iguales o proporcionales y también cuando $f_1, f_2, \cdots f_k$ son linealmente dependientes. También se puede demostrar la validez del recíproco, de modo que $f_1 \wedge f_2 \wedge \cdots \wedge f_k \neq 0$ si y sólo si $f_1, f_2, \cdots f_k$ son linealmente independientes.

Nuestro siguiente objetivo es describir una base de $\Gamma_k(E)$ asociada a una base $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \cdots \mathbf{e}_n\}$ de E. Para ello conviene introducir alguna notación preliminar que abrevie la escritura. Sea $\mathcal{J}_k$ la familia formada con las sucesiones finitas crecientes de k números naturales $\{j_1 < j_2 < \cdots < j_k\}$, con $1 \leq j_1 < j_k \leq n$. Dada una matriz $A = (a_{ij})_{1 \leq i \leq k, 1 \leq j \leq n}$ con k filas y n columnas, si $J = \{j_1 < j_2 < \cdots j_k\}$ es un elemento de $\mathcal{J}_k$ escribiremos $\Delta_J(A)$ para designar el valor del determinante de la matriz obtenida extrayendo de A las k columnas indicadas por los subíndices $j_1 < j_2 < \cdots < j_k$,

$$\Delta_J(A) = \sum_{\sigma \in G_k} \varepsilon(\sigma) a_{1 j_{\sigma(1)}} a_{2 j_{\sigma(2)}} \cdots a_{k j_{\sigma(k)}}$$

Asociada a una base $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \cdots \mathbf{e}_n\}$ de E consideramos en E^* la base dual

$$\{dx_1, dx_2, \cdots dx_n\}$$

donde dx_j es la forma lineal $dx_j(\mathbf{x}) = x_j$ que asignan al vector $\mathbf{x} = \sum_{j=1}^n x_j \mathbf{e}_j \in E$ su coordenada x_j. Análogamente, para cada $J = \{j_1 < j_2 < \cdots < j_k\} \in \mathcal{J}_k$ escribimos dx_J como una abreviatura del producto exterior $dx_{j_1} \wedge dx_{j_2} \cdots \wedge dx_{j_k}$.

Teorema K.6 *Si* $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \cdots \mathbf{e}_n\}$ *es una base de* E *y* $\{dx_1, dx_2, \cdots dx_n\}$, *es su base dual en* E^* *entonces* $\{dx_J : J \in \mathcal{J}_k\}$ *es una base de* $\Gamma_k(E)$

Sea $(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \cdots \mathbf{x}_k) \in E^k$ y $A = (a_{ij})_{1\leq i\leq k, 1\leq j\leq n}$ la matriz formada con las coordenadas de los vectores $\mathbf{x}_i$ respecto a la base $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \cdots \mathbf{e}_n\}$, es decir $\mathbf{x}_i = \sum_{j=1}^n a_{ij}\mathbf{e}_j$.

Entonces, con la notación abreviada que hemos introducido, para cada $J \in \mathcal{J}_k$ se verifica $dx_J(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \cdots \mathbf{x}_k) = \Delta_J(A)$. Dada $T \in \Gamma_k(E)$ su carácter multilineal nos permite escribir

$$T(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \cdots \mathbf{x}_k) = \sum_{1\leq i_1, i_2, \cdots i_k \leq n} a_{1i_1} a_{2i_2} \cdots a_{ki_k} T(\mathbf{e}_{i_1}, \mathbf{e}_{i_2}, \cdots \mathbf{e}_{i_k})$$

Como T es alternada, son nulos los sumandos donde intervienen subíndices repetidos, de modo que la suma la podemos suponer extendida a todas los subconjuntos $\{i_1, i_2, \cdots i_k\} \subset \{1, 2, \cdots n\}$ de k elementos distintos. Utilizando que T es alternada podemos asociar todos los sumandos que corresponden a permutaciones σ de un sistema creciente $J = \{j_1 < j_2 < \cdots < j_k\} \in \mathcal{J}_k$, cuya suma vale

$$\sum_{\sigma\in G_k} a_{1j_{\sigma(1)}} a_{2j_{\sigma(2)}} \cdots a_{kj_{\sigma(k)}} T(\mathbf{e}_{j_{\sigma(1)}}, \mathbf{e}_{j_{\sigma(2)}}, \cdots \mathbf{e}_{j_{\sigma(k)}}) =$$

$$= T(\mathbf{e}_{j_1}, \mathbf{e}_{j_2}, \cdots \mathbf{e}_{j_k}) \sum_{\sigma\in G_k} \varepsilon(\sigma) a_{1j_{\sigma(1)}} a_{2j_{\sigma(2)}} \cdots a_{kj_{\sigma(k)}} =$$

$$= T(\mathbf{e}_{j_1}, \mathbf{e}_{j_2}, \cdots \mathbf{e}_{j_k})\Delta_J(A) = T(\mathbf{e}_{j_1}, \mathbf{e}_{j_2}, \cdots \mathbf{e}_{j_k}) dx_J(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \cdots \mathbf{x}_k)$$

Sumando todos estos términos la suma inicial se escribe en la forma

$$T(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \cdots \mathbf{x}_k) = \left[\sum_{J\in\mathcal{J}_k} \alpha_J dx_J\right] (\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \cdots, \mathbf{x}_k)$$

donde $\alpha_J = T(\mathbf{e}_{j_1}, \mathbf{e}_{j_2}, \cdots \mathbf{e}_{j_k})(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \cdots \mathbf{x}_k)$ cuando $J = \{j_1 < j_2 < \cdots j_k\}$.

Queda demostrado que T es una combinación lineal de las formas multilineales $\{dx_J : J \in \mathcal{J}_k\}$ y para terminar basta verificar que estas formas son linealmente independientes: Si $0 = \sum_{J\in\mathcal{J}_k} \alpha_J dx_J$ lo hacemos actuar sobre $(e_{j_1}, e_{j_2}, \cdots e_{j_k})$ con $(j_1 < j_2 \cdots < j_k) = J \in \mathcal{J}_k$ se obtiene que es nulo el coeficiente α_J. ■

Corolario K.7 *Si* E *es un espacio vectorial real de dimensión* n *y* $k \leq n$ *entonces* $\Gamma_k(E)$ *es un espacio vectorial de dimensión* $\binom{n}{k}$. *(Si* $k > n$ *entonces* $\Gamma_k(E) = \{0\}$*).*

DEM: Inmediato ■

Sea $\beta = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \cdots \mathbf{e}_n\}$ una base ordenada de E y $\{dx_1, dx_2, \cdots dx_n\}$ su base dual en E^*. Si $(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \cdots \mathbf{x}_n) \in E^n$ sea $\det_\beta(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \cdots \mathbf{x}_n)$ el determinante de la matriz $A = (a_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$ donde $\mathbf{x}_i = \sum_{j=1}^n a_{ij}\mathbf{e}_j$, $1 \leq i \leq n$. Entonces

$$dx_1 \wedge dx_2 \wedge \cdots \wedge dx_n(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \cdots, \mathbf{x}_n) = \det{}_\beta(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \cdots \mathbf{x}_n)$$

Como $\Gamma_n(E)$ es de dimensión 1, con base $\{dx_1 \wedge dx_2 \wedge \cdots \wedge dx_n\}$ se sigue que cualquier n-forma exterior $T \in \Gamma_n(E)$ es de la forma $T = \mu dx_1 \wedge dx_2 \wedge \cdots \wedge dx_n$, con $\mu \in \mathbb{R}$, luego $(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \cdots \mathbf{x}_n) \to \det_\beta(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \cdots \mathbf{x}_n)$ es la única forma multilineal alternada de grado n que toma el valor 1 sobre $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \cdots \mathbf{e}_n)$.

Análogamente a como se define el producto exterior de formas lineales se define el producto exterior de formas multilineales alternadas:

Definición K.8 *Dadas $S \in \Gamma_p(E)$, $T \in \Gamma_q(E)$, con $1 \leq p, q \leq n$, su producto exterior $S \wedge T \in \Gamma_{p+q}(E)$ es la forma multilineal alternada asociada a la forma multilineal $(\mathbf{x}_1, \cdots \mathbf{x}_p, \mathbf{x}_{p+1}, \cdots \mathbf{x}_{p+q}) \to \frac{1}{p!q!} S(\mathbf{x}_1, \cdots \mathbf{x}_p) T(\mathbf{x}_{p+1}, \cdots \mathbf{x}_{p+q})$, es decir*

$$(S \wedge T)(\mathbf{x}_1, \cdots \mathbf{x}_{p+q}) = \frac{1}{p!q!} \sum_{\sigma \in G_{p+q}} \varepsilon(\sigma) S(\mathbf{x}_{\sigma(1)}, \cdots \mathbf{x}_{\sigma(p)}) T(\mathbf{x}_{\sigma(p+1)}, \cdots \mathbf{x}_{\sigma(p+q)})$$

Es fácil comprobar que el producto exterior de formas multilineales es lineal respecto a cada factor.

Una forma multilineal alternada $T \in \Gamma_k(E)$ se dice que es descomponible si se puede expresar como producto exterior de k formas lineales, es decir, si es de la forma $T = f_1 \wedge f_2 \wedge \cdots \wedge f_k$ donde $f_i \in E^*$. En virtud del teorema K.6 toda forma exterior de grado k se puede expresar como suma de formas exteriores descomponibles de grado k.

Lema K.9 *Si $S = f_1 \wedge f_2 \wedge \cdots \wedge f_p \in \Gamma_p(E)$, $T = g_1 \wedge \cdots g_2 \wedge \cdots g_q \in \Gamma_q(E)$ son formas descomponibles, entonces $S \wedge T = f_1 \wedge f_2 \wedge \cdots \wedge f_p \wedge g_1 \wedge \cdots g_2 \wedge \cdots g_q$.*

Dem: Sea $W = f_1 \wedge f_2 \wedge \cdots \wedge f_p \wedge g_1 \wedge \cdots g_2 \wedge \cdots g_q$.

Sea G' (resp. G'') es subgrupo de G_{p+q} formado por las permutaciones que sólo permutan los p primeros (resp. q últimos) elementos, dejando fijos los restantes. En G_{p+q} se considera la siguiente relación de equivalencia: $\sigma \sim \tau$ si $\sigma = \tau\sigma'\sigma''$ con $\sigma' \in G'$, $\sigma'' \in G''$. Cada clase de equivalencia contiene $p!q!$ elementos, luego hay $\binom{p+q}{p}$ clases de equivalencia. Si $D \subset G_{p+q}$ es un conjunto formado con un elemento de cada clase de equivalencia, se verifica:

$$W(\mathbf{x}_1, \cdots \mathbf{x}_{p+q}) = \sum_{\sigma \in G_{p+q}} \varepsilon(\sigma) f_1(\mathbf{x}_{\sigma(1)}) \cdots f_p(\mathbf{x}_{\sigma(p)}) g_1(\mathbf{x}_{\sigma(p+1)}) \cdots g_q(\mathbf{x}_{\sigma(p+q)}) =$$

$$= \sum_{\tau \in D} \varepsilon(\tau) S(\mathbf{x}_{\tau(1)}, \cdots \mathbf{x}_{\tau(p)}) T(\mathbf{x}_{\tau(p+1)}, \cdots \mathbf{x}_{\tau(p+q)})$$

donde

$$S(\mathbf{x}_{\tau(1)}, \cdots \mathbf{x}_{\tau(p)}) = \sum_{\sigma' \in G'} \varepsilon(\sigma') f_1(\mathbf{x}_{\tau\sigma'(1)}) \cdots f_p(\mathbf{x}_{\tau\sigma'(p)})$$

$$T(\mathbf{x}_{\tau(p+1)}, \cdots \mathbf{x}_{\tau(p+q)}) = \sum_{\sigma'' \in G''} \varepsilon(\sigma'') g_1(\mathbf{x}_{\tau\sigma''(1)}) \cdots g_q(\mathbf{x}_{\tau\sigma''(p)})$$

Usando que $p!S = S_{\mathcal{A}}$, $q!T = T_{\mathcal{A}}$ se obtiene que

$$W(\mathbf{x}_1, \cdots \mathbf{x}_{p+q}) =$$

$$= \frac{1}{p!q!}\sum_{\tau\in D}\left[\sum_{\sigma'\in G'}\varepsilon(\sigma')S(\mathbf{x}_{\tau\sigma'(1)},\cdots\mathbf{x}_{\tau\sigma'(p)})\right]\left[\sum_{\sigma''\in G''}\varepsilon(\sigma'')T(\mathbf{x}_{\tau\sigma''(p+1)},\cdots\mathbf{x}_{\tau\sigma''(p+q)})\right] =$$

$$= \frac{1}{p!q!}\sum_{\sigma\in G_{p+q}}\varepsilon(\sigma)S(\mathbf{x}_{\sigma(1)}),\cdots\mathbf{x}_{\sigma(p)})T(\mathbf{x}_{\sigma(p+1)}),\cdots\mathbf{x}_{\sigma(p+q)}) = (S\wedge T)(\mathbf{x}_1,\cdots\mathbf{x}_{p+q})$$

■

Proposición K.10 *El producto exterior de formas exteriores es asociativo y anticonmutativo: Si $R\in\Gamma_k(E)$, $S\in\Gamma_p(E)$, $T\in\Gamma_q(E)$, entonces*

i) $R\wedge(S\wedge T) = (R\wedge S)\wedge T$.

ii) $S\wedge T = (-1)^{pq}\ T\wedge S$.

Dem: En virtud de la bilinealidad del producto exterior de formas exteriores, basta demostrar las propiedades i) y ii) para formas exteriores descomponibles, y en este caso el resultado es consecuencia del lema K.9. ■

Correspondencias entre sistemas de vectores y formas exteriores. En lo que sigue se supone que E es un espacio euclídeo orientado de dimensión n y que $\beta = (\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\cdots\mathbf{e}_n)$ es una base ortonormal positiva de E. Recordemos que el producto mixto $[\mathbf{v}_1\cdot\mathbf{v}_2\cdots\mathbf{v}_n]$ de n vectores ordenados $(\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\cdots\mathbf{v}_n)\in E^n$, viene dado por $\det_\beta(\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\cdots\mathbf{v}_n) = \det(v_{ij})_{1\le i,j\le n}$, donde $\sum_{j=1}^n v_{ij}\mathbf{e}_j = \mathbf{v}_i$, $(1\le i\le n)$. Su valor absoluto proporciona el contenido de Jordan en E del paralelepípedo $P(\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\cdots\mathbf{v}_n)$. Aunque para calcular el producto mixto hay que fijar en E una base ortonormal positiva sin embargo el producto mixto es una noción intrínseca que sólo depende de la estructura euclídea y de la orientación de E.

La n-forma fundamental del espacio euclídeo orientado E es la aplicación multilineal alternada $\Lambda: E^n\to\mathbb{R}$, $\Lambda(\mathbf{v}_1,\cdots\mathbf{v}_n) = [\mathbf{v}_1\cdot\mathbf{v}_2\cdots\mathbf{v}_n]$, y con ella podemos asociar a cada sistema $(\mathbf{u}_1,\cdots\mathbf{u}_p)\in E^p$, $1\le p<n$, la forma exterior $\xi_p(\mathbf{u}_1,\cdots\mathbf{u}_p)\in\Gamma_k(E)$ de grado $k=n-p$, mediante la aplicación $\xi_p: E^p\to\Gamma_k(E)$, definida por

$$\xi_p(\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2,\cdots\mathbf{u}_p)(\mathbf{x}_1,\cdots\mathbf{x}_k) = \Lambda(\mathbf{x}_1,\cdots\mathbf{x}_k,\mathbf{u}_1,\cdots\mathbf{u}_p)$$

Cuando $p=0$, y $p=n$, conviene usar los convenios $E^0=\mathbb{R}$, $\Gamma_0(E)=\mathbb{R}$, y denotar por $\xi_0: E^0\to\Gamma_n(E)$, $\xi_n: E^n\to\Gamma_0(E)$, las aplicaciones $\xi_0(t)=t\Lambda$, y $\xi_n=\Lambda$.
Es inmediato que para $1<p\le n$ la aplicación ξ_p es multilineal y antisimétrica.

Merece atención especial la aplicación $\xi_1: E\to\Gamma_{n-1}(E)$, que es un isomorfismo porque los dos espacios vectoriales E y $\Gamma_{n-1}(E)$ tienen dimensión n. La base de $\Gamma_{n-1}(E)$ es $\{\mu_i : 1\le i\le n\}$ donde $\mu_1 = dx_2\wedge\cdots\wedge dx_n$, $\mu_n = dx_1\wedge\cdots\wedge dx_{n-1}$, y para $1<i<n$, $\mu_i = dx_1\wedge\cdots\wedge dx_{i-1}\wedge dx_{i+1}\wedge\cdots\wedge dx_n$.

Según la demostración del teorema K.6, las coordenadas de $\xi_1(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n a_i\mu_i$ respecto a esta base vienen dadas por

$$a_i = \xi_1(\mathbf{x})(\mathbf{e}_1,\cdots\mathbf{e}_{i-1},\mathbf{e}_{i+1},\cdots\mathbf{e}_n) = \det_\beta(\mathbf{e}_1,\cdots\mathbf{e}_{i-1},\mathbf{e}_{i+1},\cdots\mathbf{e}_n,\mathbf{x}) =$$

$$(-1)^{n-i}\det{}_\beta(\mathbf{e}_1,\cdots\mathbf{e}_{i-1},\mathbf{x},\mathbf{e}_{i+1},\cdots\mathbf{e}_n)=(-1)^{n-i}x_i$$

Por otra parte sabemos que, en virtud de la estructura euclídea de E, hay una identificación canónica entre E y E^* que se obtiene asociando a cada $\mathbf{x}\in E$ la forma lineal $f_\mathbf{x}:E\to\mathbb{R}$ definida por $f_\mathbf{x}(\mathbf{y})=\langle\mathbf{x}\mid\mathbf{y}\rangle$. Según su definición, el producto vectorial $\mathbf{z}=\mathbf{x}_2\times\mathbf{x}_3\times\cdots\times\mathbf{x}_n$ es el vector que corresponde a la forma lineal $\mathbf{x}\to\Lambda(\mathbf{x},\mathbf{x}_2,\cdots\mathbf{x}_n)=\xi_{n-1}(\mathbf{x}_2,\cdots\mathbf{x}_n)(\mathbf{x})$ luego $\xi_{n-1}(\mathbf{x}_2,\cdots\mathbf{x}_n)=f_\mathbf{z}$.

Ejercicio K.11 *En las condiciones anteriores, si* $\mathbf{z}=\mathbf{x}_2\times\cdots\times\mathbf{x}_n$*, se verifica*

$$\xi_1(\mathbf{z})=(-1)^{n-1}f_{\mathbf{x}_2}\wedge\cdots\wedge f_{\mathbf{x}_n}$$

solución

Si $\xi_1(\mathbf{z})=\sum_{j=1}^n a_j\mu_j$, hemos visto antes que $a_i=(-1)^{n-i}z_i$. Calculemos ahora las coordenadas de $T:=f_{\mathbf{x}_2}\wedge\cdots\wedge f_{\mathbf{x}_n}=\sum_{i=1}^n t_i\mu_i$ respecto a la misma base. Según la demostración de K.6 estas coordenadas $\{t_i:1\le i\le n\}$ vienen dadas por

$$t_i=T(\mathbf{e}_1,\cdots\mathbf{e}_{i-1},\mathbf{e}_{i+1},\cdots\mathbf{e}_n)=\det\left(f_{\mathbf{x}_p}(e_q)\right)_{p\neq 1;q\neq i}$$

Si $\mathbf{x}_p=\sum_{j=1}^n x_{pj}\mathbf{e}_j$, el último determinante se escribe explícitamente así

$$t_i=\begin{vmatrix} x_{21} & \cdots & x_{2,i-1} & x_{2,i+1} & \cdots & x_{2n}\\ x_{31} & \cdots & x_{3,i-1} & x_{3,i+1} & \cdots & x_{3n}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ x_{n1} & \cdots & x_{n,i-1} & x_{n,i+1} & \cdots & x_{nn}\end{vmatrix}$$

luego

$$(-1)^{i-1}t_i=\begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0\\ x_{21} & \cdots & x_{2,i-1} & x_{2i} & x_{2,i+1} & \cdots & x_{2n}\\ x_{31} & \cdots & x_{3,i-1} & x_{3i} & x_{3,i+1} & \cdots & x_{3n}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ x_{n1} & \cdots & x_{n,i-1} & x_{ni} & x_{n,i+1} & \cdots & x_{nn}\end{vmatrix}$$

Según hemos visto en el apéndice K.1 el último determinante proporciona la coordenada z_i del producto vectorial $\mathbf{z}$, luego $a_i=(-1)^{n-i}z_i=(-1)^{n-i}(-1)^{i-1}t_i=(-1)^{n-1}t_i$, y así queda establecido que $\xi_1(\mathbf{z})=(-1)^{n-1}T$. ∎

Cuando $n=3$ y $\mathbf{z}=\mathbf{x}_2\times\mathbf{x}_3$, en virtud del ejercicio anterior $\xi_1(\mathbf{z})=f_{\mathbf{x}_2}\wedge f_{\mathbf{x}_3}$, y según la definición del producto vectorial también se cumple que $\xi_2(\mathbf{x}_2\times\mathbf{x}_3)=f_\mathbf{z}$.

Interpretación geométrica de la forma multilineal $\xi_1(\mathbf{u})$ Comenzamos con la interpretación geométrica de la forma multilineal $\xi_1(\mathbf{u})$ cuando $E=\mathbb{R}^n$ y $\mathbf{u}\in\mathbb{R}^n$, es un vector unitario para la norma euclídea $\|\mathbf{u}\|_2=1$. Para ello consideramos el hiperplano $H=\{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^n:\langle\ \mathbf{x}\mid\mathbf{u}\ \rangle=0\}$ con la orientación inducida por el vector normal $\mathbf{u}$, es decir, la orientación definida por una base $(\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2,\cdots\mathbf{u}_{n-1})$ de H tal que $(\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2,\cdots\mathbf{u}_{n-1},\mathbf{u})$ es una base positiva para la orientación canónica de $\mathbb{R}^n$.

Restringiendo la forma multilineal $\xi_1(\mathbf{u})$ a vectores de H obtenemos que si $(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \cdots \mathbf{x}_{n-1}) \in H^{n-1}$, son linealmente independientes entonces

$$\xi_1(\mathbf{u})(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \cdots \mathbf{x}_{n-1}) = \pm c_n(P(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \cdots \mathbf{x}_{n-1}, \mathbf{u})) = \pm c_H(P(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \cdots \mathbf{x}_{n-1}))$$

con signo $+$ (resp. $-$) cuando $(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \cdots \mathbf{x}_{n-1})$ es una base positiva (resp. negativa) para la orientación considerada en H. Es decir, $\xi_1(\mathbf{u})$ restringida al hiperplano H ortogonal a $\mathbf{u}$, orientado mediante el vector normal $\mathbf{u}$, actúa sobre los vectores $(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \cdots \mathbf{x}_{n-1}) \in H^{n-1}$ proporcionando el volumen $(n-1)$-dimensional, con signo, del paralelepípedo generado por ellos.

En general, cuando los vectores $(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \cdots \mathbf{x}_{n-1})$ no están en el hiperplano ortogonal a $\mathbf{u}$, si son linealmente independientes, estarán contenidos en un hiperplano $F = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \langle\ \mathbf{x} \mid \mathbf{n}\ \rangle = 0\}$, donde $\mathbf{n}$ es un vector unitario elegido con la condición de que $\langle\ \mathbf{n} \mid \mathbf{u}\rangle = \cos\theta > 0$. Entonces el vector $\mathbf{y} = \mathbf{u} - \langle\ \mathbf{u}\ |\mathbf{n}\ \rangle\mathbf{n}$ es ortogonal a $\mathbf{n}$ y por lo tanto

$$\xi_1(\mathbf{u})(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \cdots \mathbf{x}_{n-1}) = \Lambda(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \cdots \mathbf{x}_{n-1}, \mathbf{u}) = \Lambda(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \cdots \mathbf{x}_{n-1}, \mathbf{n}) \cos\theta$$

luego $\xi_1(\mathbf{u})(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \cdots \mathbf{x}_{n-1})$ es el volumen del paralelepípedo que se obtiene al proyectar $P(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \cdots \mathbf{x}_{n-1})$ sobre H, con signo $+1$, (resp. -1) si $(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \cdots \mathbf{x}_{n-1}, \mathbf{n})$ es una base positiva (resp. negativa) para la orientación canónica de $\mathbb{R}^n$.

Cuando $\mathbf{u}$ no es unitario, la interpretación es análoga, sólo que ahora los volúmenes considerados aparecen multiplicados por $\|\mathbf{u}\|_2$ ya que para $\mathbf{v} = \mathbf{u}/\ \|\mathbf{u}\|_2$ se cumple $\Lambda(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \cdots \mathbf{x}_{n-1}, \mathbf{u}) = \|\mathbf{u}\|_2\, \Lambda(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \cdots \mathbf{x}_{n-1}, \mathbf{v})$.

K.3. Formas diferenciales

La teoría de las formas diferenciables permite dar un tratamiento unificado a diversos resultados del Análisis Vectorial. Las formas diferenciales, que tienen un comportamiento cómodo y flexible frente a los cambios de variable, son objetos matemáticos para los que de forma natural y mecánica se puede definir la integral respecto a una parametrización, independientemente del sistema de coordenadas curvilíneas empleado (siempre que se conserven la orientación). La teoría de las formas diferenciales, además de establecer los fundamentos rigurosos de cierto tipo de cálculos formales que intervienen en los problemas de cambio de variable clarifica y proporciona un tratamiento unificado de los teoremas clásicos del Análisis Vectorial. Por una parte, diversas nociones de origen físico, como el trabajo de un campo de fuerzas, el flujo de un campo de vectores a través de una superficie, son casos particulares de la noción de integral de una forma diferencial respecto a una aplicación. Por otra parte, los operadores diferenciales clásicos como el rotacional, la divergencia y el gradiente son casos particulares de la noción de diferencial exterior, un concepto que se puede definir de modo intrínseco (con independencia del sistema de coordenadas curvilíneas utilizado) usando las identificaciones canónicas entre campos de vectores y formas diferenciales. Un primer resultado que justifica la noción de diferencial exterior es el clásico Lema de Poincaré, que se particulariza en diversos resultados básicos del Análisis Vectorial, como el que establece las condiciones necesarias y suficientes para que un campo vectorial sea un gradiente. Por último, podemos anunciar que las formas diferenciales son la herramienta idónea para desarrollar el cálculo integral sobre dominios curvos (subvariedades de $\mathbb{R}^n$) y especialmente para establecer la versión general del teorema de Stokes donde interviene de manera decisiva la noción de diferencial exterior. Esta versión general del teorema de Stokes incluye como casos particulares distintos resultados centrales del Análisis Vectorial clásico como los teoremas de Green, Stokes, Gauss etc.

En este capítulo seguimos denotando por E un espacio euclídeo n-dimensional en el que se ha fijado una base ordenada $\beta = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \cdots \mathbf{e}_n\}$. Su base dual en E^* la denotaremos con la notación $\{dx_1, dx_2, \cdots dx_n\}$ habitual en el cálculo diferencial. La utilidad de esta notación se pondrá de manifiesto más adelante al estudiar los problemas de cambio de variable. Suponemos al lector familiarizado con la teoría de las formas multilineales alternadas que se expone en el apéndice K.2, donde se introducen las notaciones y los resultados básicos requeridos para este capítulo. Así, denotaremos por $\Gamma_k(E)$ el espacio vectorial formado por las aplicaciones multilineales alternadas $T : E^k \to \mathbb{R}$. En particular $\Gamma_1(E) = E^*$ es el espacio dual, y por convenio $\Gamma_0(E) = \mathbb{R}$. Una base de $\Gamma_k(E)$ asociada a la base $\beta = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \cdots \mathbf{e}_n\}$ de E. es $\{dx_J : J \in \mathcal{J}_k\}$, donde $\mathcal{J}_k$ la familia formada con las sucesiones finitas crecientes de k números naturales $\{j_1 < j_2 < \cdots < j_k\}$, con $1 \leq j_1 < j_k \leq n$ y dx_J es una abreviatura del producto exterior $dx_{j_1} \wedge dx_{j_2} \cdots \wedge dx_{j_k}$.

Si $(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \cdots \mathbf{x}_k) \in E^k$ y consideramos la matriz $A = (a_{ij})_{1\leq i\leq k, 1\leq j\leq n}$ formada con las coordenadas de los vectores $\mathbf{x}_i$ respecto a la base $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \cdots \mathbf{e}_n\}$, es decir, $\mathbf{x}_i = \sum_{j=1}^n a_{ij}\mathbf{e}_j$, entonces

$$dx_J(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \cdots \mathbf{x}_k) = \sum_{\sigma\in G_k} \varepsilon(\sigma) a_{1j_{\sigma(1)}} a_{2j_{\sigma(2)}} \cdots a_{kj_{\sigma(k)}}$$

es el determinante de la matriz obtenida extrayendo de A las k columnas indicadas por los subíndices $j_1 < j_2 < \cdots < j_k$,

Definición K.12 *Una forma diferencial de grado k, $1 \leq k \leq n$, (brevemente, k-forma diferencial) en un abierto $\Omega \subset E$ es un campo de formas multilineales alternadas de grado k definido en Ω, es decir, es una aplicación $\omega : \Omega \to \Gamma_k(E)$.*

Una forma de grado 0 es una función $f : \Omega \to \mathbb{R}$, y una forma de grado 1 es un campo de formas lineales $\omega : \Omega \to E^*$. Toda forma de grado k se puede escribir, respecto a la base $\{dx_J : J \in \mathcal{J}_k\}$ de $\Gamma_k(E)$ en la forma canónica

$$\omega(\mathbf{x}) = \sum_{1\leq j_1<j_2<\cdots<j_k\leq n} \omega_{j_1<j_2<\cdots<j_k}(\mathbf{x})\ dx_{j_1} \wedge dx_{j_2} \wedge \cdots dx_{j_k}$$

que escribiremos más brevemente en la forma

$$\omega(\mathbf{x}) = \sum_{J\in\mathcal{J}_k} \omega_J(\mathbf{x})\ dx_J$$

donde $J = (j_1 < j_2 < \cdots < j_k)$, $dx_J = dx_{j_1} \wedge dx_{j_2} \cdots \wedge dx_{j_k}$. Obsérvese que en el caso $k = n-1$, el espacio vectorial $\Gamma_{n-1}(E)$ es de dimensión 1 por lo que toda forma diferencial de grado $n-1$ se escribe en la forma

$$\omega(\mathbf{x}) = \omega_{1,2\cdots n}(\mathbf{x})\ dx_1 \wedge dx_2 \wedge \cdots \wedge dx_{n-1}$$

y por lo tanto se puede identificar con la función $\omega_{1,2\cdots n} : \Omega \to \mathbb{R}$.

Se dice que la forma diferencial $\omega(\mathbf{x}) = \sum_{J\in\mathcal{J}_k} \omega_J(\mathbf{x})\ dx_J$ es de clase C^m en Ω cuando todas las funciones coordenadas $\omega_J : \Omega \to \mathbb{R}$ son de clase C^m en Ω. Es fácil comprobar que esta definición no depende de la base β que se ha elegido en E.

En el caso de ser $q = 0$, $\omega' = f$ es una función, y se conviene en que $\omega \wedge f = f \wedge \omega = f\omega$ es la forma diferencial de grado p definida por $(f\omega)(\mathbf{x}) := f(\mathbf{x}) \wedge \omega(\mathbf{x})$.

Ejemplos K.13

a) Cuando $n = 1$ la noción de las forma diferenciales carece de interés, pues las formas diferenciales de grado 0 son funciones y las de grado 1, que son de la forma $f(x)dx$ también se identifican con funciones.

b) Cuando $n = 2$, las formas diferenciales de grado 0 son funciones de dos variables, las de grado 1 se suelen escribir usando la notación $P(x, y)dx + Q(x, y)dy$, y las de grado 2, $\omega(x, y) = f(x, y)\ dx \wedge dy$, se identifican con funciones de dos variables $f : \Omega \to \mathbb{R}$.

c) Cuando $n = 3$, las formas diferenciales de grado 0 son funciones de tres variables, las de grado 1 se escriben en la forma $F_1(x, y, z)dx + F_2(x, y, z)dy + F_3(x, y, z)dz$, las de grado 2, se suelen escribir en la forma

$$A(x, y, z)\ dy \wedge dz + B(x, y, z)\ dz \wedge dx + C(x, y, z)\ dx \wedge dy$$

y las de grado 3, $\omega(x, y, z) = f(x, y, z)dx \wedge dy \wedge dz$, se identifican con funciones de tres variables $f : \Omega \to \mathbb{R}$.

d) Si $f : \Omega \to \mathbb{R}$ es diferenciables en un abierto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, su diferencial $df(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^n D_j f(\mathbf{x})dx_j$ es una forma diferencial de grado 1 que será de clase C^{m-1} si f es de clase C^m.

El conjunto de las formas diferenciales de grado k en Ω forma un espacio vectorial real, donde está definido el producto exterior de formas diferenciales: Si ω, ω' son formas diferenciales de grados p y q respectivamente, entonces su producto exterior $(\omega\wedge\omega')(\mathbf{x}) : \omega(\mathbf{x})\wedge\omega'(\mathbf{x})$ es una forma exterior de grado $k = p+q$. La multiplicación exterior de formas diferenciales es una operación asociativa y anticonmutativa que verifica la ley de anticonmutatividad $\omega \wedge \omega' = (-1)^{pq}\omega' \wedge \omega$.

Ejemplos K.14

a) Para $n = 3$ el producto exterior de las formas diferenciales

$$\omega = F_1\ dx + F_2\ dy + F_3\ dz, \quad \omega' = G_1\ dx + G_2\ dy + G_3\ dz$$

es la forma diferencial

$$\omega \wedge \omega' = (F_2G_3 - F_3G_2)\ dy \wedge dz + (F_3G_1 - F_1G_3) + dz \wedge dx + (F_1G_2 - F_2G_1)\ dx \wedge dy$$

b) El producto exterior de las forma diferencial de grado 1,

$$\omega = A\ dy \wedge dz + B\ dz \wedge dx + C\ dx \wedge dy$$

por la forma diferencial de grado 2

$$\omega' = A'\ dx + B'\ dy + C'\ dz$$

es la forma diferencial de grado 3,

$$\omega \wedge \omega' = (AA' + BB' + CC')\ dx \wedge dy \wedge dz$$

c) El producto exterior $\omega = \omega^1 \wedge \omega^2 \wedge \omega^3$ de las formas de grado 1,

$$\omega^i = F_1^i\ dx + F_2^i\ dy + F_3^i\ dz, \quad 1 \le i \le 3$$

es la forma diferencial de grado 3,

$$\omega = \det[F_j^i]_{1 \le i,j \le 3}\ dx \wedge dy \wedge dz$$

c) Si $f_1, f_2 : \Omega \to \mathbb{R}$ son funciones diferenciables en un abierto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, el producto exterior $df_1 \wedge df_2 : \Omega \to \Gamma_2(\mathbb{R}^n)$ es la forma diferencial de grado 2, cuya expresión en forma canónica es

$$(df_1 \wedge df_2)(\mathbf{x}) = \sum_{i<j} \frac{D(f_1, f_2)}{D(x_i, x_j)}(\mathbf{x})\ dx_i \wedge dx_j$$

Proposición K.15 *Sean $f_i : \Omega \to \mathbb{R}$, $1 \le i \le k$ funciones diferenciables en un abierto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Entonces su producto exterior $df_1 \wedge df_2 \wedge \cdots \wedge df_k : \Omega \to \Gamma_k(\mathbb{R}^n)$ es la forma diferencial de grado k, cuya expresión en forma canónica es*

$$(df_1 \wedge df_2 \wedge \cdots \wedge df_k)(\mathbf{x}) = \sum_{j_1 < j_2 < \cdots < j_k} \frac{D(f_1,\ f_2\ \cdots\ f_k)}{D(x_{j_1}, x_{j_2}, \cdots x_{j_k})}(\mathbf{x})\ dx_{j_1} \wedge dx_{j_2} \wedge \cdots dx_{j_k}$$

DEM: Basta recordar que si $J = (j_1 < j_2 < \cdots < j_k)$ entonces la coordenada $\omega_J(\mathbf{x})$ de $\omega(\mathbf{x}) = (df_1 \wedge df_2 \wedge \cdots \wedge df_k)(\mathbf{x})$ respecto a la base canónica $\{dx_J : J \in \mathcal{J}_k\}$ de $\Gamma_k(E)$ viene dada por

$$\omega_J(\mathbf{x}) = (df_1 \wedge df_2 \wedge \cdots \wedge df_k)(\mathbf{x})(\mathbf{e}_{j_1}, \mathbf{e}_{j_2}, \cdots \mathbf{e}_{j_k}) =$$

$$= \det[df_p(\mathbf{x})\mathbf{e}_{j_q}]_{1\le p,q\le k} = \det[D_{j_q} f_p(\mathbf{x})]_{1\le p,q\le k} = \frac{D(f_1,\ f_2\ \cdots\ f_k)}{D(x_{j_1}, x_{j_2} \cdots x_{j_k})}(\mathbf{x})$$

(véase el apéndice K.2) ■

Imagen recíproca de una forma diferencial. Sean E, F espacios vectoriales euclídeos de dimensiones n y m respectivamente y $\omega : \Omega \to \Gamma_k(E)$, una forma diferencial de grado k definida en un abierto $\Omega \subset E$. Si $\mathbf{g} : U \to \Omega$ es una aplicación diferenciable en un abierto $U \subset F$, la fórmula

$$\mathbf{g}^*(\omega)(\mathbf{u}) : (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \cdots \mathbf{v}_k) \longrightarrow \omega(\mathbf{g}(\mathbf{u}))(d\mathbf{g}(\mathbf{u})\mathbf{v}_1, \cdots d\mathbf{g}(\mathbf{u})\mathbf{v}_k)$$

define en U una forma diferencial $\mathbf{g}^*(\omega) : U \to \Gamma_k(F)$ de grado k (obsérvese que los vectores $\mathbf{v}_j$ pertenecen a F y sus imágenes $d\mathbf{g}(\mathbf{u})\mathbf{v}_j$ pertenecen a E). Se dice que $\mathbf{g}^*(\omega)$ es la imagen recíproca de ω por el cambio de variable $\mathbf{g}$, o que $\mathbf{g}^*(\omega)$ se deduce de ω mediante el cambio de variable $\mathbf{x} = \mathbf{g}(\mathbf{u})$ (¿Atención $\mathbf{u}$ y $\mathbf{x}$, en general son vectores de dimensiones distintas m, n).

Cuando $\omega = f$ es una función definida en Ω (forma diferencial de grado 0) es conveniente definir $\mathbf{g}^*(f) = f \circ \mathbf{g}$.

Proposición K.16 *Sea $\mathbf{g} : U \to \Omega$ una aplicación diferenciable en un abierto U del espacio euclídeo m dimensional F, con valores en un abierto Ω del espacio euclídeo n-dimensional E. Se verifica*

i) $\mathbf{g}^*$ *es lineal (sobre el espacio vectorial de las k-formas diferenciales en Ω).*

ii) $\mathbf{g}^*(df) = d(\mathbf{g}^* f)$ *para cada función diferenciable $f : \Omega \to \mathbb{R}$.*

iii) $\mathbf{g}^*(\omega \wedge \omega') = \mathbf{g}^*(\omega) \wedge \mathbf{g}^*(\omega')$ *cuando $\omega : \Omega \to \Gamma_p(E)$ y $\omega' : \Omega \to \Gamma_q(E)$ son formas diferenciales en Ω, de grados p y q respectivamente, con $p + q \le n$.*

DEM: La propiedad i) es inmediata. y ii) es consecuencia directa de las definiciones:

$$\mathbf{g}^*(df)(\mathbf{u})\mathbf{v} = df(\mathbf{g}(\mathbf{u}))[d\mathbf{g}(\mathbf{u})\mathbf{v}] =$$

$$= [df(\mathbf{g}(\mathbf{u})) \circ d\mathbf{g}(\mathbf{u})]\mathbf{v} = d(f \circ \mathbf{g})(\mathbf{u})\mathbf{v} = d(\mathbf{g}^* f)(\mathbf{u})\mathbf{v}$$

Para demostrar iii) consideremos un punto concreto $\mathbf{x} = \mathbf{g}(\mathbf{u}) \in \Omega$, donde $\mathbf{u} \in U$, un sistema de vectores $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \cdots \mathbf{v}_k \in F$ y sus imágenes $\mathbf{w}_j = d\mathbf{g}(\mathbf{u})\mathbf{v}_j$, $1 \le j \le k$. Utilizando la definición del producto exterior de formas multilineales (véase K.2) resulta:

$$\mathbf{g}^*(\omega \wedge \omega')(\mathbf{u})(\mathbf{v}_1, \cdots \mathbf{v}_k) = (\omega \wedge \omega')(\mathbf{x})(\mathbf{w}_1, \cdots \mathbf{w}_k) =$$

$$= \frac{1}{p!q!} \sum_{\sigma \in G_k} [\omega(\mathbf{x})(\mathbf{w}_{\sigma(1)}, \cdots \mathbf{w}_{\sigma(p)})][\omega'(\mathbf{x})(\mathbf{w}_{\sigma(p+1)}, \cdots \mathbf{w}_{\sigma(p+q)})] =$$

$$= \frac{1}{p!q!} \sum_{\sigma \in G_k} [\mathbf{g}^*(\omega)(\mathbf{u})(\mathbf{v}_{\sigma(1)}, \cdots \mathbf{v}_{\sigma(p)})][\mathbf{g}^*(\omega')(\mathbf{u})(\mathbf{v}_{\sigma(p+1)}, \cdots \mathbf{v}_{\sigma(p+q)})] =$$

$$= [\mathbf{g}^*(\omega) \wedge \mathbf{g}^*(\omega')](\mathbf{u})(\mathbf{v}_1, \cdots \mathbf{v}_k)$$

■

Con el fin de ejercitarse en el cálculo con formas diferenciales, merece la pena comprobar la propiedad K.16 iii) en algunas situaciones concretas

Ejemplos K.17

a) Comenzamos con una situación particular que es consecuencia inmediata de las definiciones: Si $f, f_1 \Omega \to \mathbb{R}$ son funciones, y $\omega : \Omega \to \Gamma_k(E)$ una forma diferencial

$$\mathbf{g}^*(f\omega) = \mathbf{g}^*(f)\mathbf{g}^*(\omega); \quad \mathbf{g}^*(ff_1) = \mathbf{g}^*(f)\mathbf{g}^*(f_1);$$

b) $\mathbf{g}^*(dx_i \wedge dx_j) = dg_i \wedge dg_j$. Efectivamente, como dx_i es la aplicación lineal que asigna al $d\mathbf{g}(\mathbf{u})\mathbf{v} = (dg_1(\mathbf{u})\mathbf{v}, \cdots dg_k(\mathbf{u})\mathbf{v})$ su componente $dg_i(\mathbf{u})\mathbf{v}$, resulta

$$\mathbf{g}^*(dx_i \wedge dx_j)(\mathbf{u})(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) = (dx_i \wedge dx_j)(d\mathbf{g}(\mathbf{u})\mathbf{v}_1, d\mathbf{g}(\mathbf{u})\mathbf{v}_2) =$$

$$= \begin{vmatrix} dx_i(d\mathbf{g}(\mathbf{u})\mathbf{v}_1) & dx_i(d\mathbf{g}(\mathbf{u})\mathbf{v}_2) \\ dx_j(d\mathbf{g}(\mathbf{u})\mathbf{v}_1) & dx_j(d\mathbf{g}(\mathbf{u})\mathbf{v}_2) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} dg_i(\mathbf{u})\mathbf{v}_1 & dg_i(\mathbf{u})\mathbf{v}_2 \\ dg_j(\mathbf{u})\mathbf{v}_1 & dg_j(\mathbf{u})\mathbf{v}_2 \end{vmatrix} =$$

$$= dg_i(\mathbf{u})\mathbf{v}_1 dg_j(\mathbf{u})\mathbf{v}_2 - dg_i(\mathbf{u})\mathbf{v}_2 dg_j(\mathbf{u})\mathbf{v}_1 = [dg_i(\mathbf{u}) \wedge dg_j(\mathbf{u})](\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)$$

c) $\mathbf{g}^*(df_1 \wedge df_2) = \mathbf{g}^*(df_1) \wedge \mathbf{g}^*(df_2) = d(\mathbf{g}^* f_1) \wedge d(\mathbf{g}^* f_2)$.
En efecto, usando la linealidad de $\mathbf{g}^*$ y lo obtenido en b) se obtiene que la imagen recíproca de la forma diferencial

$$(df_1 \wedge df_2)(\mathbf{x}) = \sum_{i<j} \frac{D(f_1, f_2)}{D(x_i, x_j)}(\mathbf{x}) \ dx_i \wedge dx_j$$

viene dada por

$$\mathbf{g}^*(df_1 \wedge df_2)(\mathbf{u}) = \sum_{i<j} \frac{D(f_1, f_2)}{D(x_i, x_j)}(\mathbf{g}(\mathbf{u})) \ dg_i(\mathbf{u}) \wedge dg_j(\mathbf{u})$$

Por otra parte, según K.16 ii), se verifica

$$\mathbf{g}^*(df_1) \wedge \mathbf{g}^*(df_2) = d(\mathbf{g}^* f_1) \wedge d(\mathbf{g}^* f_2)$$

En virtud de la regla de la cadena, para $i = 1, 2$, se tiene:

$$d(\mathbf{g}^* f_i)(\mathbf{u}) = d(f_i \circ \mathbf{g})(\mathbf{u}) = df_i \circ d\mathbf{g} = \sum_{j=1}^{n} D_j f_i(\mathbf{g}(\mathbf{u})) \ dg_j(\mathbf{u})$$

Sustituyendo arriba esta expresión para $d(\mathbf{g}^* f_i)$, $i = 1, 2$, y usando las reglas del algebra exterior se llega a la igualdad

$$[d(\mathbf{g}^* f_1) \wedge d(\mathbf{g}^* f_2)](\mathbf{u}) = \sum_{i<j} \frac{D(f_1, f_2)}{D(x_1, x_2)}(\mathbf{g}(\mathbf{u}))\ dg_i(\mathbf{u}) \wedge dg_j(\mathbf{u}) = \mathbf{g}^*(df_1 \wedge df_2)(\mathbf{u})$$

En las condiciones de la proposición K.17, sea $\{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \cdots \mathbf{b}_m\}$ una base ordenada del espacio euclídeo F, y $\{du_1, du_2, \cdots du_m\}$ su base dual en F^*. Dada una forma diferencial $\omega : \Omega \to \Gamma_k(E)$, en forma canónica

$$\omega(\mathbf{x}) = \sum_{1 \leq j_1 < j_2 < \cdots < j_k \leq n} \omega_{j_1 j_2 \cdots j_k}(\mathbf{x})\ dx_{j_1} \wedge dx_{j_2} \wedge \cdots \wedge dx_{j_k}$$

para obtener la forma canónica de $\mathbf{g}^*(\omega)$, en términos de la base $\{du_1, du_2, \cdots du_m\}$ basta sustituir

$$dg_{j_1}(\mathbf{u}) \wedge dg_{j_2}(\mathbf{u}) \wedge \cdots \wedge dg_{j_k}(\mathbf{u}) = \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leq m} \frac{D(g_{j_1}, \cdots g_{j_k})}{D(u_{i_1}, \cdots u_{i_k k})}(\mathbf{u})\ du_{i_1} \wedge \cdots \wedge du_{i_k}$$

en la expresión

$$\mathbf{g}^*(\omega)(\mathbf{u}) = \sum_{1 \leq j_1 < \cdots < j_k \leq n} \omega_{j_1 j_2 \cdots j_k}(\mathbf{g}(\mathbf{u}))\ d\mathbf{g}_{j_1}(\mathbf{u}) \wedge d\mathbf{g}_{j_2}(\mathbf{u}) \wedge \cdots \wedge d\mathbf{g}_{j_k}(\mathbf{u})$$

con lo que se llega a

$$\mathbf{g}^*(\omega) = \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq m} \left(\sum_{1 \leq j_1 < \cdots < j_k \leq n} \omega_{j_1 j_2 \cdots j_k}(\mathbf{g}(\mathbf{u})) \frac{D(g_{j_1}, \cdots g_{j_k})}{D(u_{i_1}, \cdots u_{i_k})}(\mathbf{u}) \right) du_{i_1} \wedge \cdots \wedge du_{i_k}$$

Aunque la última fórmula tiene un aspecto aparentemente complicado, en la práctica el cambio de variable se reduce a cálculos mecánicos muy sencillos siguiendo el siguiente esquema: Para realizar el cambio de variable $\mathbf{x} = \mathbf{g}(\mathbf{u})$ en la forma diferencial de grado k,

$$\omega(\mathbf{x}) = \sum_{1 \leq j_1 < \cdots < j_k \leq n} \omega_{j_1 j_2 \cdots j_k}(\mathbf{x})\ dx_{j_1} \wedge dx_{j_2} \wedge \cdots \wedge dx_{j_k}$$

se efectúan las sustituciones formales, $x_j = g_j(u_1, u_2, \cdots u_m)$, $dx_j = dg_j$ y se siguen las reglas formales del álgebra exterior. Esta regla permite dar una doble interpretación a la fórmula canónica para representar una forma diferencial: Si en vez considerar que $\mathbf{x}$ es una variable independiente, se considera como función de $\mathbf{u}$, mediante el cambio de variable $\mathbf{x} = \mathbf{g}(\mathbf{u})$, entonces dx_j se debe interpretar como la diferencial de la función $x_j = g_j(\mathbf{u})$, $1 \leq j \leq n$. Debido a esta flexibilidad de la notación, las formas diferenciales proporcionan algoritmos formales de cálculo muy adecuados para los problemas de cambio de variable.

Ejercicio K.18 *En las condiciones de K.16, si* $\mathbf{h} : V \to U$ *es otra aplicación diferenciable definida en un abierto* V *de un espacio euclídeo* r *dimensional, se verifica*

$$(\mathbf{g} \circ \mathbf{h})^* \omega = \mathbf{h}^*(\mathbf{g}^* \omega)$$

Ejemplos K.19

a) En el caso $E = F = \mathbb{R}^2$, con el cambio de variable a coordenadas polares, $(x, y) = \mathbf{g}(r, \theta)$, dado por $x = r\cos\theta$, $y = r \operatorname{sen}\theta$, la forma diferencial $\omega = dx \wedge dy$ se transforma en la que se obtiene con la sustitución formal $dx = \cos\theta \ dr - r \operatorname{sen}\theta \ d\theta$, $dy = \operatorname{sen}\theta \ dr + r\cos\theta \ d\theta$, con la que se obtiene

$$\mathbf{g}^*(\omega)(r, \theta) = (\cos\theta \ dr - r \operatorname{sen}\theta \ d\theta) \wedge (\operatorname{sen}\theta \ dr + r\cos\theta \ d\theta)$$

Con las reglas de cálculo $dr \wedge dr = d\theta \wedge d\theta = 0$, $d\theta r \wedge dr = -dr \wedge d\theta$, se obtiene

$$\mathbf{g}^*(\omega)(r, \theta) = r \ dr \wedge d\theta$$

b) Consideremos ahora el caso $E = F = \mathbb{R}^3$, y el cambio de variable a coordenadas esféricas $(x, y, z) = \mathbf{g}(\rho, \theta, \varphi)$, dado por

$$x = \rho\cos\varphi\cos\theta, \ y = \rho\cos\varphi \operatorname{sen}\theta, \ z = \rho \operatorname{sen}\varphi$$

Dada la forma diferencial $\omega = dx \wedge dy \wedge dz$, para calcular $\mathbf{g}^*(\omega)(\rho, \theta, \varphi)$ basta efectuar las sustitución formal

$$\begin{aligned}
&dx = \cos\varphi\cos\theta \ d\rho - \rho\cos\varphi \operatorname{sen}\theta \ d\theta - \rho \operatorname{sen}\varphi\cos\theta \ d\varphi\\
&dy = \cos\varphi \operatorname{sen}\theta \ d\rho + \rho\cos\varphi\cos\theta \ d\theta - \rho \operatorname{sen}\varphi \operatorname{sen}\theta \ d\varphi\\
&dz = \operatorname{sen}\varphi \ d\rho + \rho\cos\varphi \ d\varphi
\end{aligned}$$

En una primera etapa, con las reglas del álgebra exterior, obtenemos

$$dx \wedge dy = (\rho\cos^2\varphi \ d\rho \wedge d\theta + \rho^2 \operatorname{sen}\varphi\cos\varphi \ d\theta \wedge d\varphi)$$

luego

$$dx \wedge dy \wedge dz = (\rho\cos^2\varphi \ d\rho \wedge d\theta + \rho^2 \operatorname{sen}\varphi\cos\varphi \ d\theta \wedge d\varphi) \wedge (\operatorname{sen}\varphi \ d\rho + \rho\cos\varphi \ d\varphi)$$

y efectuando las operaciones se llega al resultado

$$\mathbf{g}^*(\omega)(\rho, \theta, \varphi) = \rho^2\cos\varphi \ d\rho \wedge d\theta \wedge d\varphi$$

c) Consideremos la parametrización usual de la esfera de centro $(0, 0, 0)$ y radio $R > 0$, $(x, y, z) = \mathbf{g}(\theta, \varphi)$, donde

$$x = R\cos\varphi\cos\theta, \ y = R\cos\varphi \operatorname{sen}\theta, \ z = R \operatorname{sen}\varphi$$

y una forma diferencial de grado 2

$$\omega(x, y, z) = F_1(x, y, z) \ dy \wedge dz + F_2(x, y, z) \ dz \wedge dx + F_3(x, y, z) \ dx \wedge dy$$

Para calcular $g^*(\omega)(\theta, \varphi)$ basta efectuar las sustituciones formales

$$\begin{aligned}
&dx = -R\cos\varphi \operatorname{sen}\theta \ d\theta - R \operatorname{sen}\varphi\cos\theta \ d\varphi\\
&dy = R\cos\varphi\cos\theta \ d\theta - R \operatorname{sen}\varphi \operatorname{sen}\theta \ d\varphi\\
&dz = R\cos\varphi \ d\varphi
\end{aligned}$$

con las que se obtiene $g^*(\omega)(\theta, \varphi) = R^2 f(\theta, \varphi) \ d\theta \wedge d\varphi$, donde

$$f(\theta, \varphi) = F_1^*(\theta, \varphi)\cos^2\varphi \ \cos\theta + F_2^*(\theta, \varphi)\cos^2\varphi \ \operatorname{sen}\theta + F_3^*(\theta, \varphi) \operatorname{sen}\varphi \ \cos\varphi$$

con $F_j^* = F_j \circ \mathbf{g}$, $1 \leq j \leq 3$.