Capítulo 10

Integral de Riemann

Funciones integrables Riemann en un intervalo y propiedades de la integral. Integración sobre conjuntos medibles Jordan. Conjuntos de contenido nulo de medida nula. Caracterización de las funciones integrables.

En este capítulo y en el siguiente se desarrollan las técnicas básicas de cálculo integral para funciones de varias variables, y se muestran las aplicaciones clásicas de la integral al cálculo de áreas y volúmenes.

La integral de Riemann proporciona una introducción rápida y elemental al problema del cálculo efectivo de integrales, áreas y volúmenes, y permite definir de forma rigurosa una amplia clase de conjuntos del plano o del espacio ordinario que tienen asignada un área o un volumen. Esta clase de conjuntos, llamados medibles Jordan, incluye a los recintos acotados que se pueden describir geométricamente como intersección de figuras geométricas elementales (conos, cilindros, esferas, etc).

Además de las aplicaciones geométricas usuales al cálculo de áreas y volúmenes se menciona en este capítulo la noción de función de densidad de un sólido y se describen las aplicaciones de las integrales al cálculo de masas, centros de masas y momentos de inercia de sólidos cuya distribución de masa no uniforme está descrita mediante una función de densidad.

En este capítulo, dedicado esencialmente a los fundamentos teóricos de la integral de Riemann, se demuestra el clásico teorema de Lebesgue que caracteriza las funciones integrables Riemann mediante el conjunto de sus discontinuidades.

Hay que advertir que la integral de Riemann es una noción insuficiente como instrumento teórico para el Análisis Matemático avanzado (Análisis de Fourier, Análisis Funcional) donde se requiere la noción más general de integral de Lebesgue.

10.1. Funciones integrables Riemann

Notaciones y terminología. Una subdivisión p de $[a,b] \subset \mathbb{R}$, es una sucesión finita creciente $t_0 < t_1 < \cdots < t_m$, con $t_0 = a$, $t_m = b$. Usaremos la notación $\Delta(p)$ para la familia de los intervalos cerrados determinados por p, es decir

$$\Delta(p) = \{[t_0, t_1], [t_1, t_2], [t_2, t_3], \cdots [t_{m-1}, t_m]\}$$

En lo que sigue $\mathcal{P}([a,b])$ designará la colección de todas las subdivisiones de $[a,b]$. Si $p, p' \in \mathcal{P}([a,b])$, y p' contiene todos los puntos de p, se dice que p' es más fina que p, y se escribe $p' \geq p$. Así se tiene definida en $\mathcal{P}([a,b])$ una relación de orden parcial con la cual $\mathcal{P}([a,b])$ es un conjunto dirigido:

$$\text{Dadas } p', p'' \in \mathcal{P}([a,b]) \text{ existe } p \in \mathcal{P}([a,b]), \text{ tal que } p \geq p', \text{ y } p \geq p''$$

En lo que sigue llamaremos rectángulo o intervalo cerrado n-dimensional a un conjunto $A \subset \mathbb{R}^n$, de la forma $A = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \cdots \times [a_n, b_n]$, que salvo mención expresa de lo contrario, se supondrá no degenerado, es decir con $a_i < b_i$, para $1 \leq i \leq n$. Análogamente se definen los rectángulos o intervalos abiertos n-dimensionales: $U = (a_1, b_1) \times (a_2, b_2) \times \cdots \times (a_n, b_n)$.

El volumen n-dimensional de los rectángulos abiertos o cerrados se define como el producto de las longitudes de sus lados:

$$v(A) = v(U) = (b_1 - a_1) \times (b_2 - a_2) \times \cdots \times (b_n - a_n).$$

Cuando sea conveniente hacer explícita la dimensión n que se está considerando, en lugar de v, escribiremos v_n para designar el volumen n-dimensional.

Una subdivisión del rectángulo cerrado $A \subset \mathbb{R}^n$ es una n-pla, $p = (p_1, p_2, \cdots p_n)$, donde $p_i \in \mathcal{P}([a_i, b_i])$, $1 \leq i \leq n$. El conjunto de las subdivisiones de A

$$\mathcal{P}(A) := \mathcal{P}([a_1, b_1]) \times \mathcal{P}([a_2, b_2]) \times \cdots \times \mathcal{P}([a_n, b_n])$$

también se puede dirigir por refinamiento: Se dice que $p' = (p'_1, p'_2 \cdots p'_n) \in \mathcal{P}(A)$ es más fina que $p = (p_1, p_2 \cdots p_n) \in \mathcal{P}(A)$, y se escribe $p' \geq p$, cuando $p'_i \geq p_i$, para $1 \leq i \leq n$.

Cada $p = (p_1, p_2 \cdots p_n) \in \mathcal{P}(A)$ determina una colección finita de rectángulos cerrados que no se solapan (esto significa que sus interiores son disjuntos):

$$\Delta(p) = \{J_1 \times J_2 \times \cdots \times J_n : J_k \in \Delta(p_k), 1 \leq k \leq n\}$$

Si $p, p' \in \mathcal{P}(A)$, y p' es más fina que p, cada $S \in \Delta(p)$ es unión de los rectángulos $S' \in \Delta(p')$ que están contenidos en S, y es fácil ver que

$$v(S) = \sum_{S' \in \Delta(p'), S' \subset S} v(S').$$

Integral inferior e integral superior. Funciones integrables. Sea $f : A \to \mathbb{R}$ una función acotada definida en el rectángulo cerrado $A \subset \mathbb{R}^n$, $|f(\mathbf{x})| \leq C$ para todo $\mathbf{x} \in A$. Entonces, para cada $S \subset A$ se pueden definir

$$M(f, S) = \sup\{f(\mathbf{x}) : \mathbf{x} \in S\} \leq C, \quad m(f, S) = \inf\{f(\mathbf{x}) : \mathbf{x} \in S\} \geq -C.$$

A cada subdivisión $p \in \mathcal{P}(A)$ se le asocian las sumas superior e inferior de Darboux:

$$S(f, p) = \sum_{S \in \Delta(p)} M(f, S) v(S); \quad s(f, p) = \sum_{S \in \Delta(p)} m(f, S) v(S).$$

Es inmediato que $s(f, p) \leq S(f, p)$ para cada $p \in \mathcal{P}(A)$.

Lema 10.1 *Si* $p' \in \mathcal{P}(A)$ *es más fina que* $p \in \mathcal{P}(A)$, *se cumple*

$$S(f,p') \leq S(f,p), \quad s(f,p') \geq s(f,p),$$

y si $p, q \in \mathcal{P}(A)$ *son subdivisiones arbitrarias,* $s(f,p) \leq S(f,q)$.

Dem: Fijado $S \in \Delta(p)$, si $S' \in \Delta(p')$, y $S' \subset S$, se verifica $M(f,S') \leq M(f,S)$, luego, $M(f,S')v(S') \leq M(f,S)v(S')$. Sumando las desigualdades que corresponden a los $S' \in \Delta(p')$ contenidos en S, resulta

$$\sum_{S' \subset S} M(f,S')v(S') \leq M(f,S) \sum_{S' \subset S} v(S') = M(f,S)v(S)$$

Volviendo a sumar cuando S recorre $\Delta(p)$, se obtiene

$$S(f,p') = \sum_{S \in \Delta(p)} \left[\sum_{S' \subset S} M(f,S')v(S') \right] \leq \sum_{S \in \Delta(p)} M(f,S)v(S) = S(f,p)$$

Análogamente se demuestra que $s(f,p') \geq s(f,p)$.

Finalmente, si $p, q \in \mathcal{P}(A)$ son subdivisiones arbitrarias, considerando una subdivisión $p' \in \mathcal{P}(A)$, más fina que p y que q, aplicando las desigualdades que acabamos de establecer resulta $s(f,p) \leq s(f,p') \leq S(f,p') \leq S(f,q)$. ■

Fijado $q \in \mathcal{P}(A)$, el número $S(f,q)$ es cota superior del conjunto de números reales $\{s(f,p) : p \in \mathcal{P}(A)\}$, y se puede definir la integral inferior

$$\underline{\int_A} f = \sup\{s(f,p) : p \in \mathcal{P}(A)\} \leq S(f,q)$$

Para cada $q \in \mathcal{P}(A)$ se cumple $\underline{\int_A} f \leq S(f,q)$, y se puede definir la integral superior

$$\overline{\int_A} f = \inf\{S(f,q) : q \in \mathcal{P}(A)\} \geq \underline{\int_A} f$$

Definición 10.2 *Una función acotada* $f : A \to \mathbb{R}$, *definida en un rectángulo cerrado* $A \subset \mathbb{R}^n$, *es integrable Riemann sobre* A *cuando* $\underline{\int_A} f = \overline{\int_A} f$. *En este caso se define su integral como el valor común*

$$\int_A f = \underline{\int_A} f = \overline{\int_A} f$$

Obsérvese que la integrabilidad de f significa que existe un único número real $I = \int_A f(\mathbf{x})\, d\mathbf{x}$, tal que $s(f,p) \leq I \leq S(f,p)$, para todo $p \in \mathcal{P}(A)$.

En lo que sigue $\mathcal{R}(A)$ designará el conjunto de las funciones integrables Riemann $f : A \to \mathbb{R}$. Si $B \subset A$ es un subrectángulo cerrado y $f|_B \in \mathcal{R}(B)$, se dice que f es integrable sobre B, y en lugar de $f|_B \in \mathcal{R}(B)$, $\int_B f|_B$, se escribe $f \in \mathcal{R}(B)$,

$\int_B f$, respectivamente. Si f es integrable sobre A, a veces es conveniente utilizar la notación habitual que hace explícitas las variables:

$$\int_A f = \int_A f(\mathbf{x})\ d\mathbf{x}\ = \int_A f(x_1, x_2, \cdots x_n)\ dx_1\ dx_2 \cdots\ dx_n.$$

Cuando $n = 1$, y $a < b$ se define $\int_a^b f(x)\ dx = -\int_b^a f(x)\ dx = \int_{[a,b]} f(x)\ dx$.

La siguiente proposición, que es consecuencia directa de las definiciones, expresa en una forma bastante útil la condición de que f sea integrable, sin mencionar explícitamente las integrales superior e inferior.

Proposición 10.3 *Una condición necesaria y suficiente para que una función acotada $f : A \to \mathbb{R}$ sea integrable sobre el rectángulo cerrado $A \subset \mathbb{R}^n$, es que se verifique: Para cada $\epsilon > 0$ existe $p_\epsilon \in \mathcal{P}(A)$ tal que $S(f, p_\epsilon) - s(f, p_\epsilon) < \epsilon$.*

DEM: Si se cumple la condición del enunciado, para cada $\epsilon > 0$, se verifica

$$0 \leq \overline{\int_A} f - \underline{\int_A} f \leq S(f, p_\epsilon) - s(f, p_\epsilon) < \epsilon, \quad \text{luego} \quad \overline{\int_A} f = \underline{\int_A} f.$$

Recíprocamente, si f es integrable, su integral $\int_A f$ es el extremo superior de las sumas $s(f, p)$, y el extremo inferior de las sumas $S(f, p)$ luego, dado $\epsilon > 0$, existen $p', p'' \in \mathcal{P}(A)$ verificando

$$s(f, p') \geq \int_A f - \epsilon/2, \quad S(f, p'') \leq \int_A f + \epsilon/2.$$

Si $p_\epsilon \in \mathcal{P}(A)$ es una subdivisión más fina que p' y que p'', se cumple

$$S(f, p_\epsilon) - s(f, p_\epsilon) \leq S(f, p'') - s(f, p') \leq \int_A f + \epsilon/2 - \left(\int_A f - \epsilon/2 \right) = \epsilon$$

$\blacksquare$

Teorema 10.4 *Toda función continua $f : A \to \mathbb{R}$ en un rectángulo cerrado $A \subset \mathbb{R}^n$, es integrable Riemann.*

DEM: Como A es compacto, f es uniformemente continua (3.24), luego para cada $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$, tal que

$$\mathbf{x}, \mathbf{y} \in A, \quad \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| < \delta \Rightarrow |f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{y})| < \epsilon/v(A)$$

Sea $p \in \mathcal{P}(A)$ tal que $\operatorname{diam}(S) < \delta$ para todo $S \in \Delta(p)$. La función continua f alcanza en cada rectángulo compacto $S \in \Delta(p)$ un máximo y un mínimo absolutos (3.16), es decir, existen $\mathbf{x}_S$, $\mathbf{y}_S \in S$, tales que

$$M(f, S) = f(\mathbf{x}_S), \quad m(f, S) = f(\mathbf{y}_S)$$

Como $\|\mathbf{x}_S - \mathbf{y}_S\| < \delta$, se verifica $0 \leq M(f,S) - m(f,S) = f(\mathbf{x}_S) - f(\mathbf{y}_S) \leq \epsilon/v(A)$, luego

$$S(f,p) - s(f,p) = \sum_{S \in \Delta(p)} [M(f,S) - m(f,S)]v(S) \leq \frac{\epsilon}{v(A)} \sum_{S \in \Delta(p)} v(S) = \epsilon$$

Aplicando la proposición 10.3 se concluye que f es integrable. ∎

NOTA: Hay otras formas alternativas de definir la integral de Riemann que comentamos a continuación: Si $A \subset \mathbb{R}^n$ es un rectángulo cerrado, sea $\Pi(A)$ la familia de los pares $\pi = (p, \tau(p))$, donde $p \in \mathcal{P}(A)$ y $\tau(p) = \{\tau_S : S \in \Delta(p)\}$ es una colección finita de puntos de A tal que $\tau_S \in S$ para cada $S \in \Delta(p)$. Diremos que $\pi = (p, \tau(p)) \in \Pi(A)$ es más fina que $\pi' = (p', \tau(p'))$ cuando p es más fina que p', y en ese caso escribiremos $\pi \geq \pi'$.

Si $f : A \to \mathbb{R}$ es acotada, a cada $\pi = (p, \tau(p))$ se le asocia la suma de Riemann

$$\Sigma(f, \pi) = \sum_{S \in \Delta(p)} f(\tau_S)v(S)$$

Es fácil ver que f es integrable Riemann sobre A, con integral I, si y sólo si para cada $\epsilon > 0$ existe $\pi_\epsilon \in \Pi(A)$, tal que toda $\pi \in \Pi(A)$ más fina que π_ϵ cumple $|\Sigma(f,\pi) - I| < \epsilon$. Esto significa que la red $(\Sigma(f,\pi))_{\pi \in \Pi(A)}$ converge hacia I, cuando $\Pi(A)$ está dirigido por refinamiento (es decir, por la relación de orden $\geq$ definida anteriormente).

Para $\pi = (p, \tau(p)) \in \Pi(A)$ se define $\operatorname{diam}(\pi) = \max\{\operatorname{diam}(S) : S \in \Delta(p)\}$. Se puede demostrar que f es integrable Riemann sobre A, con integral I, si y sólo si para cada $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$, tal que toda $\pi \in \Pi(A)$, con $\operatorname{diam}(\pi) < \delta$, cumple $|\Sigma(f,\pi) - \alpha| < \epsilon$. (Cuando f es continua el cumplimiento de esta condición está implícito en la demostración del teorema 10.4). En el lenguaje de la teoría de redes esta caracterización se expresa diciendo que f es integrable Riemann con integral I si y sólo si la red $(\Sigma(f,\pi))_{\pi \in \Pi(A)}$ converge hacia I cuando $\Pi(A)$ está dirigido mediante la relación de orden: $\pi \succeq \pi'$ si $\operatorname{diam}(\pi) \leq \operatorname{diam}(\pi')$.
En términos de sucesiones, esto significa que para cada sucesión $\pi_n \in \Pi(A)$, con $\lim_n \operatorname{diam}(\pi_n) = 0$, la sucesión $\Sigma(f, \pi_n)$ converge hacia I (Véase [12], vol. III, pág 29, y [5], pág 34, para el caso $n = 1$).

Propiedades de la integral. Dada una función $f : A \to \mathbb{R}$, su parte positiva y su parte negativa se definen por $f^+(\mathbf{x}) = \max\{f(\mathbf{x}), 0\}$, $f^-(\mathbf{x}) = -\min\{f(\mathbf{x}), 0\}$, Obsérvese que $f = f^+ - f^-$, y que $|f| = f^+ + f^-$.

Proposición 10.5 *Sea $A \subset \mathbb{R}^n$ un rectángulo cerrado y $\mathcal{R}(A)$ el conjunto de las funciones $f : A \to \mathbb{R}$ que son integrables Riemann.*

a) $\mathcal{R}(A)$ es un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$, y la integral es lineal: Si $f, g \in \mathcal{R}(A)$, y $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, entonces $\alpha f + \beta g \in \mathcal{R}(A)$ y $\int_A (\alpha f + \beta g) = \alpha \int_A f + \beta \int_A g$

b) Si $f, g \in \mathcal{R}(A)$, y $f \leq g$ entonces $\int_A f \leq \int_A g$.

c) Si $f \in \mathcal{R}(A)$, *entonces* $f^+, f^-, |f| \in \mathcal{R}(A)$, *y* $\left|\int_A f\right| \leq \int_A |f|$.

d) Si $f, g \in \mathcal{R}(A)$, *entonces* $fg \in \mathcal{R}(A)$.

e) Si $f : A \to \mathbb{R}$ *es acotada y* $p \in \mathcal{P}(A)$ *entonces* f *es integrable sobre* A *si y sólo si* $f|_S$ *es integrable sobre cada* $S \in \Delta(p)$, *y en este caso*

$$\int_A f(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} = \sum_{S\in\Delta(p)} \int_S f(\mathbf{x})\, d\mathbf{x}$$

f) Si $f \in \mathcal{R}(A)$, *y* $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$, *sea* $A_\mathbf{u} = \mathbf{u} + A$. *Entonces* $f_\mathbf{u}(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x} - \mathbf{u})$ *es integrable sobre* $A_\mathbf{u}$ *y se verifica* $\int_A f = \int_{A_\mathbf{u}} f_\mathbf{u}$.

Dem: a) Sean $p', p'' \in \mathcal{P}(A)$, y $p \in \mathcal{P}(A)$ más fina que p' y p''. Para cada $S \in \Delta(p)$, es $M(f+g, S) \leq M(f, S)+M(g, S)$, luego $S(f+g, p) \leq S(f, p)+S(g, p)$ y se sigue que $\overline{\int_A}(f + g) \leq S(f + g, p) \leq S(f, p) + S(g, p) \leq S(f, p') + S(g, p'')$. Considerando el extremo inferior de las sumas $S(f, p')$, y luego el extremo inferior de las sumas $S(g, p'')$ se obtiene: $\overline{\int_A}(f+g) \leq \overline{\int_A}f+\overline{\int_A}g$. Un razonamiento análogo conduce a $\underline{\int_A}f + \underline{\int_A}g \geq \underline{\int_A}(f + g)$.
Si f, g son integrables sobre A, en virtud de las desigualdades anteriores,

$$\underline{\int_A}(f + g) = \overline{\int_A}(f + g) = \int_A f + \int_A g$$

es decir, $f + g$ es integrable sobre A, y $\int_A(f + g) = \int_A f + \int_A g$.

Si $\alpha \geq 0$, se cumple $S(\alpha f, p) = \alpha S(f, p)$, $s(\alpha f, p) = \alpha s(f, p)$, mientras que para $\alpha < 0$, se tiene $S(\alpha f, p) = \alpha s(f, p)$, $s(\alpha f, p) = \alpha S(f, p)$. De aquí se deduce

$$\overline{\int_A}(\alpha f) = \alpha\overline{\int_A} f; \quad \underline{\int_A}(\alpha f) = \alpha\underline{\int_A} f \quad \text{si } \alpha \geq 0.$$

$$\overline{\int_A}(\alpha f) = \alpha\underline{\int_A} f; \quad \underline{\int_A}(\alpha f) = \alpha\overline{\int_A} f \quad \text{si } \alpha < 0.$$

En ambos casos se concluye que $f \in \mathcal{R}(A) \Rightarrow \alpha f \in \mathcal{R}(A)$, con $\int_A(\alpha f) = \alpha \int_A f$.

b) Es consecuencia de $S(f, p) \leq S(g, p)$, que se cumple para todo $p \in \mathcal{P}(A)$.

c) Observemos que $M(f^+, S) - m(f^+, S) \leq M(f, S) - m(f, S)$ (es evidente cuando f no cambia de signo en S, y cuando f cambia de signo en S basta tener en cuenta que $M(f^+, S) = M(f, S)$, $m(f^+, S) = 0$, y $m(f, S) < 0$). Esta desigualdad conduce a $S(f^+, p)-s(f^+, p) \leq S(f, p)-s(f, p)$ de donde se sigue, usando 10.3, que $f \in \mathcal{R}(A) \Rightarrow f^+ \in \mathcal{R}(A)$. Utilizando la propiedad a) se concluye que $f^- = f^+ - f$ y $|f| = f^+ + f^-$ son integrables. Finalmente, en virtud de b) y de la desigualdad $-|f| \leq f \leq |f|$, resulta $-\int_A |f| \leq \int_A f \leq \int_A |f|$.

d) Empezamos con el caso $0 \leq f = g \in \mathcal{R}(A)$. Como $M(f^2, S) = M(f, S)^2$, y $m(f^2, S) = m(f, S)^2$, se tiene

$$M(f^2, S) - m(f^2, S) = [M(f, S) + m(f, S)][M(f, S) - m(f, S)] \leq$$

$$\leq 2C[M(f, S) - m(f, S)]$$

donde $C = M(f, A)$. Multiplicando esta desigualdad por $v(S)$, y sumando cuando S recorre $\Delta(p)$, resulta

$$S(f^2, p) - s(f^2, p) \leq 2C[S(f, p) - s(f, p)]$$

Como esta desigualdad es válida para cada $p \in \mathcal{P}(A)$, con 10.3 se obtiene que $f \in \mathcal{R}(A) \Rightarrow f^2 \in \mathcal{R}(A)$.

Cuando $0 \leq f, g \in \mathcal{R}(A)$, como $fg = \frac{1}{2}[(f + g)^2 - f^2 - g^2]$, según lo que se acaba de demostrar y la propiedad a) resulta $fg \in \mathcal{R}(A)$. Finalmente, cuando $f, g \in \mathcal{R}(A)$ son arbitrarias, usando las propiedades a) y c) y lo que ya se ha demostrado resulta $fg = f^+g^+ + f^-g^- - f^+g^- - f^-g^+ \in \mathcal{R}(A)$.

e) La demostración se reduce al caso en que $\Delta(p) = \{A_1, A_2\}$, consta de dos rectángulos. Dadas sendas subdivisiones $p' \in \mathcal{P}(A_1)$, $p'' \in \mathcal{P}(A_2)$, podemos obtener una subdivisión $q \in \mathcal{P}(A)$, que induce en A_1, y en A_2, subdivisiones q', y q'', más finas que p', y p'', respectivamente. Entonces

$$S(f, p') + S(f, p'') \geq S(f, q') + S(f, q'') = S(f, q) \geq \overline{\int_A} f.$$

$$s(f, p') + s(f, p'') \leq s(f, q') + s(f, q'') = s(f, q) \leq \underline{\int_A} f.$$

Si $f \in \mathcal{R}(A_1)$, y $f \in \mathcal{R}(A_2)$, considerando el extremo inferior de las sumas $S(f, p')$, y luego el de las sumas $S(f, p'')$, se obtiene

$$\int_{A_1} f + \int_{A_2} f \geq \overline{\int_A} f$$

Análogamente, considerando el extremo superior de las sumas $s(f, p')$, y luego el de las sumas $s(f, p'')$, resulta

$$\int_{A_1} f + \int_{A_2} f \leq \underline{\int_A} f$$

Se concluye así que $f \in \mathcal{R}(A)$, y que $\int_A f = \int_{A_1} f + \int_{A_2} f$.

Recíprocamente, si $f \in \mathcal{R}(A)$, en virtud de 10.3, dado $\epsilon > 0$, existe $q \in \mathcal{R}(A)$, tal que $S(f, q) - s(f, q) < \epsilon$. No hay inconveniente en suponer que q es más fina que p. Entonces, podemos considerar las subdivisiones $q' \in \mathcal{P}(A_1)$, y $q'' \in \mathcal{P}(A_2)$, que q induce en A_1, y en A_2, respectivamente, para las que se cumple

$$S(f, q') - s(f, q') < \epsilon, \quad S(f, q'') - s(f, q'') < \epsilon,$$

luego, en virtud de 10.3, f es integrable sobre A_1, y sobre A_2.

f) La traslación $\mathbf{x} \to \mathbf{x} + \mathbf{u}$, establece una biyección natural $p \to p'$, entre las subdivisiones $p \in \mathcal{P}(A)$, y las subdivisiones $p' \in \mathcal{P}(A_{\mathbf{u}})$, en la que a cada rectángulo $S \in \Delta(p)$, le corresponde el trasladado $S' = \mathbf{u} + S \in \Delta(p')$. Es evidente que

$$M(f, S) = M(f_{\mathbf{u}}, S'), \quad m(f, S) = m(f_{\mathbf{u}}, S'), \quad v(S) = v(S')$$

luego $S(f, p) = S(f_{\mathbf{u}}, p')$, y $s(f, p) = s(f_{\mathbf{u}}, p')$. De estas igualdades se desprende el resultado. ■

El siguiente resultado, que ha quedado establecido en la demostración del apartado a) de la proposición anterior, conviene hacerlo explícito para que sirva de referencia en algunas de las demostraciones que siguen.

Proposición 10.6 *Si* $f, g : A \to \mathbb{R}$ *son funciones acotadas sobre el rectángulo cerrado* $A \subset \mathbb{R}^n$, *se verifica,* $\overline{\int_A}(f+g) \leq \overline{\int_A} f + \overline{\int_A} g$.

El objetivo del siguiente lema es establecer, con los recursos disponibles en este momento, un resultado parcial que sirve para justificar una afirmación que se hace al comienzo de la siguiente sección.

Lema 10.7 *Si* $f : A \to \mathbb{R}$ *es acotada en un intervalo cerrado* $A \subset \mathbb{R}^n$, *y* $f(\mathbf{x}) = 0$ *para todo* $\mathbf{x} \in A^\circ$ *entonces* f *es integrable y* $\int_A f = 0$.

Dem: Basta demostrarlo cuando $f \geq 0$ (ya que el caso general se reduce a este considerando la descomposición $f = f^+ - f^-$).

Para cada $\epsilon > 0$ sea $A_\epsilon \subset A^\circ$ un rectángulo cerrado tal que $v(A) - v(A_\epsilon) < \epsilon/C$, donde $C > M(f, A)$ es una cota superior de f. Sea $q \in \mathcal{P}(A)$ tal que $A_\epsilon \in \Delta(q)$. Como $M(f, A_\epsilon) = 0$, se tiene

$$S(f, q) = \sum_{S \in \Delta(q), S \neq A_\epsilon} M(f, S)v(S) \leq \sum_{S \in \Delta(q), S \neq A_\epsilon} Cv(S) = C(v(A) - v(A_\epsilon)) < \epsilon$$

luego, $0 \leq \underline{\int_A} f \leq \overline{\int_A} f \leq S(f, q) \leq \epsilon$. Como $\epsilon > 0$ es arbitrario se obtiene que f es integrable sobre A con $\int_A f = 0$. ■

10.2. Conjuntos medibles Jordan

Un conjunto acotado $E \subset \mathbb{R}^n$ se dice que es *medible Jordan* si está contenido en un rectángulo cerrado $A \subset \mathbb{R}^n$ tal que la función característica χ_E es integrable Riemann sobre A. En este caso, si $A' \subset \mathbb{R}^n$ es otro rectángulo cerrado que contiene a E, es fácil ver que χ_E también es integrable Riemann sobre A', con la misma integral $\int_{A'} \chi_E = \int_A \chi_E$.

Efectivamente, $B = A \cap A'$, es un rectángulo cerrado y existen subdivisiones $p \in \mathcal{P}(A)$, $p' \in \mathcal{P}(A')$ tales que $B \in \Delta(p)$, y $B \in \Delta(p')$. Como E está contenido en B, para cada $S \in \Delta(p)$ con $S \neq B$ la función χ_E es nula sobre S°, y según el lema 10.7 es integrable sobre S, con integral nula. Usando 10.5 e), se obtiene

$$\chi_E \in \mathcal{R}(A) \Leftrightarrow \chi_E \in \mathcal{R}(B), \quad \text{y} \quad \int_A \chi_E = \int_B \chi_E$$

Análogamente se razona con A' y se concluye que

$$\chi_E \in \mathcal{R}(A) \Leftrightarrow \chi_E \in \mathcal{R}(B) \Leftrightarrow \chi_E \in \mathcal{R}(A') \quad \text{y} \quad \int_A \chi_E = \int_B \chi_E = \int_{A'} \chi_E.$$

En lo que sigue denotaremos por $\mathcal{M}_n$ la familia de los subconjuntos medibles Jordan de $\mathbb{R}^n$. Las consideraciones anteriores ponen de manifiesto que para cada $E \in \mathcal{M}_n$, el valor de la integral $\int_A \chi_E$ es el mismo para todo rectángulo cerrado A que contenga a E, por lo que, en lo que sigue, podemos omitir el rectángulo $A \supset E$, y escribir $\int \chi_E = \int_A \chi_E$.

El número $c(E) = \int \chi_E$ se llama *contenido de Jordan* (n-dimensional) de E. Cuando sea preciso especificar la dimensión n que se está considerando escribiremos $c_n(E)$, en lugar de $c(E)$. Así c_3 mide volúmenes de sólidos en $\mathbb{R}^3$, c_2 mide áreas de regiones planas en $\mathbb{R}^2$, etc.

La siguiente proposición es consecuencia inmediata de las definiciones y de las propiedades básicas de la integral establecidas en 10.5.

Proposición 10.8

a) Si $E, F \in \mathcal{M}_n$, y $E \subset F$, entonces $c(E) \leq c(F)$.

b) Si $E, F \in \mathcal{M}_n$, entonces $E \cap F \in \mathcal{M}_n$, $E \cup F \in \mathcal{M}_n$, $E \setminus F \in \mathcal{M}_n$, y $c(E \cup F) \leq c(E) + c(F)$. Si $c(E \cap F) = 0$, se cumple $c(E \cup F) = c(E) + c(F)$.

c) Si $E_1, E_2, \cdots E_m \in \mathcal{M}_n$, entonces $E = \cup_{k=1}^m \in \mathcal{M}_n$, y $c(E) \leq \sum_{k=1}^m c(E_k)$, y si los conjuntos son disjuntos se cumple la igualdad.

d) Si $A \subset \mathbb{R}^n$ es un rectángulo cerrado, y $A^\circ \subset R \subset A$, entonces R es medible Jordan y $c(R) = v(A)$. En particular, A° y A son medibles Jordan y $c(A^\circ) = c(A) = v(A)$.

e) Si $E \in \mathcal{M}_n$ y $\mathbf{u} \in \mathbb{R}$, entonces $\mathbf{u} + E \in \mathcal{M}_n$, y $c(E) = c(\mathbf{u} + E)$.

Dem:
a) es consecuencia directa de 10.5 b), ya que $\chi_E \leq \chi_F$.
b) se obtiene aplicando 10.5 d) y 10.5 a), ya que

$$\chi_{E\cap F} = \chi_E \chi_F, \quad \chi_{E\cup F} = \chi_E + \chi_F - \chi_E \chi_F, \quad \chi_{E\setminus F} = \chi_E - \chi_E \chi_F$$

c) Según acabamos de ver, el resultado es cierto para $m = 2$, y la demostración se completa por inducción sobre m.
d) La función acotada $\chi_R - 1$ se anula sobre A° luego, según el lema 10.7, es

integrable sobre A con $\int_A(\chi_R - 1) = 0$. Como la función constante 1 es integrable sobre A se sigue que χ_R también lo es, y $\int_A \chi_R = \int_A 1 = v(A)$.
e) Basta aplicar 10.5 f) a la función χ_E, teniendo en cuenta que $\chi_E(\mathbf{x} - \mathbf{u})$ es la función característica de $\mathbf{u} + E$. ■

NOTA: Se puede demostrar que toda función de conjunto $\mu : \mathcal{M}_n \to [0, +\infty)$ que verifique

i) $\mu([0,1)^n) = 1$; $\mu(\mathbf{x} + E) = \mu(E)$ para todo $E \in \mathcal{M}_n$ y todo $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$.

ii) $\mu(E_1 \cup E_2) = \mu(E_1) + \mu(E_2)$ si $E_1, E_2 \in \mathcal{M}_n$ y $E_1 \cap E_2 = \emptyset$

coincide con el contenido de Jordan (véase ([5], prob. 38, pág 159).

Contenido interior y contenido exterior. Dado un conjunto acotado $E \subset \mathbb{R}^n$, su *contenido exterior* y su *contenido interior* de Jordan se pueden definir en términos de las integrales superior e inferior

$$c^*(E) = \overline{\int_A} \chi_E, \qquad c_*(E) = \underline{\int_A} \chi_E$$

donde A es cualquier rectángulo cerrado que contiene a E (utilizando lo que se establece en el ejercicio 10.28 es fácil justificar que los valores $\overline{\int_A}\chi_E$, $\underline{\int_A}\chi_E$, no dependen del rectángulo cerrado $A \supset E$).

Es obvio que $c_*(E) \leq c^*(E)$, y que se cumple la igualdad si y sólo si E es medible Jordan. También es inmediato que las funciones de conjunto c^* y c_* son monótonas: Si $E \subset F \subset \mathbb{R}^n$ son acotados entonces $c_*(E) \leq c_*(F)$, y $c^*(E) \leq c^*(F)$.

Con el fin de dar una interpretación geométrica del contenido interior y del contenido exterior, introducimos la siguiente terminología: Llamamos *figura elemental* a un conjunto acotado $Z \subset \mathbb{R}^n$ que admite una representación de la forma $Z = \cup\{S : S \in \Gamma\}$, donde $\Gamma \subset \Delta(p)$ y $p \in \mathcal{P}(A)$ es una subdivisión de algún rectángulo cerrado $A \supset Z$. En ese caso diremos que $Z = \cup\{S : S \in \Gamma\}$ es una representación asociada a la partición p. Es claro que esta representación no es única, pues si $q \in \mathcal{P}(A)$ es más fina que p, entonces Z también admite una representación asociada a q. Toda figura elemental $Z \subset \mathbb{R}^n$ es medible Jordan y si $Z = \cup\{S : S \in \Gamma\}$ es una representación asociada a $p \in \mathcal{P}(A)$ entonces $c(Z) = \sum_{S\in\Gamma} v(s)$ (la justificación detallada de esta afirmación se puede ver en el ejercicio 10.29).

Si $\mathcal{E}_n \subset \mathcal{M}_n$ es la familia de las figuras elementales se puede demostrar (véase el ejercicio 10.30) para un conjunto acotado $E \subset \mathbb{R}^n$ se verifica

$$c^*(E) = \inf\{c(Z) : E \subset Z \in \mathcal{E}_n\}$$

$$c_*(E) = \sup\{c(Z') : E \supset Z' \in \mathcal{E}_n\}$$

Conjuntos de contenido nulo. Un conjunto medible Jordan $E \subset \mathbb{R}^n$ que cumple $c_n(E) = 0$, se dice que tiene *contenido nulo* (n-dimensional).

Proposición 10.9 *Las siguientes propiedades de un conjunto acotado $E \subset \mathbb{R}^n$ son equivalentes:*

i) E tiene contenido nulo.

ii) Para cada $\epsilon > 0$ existe una familia finita de rectángulos cerrados $\{S_1, S_2, \cdots S_m\}$, tal que $E \subset \bigcup_{k=1}^m S_k$, y $\sum_{k=1}^m v(S_k) < \epsilon$.

iii) Para cada $\epsilon > 0$ existe una familia finita de rectángulos abiertos, $\{U_1, U_2, \cdots U_m\}$, tal que $E \subset \bigcup_{k=1}^m U_k$, y $\sum_{k=1}^m v(U_k) < \epsilon$.

Dem: i) $\Rightarrow$ ii): Si se cumple i) existe un rectángulo cerrado $A \supset E$ tal que χ_E es integrable sobre A, con $\int_A \chi_E = 0$. Para cada $\epsilon > 0$ existe $p \in \mathcal{P}(A)$ tal que $S(\chi_E, p) < \epsilon$. El recubrimiento finito de E formado por los rectángulos (cerrados) $S_1, S_2, \cdots S_m \in \Delta(p)$ que tienen intersección no vacía con E verifica

$$\sum_{j=1}^m v(S_j) = S(\chi_E, p) < \epsilon$$

ii) $\Rightarrow$ iii): Dado $\epsilon > 0$, sean $\{S_j : 1 \leq j \leq m\}$, los rectángulos cerrados suministrados por la hipótesis ii). Como $r = \epsilon - \sum_{j=1}^m v(S_j) > 0$, para cada $j \in \{1, 2, \cdots, m\}$ existe un rectángulo abierto $U_j \supset S_j$ con $v(U_j) < v(S_j) + r/m$. Estos rectángulos abiertos cubren E, y verifican

$$\sum_{j=1}^m v(U_j) < \sum_{j=1}^m v(S_j) + r = \epsilon$$

iii) $\Rightarrow$ i): Para cada $\epsilon > 0$, la hipótesis iii) proporciona un abierto $G = \cup_{k=1}^m U_k$ que contiene a E. En virtud de los apartados c) y d) de la proposición 10.8 este abierto es medible Jordan y verifica

$$c(G) \leq \sum_{k=1}^m c(U_k) = \sum_{k=1}^m v(U_k) < \epsilon$$

luego $0 \leq c_*(E) \leq c^*(E) \leq c(G) < \epsilon$. Como $\epsilon > 0$ es arbitrario se concluye que E es medible Jordan con $c(E) = 0$. ∎

Con la caracterización de 10.9 ii) se obtiene que si $H \subset \mathbb{R}^n$ tiene contenido nulo entonces $\overline{H}$ también lo tiene. Es inmediato que todo subconjunto de un conjunto de contenido nulo tiene contenido nulo y que la unión de una familia finita de conjuntos de contenido nulo tiene contenido nulo. Los conjuntos finitos tienen contenido nulo, pero hay conjuntos numerables que no tienen contenido nulo: $H = [0, 1] \cap \mathbb{Q}$ no tiene contenido nulo en $\mathbb{R}$ porque $\overline{H} = [0, 1]$ no tiene contenido nulo. En $\mathbb{R}$ existen conjuntos no numerables de contenido nulo (véase [5] pág 316).

La siguiente proposición proporciona una clase amplia de conjuntos de contenido nulo.

Proposición 10.10 *Si* $f : A \to \mathbb{R}$ *es integrable Riemann en un rectángulo cerrado* $A \subset \mathbb{R}^n$, *su gráfica* $G(f) = \{(\mathbf{x}, f(\mathbf{x})) : \mathbf{x} \in A\}$ *tiene contenido nulo en* $\mathbb{R}^{n+1}$.

DEM: Según la proposición 10.3, para cada $\epsilon > 0$ existe $p \in \mathcal{P}(A)$, tal que

$$S(f,p) - s(f,p) = \sum_{S \in \Delta(p)} [M(f,S) - m(f,S)]v(S) < \epsilon$$

Los sumandos que intervienen en esta suma se pueden interpretar como volúmenes de los rectángulos cerrados $R_S = S \times [m(f,S), M(f,S)] \subset \mathbb{R}^{n+1}$, que recubren $G(f)$, luego, en virtud de la proposición 10.9, $G(f)$ tiene contenido nulo. ■

Integración sobre conjuntos medibles Jordan. Si $f : D \to \mathbb{R}$ es una función con dominio $D \subset \mathbb{R}^n$, dado $E \subset D$ se define f_E como la función que coincide con f en E y vale 0 en $\mathbb{R}^n \setminus E$.

Definición 10.11 *Si* E *es acotado y* f_E *es integrable Riemann sobre algún rectángulo cerrado n-dimensional* $A \supset E$, *se dice que* f *es integrable Riemann sobre* E. *En ese caso se define*

$$\int_E f(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = \int_A f_E(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}$$

Razonando como se hizo al definir el contenido $c(E)$, (donde se hizo lo mismo con $f = 1$) es fácil comprobar que la definición anterior no depende del rectángulo cerrado A en el que se considere incluido E.

Obsérvese que una condición necesaria y suficiente para que las funciones constantes sean integrables Riemann sobre el conjunto acotado $E \subset \mathbb{R}^n$ es que E sea medible Jordan. Por ello, en lo que sigue, sólo consideramos integrales sobre conjuntos medibles Jordan. Denotaremos por $\mathcal{R}(E)$ el conjunto de las funciones integrables Riemann sobre E.

Utilizando la proposición 10.5, es inmediato comprobar que $\mathcal{R}(E)$ es un espacio vectorial sobre el cuerpo de los números reales sobre el cual la integral $f \to \int_E f$ es una forma lineal monótona. Además, $f \in \mathcal{R}(E) \Rightarrow |f| \in \mathcal{R}(E)$ y $|\int_E| \leq \int_E |f|$.

Proposición 10.12

a) *Si* $H \subset \mathbb{R}^n$ *tiene contenido nulo y* $f : H \to \mathbb{R}$ *es acotada entonces* f *es integrable sobre* H, *con integral nula,* $\int_H f = 0$.

b) *Sean* $E_1, E_2 \subset \mathbb{R}^n$ *medibles Jordan y* $E = E_1 \cup E_2$. *Una función acotada* $f : E \to \mathbb{R}$, *es integrable sobre* E *si y sólo si es integrable sobre* E_1 *y sobre* E_2. *En este caso, si* $E_1 \cap E_2$ *tiene contenido nulo,*

$$\int_E f(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = \int_{E_1} f(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} + \int_{E_2} f(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}$$

Dem: a) Basta demostrarlo cuando $f \geq 0$, pues el caso general se reduce a este considerando la descomposición $f = f^+ - f^-$.

Sea $A \subset \mathbb{R}^n$ un rectángulo cerrado que contiene a H. Si $\alpha > 0$ es una cota de f, se cumple $0 \leq f_H \leq \alpha \chi_H$, luego

$$0 \leq \underline{\int_A} f_H \leq \overline{\int_A} f_H \leq \alpha \int_A \chi_H = \alpha c(H) = 0$$

b) Sea $A \subset \mathbb{R}^n$ un rectángulo cerrado que contiene a E.

Si f es integrable sobre E se verifica $f_E \in \mathcal{R}(A)$, y en virtud de 10.5 d), podemos afirmar que $f_{E_i} = \chi_{E_i} f_E \in \mathcal{R}(A)$. Análogamente, $f_{E_1 \cap E_2} \in \mathcal{R}(A)$.

Recíprocamente, si las funciones f_{E_1}, f_{E_2}, son integrables sobre A, por lo que acabamos de demostrar, también lo es $f_{E_1 \cap E_2}$, luego $f_E = f_{E_1} + f_{E_2} - f_{E_1 \cap E_2}$ es integrable sobre A. Si $c(E_1 \cap E_2) = 0$, según a), $\int_A f_{E_1 \cap E_2} = \int_{E_1 \cap E_2} f = 0$, luego

$$\int_E f = \int_{E_1} f + \int_{E_2} f.$$

■

El siguiente corolario pone de manifiesto que los conjuntos de contenido nulo son despreciables frente a la integral de Riemann: La modificación de una función integrable en un conjunto de puntos de contenido nulo no perturba ni la integrabilidad de la función ni el valor de su integral.

Corolario 10.13 *Sean $f, g : E \to \mathbb{R}$, funciones acotadas en un conjunto medible Jordan $E \subset \mathbb{R}^n$, tales que $H = \{\mathbf{x} \in E : f(\mathbf{x}) \neq g(\mathbf{x})\}$ tiene contenido nulo. Entonces f es integrable Riemann sobre E si y sólo si lo es g, y en ese caso*

$$\int_E f(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} = \int_E g(\mathbf{x})\, d\mathbf{x}$$

Dem: Según 10.12 a), la diferencia $\varphi = f - g$ es integrable Riemann sobre H, y $\int_H \varphi = 0$. Como φ es idénticamente nula sobre $E \setminus H$, aplicando 10.12 b) con $E_1 = H$, $E_2 = E \setminus H$, se obtiene que $\int_E \varphi = 0$. ■

Aunque el siguiente resultado quedará incluido en uno posterior (10.27) que depende del teorema de Lebesgue 10.24, merece la pena dar ver una demostración directa directa del mismo basada en el teorema 10.4.

Proposición 10.14 *Toda función continua acotada $f : E \to \mathbb{R}$ en un conjunto medible Jordan $E \subset \mathbb{R}^n$, es integrable Riemann sobre E.*

Dem: Como $f = f^+ - f^-$, donde $f^+, f^- \geq 0$ son continuas sobre E, basta hacer la demostración en el caso particular $f \geq 0$.

Sea $\alpha > 0$ una cota de f sobre E, y $A \subset \mathbb{R}^n$ un rectángulo cerrado que contiene a E. Como χ_E es integrable sobre A, dado $\epsilon > 0$ existe $p \in \mathcal{P}(A)$ tal que $S(\chi_E, p) - s(\chi_E, p) < \epsilon/\alpha$, es decir

$$\sum_{S \in \Delta'(p)} v(S) - \sum_{S \in \Delta''(p)} v(S) < \epsilon/\alpha$$

donde $\Delta'(p) = \{S \in \Delta(p) : S \cap E \neq \emptyset\}$, $\Delta''(p) = \{S \in \Delta(p) : S \subset E\}$.

Sea $\Gamma = \Delta'(p) \setminus \Delta''(p)$, y $Z = \bigcup_{S\in\Gamma} S$. Como $\chi_Z \leq \sum_{S\in\Gamma} \chi_S$, resulta

$$\int_A \chi_Z \leq \sum_{S\in\Gamma} \int_A \chi_S = \sum_{S\in\Gamma} c(S) = \sum_{S\in\Gamma} v(S) < \epsilon/\alpha$$

y teniendo en cuenta que $f_Z \leq \alpha\chi_Z$, se obtiene que $\overline{\int_A} f_Z \leq \int_A \alpha\chi_Z < \epsilon$.

Consideremos ahora las figuras elementales

$$Z_1 = \bigcup_{S\in\Delta'(p)} S, \qquad Z_2 = \bigcup_{S\in\Delta''(p)} S$$

Cada rectángulo cerrado $S \in \Delta''(p)$ está contenido en E, luego f es continua sobre S, y por lo tanto integrable (10.4). Entonces, en virtud de 10.12 b), f es integrable sobre Z_2.

Como $Z_2 \subset E \subset Z_1 = Z_2 \cup Z$, se cumple $f_{Z_2} \leq f_E \leq f_{Z_1} \leq f_{Z_2} + f_Z$, y utilizando 10.6 se obtiene

$$\int_A f_{Z_2} \leq \underline{\int_A} f_E \leq \overline{\int_A} f_E \leq \overline{\int_A} f_{Z_1} \leq \overline{\int_A} f_{Z_2} + \overline{\int_A} f_Z = \int_A f_{Z_2} + \overline{\int_A} f_Z \leq \int_A f_{Z_2} + \epsilon$$

Como $\epsilon > 0$ es arbitrario se concluye que $\underline{\int_A} f_E = \overline{\int_A} f_E$, lo que significa que f es integrable sobre E. ■ .

El siguiente objetivo es establecer un criterio útil para justificar que cierto tipo de conjuntos, que surgen habitualmente en el cálculo integral, son medibles Jordan.

Si $f, g : A \to \mathbb{R}$ son funciones definidas en un rectángulo cerrado $A \subset \mathbb{R}^n$, y $g \leq f$, denotaremos por $R(g, f, A)$ el subconjunto de $\mathbb{R}^{n+1}$ definido así

$$R(g, f, A) = \{(\mathbf{x}, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} : \mathbf{x} \in A, g(\mathbf{x}) \leq y \leq f(\mathbf{x})\}$$

A veces también es conveniente considerar

$$R_0(g, f, A) = \{(\mathbf{x}, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} : \mathbf{x} \in A, g(\mathbf{x}) < y < f(\mathbf{x})\}$$

En el caso particular $g = 0 \leq f$, escribiremos más brevemente $R(f, A)$, $R_0(f, A)$. La diferencia $R(g, f, A) \setminus R_0(g, f, A)$ es la unión de las gráficas $G(f) \cup G(g)$ y por lo tanto tendrá contenido nulo cuando f y g sean integrables Riemann (véase la proposición 10.10).

Proposición 10.15 *Sean $f, g : A \to [0 + \infty)$ funciones integrables Riemann en un rectángulo cerrado $A \subset \mathbb{R}^n$, tales que $g \leq f$. Entonces cualquier conjunto W que verifique $R_0(g, f, A) \subset W \subset R(g, f, A)$ es medible Jordan y*

$$c_{n+1}(W) = \int_A (f(\mathbf{x}) - g(\mathbf{x}))\ d\mathbf{x}$$

Dem: i) Empecemos con el caso particular $g = 0 \le f$, considerando un conjunto W tal que $R_0(f, A) \subset W \subset R(f, A)$. Para cada $p \in \mathcal{P}(A)$ podemos interpretar la suma inferior

$$s(f, p) = \sum_{S \in \Delta(p)} m(f, S)v(S)$$

como suma de volúmenes de rectángulos abiertos disjuntos $U_S = S^\circ \times (0, m(f, S))$ contenidos en W. En virtud de 10.8 c) la unión U de estos rectángulos abiertos es un abierto medible Jordan contenido en W, luego

$$s(f, p) = \sum_{S \in \Delta(p)} v_{n+1}(U_S) = c_{n+1}(U) \le c_*(W)$$

Considerando el supremo de las sumas $s(f, p)$, resulta $\int_A f \le c_*(W)$.

Análogamente podemos interpretar la suma superior

$$S(f, p) = \sum_{S \in \Delta(p)} M(f, S)v(S)$$

como una suma de volúmenes de rectángulos cerrados $B_S = S \times [0, M(f, S)]$, cuya unión B contiene a W. En virtud de la proposición 10.8 B es un conjunto medible Jordan que cumple

$$c^*(W) \le c_{n+1}(B) \le \sum_{S \in \Delta(p)} c_{n+1}(B_S) = \sum_{S \in \Delta(p)} v_{n+1}(B_S) = S(f, p)$$

y considerando el extremo inferior de las sumas $S(f, p)$, resulta $c^*(W) \le \int_A f$.

Juntando las dos desigualdades que hemos establecido queda demostrado que $c_*(W) = c^*(W) = \int_A f$, luego W es medible Jordan en $\mathbb{R}^{n+1}$, y

$$c_{n+1}(W) = \int_A f$$

ii) Para demostrar el caso general, $g \le f$, considerando una cota inferior α de las funciones f, g, podemos escribir $R(g, f, A) = F_\alpha - E_\alpha$, donde

$$E_\alpha = \{(\mathbf{x}, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} : \mathbf{x} \in A, \alpha \le y < g(\mathbf{x})\}$$

$$F_\alpha = \{(\mathbf{x}, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} : \mathbf{x} \in A, \alpha \le y \le f(\mathbf{x})\}$$

Estos conjuntos son trasladados de los conjuntos

$$E = \{(\mathbf{x}, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} : \mathbf{x} \in A, 0 \le y < g(\mathbf{x}) - \alpha\}$$

$$F = \{(\mathbf{x}, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} : \mathbf{x} \in A, 0 \le y \le f(\mathbf{x}) - \alpha\}$$

que son medibles Jordan por lo demostrado en el caso preliminar i). Se sigue que E_α y F_α son medibles, y según 10.8, e) se verifica

$$c_{n+1}(E_\alpha) = \int_A (g - \alpha); \quad c_{n+1}(F_\alpha) = \int_A (f - \alpha).$$

luego $R(g, f, A) = F_\alpha - E_\alpha$, es medible Jordan y

$$c_{n+1}(R(g, f, A)) = c_{n+1}(F_\alpha) - c_{n+1}(E_\alpha) = \int_A (f - g)$$

Finalmente, como $R(g, f, A) \setminus W \subset G(f) \cup G(g)$ tiene contenido nulo, se sigue que W es medible Jordan en $\mathbb{R}^{n+1}$, y además $c_{n+1}(W) = c_{n+1}(R(g, f, A))$. ■

Corolario 10.16 *Los resultados de la proposición 10.15 siguen siendo ciertos para funciones integrables Riemann $g \le f$, sobre un conjunto medible Jordan $E \subset \mathbb{R}^{n+1}$.*

Dem: Sean $g \le f$ integrables Riemann sobre un conjunto medible Jordan $E \subset \mathbb{R}^n$ y $A \subset \mathbb{R}^n$ un rectángulo cerrado que contiene a E. Las funciones f_E, g_E son integrables Riemann sobre A, y es claro que $R_0(g, f, E) = R_0(g_E, f_E, A)$, luego, en virtud de 10.15, $R_0(g, f, E)$ es medible Jordan y

$$c_{n+1}(R_0(g, f, E)) = \int_A (f_E - g_E) = \int_E (f - g)$$

Según 10.10, los trozos de gráficas $G(f_E)$, $G(g_E)$, que determina A, tienen contenido nulo, luego también lo tienen $G(f) \subset G(f_E)$, y $G(g) \subset G(g_E)$. Entonces $W \setminus R_0(g, f, E)$ tiene contenido nulo y se sigue que W es medible Jordan con $c_{n+1}(W) = c_{n+1}(R_0(g, f, E))$. ■

Algunas aplicaciones del cálculo integral. Los resultados establecidos 10.15 y 10.16, combinados con la proposición 10.8 permiten establecer que las figuras geométricas elementales de $\mathbb{R}^2$ (triángulos, polígonos, círculos, elipses, etc.) son medibles Jordan y que su contenido es el área que la geometría elemental asigna a tales figuras. Lo mismo se puede decir de las figuras geométricas elementales de $\mathbb{R}^3$, como pirámides, poliedros, esferas, elipsoides, etc.

Si f es integrable Riemann sobre el conjunto medible Jordan $E \subset \mathbb{R}$, teniendo en cuenta la descomposición $f = f^+ - f^-$, y el corolario 10.16 resulta que el valor de la integral

$$\int_E f(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} = \int_E f^+(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} - \int_E f^-(\mathbf{x})\, d\mathbf{x}$$

se puede interpretar como la diferencia de los volúmenes en $\mathbb{R}^{n+1}$, de los recintos $R(f^+, E)$, $R(f^-, E)$. Hablando de manera informal, $\int_E f(\mathbf{x})\, d\mathbf{x}$ es la suma de los volúmenes determinados por la gráfica de f, contando con volumen positivo el que queda por encima de E, y con volumen negativo el que queda por debajo.

Además del cálculo de áreas y volúmenes la integral tiene diversas aplicaciones. Con la integral triple de un función no negativa se puede describir la distribución de la masa en un cuerpo no homogéneo. Con el fin de motivar las definiciones que siguen comenzamos con algunas consideraciones heurísticas procedentes de la física: Supongamos que el cuerpo es un bloque de un material no homogéneo que ocupa un intervalo cerrado $A \subset \mathbb{R}^3$ y que la densidad del material en cada punto $\mathbf{x} \in A$ viene dada por una función $\rho(\mathbf{x}) \geq 0$. Esto significa que la masa $\mu(S)$ de un bloque muy pequeño $S \subset A$, con $\mathbf{x} \in S$, es aproximadamente $\rho(\mathbf{x})v(S)$, y que la aproximación mejora conforme disminuye el tamaño del bloque, lo que se puede expresar así

$$\lim_{\mathbf{x}\in S, \mathrm{diam(S)} \to 0} \frac{\mu(S)}{v(S)} = \rho(\mathbf{x})$$

Según esto, una valor aproximado de la masa total $\mu(A)$ del bloque se consigue con una suma de Riemann $\sum_{S\in\Delta(p)} \rho(\mathbf{x}_S)v(S)$, donde $\mathbf{x}_S \in S$ para cada $S \in \Delta(p)$, y $p \in \mathcal{P}(A)$ es una partición suficientemente fina de A. Refinando la partición p, de modo que tienda hacia 0 su diámetro,

$$\mathrm{diam}(p) := \max\{\mathrm{diam}(S) : S \in \Delta(p)\}$$

lograremos aproximaciones, cada vez más precisas, del la masa total $\mu(A)$, y suponiendo que la densidad puntual $\rho(\mathbf{x})$, es una función integrable sobre A es natural definir la masa total del bloque mediante la integral triple

$$\mu(A) = \int_A \rho(\mathbf{x})\ d\mathbf{x}$$

Consideraciones análogas se pueden hacer para un cuerpo no homogéneo que ocupa un recinto medible Jordan $M \subset \mathbb{R}^3$, con función de densidad puntual $\rho(\mathbf{x}) \geq 0$, que permite obtener la masa total de cada trozo medible $E \subset M$ mediante la integral

$$\mu(E) = \int_E \rho(\mathbf{x})\ d\mathbf{x}$$

Estas consideraciones preliminares son la motivación de la siguiente definición

Definición 10.17 *La masa de un sólido, que ocupa un recinto medible Jordan $M \subset \mathbb{R}^3$, se dice que está distribuida según la función de densidad $\rho : M \to [0, +\infty)$, cuando ρ es integrable Riemann sobre M y la masa de cada porción medible $E \subset M$ viene dada por $\mu(E) = \int_E \rho(\mathbf{x})\ d\mathbf{x}$.*

La siguiente proposición pone de manifiesto que, en las condiciones de la definición anterior, si $\mathbf{x}$ es interior a M, y la función de densidad es continua en $\mathbf{x}$, entonces $\rho(\mathbf{x})$ es realmente el límite del cociente entre la masa y el volumen de las intervalos cerrados $S \subset M$, que se contraen hacia $\mathbf{x}$ (e.d. tales que $\mathbf{x} \in S$, y $\mathrm{diam}(S) \to 0$).

Proposición 10.18 *Sea $f : M \to \mathbb{R}$ una función integrable Riemann sobre un recinto medible Jordan $M \subset \mathbb{R}^n$ y $\mathbf{a}$ un punto interior de M donde f es continua: Entonces la función de conjunto $\mu(E) = \int_E f$, definida sobre todos los conjuntos medibles Jordan $E \subset M$, verifica*

$$\lim_{\mathbf{a}\in S, diam(S) \to 0} \frac{\mu(S)}{v(S)} = f(\mathbf{a})$$

Dem: Como $\mathbf{a}$ es interior a M, y f es continua en $\mathbf{a}$, existe $\delta > 0$ tal que $B_\infty(\mathbf{a}, \delta) \subset M$ y se cumple

$$\mathbf{x} \in B_\infty(\mathbf{a}, \delta) \Rightarrow |f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{a})| < \epsilon$$

Si S es un intervalo cerrado con $\mathbf{a} \in S$, y $\operatorname{diam}(S) < \delta$, se cumple $S \subset B_\infty(\mathbf{a}, \delta)$, luego, para todo $\mathbf{x} \in S$ se verifica $f(\mathbf{a}) - \epsilon < f(\mathbf{x}) < f(\mathbf{a}) + \epsilon$, y se sigue que $\int_S [f(\mathbf{a}) - \epsilon] \leq \int_S f \leq \int_S [f(\mathbf{a}) + \epsilon]$, es decir, $v(S)[f(\mathbf{a}) - \epsilon] \leq \int_S f \leq v(S)[f(\mathbf{a}) + \epsilon]$. Dividiendo por $v(S) > 0$, queda establecido que

$$\mathbf{a} \in S,\ \operatorname{diam}(S) < \delta \ \Rightarrow \left| \frac{\mu(S)}{v(S)} - f(\mathbf{a}) \right| \leq \epsilon$$

y con ello lo que se deseaba demostrar. ■

nota: Cuando $n = 1$ la proposición anterior no es otra cosa que el teorema fundamental del cálculo para funciones de una variable. Si consideramos la función $F(x) = \int_a^x f(t)dt$, y utilizamos intervalos de la forma $S = [a, a+h]$, donde $h > 0$, se tiene $\mu(S) = F(a+h) - F(a)$, y la conclusión se escribe ahora en la forma

$$\lim_{h \to 0+} \frac{F(a+h) - F(a)}{h} = f(a)$$

es decir, F es derivable por la derecha en a, con derivada lateral $F'_d(a)f(a)$. Análogamente, con intervalos de la forma $[a-h, a]$, donde $h > 0$, se obtiene que F es derivable por la izquierda en a, con derivada lateral $F'_i(a) = f(a)$.

Definición 10.19 *Si la masa un sólido que ocupa un recinto medible Jordan $M \subset \mathbb{R}^3$, se distribuye según la función de densidad $\rho : M \to [0, +\infty)$, se llama centro de masa del sólido al punto $\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3) \in \mathbb{R}^3$, de coordenadas*

$$b_j = \frac{1}{\mu(M)} \int_M x_j \rho(x_1, x_2, x_3)\ dx_1\ dx_2\ dx_3, \quad \text{donde } \mu(M) = \int_M \rho(\mathbf{x})\ d\mathbf{x}$$

(es decir, b_j es el valor medio de la función x_j, ponderado mediante la función de densidad del sólido).

nota: Cuando la función de densidad es constante, $\rho(\mathbf{x}) = k$, (caso de una distribución de masa homogénea) el centro de masa recibe el nombre de *baricentro.* Obsérvese que, en este caso, $\mu(M) = k c_3(M)$, luego

$$b_j = \frac{1}{c_3(M)} \int_M x_j\ dx_1\ dx_2\ dx_3$$

Dejamos al cuidado del lector la formulación de las definiciones anteriores, 10.17 y 10.19, para el caso de cuerpos en el espacio euclídeo $\mathbb{R}^n$. Estas nociones, que carecen de interpretación física para $n > 3$, la siguen teniendo en los casos $n = 1$ y $n = 2$. Cuando $n = 1$, las correspondientes versiones de estas definiciones intervienen al considerar una varilla muy fina que ocupa un segmento $[a,b] \subset \mathbb{R}$, con una masa se distribuye según una función de densidad $\rho : [a,b] \to [0,+\infty)$. En este caso, el centro de masa de la varilla es el punto de abscisa

$$x_0 = \frac{1}{\mu([a,b])} \int_a^b x\rho(x)dx, \quad \text{donde} \quad \mu([a,b]) = \int_a^b \rho(x)dx$$

Análogamente, el caso $n = 2$, que interviene al considerar la distribución de masa en una placa plana muy delgada, se modeliza suponiendo que la placa ocupa un recinto medible $M \subset \mathbb{R}^2$ donde está definida su función de densidad $\rho : M \to [0,+\infty)$. Ahora la masa de una porción medible $E \subset M$ la proporciona la integral doble

$$\mu(E) = \int_E \rho(x,y)\ dx\ dy$$

y el centro de masa de la placa (x_0, y_0), viene dado por las integrales dobles

$$x_0 = \frac{1}{\mu(M)} \int_M x\rho(x,y)\ dx\ dy; \quad y_0 = \frac{1}{\mu(M)} \int_M y\rho(x,y)\ dx\ dy$$

Otro concepto importante de la Mecánica que interviene al estudiar el movimiento de un cuerpo rígido que gira alrededor de un eje es el de momento de inercia. Si el sólido no es homogéneo y su masa se distribuye según la función de densidad $\rho(x,y,z) \geq 0$, los momentos de inercia I_x, I_y, I_z respecto a los ejes Ox, Oy, Oz se definen, respectivamente, mediante las integrales triples

$$I_x = \int_M (y^2+z^2)\rho(x,y,z)\ dx\ dy\ dz; \quad I_y = \int_M (x^2+z^2)\rho(x,y,z)\ dx\ dy\ dz$$

$$I_z = \int_M (x^2+y^2)\rho(x,y,z)\ dx\ dy\ dz$$

De la misma forma que la noción de masa mide la respuesta de un cuerpo a las fuerzas que le imprimen una traslación, la noción de momento de inercia de un sólido respecto a un eje de giro mide su respuesta a las fuerzas que lo someten a rotación.

10.3. Caracterización de las funciones integrables

Los conjuntos de medida nula que se definen a continuación intervienen en la caracterización de las funciones integrables Riemann (teorema 10.24)

Definición 10.20 *Se dice que* $H \subset \mathbb{R}^n$ *tiene medida nula si para cada* $\epsilon > 0$ *existe una sucesión de rectángulos cerrados* $\{R_k : k \in \mathbb{N}\}$, *tal que*

$$H \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} R_k \quad y \quad \sum_{k=1}^{\infty} v(R_k) < \epsilon$$

Los conjuntos de contenido nulo tienen medida nula. Razonando como en la demostración de 10.9 es fácil ver que la definición 10.20 es equivalente a la que resulta considerando rectángulos abiertos. Utilizando este hecho y 10.9 se obtiene que todo conjunto compacto de medida nula tiene contenido nulo. Los conjuntos numerables tienen medida nula como consecuencia de la siguiente proposición:

Proposición 10.21 *La unión de una familia numerable de conjuntos de medida nula tiene medida nula.*

Dem: Sea $\{H_j : j \in \mathbb{N}\}$ una familia numerable de conjuntos de medida nula. Para cada $\epsilon > 0$ hay una sucesión de rectángulos cerrados $\{R_{j,k} : k \in \mathbb{N}\}$, que recubre H_j, y verifica $\sum_{k=1}^{\infty} v(R_{jk}) < \epsilon/2^j$.

La familia numerable $\{R_{j,k} : (j,k) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N}\}$ se puede ordenar formando una sucesión de rectángulos cerrados $\{R'_m : m \in \mathbb{N}\}$, que recubre H y verifica

$$\sum_{m=1}^{\infty} v(R'_m) = \sum_{j=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} v(R_{j,k}) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \epsilon/2^j = \epsilon$$

■

Aunque la clausura de un conjunto de contenido nulo sigue teniendo contenido nulo, no es cierto un resultado análogo para los conjuntos de medida nula: El conjunto numerable $\mathbb{Q}\cap[0,1]$ es de medida nula pero su clausura $[0,1]$ no tiene medida nula porque es compacto y no tiene contenido nulo. La proposición 10.13 no se verifica cuando se sustituye la noción de contenido nulo por la de medida nula: La función $\psi = \chi_{[0,1]\cap\mathbb{Q}}$ no es integrable Riemann en $[0,1]$, aunque $\{t \in [0,1] : |\psi(t)| > 0\}$ tiene medida nula.

Antes de emprender la demostración del teorema de Lebesgue 10.24 que caracteriza las funciones integrables Riemann mediante el conjunto de sus discontinuidades conviene describir este conjunto usando la noción de oscilación.

Dada una función acotada $f : A \to \mathbb{R}$ definida en un rectángulo cerrado $A \subset \mathbb{R}^n$, el conjunto de sus puntos de discontinuidad lo denotaremos

$$D(f) = \{\mathbf{x} \in A : f \text{ es discontinua en } \mathbf{x}\}$$

La oscilación de f en $U \subset A$ es el número $O(f,U) = \sup f(U) - \inf f(U)$.

Sea $A(\mathbf{x},r) = A \cap B(\mathbf{x},r)$, la bola relativa en A, de centro $\mathbf{x}$ y radio $r > 0$. La oscilación de f en $A(\mathbf{x},r)$ decrece con $r > 0$, luego existe el límite

$$o(f,\mathbf{x}) = \lim_{r \to 0} O(f, A(\mathbf{x},r))$$

que recibe el nombre de *oscilación* de f en $\mathbf{x}$. Conviene observar que si $\mathbf{x}$ es interior a $U \subset A$, en la topología relativa de A, entonces $O(f,U) \geq o(f,\mathbf{x})$.

Utilizando la definición de continuidad en un punto es inmediato comprobar que f es continua en $\mathbf{x}$ si y sólo si $o(f,\mathbf{x}) = 0$. Se sigue de esto que las discontinuidades de f se pueden clasificar usando el concepto de oscilación:

$$D(f) = \bigcup_{\epsilon>0} D_\epsilon(f) \quad \text{con} \quad D_\epsilon(f) = \{\mathbf{x} \in A : o(f,\mathbf{x}) \geq \epsilon\}$$

Lema 10.22 *$D_\epsilon(f)$ es un conjunto compacto.*

DEM: $G_\epsilon(f) = \{\mathbf{x} \in A : o(f, \mathbf{x}) < \epsilon\}$ es abierto en la topología relativa de A:

Dado $\mathbf{x} \in G_\epsilon$, existe $r > 0$ tal que $O(f, A(\mathbf{x}, r)) < \epsilon$. Como $A(\mathbf{x}, r)$ es abierto relativo en A, para todo $\mathbf{y} \in A(\mathbf{x}, r)$ se cumple $o(f, \mathbf{y}) \leq O(f, A(\mathbf{x}, r)) < \epsilon$, es decir $A(\mathbf{x}, r) \subset G_\epsilon(f)$.

Como A es cerrado y $D_\epsilon(f) = A \setminus G_\epsilon(f)$ es cerrado en la topología relativa de A, se sigue que el conjunto acotado $D_\epsilon(f)$ es cerrado en $\mathbb{R}^n$, y por lo tanto compacto. ■

Lema 10.23 *Sea $f : S \to \mathbb{R}$ una función acotada definida en un rectángulo cerrado S, tal que $o(f, \mathbf{x}) < \epsilon$ para todo $\mathbf{x} \in S$. Entonces existe $p \in \mathcal{P}(S)$ verificando*

$$\sum_{S' \in \Delta(p)} [M(f, S') - m(f, S')]v(S') < \epsilon v(S)$$

DEM: Según la definición de oscilación, cada $\mathbf{x} \in S$ tiene un entorno relativo $S \cap B(\mathbf{x}, r)$, tal que $O(f, S \cap B(\mathbf{x}, r)) < \epsilon$. Sea $V_\mathbf{x}$ un rectángulo abierto tal que $\mathbf{x} \in V_\mathbf{x} \subset \overline{V_\mathbf{x}} \subset B(\mathbf{x}, r)$. Entonces $R_\mathbf{x} = \overline{V_\mathbf{x}} \cap S$ es un rectángulo cerrado que verifica $O(f, R_\mathbf{x}) < \epsilon$. Una cantidad finita de estos rectángulos, $R_{\mathbf{x}_1}, R_{\mathbf{x}_2}, \cdots R_{\mathbf{x}_m}$, recubre el compacto S, y existe una subdivisión $p \in \mathcal{P}(S)$ tal que cada $S' \in \Delta(p)$ está contenido en algún $R_{\mathbf{x}_j}$, luego

$$M(f, S') - m(f, S') = O(f, S') \leq O(f, R_{\mathbf{x}_j}) < \epsilon$$

Multiplicando por $v(S')$ y sumando se obtiene la desigualdad del enunciado. ■

Teorema 10.24 (Lebesgue) *Sea $f : A \to \mathbb{R}$ una función acotada definida en un rectángulo cerrado $A \subset \mathbb{R}^n$. Una condición necesaria y suficiente para que f sea integrable Riemann sobre A es que el conjunto de sus puntos de discontinuidad $D(f)$ tenga medida nula.*

DEM: La condición es necesaria:

Con las notaciones anteriores demostraremos que cada $D_{1/m}(f)$ tiene contenido nulo y se seguirá que $D(f) = \bigcup_{m \in \mathbb{N}} D_{1/m}(f)$ tiene medida nula.

Para demostrar que $D_{1/m}(f)$ tiene contenido nulo veremos que para cada $\epsilon > 0$ hay una descomposición $D_{1/m}(f) = E_\epsilon \cup F_\epsilon$ donde E_ϵ tiene contenido nulo y F_ϵ se puede recubrir con una cantidad finita de rectángulos cerrados cuya suma de volúmenes es menor que ϵ.

Como f es integrable, existe $p \in \mathcal{P}(A)$ tal que $S(f, p) - s(f, p) < \epsilon/m$. Sea F_ϵ la parte de $D_{1/m}(f)$ cubierta por los rectángulos de

$$\Delta^m = \{S \in \Delta(p) : \ S^\circ \cap D_{1/m}(f) \neq \emptyset\}$$

y E_ϵ la parte de $D_{1/m}(f)$ no cubierta por estos rectángulos.

El conjunto E_ϵ tiene contenido nulo porque está contenido en la unión de las caras de los rectángulos $S \in \Delta(p)$. Por otra parte, cuando $S \in \Delta^m$ existe $\mathbf{x} \in S^\circ$, con $o(f, \mathbf{x}) \geq 1/m$, luego $M(f,S) - m(f,S) = O(f,S) \geq 1/m$, y así

$$\frac{1}{m} \sum_{S \in \Delta^m} v(S) \leq \sum_{S \in \Delta^m} [M(f,S) - m(f,S)] v(s) \leq S(f,p) - s(f,p) \leq \epsilon/m$$

Es decir, la familia Δ^m que recubre F_ϵ, verifica $\sum_{S \in \Delta^m} v(S) < \epsilon$.

La condición es suficiente:
Si $D(f)$ tiene medida nula, para cada $\epsilon > 0$, el conjunto $D_\epsilon(f)$ tiene medida nula y es compacto. Según el lema 10.22, $D_\epsilon(f)$ tiene contenido nulo, luego existe una familia finita de rectángulos abiertos $U_1, U_2 \cdots U_m$, que recubren $D_\epsilon(f)$, y verifica $\sum_{j=1}^m v(U_j) < \epsilon$ (véase la proposición 10.9).

Es fácil ver que existe $p \in \mathcal{P}(A)$ con la siguiente propiedad: Si $S \in \Delta(p)$ corta a $D_\epsilon(f)$, entonces $S \subset \overline{U_j}$ para algún $j \in \{1, 2 \cdots m\}$. Clasificamos los rectángulos de $\Delta(p)$ en dos familias

$$\Delta_1 = \{S \in \Delta(p) : S \cap D_\epsilon(f) \neq \emptyset\}, \quad \Delta_2 = \{S \in \Delta(p) : S \cap D_\epsilon(f) = \emptyset\}.$$

Cada $S \in \Delta_1$ está contenido en algún $\overline{U_j}$, luego

$$\sum_{S \in \Delta_1} v(S) \leq \sum_{j=1}^m v(U_j) \leq \epsilon$$

Si $S \in \Delta_2$, para todo $\mathbf{x} \in S$ se cumple $o(f, \mathbf{x}) < \epsilon$, y según el lema 10.23 existe $p_S \in \mathcal{P}(S)$ verificando

$$\sum_{S' \in \Delta(p_S)} [M(f,S') - m(f,S')] v(S') < \epsilon v(S)$$

Consideremos una subdivisión $p' \in \mathcal{P}(A)$, más fina que p, que induzca en cada $S \in \Delta_2$ una subdivisión más fina que p_S. En los siguientes sumatorios S' denota un elemento genérico de $\Delta(p')$, y S un elemento genérico de $\Delta(p)$:

$$S(f,p') - s(f,p') = \sum_{S'} [M(f,S') - m(f,S')] v(S') =$$

$$= \sum_{S \in \Delta_1} \sum_{S' \subset S} [M(f,S') - m(f,S')] v(S') + \sum_{S \in \Delta_2} \sum_{S' \subset S} [M(f,S') - m(f,S')] v(S')$$

Para cada $S' \subset S \in \Delta_1$ se utiliza la acotación $M(f,S') - m(f,S') \leq 2C$, donde $C = \sup_{\mathbf{x} \in A} |f(\mathbf{x})|$, y se obtiene:

$$\sum_{S \in \Delta_1} \sum_{S' \subset S} [M(f,S') - m(f,S')] v(S') \leq \sum_{S \in \Delta_1} \sum_{S' \subset S} 2C v(S') = 2C \sum_{S \in \Delta_1} v(S) \leq 2C\epsilon$$

Por otra parte, cuando $S \in \Delta_2$, los rectángulos $S' \subset S$ forman una subdivisión de S, más fina que p_S, y por ello se sigue verificando

$$\sum_{S'\subset S}[M(f,S') - m(f,S')]v(S') < \epsilon v(S)$$

luego

$$\sum_{S\in\Delta_2}\sum_{S'\subset S}[M(f,S') - m(f,S')]v(S') \leq \sum_{S\in\Delta_2}\epsilon v(S) \leq \epsilon v(A)$$

Entonces $S(f,p') - s(f,p') \leq (2C + v(A))\epsilon$, y utilizando la proposición 10.3 se concluye que f es integrable Riemann sobre A. ■

Corolario 10.25 *Si* $f : A \to \mathbb{R}$ *es acotada en el rectángulo cerrado* $A \subset \mathbb{R}^n$ *y* $D(f)$ *es numerable entonces* f *es integrable Riemann sobre* A.

Dem: Es consecuencia inmediata del teorema 10.24 ya que todo conjunto numerable tiene medida nula. ■

nota: Es bien conocido que si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ es monótona entonces $D(f)$ es numerable, de modo que el corolario anterior incluye, como caso particular, el resultado elemental que afirma que toda función monótona es integrable Riemann.

Una consecuencia directa del teorema 10.24 es la siguiente caracterización de los conjuntos medibles Jordan:

Teorema 10.26 *Una condición necesaria y suficiente para que un conjunto acotado* $E \subset \mathbb{R}^n$ *sea medible Jordan es que su frontera* ∂E *tenga contenido nulo.*

Dem: Sea f la restricción de χ_E a un rectángulo cerrado $A \subset \mathbb{R}^n$ tal que $E \subset A^\circ$. Es claro que el conjunto de puntos de discontinuidad de $f : A \to \mathbb{R}$, es ∂E. Como este conjunto es compacto, tendrá contenido nulo si y sólo si tiene medida nula, y aplicando el teorema de Lebesgue 10.24 se obtiene el resultado. ■

Este resultado queda englobado en la siguiente caracterización de las funciones integrables sobre un conjunto medible Jordan

Teorema 10.27 *Una función acotada* $f : E \to \mathbb{R}$, *sobre un conjunto medible Jordan* $E \subset \mathbb{R}^n$, *es integrable Riemann sobre* E *si y sólo si*

$$D(f) = \{\mathbf{x} \in E : f \text{ es discontinua en } \mathbf{x}\}$$

tiene medida nula.

Dem: Sea $A \subset \mathbb{R}^n$ un rectángulo cerrado tal que $E \subset A^\circ$. Debemos considerar

$$D(f_E) = \{x \in A : f_E \text{ es discontinua en } x\}$$

Se comprueba fácilmente que $D(f) \subset D(f_E) \subset D(f) \cup \partial E$, donde ∂E tiene contenido nulo. Se sigue que $D(f)$ tiene medida nula si y sólo si $D(f_E)$ tiene medida nula. Aplicando el teorema 10.24 se concluye que $D(f)$ tiene medida nula si y sólo si f es integrable sobre E. ■

En el ejercicio resuelto 10.33 se muestra la patología que puede presentar una función integrable Riemann.

10.4. Ejercicios resueltos

Ejercicio 10.28 *Sea* $f : A \to [0, +\infty)$ *una función acotada y* $B \subset A$ *un intervalo cerrado tal que* $\{\mathbf{x} \in A : f(\mathbf{x}) \neq 0\} \subset B$. *Demuestre que* $\overline{\int_A} f = \overline{\int_B} f$, $\underline{\int_A} f = \underline{\int_B} f$.

SOLUCIÓN

Sea $q \in \mathcal{P}(A)$ tal que $B \in \Delta(q)$. Razonando como en la demostración de 10.5 e)

$$\overline{\int_A} f(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} \leq \sum_{S \in \Delta(q)} \overline{\int_S} f(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}$$

Obsérvese que todos los sumandos son nulos, excepto el que corresponde a $S = B$ (si $S \neq B$, entonces $f(\mathbf{x}) = 0$ para todo $\mathbf{x} \in S^\circ$, y según el lema 10.7, $f|_S$ es integrable y $\int_S f = 0$). Se obtiene así la desigualdad $\overline{\int_A} f \leq \overline{\int_B} f$.

Por otra parte, si $p \in \mathcal{P}(A)$, es más fina que $q \in \mathcal{P}(A)$, y $p_B \in \mathcal{P}(B)$ es la subdivisión que p induce en B, como $f \geq 0$, se cumple

$$\overline{\int_B} f \leq S(f, p_B) \leq S(f, p)$$

Es claro que $\overline{\int_A} f$ es el extremo inferior de las sumas $S(f, p)$, cuando p recorre las subdivisiones de A que son más finas que q, luego $\overline{\int_B} f \leq \overline{\int_A} f$, y queda demostrada la igualdad $\overline{\int_A} f = \overline{\int_B} f$. Con un razonamiento análogo se demuestra que $\underline{\int_A} f = \underline{\int_B} f$. ■

Ejercicio 10.29 *Utilice la proposición 10.8 para demostrar que toda figura elemental* $Z \subset \mathbb{R}^n$ *es medible Jordan y que si* $Z = \cup\{S : S \in \Gamma\}$ *es una representación asociada a* $p \in \mathcal{P}(A)$ *entonces* $c(Z) = \sum_{S \in \Gamma} v(s)$.

SOLUCIÓN

Según las propiedades c) y d) en la proposición 10.8 Z y $G = \cup\{S^\circ : S \in \Gamma\} \subset Z$, son medibles Jordan y se verifica

$$c(Z) \leq \sum_{S \in \Gamma} c(S) = \sum_{S \in \Gamma} v(S)$$

Como los rectángulos abiertos que intervienen en la unión $G = \cup\{S^\circ : S \in \Gamma\}$, son disjuntos, podemos escribir

$$c(G) = \sum_{S \in \Gamma} c(S^\circ) = \sum_{S \in \Gamma} v(S)$$

Se obtiene así que $\sum_{S \in \Gamma} v(S) = c(G) \leq c(Z) \leq \sum_{S \in \Gamma} c(S) = \sum_{S \in \Gamma} v(S)$. ■

Ejercicio 10.30 *Si $E \subset \mathbb{R}^n$ es acotado demuestre que*

$$c^*(E) = \inf\{c(Z) : E \subset Z \in \mathcal{E}_n\}$$

$$c_*(E) = \sup\{c(Z') : E \supset Z' \in \mathcal{E}_n\}$$

donde $\mathcal{E}_n \subset \mathcal{M}_n$ es la familia de las figuras elementales.

solución

Sea $\alpha = \inf\{c(Z) : E \subset Z \in \mathcal{E}_n\}$, $\beta = \sup\{c(Z') : E \supset Z' \in \mathcal{E}_n\}$. Si Z, Z' son figuras elementales y $Z' \subset E \subset Z$, es claro que $c(Z') \leq c_*(E) \leq c^*(E) \leq c(Z)$, luego $\beta \leq c_*(E) \leq c^*(E) \leq \alpha$. Por otra parte, fijando un rectángulo cerrado $A \supset E$, para cada $\epsilon > 0$ existen $p, p' \in \mathcal{P}(A)$ tales que

$$S(\chi_E, p) \leq \overline{\int_A} \chi_E + \epsilon = c^*(E) + \epsilon$$

$$s(\chi_E, p') \geq \underline{\int_A} \chi_E - \epsilon = c_*(E) - \epsilon$$

Es claro que $S(\chi_E, p) = \sum_{S \in \Gamma} v(S)$, donde $\Gamma = \{S : S \in \Delta(p) : S \cap E \neq \emptyset\}$, luego $Z = \cup\{S : S \in \Gamma\}$ es una figura elemental que contiene a E y, en virtud del ejercicio, 10.29 cumple que $c(Z) = S(\chi_E, p)$ luego

$$c^*(E) \leq \alpha \leq c(Z) = S(\chi_E, p) \leq c^*(E) + \epsilon$$

Como esto es cierto para cada $\epsilon > 0$ se concluye que $\alpha = c^*(E)$.

Por otra parte, si $\Gamma' = \{S \in \Delta(p) : S \subset E\}$, entonces $Z' = \cup\{S : S \in \Gamma'\}$, es una figura elemental contenida en E que cumple $c(Z') = s(\chi_E, p)$, luego

$$c_*(E) \geq \beta \geq c(Z') = s(\chi_E, p) \geq c_*(E) - \epsilon$$

y se concluye que $\beta = c^*(E)$ ∎

Ejercicio 10.31 *Si $f : A \to [0, +\infty)$ es una función continua en un rectángulo cerrado $A \subset \mathbb{R}^n$, y $\int_A f(\mathbf{x})d\mathbf{x} = 0$, demuestre que f es idénticamente nula.*

solución

Si se supone que para algún $\mathbf{a} \in A$ es $f(\mathbf{a}) > 0$, por la continuidad de f debe existir un rectángulo cerrado no degenerado $S \subset A$, tal que $\mathbf{a} \in S$, y $f(\mathbf{a})/2 \leq f(\mathbf{x})$, para todo $\mathbf{x} \in S$. Así se llega a la desigualdad contradictoria

$$0 < v(S)f(\mathbf{a})/2 \leq \int_S f(\mathbf{x})d\mathbf{x} \leq \int_A f(\mathbf{x})d\mathbf{x} = 0$$

∎

Ejercicio 10.32 *Sea* $f : A \to [0, +\infty)$ *una función integrable Riemann sobre un rectángulo cerrado* $A \subset \mathbb{R}^n$ *tal que* $\int_A f(\mathbf{x})d\mathbf{x} = 0$.
Demuestre que $H = \{\mathbf{x} \in A : f(\mathbf{x}) > 0\}$ *tiene medida nula y muestre un ejemplo donde* H *no tenga contenido nulo.*

SOLUCIÓN

Demostraremos que, para cada $m \in \mathbb{N}$, el conjunto $H_m = \{\mathbf{x} \in A : f(\mathbf{x}) > 1/m\}$ tiene contenido nulo y por lo tanto medida nula. Aplicando la proposición 10.21 se obtendrá que $H = \cup_{m=1}^{\infty} H_m$ tiene medida nula.

Según la definición de integral superior, para cada $\epsilon > 0$ existe $p \in \mathcal{P}(A)$ tal que $S(f, p) < \epsilon/m$. Cuando $S \in \Delta(p)$ y $S \cap H_m \neq \emptyset$, es claro que se cumple $1/m \leq M(f, S)$ luego

$$\sum_{S\cap H_m \neq \emptyset} \frac{v(S)}{m} \leq \sum_{S\cap H_m \neq \emptyset} M(f, S)v(S) \leq S(f, p) \leq \frac{\epsilon}{m}$$

Como la familia finita de rectángulos cerrados $\{S \in \Delta(p) : S \cap H_m \neq \emptyset\}$, recubre H_m y la suma de sus volúmenes es menor que ϵ, queda demostrado que H_m tiene contenido nulo, y por lo tanto medida nula.

Sea $f : [0, 1] \to [0, +\infty)$ definida por $f(x) = 1/q$ si $x = p/q \in \mathbb{Q} \cap (0, 1]$ (fracción irreducible) $f(x) = 0$ en los restantes puntos. Es fácil ver que esta función es integrable Riemann con integral nula. En este caso

$$H = \{x \in [0, 1] : f(x) > 0\} = (0, 1] \cap \mathbb{Q}$$

tiene medida nula pero no tiene contenido nulo (ya que $\overline{H}$ no tiene contenido nulo).
■

Ejercicio 10.33 *Sea* $\varphi : [0, 1] \to \{0, 1\}$ *la función característica de* $[0, 1] \cap \mathbb{Q}$, $A = [0, 1] \times [0, 1]$ *y* $f : A \to \mathbb{R}$ *la función definida por*

> $f(x, y) = 0$ *si* $x \in [0, 1]$ *es irracional ó si* $x = 0$.
>
> $f(x, y) = \frac{1}{q}\varphi(y)$ *si* $x \in (0, 1]$ *es un número racional que se expresa en la forma irreducible* $x = p/q$.

Justifique, sin utilizar el teorema de Lebesgue, las siguientes afirmaciones: La función f *es integrable Riemann sobre* A, *el conjunto de sus puntos de discontinuidad,* $D(f) = \{(a, b) : 0 < a \leq 1, a \in \mathbb{Q}\}$, *es denso en* A, *y las funciones parciales,* $y \to f(a, y)$, *no son integrables cuando* $a \in \mathbb{Q} \cap (0, 1]$.

SOLUCIÓN

Dado $\epsilon > 0$, sea H el conjunto finito formado por los puntos $x = p/q \in (0, 1]$ tales que $1/q > \epsilon$.

Sea $p_1 \in \mathcal{P}([0,1])$, $p_1 = (0 = x_0 < x_1 < \cdots < x_m = 1)$, verificando

$$\sum_{j\in J}(x_j - x_{j-1}) < \epsilon, \quad \text{donde} \quad J = \{j \in \{1,2,\cdots m\} : [x_{j-1}, x_j] \cap H \neq \emptyset\}$$

Consideremos una subdivisión $p_\epsilon = (p_1, p_2) \in \mathcal{P}(A)$, tal que $p_2 = \{0,1\}$, de modo que $\Delta(p_\epsilon) = \{S_j : 1 \leq j \leq m\}$, con $S_j = [x_{j-1}, x_j] \times [0,1]$.

Como $M(f, S_j) \leq 1$ cuando $j \in J$, y $M(f, S_j) \leq \epsilon$ cuando $j \notin J$, se cumple

$$S(f, p_\epsilon) = \sum_{j\in J} M(f, S_j)(x_j - x_{j-1}) + \sum_{j\notin J} M(f, S_j)(x_j - x_{j-1}) \leq$$

$$\leq \sum_{j\in J}(x_j - x_{j-1}) + \epsilon \sum_{j\notin J}(x_j - x_{j-1}) \leq 2\epsilon$$

Se sigue que para todo $\epsilon > 0$ se cumple

$$0 \leq \underline{\int_A} f \leq \overline{\int_A} f \leq S(f, p_\epsilon) \leq 2\epsilon$$

y por lo tanto f es integrable sobre A, con $\int_A f = 0$.

Si $0 < a \leq 1$, y $a \in \mathbb{Q}$, la función parcial $y \to f(a,y)$ es discontinua en todo $b \in [0,1]$, luego $\{(a,b) \in A : a \in (0,1] \cap \mathbb{Q}\} \subset D(f)$. Por otra parte, si $a \notin (0,1] \cap \mathbb{Q}$, dado $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $|x - a| < \delta \Rightarrow x \notin H$, luego $0 \leq f(x,y) \leq \epsilon$ para todo $y \in [0,1]$. Como $f(a,b) = 0$ resulta

$$\text{máx}\{|x-a|, |y-b|\} < \delta \Rightarrow |f(x,y) - f(a,b)| < \epsilon$$

Queda demostrado que f es continua en (a,b), y con ello la igualdad

$$D(f) = \{(a,b) \in A : a \in (0,1] \cap \mathbb{Q}\}$$

Finalmente, si $a = p/q \in (0,1]$, (fracción irreducible), como φ no es integrable sobre $[0,1]$, tampoco lo es la función parcial $y \to f(x,y) = \frac{1}{q}\varphi(y)$. ■

Ejercicio 10.34 *Si $K \subset \mathbb{R}^k$, $M \subset \mathbb{R}^n$ son conjuntos medibles Jordan, demuestre que $K \times M$ es medible Jordan en $\mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^n$.*

SOLUCIÓN

Según el teorema 10.26 basta ver que si ∂K tiene contenido nulo en $\mathbb{R}^k$, y ∂M tiene contenido nulo en $\mathbb{R}^n$, entonces $\partial(K \times M)$, tiene contenido nulo en $\mathbb{R}^{k+n}$. Si ∂K tiene contenido nulo en $\mathbb{R}^k$ es fácil ver que $\partial K \times M$ tiene contenido nulo en $\mathbb{R}^{k+n}$. Análogamente $K \times \partial M$, tiene contenido nulo en $\mathbb{R}^{k+n}$ y usando la inclusión

$$\partial(K \times M) \subset (\overline{K} \times \overline{M}) \setminus K^\circ \times M^\circ \subset (\partial K \times \overline{M}) \cup (\overline{K} \times \partial M)$$

se concluye que $\partial(K \times M)$ tiene contenido nulo en $\mathbb{R}^{k+n}$. ■

10.5. Ejercicios propuestos

♢ **10.5.1** *Si* $f : A \to \mathbb{R}$ *es integrable Riemann sobre el rectángulo cerrado* $A \subset \mathbb{R}^n$ *y* $f(\mathbf{x}) \geq \alpha > 0$ *para todo* $\mathbf{x} \in A$, *demuestre directamente, (sin usar el teorema de Lebesgue) que la función* $1/f$ *también es integrable Riemann sobre* A.

♢ **10.5.2** *Si* $A \subset \mathbb{R}^n$ *es un intervalo cerrado, una función acotada* $f : A \to \mathbb{R}$ *se dice que es escalonada cuando existe* $p \in \mathcal{P}(A)$ *tal que en el interior de cada* $S \in \Delta(p)$ f *toma un valor constante* $\alpha(S)$. *Demuestre que* f *es integrable Riemann sobre sobre* A *y* $\int_A f(\mathbf{x})d\mathbf{x} = \sum_{S\in\Delta(p)} \alpha(S)v(S)$.

♢ **10.5.3** *Si* $f, g : [0,1] \to \mathbb{R}$ *son integrables Riemann y* $f(x) \geq m > 0$ *para todo* $x \in [0,1]$, *demuestre que* $F(x,y) = f(x)^{g(y)}$ *es integrable Riemann sobre* $A = [0,1]\times[0,1]$.

♢ **10.5.4** *Justifique que la función* $f(x,y) = \operatorname{sen}\frac{1}{x-y}$ *si* $x \neq y$, $f(x,x) = 1$ *es integrable Riemann sobre* $E = \{(x,y) \in [0,1] \times [0,1] : x \leq y\}$

♢ **10.5.5** *Demuestre las desigualdades:*

a) $$\frac{1}{e} \leq \frac{1}{4\pi^2}\int_A e^{\operatorname{sen}(x+y)}dx\, dy \leq e \quad \text{donde} \quad A = [-\pi,\pi]\times[-\pi,\pi]$$

b) $$\frac{1}{6} \leq \int_B \frac{dx\, dy}{y-x+3} \leq \frac{1}{4} \qquad \text{donde} \quad B = \{(x,y) : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq x\}.$$

♢ **10.5.6** *Se supone que la función* $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *es integrable Riemann sobre cada cubo* $Q(r) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \|\mathbf{x}\|_\infty \leq r\}$. *Demuestre:*

i) Si $\lim_{\|\mathbf{x}\| \to +\infty} f(\mathbf{x}) = \alpha$ *entonces* $\displaystyle\lim_{r \to +\infty} \frac{1}{2^n r^n}\int_{Q(r)} f(\mathbf{x})d\mathbf{x} = \alpha$.

ii) Si $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *es continua en* $\mathbf{a}$ *y* $Q(\mathbf{a},r) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \|\mathbf{x}-\mathbf{a}\|_\infty \leq r\}$ *entonces*

$$\lim_{r \to 0} \frac{1}{2^n r^n}\int_{Q(\mathbf{a},r)} f(\mathbf{x})d\mathbf{x} = f(\mathbf{a})$$

♢ **10.5.7** *Demuestre que el conjunto* $\{(x, \operatorname{sen}(1/x)) : 0 < x \leq 1\}$ *tiene contenido nulo en* $\mathbb{R}^2$.

♢ **10.5.8** *Si* $M \subset \mathbb{R}^n$ *es acotado sea* M' *el conjunto de sus puntos de acumulación. De modo recurrente se define* $M_1 = M'$, $M_{n+1} = M_n'$. *Demuestre que si* $M_n = \emptyset$ *para algún* $n \in \mathbb{N}$ *entonces* M *tiene contenido nulo.*

♢ **10.5.9** *Si* $H \subset \mathbb{R}^n$ *es de medida nula demuestre que* $H \times \mathbb{R}^k \subset \mathbb{R}^{n+k}$ *es de medida nula en* $\mathbb{R}^{n+k}$.

♢ **10.5.10** *Demuestre que las siguientes afirmaciones*

i) $H \subset \mathbb{R}^n$ *tiene medida nula si y sólo si para cada* $\epsilon > 0$ *existe una sucesión de cubos abiertos (o cerrados)* $\{Q_k : k \in \mathbb{N}\}$, *que cubre* H *y verifica* $\sum_{k=1}^{\infty} v(Q_k) < \epsilon$.

ii) Un conjunto acotado $H \subset \mathbb{R}^n$ *tiene contenido nulo si y sólo si para cada* $\epsilon > 0$ *existe una sucesión finita de cubos abiertos (o cerrados)* $\{Q_k : 1 \leq k \leq m\}$ *que cubre* H *y verifica* $\sum_{k=1}^{m} v(Q_k) < \epsilon$.

♢ **10.5.11** *Sea* $H \subset \mathbb{R}^n$ *y* $\mathbf{g} : H \to \mathbb{R}^m$ *una aplicación lipschitziana. Utilice el ejercicio 10.5.10 para demostrar las siguientes afirmaciones:*

a) *Si* $n < m$, $\mathbf{g}(H)$ *tiene medida nula.*
b) *Si* $n < m$ *y* H *es acotado,* $\mathbf{g}(H)$ *tiene contenido nulo.*
c) *Si* $n = m$ *y* $H \subset \mathbb{R}^n$ *es de medida nula (resp. contenido nulo) entonces* $\mathbf{g}(H)$ *tiene medida nula (resp. contenido nulo).*

♢ **10.5.12** *Sea* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *abierto y* $\mathbf{g} : \Omega \to \mathbb{R}^m$ *una aplicación de clase* $C^1(\Omega)$. *Justifique las siguientes afirmaciones:*

a) *Si* $n < m$ *entonces* $\mathbf{g}(\Omega)$ *tiene medida nula.*

b) *Si* $n < m$, H *es acotado, y* $\overline{H} \subset \Omega$, *entonces* $\mathbf{g}(H)$ *tiene contenido nulo.*

c) *Si* $n = m$ *y* $H \subset \Omega$ *tiene medida nula, entonces* $\mathbf{g}(H)$ *tiene medida nula.*

d) *Si* $n = m$, H *tiene contenido nulo, y* $\overline{H} \subset \Omega$, *entonces* $\mathbf{g}(H)$ *tiene contenido nulo.*

Muestre un ejemplo que ponga de manifiesto que no se cumple d) cuando la condición $\overline{H} \subset \Omega$ *se sustituye por* $H \subset \Omega$.

♢ **10.5.13** *Sea* $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : f(x, y, z) = 0\}$ *donde* $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ *es de clase* C^1 *y* $\nabla f(x, y, z) \neq (0, 0, 0)$ *para cada* $(x, y, z) \in M$. *Demuestre que si* M *es acotado entonces tiene contenido nulo. ¿Qué se puede decir si* M *no es acotado?*

♢ **10.5.14** *Demuestre que* $H \subset \mathbb{R}$ *es de medida nula si y sólo si existe una sucesión de intervalos acotados* $\{(a_n, b_n) : n \in \mathbb{N}\}$, *tal que* $\sum_{n=1}^{+\infty}(b_n - a_n) < +\infty$, *y para cada* $x \in H$ *el conjunto* $\{n \in \mathbb{N} : x \in (a_n, b_n)\}$ *es infinito. Si* $H \subset \mathbb{R}$ *es de medida nula, a una sucesión de intervalos con las propiedades anteriores se le asocia la sucesión de funciones continuas* $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *definida por*

$$f_n(x) = 0 \ \text{ si } \ x < a_n; \quad f_n = x - a_n \ \text{ si } \ a_n \leq x \leq b_n; \quad f_n(x) = b_n - a_n \ \text{ si } \ b_n < x$$

Demuestre que la serie $f_n(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$ *converge para todo* $x \in \mathbb{R}$ *y su suma es una función creciente continua no derivable en los puntos de* H.

♢ **10.5.15** *Sea* $f : A \to \mathbb{R}$ *una función continua en un intervalo cerrado y acotado* $A \subset \mathbb{R}^n$. *Para cada* $p \geq 1$ *se define*

$$\|f\|_p = \left(\int_A |f|^p \right)^{1/p}, \quad \|f\|_\infty = \text{máx}\{|f(\mathbf{x})| : x \in A\}$$

Demuestre que $\text{lím}_{p \to +\infty} \|f\|_p = \|f\|_\infty$.