Capítulo 11

Técnicas de cálculo integral

Integración iterada y cambio de variable. Cálculo de integrales dobles y triples. Aplicaciones geométricas y físicas del cálculo integral.

En este capítulo se exponen técnicas para el cálculo efectivo de una integral múltiple o del contenido (área, volumen...) de un conjunto medible Jordan, y se exponen algunas de las aplicaciones clásicas del cálculo integral.

En el caso de las funciones continuas, el teorema de Fubini sobre integración iterada, que se estudia en primer lugar, resuelve teóricamente el problema, pero no conduce siempre a buenos resultados desde el punto de vista práctico porque las integrales iteradas que aparecen, o no se pueden calcular con los métodos usuales del cálculo de una variable (regla de Barrow), o requieren cálculos muy engorrosos. En estos casos la técnica del cambio de variable puede resolver el problema transformando la integral en otra cuyo cálculo sea posible, o más sencillo de realizar.

Una de las primeras aplicaciones del teorema de Fubini es la justificación del clásico principio de Cavalieri que afirma que si en dos conjuntos medibles las secciones producidas por planos perpendiculares a una recta arbitraria tienen siempre la misma área entonces los dos conjuntos tienen el mismo volumen. En este principio se basa el método de las secciones para el cálculo de volúmenes, muy útil cuando las secciones son figuras geométricas sencillas de área conocida, como ocurre en el caso de los sólidos de revolución. En relación con el teorema de Fubini también se explica con detalle el procedimiento para expresar, mediante integrales iteradas, las integrales dobles o triples sobre recintos simples. En este caso suelen haber varias alternativas para representar el dominio de integración en forma de recinto simple (o de union sin solapamiento de tales recintos) a las que corresponden diferentes integrales iteradas. Por ello uno de los aspectos prácticos de este capítulo está encaminado a adquirir experiencia en la elección atinada de un orden de integración que conduzca a cálculos factibles.

En lo que se refiere al teorema del cambio de variable para la integral de Riemann, como su demostración es demasiado larga y técnica para abordarla ahora hemos optado por relegarla al apéndice J donde se ofrece una demostración detallada y completa que utiliza fuertes recursos de álgebra lineal y de cálculo diferencial.

El teorema del cambio de variable, aunque no se demuestra en este capítulo, se toma como base para justificar teóricamente diversas fórmulas y reglas clásicas del cálculo integral: Cálculo de áreas limitadas por curvas dadas en coordenadas polares, utilización de las simetrías en el cálculo de integrales, propiedades geométricas de los baricentros y justificación de las reglas de cálculo para volúmenes de sólidos de revolución. Otro aspecto práctico en el que se insiste en este capítulo el de adquirir experiencia en elegir y aplicar el cambio de variable apropiado que facilita el cálculo de una integral múltiple dada.

Finaliza el capítulo con un amplio repertorio de ejercicios resueltos que ilustran los aspectos prácticos de la teoría. Entre otras cosas se muestra como se pueden usar los cambios de variable usuales (polares, cilíndricas, y esféricas) para calcular algunas integrales dobles o triples.

11.1. Integración iterada

En lo que sigue, $n = k + m$, con $k, m \in \mathbb{N}$, y se supone $\mathbb{R}^n$ identificado con $\mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^m$. Cada $\mathbf{z} \in \mathbb{R}^n$ se representa como un par

$$\mathbf{z} = (\mathbf{x}, \mathbf{y}) \text{ con } \mathbf{x} \in \mathbb{R}^k, \ \mathbf{y} \in \mathbb{R}^m$$

y el rectángulo cerrado n-dimensional $A = [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n]$, lo expresaremos como el producto cartesiano $A = X \times Y$, de los rectángulos cerrados

$$X = [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_k, b_k] \subset \mathbb{R}^k, \qquad Y = [a_{k+1}, b_{k+1}] \times \cdots \times [a_n, b_n] \subset \mathbb{R}^m.$$

Entonces cada función acotada $f : A \to \mathbb{R}$ se puede considerar como función de dos variables vectoriales $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in X \times Y$. Fijado $\mathbf{x} \in X$ (resp. $\mathbf{y} \in Y$), queda definida la función parcial $f_{\mathbf{x}}(\mathbf{y}) = f(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ (resp. $f^{\mathbf{y}}(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}, \mathbf{y})$), definida en Y (resp. en X). Si $f^{\mathbf{y}}$ es integrable sobre X su integral se denotará

$$\int_X f^{\mathbf{y}} = \int_X f^{\mathbf{y}}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \int_X f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) d\mathbf{x}$$

y en caso de no ser integrable, las integrales inferior y superior de $f^{\mathbf{y}}$ se denotarán

$$\underline{\int_X} f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) d\mathbf{x}, \qquad \overline{\int_X} f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) d\mathbf{x}.$$

Análogamente se definen $\int_Y f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \, d\mathbf{y}$, $\underline{\int_Y} f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \, d\mathbf{y}$, $\overline{\int_Y} f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \, d\mathbf{y}$.

Teorema 11.1 (Fubini) *Sea $A = X \times Y \subset \mathbb{R}^n$, donde $X \subset \mathbb{R}^k$, $Y \subset \mathbb{R}^m$ son rectángulos cerrados. Si $f : A \to \mathbb{R}$ es integrable Riemann entonces las funciones*

$$\underline{J}(\mathbf{y}) = \underline{\int_X} f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \, d\mathbf{x}, \qquad \overline{J}(\mathbf{y}) = \overline{\int_X} f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \, d\mathbf{x},$$

son integrables sobre Y, *y se cumple* $\int_A f = \int_Y \underline{J}(\mathbf{y})\ d\mathbf{y} = \int_Y \overline{J}(\mathbf{y})\ d\mathbf{y}$, *es decir*

$$\int_A f(\mathbf{x},\mathbf{y})\ d\mathbf{x}\ d\mathbf{y} = \int_Y \left[\underline{\int_X} f(\mathbf{x},\mathbf{y})\ d\mathbf{x}\right] d\mathbf{y} = \int_Y \left[\overline{\int_X} f(\mathbf{x},\mathbf{y})\ d\mathbf{x}\right] d\mathbf{y}.$$

Análogamente, las funciones

$$\underline{I}(\mathbf{x}) = \underline{\int_Y} f(\mathbf{x},\mathbf{y})\ d\mathbf{y}, \qquad \overline{I}(\mathbf{x}) = \overline{\int_Y} f(\mathbf{x},\mathbf{y})\ d\mathbf{y},$$

son integrables sobre X, *y se verifica* $\int_A f = \int_X \underline{I}(\mathbf{x})\ d\mathbf{x} = \int_X \overline{I}(\mathbf{x})\ d\mathbf{x}$, *es decir*

$$\int_A f(\mathbf{x},\mathbf{y})\ d\mathbf{x}\ d\mathbf{y} = \int_X \left[\underline{\int_Y} f(\mathbf{x},\mathbf{y})\ d\mathbf{y}\right] d\mathbf{x} = \int_X \left[\overline{\int_Y} f(\mathbf{x},\mathbf{y})\ d\mathbf{y}\right] d\mathbf{x}.$$

DEM: Cada $p \in \mathcal{P}(A)$, $p = (p_1, p_2, \cdots p_k, p_{k+1} \cdots p_n)$, se identifica con el par (p', p''), donde $p' \in \mathcal{P}(X)$, $p'' \in \mathcal{P}(Y)$, vienen dadas por $p' = (p_1, p_2, \cdots p_k)$, $p'' = (p_{k+1} \cdots p_n)$, y es claro que $\Delta(p) = \{S' \times S'' : S' \in \Delta(p'), S'' \in \Delta(p'')\}$.

Fijado $S = S' \times S'' \in \Delta(p)$, con $S' \in \Delta(p')$, $S'' \in \Delta(p'')$, para cada $\mathbf{y} \in S''$ se cumple $m(f, S' \times S'') \leq m(f^{\mathbf{y}}, S')$, luego

$$\sum_{S' \in \Delta(p')} m(f, S' \times S'')v(S') \leq \sum_{S' \in \Delta(p')} m(f^{\mathbf{y}}, S')v(S') = s(f^{\mathbf{y}}, p') \leq \underline{\int_X} f^{\mathbf{y}}(\mathbf{x})\ dx = \underline{J}(\mathbf{y})$$

Considerando el extremo inferior de $\underline{J}(\mathbf{y})$ cuando $\mathbf{y}$ recorre S'', se obtiene

$$\sum_{S' \in \Delta(p')} m(f, S' \times S'')v(S') \leq m(\underline{J}, S'').$$

Multiplicando miembro a miembro por $v(S'')$, y sumando cuando S'' recorre $\Delta(p'')$ se llega a la desigualdad

$$s(f,p) \leq s(\underline{J}, p'')$$

Análogamente se demuestra que

$$S(f,p) \geq S(\overline{J}, p'')$$

Quedan establecidas así las dos desigualdades no triviales de la cadena

$$s(f,p) \leq s(\underline{J}, p'') \leq s(\overline{J}, p'') \leq \underline{\int_Y} \overline{J}(\mathbf{y})\ d\mathbf{y} \leq \overline{\int_Y} \overline{J}(\mathbf{y})\ d\mathbf{y} \leq S(\overline{J}, p'') \leq S(f,p)$$

de las que se deduce que $\overline{J}$ es integrable sobre Y, con $\int_Y \overline{J}(\mathbf{y})\ d\mathbf{y} = \int_A f(\mathbf{x},\mathbf{y})\ d\mathbf{x}\ d\mathbf{y}$.

Análogamente, utilizando las desigualdades

$$s(f,p) \leq s(\underline{J}, p'') \leq \underline{\int_Y} \underline{J}(\mathbf{y})\ d\mathbf{y} \leq \overline{\int_Y} \underline{J}(\mathbf{y})\ d\mathbf{y} \leq S(\underline{J}, p'') \leq S(\overline{J}, p'') \leq S(f,p)$$

se concluye que $\underline{J}$ es integrable sobre Y, con $\int_Y \underline{J}(\mathbf{y})\, d\mathbf{y} = \int_A f(\mathbf{x}, \mathbf{y})\, d\mathbf{x}\, d\mathbf{y}$.

De forma similar se demuestran las afirmaciones que conciernen a las integrales sobre X de las funciones $\underline{I}(\mathbf{x})$, $\overline{I}(\mathbf{x})$. ■

OBSERVACIONES:

i) En las condiciones del teorema de Fubini, si f es continua, todas las funciones parciales $f_{\mathbf{x}}$, $f^{\mathbf{y}}$ son continuas (y por lo tanto integrables) y se puede escribir

$$\int_A f(\mathbf{x}, \mathbf{y})\, d\mathbf{x}\, d\mathbf{y} = \int_X \left(\int_Y f(\mathbf{x}, \mathbf{y})\, d\mathbf{y} \right) d\mathbf{x} = \int_Y \left(\int_X f(\mathbf{x}, \mathbf{y})\, d\mathbf{x} \right) d\mathbf{y}$$

ii) Es instructivo comprobar directamente la tesis del teorema de Fubini para la función considerada en el ejercicio resuelto 10.33. Es claro que $\underline{J}(y) = 0 = \overline{J}(y)$ para todo $y \in [0, 1]$, mientras que para todo $x \in (0, 1] \cap \mathbb{Q}$, es $\underline{I}(x) < \overline{I}(x)$. Si $x = p/q$ en forma irreducible entonces $\underline{I}(x) = 0$, y $\overline{I}(x) = 1/q$. Obsérvese que, de acuerdo con el teorema de Fubini, 11.1, las funciones $\overline{I}$, $\underline{I}$ son integrables sobre $[0, 1]$, con el mismo valor de la integral.

iii) La función considerada en el ejercicio resuelto 10.33 también muestra que, en las condiciones del teorema de Fubini, pueden existir puntos $\mathbf{x} \in X$ (resp. $\mathbf{y} \in Y$), tales que $f_{\mathbf{x}}$ (resp. $f^{\mathbf{y}}$) no es integrable sobre Y (resp. sobre X). Sin embargo la función $\varphi(\mathbf{x}) = \overline{I}(\mathbf{x}) - \underline{I}(\mathbf{x}) \geq 0$ es integrable, con integral nula, y según el ejercicio resuelto 10.32, podemos asegurar que el conjunto $\{\mathbf{x} \in X : \varphi(\mathbf{x}) > 0\}$ es de medida nula en $\mathbb{R}^k$. Es decir, el conjunto de puntos $\mathbf{x} \in X$ tales que $f_{\mathbf{x}}$ no es integrable, es de medida nula. Análogamente, el conjunto de puntos $\mathbf{y} \in Y$ tales que $f^{\mathbf{y}}$ no es integrable, es de medida nula.

iv) La existencia de una integral iterada $\int_X \left[\int_Y f(\mathbf{y})\, d\mathbf{y}\right] d\mathbf{x}$ no implica que exista la integral $\int_A f(\mathbf{x}, \mathbf{y})\, d\mathbf{x}\, d\mathbf{y}$. En el ejercicio propuesto 11.4.3 se muestra una función acotada no integrable Riemann $f : [0, 1] \times [0, 1] \to \mathbb{R}$ tal que existe la integral iterada.

Para el cálculo de una integral múltiple sobre un conjunto medible Jordan también se puede aplicar el teorema de Fubini. Suponemos, como en el enunciado de este teorema, $\mathbb{R}^n$ identificado con $\mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^m$, $(n = k + m)$. Si $f : E \to \mathbb{R}$ es integrable Riemann sobre un conjunto medible Jordan $E \subset \mathbb{R}^n$, para calcular la integral $\int_E f$ debemos considerar un rectángulo cerrado $A = X \times Y$, con $X \subset \mathbb{R}^k$, $Y \subset \mathbb{R}^m$, que contenga a E. Para simplificar la escritura no es restrictivo suponer que f está definida en todo $\mathbb{R}^n$, (en caso contrario podemos extender $f : E \to \mathbb{R}^n$ a todo $\mathbb{R}^n$, definiendo $\mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0$ cuando $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \notin E$), de modo que $f_E(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \chi_E(\mathbf{x}, \mathbf{y}) f(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ para todo $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^m$. Según la definición de integral sobre un conjunto medible Jordan, se tiene

$$\int_E f(\mathbf{x}, \mathbf{y})\, d\mathbf{x}\, d\mathbf{y} = \int_A \chi_E(\mathbf{x}, \mathbf{y}) f(\mathbf{x}, \mathbf{y})\, d\mathbf{x}\, d\mathbf{y}$$

Para cada $\mathbf{x} \in X$, sea $E_{\mathbf{x}} = \{\mathbf{y} \in Y : (\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in E\}$ la sección de E por $\mathbf{x}$. Con el fin de simplificar la exposición supondremos en lo que sigue que cada $E_{\mathbf{x}}$ es medible Jordan y que $f|_E$ es continua (el caso más habitual en las aplicaciones). En este caso cada $f_{\mathbf{x}}$ es continua, y por lo tanto integrable, sobre $E_{\mathbf{x}}$, y en virtud del teorema de Fubini se tiene

$$\int_E f(\mathbf{x}, \mathbf{y})\, d\mathbf{x}\, d\mathbf{y} = \int_X \left(\int_Y \chi_E(\mathbf{x}, \mathbf{y}) f(\mathbf{x}, \mathbf{y})\, d\mathbf{y} \right) d\mathbf{x} =$$

$$= \int_X \left(\int_Y \chi_{E_{\mathbf{x}}}(\mathbf{y}) f_{\mathbf{x}}(\mathbf{y})\, d\mathbf{y} \right) d\mathbf{x} = \int_X \left(\int_{E_{\mathbf{x}}} f_{\mathbf{x}}(\mathbf{y})\, d\mathbf{y} \right) d\mathbf{x}$$

Naturalmente que, en esta discusión, el papel de las variables $(x_1, x_2, \cdots x_k) = \mathbf{x}$ lo puede desempeñar cualquier subconjunto de las variables $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$, pero hemos considerado las k primeras para simplificar la notación.

Para el cálculo de integrales múltiples mediante integración iterada conviene examinar atentamente la función y el conjunto E, con el fin de plantear la integración iterada que conduzca a los cálculos más sencillos (véanse los ejercicios resueltos 11.13 y 11.14).

Cálculo de volúmenes por el método de las secciones. En la discusión anterior, si f es la función constante 1, resulta

$$c_n(E) = \int_X c_k(E_{\mathbf{x}})\, d\mathbf{x}$$

Cuando $n = 3$, y $k = 1$, como E es acotado, existe $[a, b] \in \mathbb{R}$, tal que

$$E \subset \{(x, y, z) : a \leq x \leq b\}$$

y podemos tomar $X = [a, b]$. Entonces, el contenido (volumen) de $E \subset \mathbb{R}^3$, se expresa mediante la integral simple

$$c_3(E) = \int_a^b S(x)\, dx$$

donde $S(x) = c_2(E_x)$ es el área de la sección E_x

Este método de cálculo de volúmenes es especialmente útil cuando las secciones E_x son figuras geométricas sencillas de área conocida, como ocurre en el caso de los sólidos de revolución (véanse los ejercicios resueltos 11.12 y 11.11).

Con él queda justificado el clásico principio de Cavalieri que afirma que si la secciones E_x, F_x de dos conjuntos medibles $E, F \subset \mathbb{R}^3$ tienen siempre la misma área entonces los dos conjuntos tienen el mismo volumen.

NOTA: En el método de las secciones el papel que desempeña la variable x lo puede desempeñar cualquiera de las otras dos variables, y ó z. Más generalmente, el método también es válido cuando las secciones se realizan mediante planos perpendiculares a una recta arbitraria (distinta de los ejes de coordenadas). Para justificar esta afirmación basta tener en cuenta que con una traslación y un giro la recta se puede llevar a la posición del eje Ox, y que los conjuntos medibles Jordan y su contenido son invariantes por estas transformaciones (véase el corolario 11.3).

Integrales dobles iteradas. Consideremos primero el caso de una función continua $f : A \to \mathbb{R}$, sobre un rectángulo $A = [a, b] \times [c, d]$. En este caso, tomando $X = [a, b]$, $Y = [c, d]$, el cálculo de la primera integral iterada $I(x) = \int_a^b f(x, y)dy$ se podrá emprender buscando una primitiva de f_x y aplicando la regla de Barrow. La función resultante $I(x)$ también es continua (esto se deja como ejercicio) y el valor de su integral $\int_c^d I(x)\, dx$ se podrá obtener, cuando sea posible, mediante el cálculo de una primitiva. Así queda resuelto, al menos teóricamente, el cálculo de la integral doble de una función continua de dos variables reales sobre un rectángulo cerrado $A \subset \mathbb{R}^2$.

Consideremos ahora el caso general de integrales dobles sobre conjuntos medibles Jordan $E \subset \mathbb{R}^2$. Empezamos considerando el caso particular de los que admiten una representación de la forma

$$E = \{(x, y) : a \leq x \leq b,\ \alpha_1(x) \leq y \leq \alpha_2(x)\}$$

donde $\alpha_1 \leq \alpha_2$ son funciones integrables Riemann sobre $[a, b]$. A estos conjuntos los llamaremos recintos simples de tipo $(1, 2)$, (también llamaremos recintos simples de tipo $(1, 2)$ a los que admiten una representación análoga con algunas de las desigualdades $\leq$ reemplazadas por $<$). Según la proposición 10.15 los recintos de este tipo son medibles Jordan, y dada una función integrable $f : E \to \mathbb{R}$, vamos a exponer con detalle la aplicación del teorema de Fubini al cálculo de $\int_E f$.

Si c (resp. d) es una cota inferior (resp. superior) de $\alpha_1(x)$ (resp. $\alpha_2(x)$) en $[a, b]$, podemos fijar el rectángulo $A = [a, b] \times [c, d]$ para aplicar el teorema de Fubini, con $X = [a, b]$, $Y = [c, d]$. Como estamos suponiendo que E es un recinto simple tipo $(1, 2)$, es natural considerar primero la integral respecto a la variable y, ya que cada sección $E_x = [\alpha_1(x), \alpha_2(x)]$ es un intervalo. Si cada f_x es integrable sobre $[\alpha_1(x), \alpha_2(x)]$, (lo que ocurre cuando f es continua) podemos escribir

$$I(x) = \int_{\alpha_1(x)}^{\alpha_2(x)} f(x, y)\, dy$$

y la integral $\int_E f(x, y)\, dx\, dy$ se expresa mediante la integral iterada

$$\int_E f(x, y)\, dx\, dy = \int_a^b \left[\int_{\alpha_1(x)}^{\alpha_2(x)} f(x, y)\, dy \right] dx$$

El cálculo de esta integral iterada se puede abordar con los métodos del cálculo de una variable, basados en el cálculo de primitivas y la regla de Barrow.

Análogamente se pueden considerar los recintos simples de tipo $(2, 1)$, que son los de la forma

$$E = \{(x, y) : c \leq y \leq d,\ \beta_1(y) \leq x \leq \beta_2(y)\}$$

donde $\beta_1 \leq \beta_2$ son integrables Riemann sobre $[c,d]$. En este caso la integral se expresa como integral iterada según el otro orden de integración

$$\int_E f(x,y)\ dx\ dy = \int_c^d \left[\int_{\beta_1(y)}^{\beta_2(y)} f(x,y)\ dx\right] dy$$

NOTA: Si $E \subset \mathbb{R}^2$ se puede expresar simultáneamente como recinto simple de tipo $(1,2)$, y como recinto simple de tipo $(2,1)$, hay dos alternativas para emprender el cálculo de la integral doble y conviene elegir, entre las dos integrales iteradas

$$\int_E f(x,y)\ dx\ dy = \int_a^b \left[\int_{\alpha_1(x)}^{\alpha_2(x)} f(x,y)\ dy\right] dx = \int_c^d \left[\int_{\beta_1(y)}^{\beta_2(y)} f(x,y)\ dx\right] dy$$

la que se pueda evaluar usando el cálculo de primitivas o la que conduzca a un cálculo más simple (véanse los ejercicios resueltos 11.13 y 11.14).

Finalmente, si $E \subset \mathbb{R}^2$ no es simple, pero se puede expresar como unión disjunta de recintos simples $E = E_1 \cup E_2 \cup \cdots \cup E_r$, el cálculo de la integral doble $\int_E f(x,y)\ dx\ dy$ se puede abordar con los métodos anteriores utilizando la propiedad aditiva de la integral: $\int_E f = \sum_{i=1}^r \int_{E_i} f$.

Integrales triples iteradas. Consideremos en primer lugar integrales de funciones de tres variables sobre conjuntos $E \subset \mathbb{R}^3$ que se puedan expresar en la forma

$$E = \{(x,y,z) : a \leq x \leq b,\ \alpha_1(x) \leq y \leq \alpha_2(x),\ \beta_1(x,y) \leq z \leq \beta_2(x,y)\}$$

donde $\alpha_1 \leq \alpha_2$ son integrables sobre $[a,b]$, y $\beta_1 \leq \beta_2$ son integrables sobre

$$F = \{(x,y) : a \leq x \leq b,\ \alpha_1(x) \leq y \leq \alpha_2(x)\}$$

A los conjuntos de este tipo los llamaremos *recintos simples* de tipo $(1,2,3)$ (también incluimos en este tipo a los descritos en forma similar reemplazando algunas desigualdades $\leq$ por desigualdades estrictas $<$).

En virtud de la proposición 10.16, F es medible Jordan en $\mathbb{R}^2$ y E medible Jordan en $\mathbb{R}^3$. Cada sección

$$E_x = \{(y,z) \in \mathbb{R}^2 : \alpha_1(x) \leq y \leq \alpha_2(x),\ \beta_1(x,y) \leq z \leq \beta_2(x,y)\}$$

es medible Jordan en $\mathbb{R}^2$, por ser un recinto simple de tipo $(1,2)$ en el plano yz. En lo que sigue se supone que $f : E \to \mathbb{R}$ es integrable sobre E. De acuerdo con lo que se expuso en el apartado anterior, si f_x es integrable sobre E_x, su integral viene dada por

$$I(x) = \int_{E_x} f(x,y,z)\ dy\ dz = \int_{\alpha_1(x)}^{\alpha_2(x)} \left(\int_{\beta_1(x,y)}^{\beta_2(x,y)} f(x,y,z)\ dz\right) dy$$

luego

$$\int_E f(x,y,z)\ dx\ dy\ dz = \int_a^b \left(\int_{\alpha_1(x)}^{\alpha_2(x)} \left(\int_{\beta_1(x,y)}^{\beta_2(x,y)} f(x,y,z)\ dz\right) dy\right) dx$$

expresión que también se suele escribir, omitiendo los paréntesis, en la forma

$$\int_a^b \int_{\alpha_1(x)}^{\alpha_2(x)} \int_{\beta_1(x,y)}^{\beta_2(x,y)} f(x,y,z)\ dz\ dy\ dx = \int_a^b dx \int_{\alpha_1(x)}^{\alpha_2(x)} dy \int_{\beta_1(x,y)}^{\beta_2(x,y)} f(x,y,z)\ dz$$

Análogamente se pueden considerar los recintos simples de tipo $\sigma = (i,j,k)$, donde σ es una permutación de $(1,2,3)$. En este caso, si $E \subset \mathbb{R}^3$ está descrito como recinto simple de tipo (i,j,k), la integral triple

$$\int_M f(x_1,x_2,x_3)\ dx_1\ dx_2\ dx_3$$

se podrá expresar directamente como una integral en la que primero se integra respecto a la variable x_k, luego respecto a la variable x_j, y finalmente respecto a la variable x_i. A veces ocurre que un conjunto $M \subset \mathbb{R}^3$ se puede describir como recinto simple de tipo σ para diferentes permutaciones σ de $(1,2,3)$. En este caso la integral triple se puede escribir, de varias formas, como integral iterada según los ordenes de integración que corresponden a estas permutaciones y convendrá elegir aquella integral iterada que conduzca a los cálculos más sencillos.

Finalmente, cuando $E \subset \mathbb{R}^3$ no es simple, pero se puede expresar como unión disjunta de recintos simples $E = E_1 \cup E_2 \cup \cdots \cup E_r$, el cálculo de la integral triple $\int_E f(x,y,z)\ dx\ dy\ dz$, se puede abordar con los métodos anteriores utilizando la propiedad aditiva de la integral: $\int_E f = \sum_{i=1}^r \int_{E_i} f$.

La definición de recinto simple se extiende a $\mathbb{R}^n$ de manera obvia. Estos conjuntos son medibles Jordan en $\mathbb{R}^n$, y permiten expresar directamente la integral múltiple como una integral iterada.

11.2. Utilización del cambio de variable

Una técnica muy útil para el cálculo de integrales múltiples es la de cambio de variable. Frecuentemente el cálculo de una integral múltiple se puede simplificar bastante efectuando un cambio de variable que transforme la integral en otra cuyo cálculo sea accesible o más fácil.

Comenzamos recordando el significado de los conceptos que intervienen en el enunciado del teorema del cambio de variable:

Dada una aplicación $g : \Omega \to \mathbb{R}$, definida en un abierto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, cuando se fija un punto $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \cdots a_n) \in \Omega$, en un entorno de a_1 está definida la función parcial $x_1 \to g(x_1, a_2, \cdots a_n)$. Si esta función es derivable en a_1, su derivada,

$$\frac{\partial g}{\partial x_1}(\mathbf{a}) = \lim_{h \to 0} \frac{g(a_1+h, a_2, \cdots a_n) - g(a_1, a_2, \cdots a_n)}{h}$$

también denotada $D_1 g(\mathbf{a})$, se llama derivada parcial de la función g, en el punto $\mathbf{a}$, respecto a la primera variable x_1. Análogamente se definen las derivadas parciales respecto a las restantes variables, denotadas

$$\frac{\partial g}{\partial x_j}(\mathbf{a}) = D_j g(\mathbf{a}), \quad 1 \le j \le n$$

Si en cada punto $\mathbf{x} \in \Omega$ existen las derivadas parciales $D_j g(\mathbf{x})$, $1 \le j \le n$, y todas las funciones $\mathbf{x} \to D_j g(\mathbf{x})$ son continuas en Ω, se dice que la función g es de clase $C^1(\Omega)$.

Una aplicación $\mathbf{g} : \Omega \to \mathbb{R}^n$, de componentes $\mathbf{g}(\mathbf{x}) = (g_1(\mathbf{x}), g_2(\mathbf{x}), \cdots g_n(\mathbf{x}))$, definida en un abierto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, se dice que es de clase $C^1(\Omega)$ cuando cada componente g_j $(1 \le j \le n)$, es de clase $C^1(\Omega)$. En este caso, la matriz $(D_i g_j(\mathbf{x}))_{1\le i,j\le n}$, llamada matriz Jacobiana de $\mathbf{g}$ en $\mathbf{x}$, la denotaremos por $\mathbf{g}'(\mathbf{x})$.

Los conceptos que acabamos de recordar son los que intervienen en el enunciado del teorema del cambio de variable para la integral de Riemann. Este teorema es un punto de encuentro del cálculo integral con el cálculo diferencial y en su demostración intervienen ambas teorías. Su demostración que es larga e involucra bastantes detalles técnicos, se expone con detalle en el apéndice J. Se suele comenzar demostrando un resultado preliminar (el caso de un cambio de variable lineal) que aquí figura como corolario 11.3.

Teorema 11.2 [Cambio de variable] *Sea* $\mathbf{g} : \Omega \to \mathbb{R}^n$ *una aplicación de clase* $C^1(\Omega)$ *en un abierto* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, *y* $E \subset \mathbb{R}^n$ *un conjunto medible Jordan que verifica*

a) $\overline{E} \subset \Omega$.

b) $det\, \mathbf{g}'(\mathbf{x}) \neq 0$ *para cada* $\mathbf{x} \in E^\circ$.

c) $\mathbf{g}$ *es inyectiva sobre* E°.

Entonces $M = \mathbf{g}(E)$ *es medible Jordan, y para cada función integrable Riemann* $f : M \to \mathbb{R}$, *la función* $f \circ \mathbf{g}|det\,(\mathbf{g}')|$ *es integrable sobre* E, *y se verifica*

$$\int_M f(\mathbf{y})\ d\mathbf{y} = \int_E f(\mathbf{g}(\mathbf{x}))|det\, \mathbf{g}'(\mathbf{x})|\ d\mathbf{x}$$

En particular, cuando $f = 1$, *se obtiene,*

$$c_n(\mathbf{g}(E)) = \int_E |det\, \mathbf{g}'(\mathbf{x})|\ d\mathbf{x}$$

OBSERVACIONES:

ii) Como consecuencia del teorema de la función inversa 8.13, cuando se cumplen las hipótesis del teorema anterior, la imagen $V = \mathbf{g}(E^\circ)$ es abierta y la inversa de la biyección $\mathbf{g} : E^\circ \to V$ también es de clase $C^1(V)$.

i) En las condiciones del teorema anterior, cuando $n = 1$, y $E = [a, b]$ las hipótesis b) y c) significan que la restricción de g al intervalo (a, b) es una función estrictamente monótona con derivada continua no nula. Si g es estrictamente decreciente se cumplirá que $g'(t) < 0$, para todo $t \in (a, b)$, y la imagen $g([a, b])$ será un intervalo compacto $M = [c, d]$, con $c = g(b)$, y $d = g(a)$ de modo que la fórmula del cambio de variable se escribe en la forma

$$\int_c^d f(y)\ dy = -\int_a^b f(g(x))g'(x)\ dx$$

Utilizando el convenio $\int_d^c = -\int_c^d$ se obtiene la fórmula del cambio de variable en la forma habitual

$$\int_{g(a)}^{g(b)} f(y)\, dy = \int_a^b f(g(x))g'(x)\, dx$$

Se deja al cuidado del lector la comprobación de esta fórmula también es válida en el caso de un cambio de variable estrictamente creciente.

Corolario 11.3 *Si $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ es una aplicación lineal y $E \subset \mathbb{R}^n$ es medible Jordan, entonces $T(E)$ también lo es y $c_n(T(E)) = |det\, T|c_n(E)$.*
Si además T es una isometría para la distancia euclídea, $c_n(T(E)) = c_n(E)$.

DEM: En el teorema J.8 y también en [5], pág 151, se puede ver una demostración directa de este resultado preliminar. Para obtenerlo como corolario del teorema 11.2 basta aplicar este teorema cuando f es la función constante 1 y $\mathbf{g} = T$ es una aplicación lineal pues, en ese caso, la matriz jacobiana $\mathbf{g}'(\mathbf{x})$ coincide, en todo punto $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, con la matriz de la aplicación lineal T, luego

$$c_n(T(E)) = \int_{T(E)} 1\, d\mathbf{y} = \int_E |\det(T)|\, d\mathbf{x} = |\det(T)|c_n(E)$$

Finalmente, si T es una isometría, y $B = \{\mathbf{x} : \|\mathbf{x}\|_2 \leq 1\}$ se cumple $T(B) = B$, luego $c_n(B) = c_n(T(B)) = |\det T|c_n(B)$, luego, $|\det T| = 1$. (Se deja al cuidado del lector la comprobación de que B es medible Jordan y $c_n(B) > 0$). ■

Los resultados en la siguiente proposición, que son consecuencia del teorema del cambio de variable, pueden resultar útiles en la práctica para simplificar el cálculo de algunas integrales (véanse los ejercicios resueltos 11.15, 11.16, y 11.19).

Proposición 11.4 *Sea $M \subset \mathbb{R}^n$ medible Jordan, $f : M \to \mathbb{R}$ integrable Riemann sobre M, y $S_j(x_1, \cdots x_j, \cdots x_n) = (x_1, \cdots x_{j-1}, -x_j, x_{j+1} \cdots x_n)$ la simetría respecto al hiperplano $x_j = 0$.*

a) Si M es simétrico respecto al origen y f es impar, ($\mathbf{x} \in M \Rightarrow -\mathbf{x} \in M$, y $f(\mathbf{x}) + f(-\mathbf{x}) = 0$) entonces $\int_M f(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} = 0$.

b) Si M simétrico respecto al hiperplano $x_j = 0$, y f es impar respecto a la variable x_j, ($\mathbf{x} \in M \Rightarrow S_j(\mathbf{x}) \in M$, y $f(S_j(\mathbf{x})) = -f(\mathbf{x})$) entonces $\int_M f(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} = 0$.

c) Si M simétrico respecto al hiperplano $x_j = 0$, y f es par respecto a la variable x_j, ($\mathbf{x} \in M \Rightarrow S_j(\mathbf{x}) \in M$, y $f(S_j(\mathbf{x})) = f(\mathbf{x})$) entonces $\int_M f(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} = 2\int_{M^+} f(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} = 0$, donde $M^+ = \{\mathbf{x} \in M : x_j \geq 0\}$.

DEM: a) Hacemos el cambio de variable lineal $\mathbf{y} = T(\mathbf{x})$, donde $T(\mathbf{x}) = -\mathbf{x}$ es la simetría respecto al origen. Como $M = T(M)$, $f(T(\mathbf{x})) = -f(\mathbf{x})$, y $|\det(T)| = 1$, resulta

$$\int_M f(\mathbf{y})\, d\mathbf{y} = \int_{T(M)} f(\mathbf{y})\, d\mathbf{y} = \int_M f(T(\mathbf{x}))\, d\mathbf{x} = -\int_M f(\mathbf{x})\, d\mathbf{x}$$

luego $\int_M f(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} = 0$.

b) En el caso de una función impar se razona como en a), usando el cambio de variable lineal $\mathbf{y} = S_j(\mathbf{x})$, que cumple $|\det(S_j)| = 1$.

c) En el caso de una función par, en virtud de la proposición 10.12

$$\int_M f(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} = \int_{M^+} f(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} + \int_{M^-} f(\mathbf{x})\, d\mathbf{x}, \quad \text{donde } M^- = \{\mathbf{x} \in M : x_j \leq 0\}.$$

Obsérvese que M^+, M^- son conjuntos medibles (porque se obtienen como intersección de M con intervalos cerrados apropiados) y que $M^+ \cap M^-$ tiene contenido nulo (por ser un conjunto acotado contenido en el hiperplano $x_j = 0$). Como $M^- = S_j(M^+)$, $f(S_j(\mathbf{x})) = f(\mathbf{x})$, con el cambio de variable $\mathbf{y} = S_j(\mathbf{x})$, se obtiene

$$\int_{M^-} f(\mathbf{y})\, d\mathbf{y} = \int_{S_j(M^+)} f(\mathbf{y})\, d\mathbf{y} = \int_{M^+} f(S_j(\mathbf{x}))\, d\mathbf{x} = \int_{M^+} f(\mathbf{x})\, d\mathbf{x}$$

■

NOTA: También se cumplen resultados análogos a los establecidos en los apartados b) y c) de la proposición 11.4, reemplazando el hiperplano $x_j = 0$ por un hiperplano afín arbitrario. El enunciado preciso de los resultados y su demostración se deja como ejercicio al cuidado del lector.

Nuestro siguiente objetivo es mostrar algunas aplicaciones interesantes del teorema de cambio de variable. Comenzamos con su aplicación al cálculo efectivo de integrales dobles y triples mediante los siguiente cambios de variable que se usan con bastante frecuencia, y tienen interés especial:

a) *Coordenadas polares* (para integrales dobles): $(x, y) = \mathbf{g}(r, \theta)$, con

$$x = r\cos\theta, \quad y = r\operatorname{sen}\theta, \quad \det \mathbf{g}'(r, \theta) = r.$$

b) *Coordenadas cilíndricas* (para integrales triples): $(x, y, t) = \mathbf{g}(r, \theta, t)$, con

$$x = r\cos\theta, \quad y = r\operatorname{sen}\theta, \quad z = t, \quad \det \mathbf{g}'(r, \theta, t) = r.$$

c) *Coordenadas esféricas* (para integrales triples): $(x, y, z) = \mathbf{g}(\rho, \theta, \varphi)$, con

$$x = \rho\cos\varphi\cos\theta, \quad y = \rho\cos\varphi\operatorname{sen}\theta, \quad z = \rho\operatorname{sen}\varphi, \quad |\det \mathbf{g}'(\rho, \varphi, \theta)| = \rho^2\cos\varphi$$

Cambio de variable a coordenadas polares. Para calcular una integral doble $\int_M f(x, y)\, dx\, dy$, mediante un cambio de variable a coordenadas polares, lo primero que hay que hacer es describir el recinto M en términos de las nuevas coordenadas, es decir, hay que expresarlo como imagen $M = \mathbf{g}(E)$, mediante el cambio de variable $\mathbf{g}(r, \theta) = (r\cos\theta, r\operatorname{sen}\theta)$, de un recinto E, que podemos suponerlo incluido en un conjunto de la forma $B = \{(r,\theta) : r \geq 0, \ \alpha \leq \theta \leq \beta\}$, donde $\beta - \alpha \leq 2\pi$. Obsérvese que, al ser $\mathbf{g}$ inyectiva sobre el interior de B, también lo es sobre el interior de E. También es claro que cada punto (r,θ) interior a E es interior a B, y por lo tanto se cumple la condición $\det \mathbf{g}'(r,\theta) = r > 0$.

Con el cambio de variable a coordenadas polares se obtiene fácilmente la fórmula clásica para el cálculo de áreas de recintos planos limitados por una curva dada en coordenadas polares.

Proposición 11.5 *Sea* $f : [\alpha,\beta] \to \mathbb{R}$ *integrable Riemann,* $\beta - \alpha \leq 2\pi$, *y*

$$M = \{(r\cos\theta, r\,\mathrm{sen}\,\theta) : \alpha \leq \theta \leq \beta, \ 0 \leq r \leq f(\theta)\}$$

el recinto limitado por la curva (en polares) $r = f(\theta)$, *y los radios vectores en los extremos. Entonces* M *es medible Jordan en* $\mathbb{R}^2$, *y su área viene dada por*

$$c_2(M) = \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta f(\theta)^2 \, d\theta$$

DEM: El recinto simple $E = \{(r,\theta) : \alpha \leq \theta \leq \beta, \ 0 \leq r \leq f(\theta)\}$ es medible Jordan en $\mathbb{R}^2$, y el cambio de variable a coordenadas polares, $\mathbf{g}(r,\theta) = (r\cos\theta, r\,\mathrm{sen}\,\theta)$, cumple sobre E las hipótesis del teorema 11.2: La condición $\beta - \alpha \leq 2\pi$ garantiza que $\mathbf{g}$ es inyectiva en el interior de E, y es claro que en cada (r,θ) interior a E, se cumple $\det \mathbf{g}'(r,\theta) = r > 0$. En virtud del teorema de cambio de variable $M = \mathbf{g}(E)$ es medible Jordan en $\mathbb{R}^2$, con área

$$c_2(M)) = \int_E \det |\mathbf{g}'(r,\theta)| \, dr \, d\theta$$

Para $\theta \in [\alpha,\beta]$, la sección E^θ es el intervalo $\{r : 0 \leq r \leq f(\theta)\}$, luego

$$c_2(M)) = \int_\alpha^\beta \left(\int_0^{f(\theta)} r \, dr \right) d\theta = \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta f(\theta)^2 \, d\theta$$

■

Cambio de variable a coordenadas esféricas y cilíndricas. Si en una integral triple $\int_M f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$ deseamos efectuar un cambio de variable a coordenadas esféricas o cilíndricas debemos empeza describiendo $M \subset \mathbb{R}^3$ en términos de las nuevas variables. En el cambio de variable a coordenadas esféricas

$$\mathbf{g}(\rho,\theta,\varphi) = (\rho\cos\varphi\cos\theta,\ \rho\cos\varphi\operatorname{sen}\theta,\ \rho\operatorname{sen}\varphi)$$

debemos describir M en términos de las nuevas variables (ρ,θ,φ), es decir, en la forma $M = \mathbf{g}(E)$, donde

$$E \subset B = \{(\rho,\theta,\varphi) : \rho \geq 0,\ \alpha \leq \theta \leq \beta,\ -\pi/2 \leq \varphi \leq \pi/2\},\ \text{donde } \beta - \alpha \leq 2\pi$$

Es fácil ver que $\mathbf{g}$ es inyectiva sobre el interior de B, luego también lo es sobre el interior de E. Además, en cada punto (ρ,θ,φ) interior a E, se cumple

$$|\det\mathbf{g}'(\rho,\theta,\varphi)| = \rho^2\cos\varphi > 0$$

Dejamos al cuidado del lector una comprobación análoga para el caso del cambio de variable a coordenadas cilíndricas.

Volúmenes de cuerpos de revolución. Con el teorema del cambio de variable también se pueden obtener fórmulas útiles para el cálculo de volúmenes de cuerpos de revolución. Dado un conjunto medible Jordan $E \subset \mathbb{R}^2$, lo consideramos inmerso en $\mathbb{R}^3$, mediante la aplicación natural $j(x,y) = (x,y,0)$ y denotamos por $R_x(E) \subset \mathbb{R}^3$ el conjunto engendrado por la rotación de $j(E)$ alrededor del eje Ox.

$$R_x(E) = \{(x,\ y\cos\varphi,\ y\operatorname{sen}\varphi) : (x,y) \in E,\ 0 \leq \varphi \leq 2\pi\}$$

(Análogamente se define $R_y(E)$).

Teorema 11.6 *Si $E \subset \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq 0\}$ es medible Jordan en $\mathbb{R}^2$, entonces $R_x(E) \subset \mathbb{R}^3$ es medible Jordan en $\mathbb{R}^3$, y su volumen viene dado por la fórmula*

$$c_3(R_x(E)) = 2\pi \int_E y\ dx\ dy$$

DEM: Según la proposición 10.15, $M = \{(x,y,\varphi) : (x,y) \in E,\ 0 \leq \varphi \leq 2\pi\}$ es medible Jordan en $\mathbb{R}^3$, y con el cambio de variable $\mathbf{g}(x,y,\varphi) = (x,\ y\cos\varphi,\ y\operatorname{sen}\varphi)$, el conjunto $R_x(E)$ se expresa en la forma $R_x(E) = \mathbf{g}(M)$. Con el teorema del cambio de variable se obtiene que $R_x(E)$ es medible Jordan en $\mathbb{R}^3$, y

$$c_3(\mathbf{g}(M)) = \int_M \det|\mathbf{g}'(x,y,\varphi)|\ dx\ dy\ d\varphi$$

(Obsérvese que $\mathbf{g}$ es inyectiva sobre el interior de M, y que $\det\mathbf{g}'(x,y,\varphi) = y > 0$ en cada para punto (x,y,φ) del interior de M). Para todo $\varphi \in [0,2\pi]$, la sección $M^\varphi = \{(x,y) : (x,y,\varphi) \in M\}$ coincide con E, luego es medible, y en virtud del teorema de Fubini podemos escribir

$$c_3(\mathbf{g}(M)) = \int_0^{2\pi} \left(\int_E y\ dx\ dy\right) d\varphi = 2\pi \int_E y\ dx\ dy$$

En particular, cuando $E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b,\ 0 \leq y \leq f(x)\} \subset \mathbb{R}^2$ es el recinto de ordenadas asociado a una función integrable no negativa $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, se cumplen las condiciones del teorema anterior, y efectuando una integración iterada

$$\int_E y\ dx\ dy = \int_a^b \left(\int_0^{f(x)} y\ dy \right) dx = \frac{1}{2} \int_a^b f(x)^2\ dx$$

que proporciona la fórmula $c_3(R_x(E)) = \pi \int_a^b f(x)^2\ dx$, que también se podría haber obtenido con el método de las secciones.

Si además $a \geq 0$, para el volumen del sólido que genera E al girar alrededor del eje Oy se obtiene

$$c_3(R_y(E)) = 2\pi \int_E x\ dx\ dy = 2\pi \int_a^b x f(x)\ dx$$

Baricentros. Si $E \subset \mathbb{R}^n$ es medible Jordan, y $c_n(E) > 0$, se define el *baricentro* de E como el punto $\mathbf{b}(E) \in \mathbb{R}^n$ de coordenadas

$$b_j(E) = \frac{1}{c_n(E)} \int_E x_j\ dx_1\ dx_2\ \cdots\ dx_n$$

Cuando E tiene alguna simetría es fácil obtener el baricentro, o algunas de sus coordenadas, sin necesidad de calcular integrales: Si E tiene centro de simetría entonces el centro de simetría es el baricentro y si E es simétrico respecto a un hiperplano entonces el baricentro está en el hiperplano. Para obtener estos resultados conviene establecer primero el siguiente

Lema 11.7 *En las condiciones anteriores, si $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ es una aplicación lineal no singular y $M = T(E)$, se cumple que $\mathbf{b}(M) = T(\mathbf{b}(E))$, es decir, las aplicaciones lineales no singulares conservan los baricentros. Análogamente, las traslaciones conservan los baricentros.*

Dem: Observemos en primer lugar que al ser T una aplicación lineal no singular, según el corolario 11.3 se cumple $c_n(M) = |\det\ (T)| c_n(E) > 0$, y por lo tanto está definido el baricentro $\mathbf{b}(M) = (b_1(M), b_2(M), \cdots b_n(M))$, donde

$$c_n(M) b_k(M) = \int_M y_k\ dy_1\ dy_2\ \cdots\ dy_n$$

Si $y_k = \sum_{j=1}^n a_{kj} x_j$, $1 \leq k \leq n$, son las ecuaciones de la transformación lineal $\mathbf{y} = T(\mathbf{x})$, con este cambio de variable la última integral se convierte en

$$c_n(M)\ b_k(M) = \int_E \left(\sum_{j=1}^n a_{kj} x_j \right) |\det(T)|\ dx_1\ \ dx_2\ \cdots\ dx_n =$$

$$= |\det(T)| \sum_{j=1}^n a_{kj} \int_E x_j\ dx_1\ dx_2\ \cdots\ dx_n =$$

$$= |\det\ (T)| c_n(E) \sum_{j=1}^n a_{kj} b_j(E) = \ c_n(M) T(\mathbf{b}(E))_k$$

y dividiendo por $c_n(M) > 0$ se obtiene el resultado $\mathbf{b}(M) = T(\mathbf{b}(E))$. Dejamos al cuidado del lector la afirmación, más sencilla, referente a las traslaciones. ■

Proposición 11.8 *Sea $E \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto medible Jordan tal que $c_n(E) > 0$.*
i) Si E es simétrico respecto a un hiperplano, su baricentro está en el hiperplano.
ii) Si E es simétrico respecto a un punto, su baricentro es ese punto.

Dem: i) Según el lema 11.7, los baricentros se conservan mediante traslaciones y aplicaciones lineales luego no es restrictiva hacer la demostración cuando el hiperplano de simetría es $x_1 = 0$. En este caso, la simetría viene dada por la aplicación lineal $T(x_1, x_2, \cdots x_n) = (-x_1, x_2, \cdots x_n)$. Por hipótesis $T(E) = E$, y el cambio de variable lineal $\mathbf{y} = T(\mathbf{x})$, cumple $|\det(T)| = 1$, luego

$$\int_E y_1 \, dy_1 \, dy_2 \cdots \, dy_n = \int_{T(E)} y_1 \, dy_1 \, dy_2 \cdots dy_n = -\int_E x_1 \, dx_1 \, dx_2 \, \cdots dx_n$$

luego la primera coordenada de $\mathbf{b}(E)_1$ es nula, lo que significa que el baricentro $\mathbf{b}(E)$ está en el hiperplano de simetría.
ii) En virtud del lema 11.7, no es restrictivo suponer que E es simétrico respecto al origen $\mathbf{0}$, y la demostración es análoga a la anterior considerando ahora el cambio de variable $T(\mathbf{x}) = -\mathbf{x}$, para el que se cumple $T(E) = E$. ■

El interés de estos resultados sobre a baricentros se pondrá de manifiesto después del siguiente teorema, que es una reformulación de 11.6, en la que se hace intervenir la noción de baricentro.

Teorema 11.9 [Guldin] *Sea $E \subset \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq 0\}$ un recinto medible Jordan de área $c_2(E) > 0$. Si $\mathbf{b} = (x_0, y_0)$ es su baricentro, se verifica*

$$c_3(R_x(E)) = 2\pi y_0 c_2(E)$$

(El volumen del cuerpo generado por E al girar alrededor del eje Ox es igual al producto de su área por la longitud de la circunferencia que describe su baricentro).

Dem: Es consecuencia directa del teorema 11.6 y de la definición de baricentro. ■

Ejemplo 11.10

Se considera el cuerpo de revolución generado al girar alrededor del eje Ox el disco

$$\{(x, y) : x^2 + (y - b)^2 \leq r^2\}, \quad \text{donde } r > b > 0$$

Según la proposición 11.8 el baricentro del disco es su centro, y aplicando el teorema de Guldin se obtiene que el volumen del cuerpo es $2\pi^2 br^2$. ■

nota: Para la validez de teorema de Guldin no hace falta suponer que E esta inmerso en el plano $z = 0$, ni que el eje de giro sea Ox. El resultado es válido

para un subconjunto E de un plano afín arbitrario H que gira alrededor de un eje $\mathbf{e}$ situado en ese plano. Naturalmente que hay que suponer que E es medible Jordan dentro de H, con $c_H(E) > 0$, y que E está contenido en uno de los dos semiplanos que la recta $\mathbf{e}$ determina en H (véase [5], pág. 165-66).
La definición, en un subespacio afín $H \subset \mathbb{R}^n$, de la noción intrínseca de subconjunto medible Jordan, y del contenido de Jordan asociado c_H, se puede ver con detalle en la página 149 de [5].

11.3. Ejercicios resueltos

Ejercicio 11.11 *Arquímedes, en una carta a su amigo Eratóstenes (matemático y bibliotecario de Alejandría) donde le expuso su Método de cálculo de áreas, volúmenes y centros de gravedad, enunció el siguiente teorema:* Si en un cubo se inscribe un cilindro que tiene las bases situadas en dos cuadrados opuestos y la superficie tangente a los cuatro planos restantes, y se inscribe en el mismo cubo otro cilindro con las bases en otros dos cuadrados y la superficie tangente a los cuatro planos restantes, la figura comprendida por las superficies de los cilindros e inscrita en ambos es dos tercios del cubo entero.
Utilice el método de las secciones para demostrar este resultado.

SOLUCIÓN

Supongamos que la figura del enunciado está inscrita en un cubo de lado $2r$, de modo que las bases de los cilindros son círculos de radio r. Fijando un sistema de referencia formado por unos ejes cartesianos rectangulares donde los ejes Ox, Oy coinciden con los ejes de los cilindros, podemos describir analíticamente la figura en la forma siguiente:

$$E = \{(x, y, z) : x^2 + z^2 \leq r^2,\ y^2 + z^2 \leq r^2\}$$

Para justificar que E es medible Jordan basta observar que es un recinto del tipo considerado en la proposición 10.15:

$$E = \{(x, y, z) : (x, y) \in Q(r) : -f(x, y) \leq z \leq f(x, y)\}$$

donde $f(x, y) = \text{mín}\{\sqrt{r^2 - y^2},\ \sqrt{r^2 - x^2}\}$ es una función continua sobre el cuadrado $Q(r) = [-r, r] \times [-r, r]$.

La intersección del recinto E con el plano $z = t$ es no vacía si y sólo si $t \in [-r, r]$, y en este caso la sección $\{(x, y) : (x, y, t) \in E\}$ es el cuadrado

$$E^t = \{(x, y) : |x| \leq \sqrt{r^2 - t^2},\ |y| \leq \sqrt{r^2 - t^2}, \}$$

de área $S(t) = 4(r^2 - t^2)$, luego

$$c_3(E) = \int_{-r}^{r} S(t)dt = \frac{16}{3}R^3 = \frac{2}{3}(8r^3)$$

donde $8r^3$ es el volumen del cubo circunscrito. ■

Ejercicio 11.12 *Calcule el área del recinto elíptico*

$$E(a,b) = \{(x,y) : x^2/a^2 + y^2/b^2 \le 1\}$$

y volumen del cuerpo limitado por el elipsoide

$$E(a,b,c) = \{(x,y,z) : x^2/a^2 + y^2/b^2 + z^2/c^2 \le 1\}$$

donde $a > 0, b > 0, c > 0$.

SOLUCIÓN

$$E(a,b) = \{(x,y) : -a \le x \le a,\ -b\sqrt{1 - x^2/a^2} \le y \le b\sqrt{1 - x^2/a^2}\}$$

es un recinto simple de tipo $(1,2)$ luego, según la proposición 10.15,

$$c_2(E(a,b)) = \int_{-a}^{a} 2b\sqrt{1 - x^2/a^2}\ dx$$

Esta integral se calcula con el cambio de variable $x = a \operatorname{sen} t$, y se obtiene

$$c_2(E(a,b)) = 2ab\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2 t dt = \pi ab$$

El volumen del recinto $E(a,b,c)$ se puede calcular por el método de las secciones: La intersección de este recinto con el plano $z = t$ es no vacía si y sólo si $t \in [-c,c]$, y en este caso la sección $\{(x,y) : (x,y,t) \in E(a,b,c)\}$ es el recinto elíptico

$$\{(x,y) : x^2/a^2 + y^2/b^2 \le 1 - c^2/t^2\}$$

limitado por una elipse de semiejes, $a\sqrt{1 - c^2/t^2}$, $b\sqrt{1 - c^2/t^2}$, cuya área es

$$S(t) = \pi ab(1 - t^2/c^2)$$

luego el volumen de $E(a,b,c)$ viene dado por la integral $\int_{-c}^{c} S(t)dt = \frac{4}{3}\pi abc$.

El mismo resultado se obtiene considerando que $E(a,b,c) = T(B(\mathbf{0},1))$, donde $B(\mathbf{0},1)$ es la bola euclídea de centro el origen $\mathbf{0}$ y radio 1, y $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ es la transformación lineal $T(z,y,z) = (ax,by,cz)$, de determinante $\det(T) = abc$.

El volumen de la bola euclídea $B(\mathbf{0},1)$, se calcula fácilmente mediante un cambio de variable a coordenadas esféricas

$$c_3(B(\mathbf{0},1)) = \int_0^{2\pi} d\theta \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\varphi \int_0^1 \rho^2 \cos\varphi\ d\rho = \frac{4}{3}\pi$$

y según el ejercicio 11.3, el volumen de $E(a,b,c)$ viene dado por

$$c_3(E(a,b,c) = |\det(T)| c_3(B(\mathbf{0},1)) = \frac{4}{3}\pi abc$$

■

Ejercicio 11.13 *Calcule las siguientes integrales dobles*

a) $I = \int_A ye^{xy}\, dx\, dy, \qquad A = [0,1] \times [0,1].$

b) $J = \int_E \sqrt{a^2 - y^2}\, dx\, dy, \qquad E = \{(x,y) :\ x^2 + y^2 \leq a^2,\ x \geq 0,\ y \geq 0\},\ (a > 0).$

c) $K = \int_E (x-1)\sqrt{1+e^{2y}}\, dx\, dy, \quad E = \{(x,y) :\ 1 \leq x \leq 2,\ 0 \leq y \leq \log x\}.$

SOLUCIÓN

a) Según el teorema de Fubini,

$$I = \int_0^1 \left(\int_0^1 ye^{xy}\, dy \right) dx = \int_0^1 \left(\int_0^1 ye^{xy}\, dx \right) dy$$

El cálculo de la primera integral iterada comienza con la búsqueda de una primitiva de la función $y \to ye^{xy}$ (que se podría encontrar mediante una rutinaria integración por partes). Abandonamos este camino porque el cálculo de la segunda integral iterada es mucho más rápido, ya que la función parcial $x \to ye^{xy}$ tiene la primitiva inmediata $x \to e^{xy}$, con la que se obtiene $I = \int_0^1 (e^y - 1)\, dy = e - 2$.

b) E se describe fácilmente como recinto simple de tipo $(1,2)$ y de tipo $(2,1)$:

$E = \{(x,y) : 0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq \sqrt{a^2 - x^2}\} = \{(x,y) : 0 \leq y \leq a, 0 \leq x \leq \sqrt{a^2 - y^2}\}$

De las dos alternativas calcular J mediante una integral iterada

$$J = \int_0^a \left(\int_0^{\sqrt{a^2-y^2}} \sqrt{a^2 - y^2}\, dx \right) dy = \int_0^a \left(\int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} \sqrt{a^2 - y^2}\, dy \right) dx$$

conviene la primera, que involucra el cálculo más fácil: $J = \int_0^a (a^2 - y^2)\, dy = \frac{2}{3}a^3$.

c) El recinto de integración, que viene descrito como recinto simple de tipo $(1,2)$, conviene expresarlo como recinto simple de tipo $(2,1)$:

$$E = \{(x,y) : 0 \leq y \leq \log 2,\ e^y \leq x \leq 2\}$$

ya que el cálculo de I mediante una integración iterada parece más fácil si empezamos integrando respecto a la variable x

$$K = \int_0^{\log 2} \left(\int_{e^y}^2 (x-1)\sqrt{1+e^{2y}}\, dx \right) dy = \int_0^{\log 2} \left(e^y - \frac{1}{2}e^{2y} \right) \sqrt{1+e^{2y}}\, dy = K_1 - \frac{K_2}{2}$$

donde $K_1 = \int_0^{\log 2} e^y \sqrt{1+e^{2y}}\, dy$, $K_2 = \int_0^{\log 2} e^{2y}\sqrt{1+e^{2y}}\, dy$.
Con los cambios de variable $s = e^y$, $t = e^{2y}$, se llega a las integrales

$$K_1 = \int_1^2 \sqrt{1+s^2}\, ds, \quad K_2 = \frac{1}{2}\int_1^4 \sqrt{1+t}\, dt$$

que se pueden calcular fácilmente con las técnicas usuales del cálculo de primitivas. ■

Ejercicio 11.14 *Calcule las siguientes integrales dobles*

a) $I = \int_E x\ dx\ dy,$ $E = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 2x\}.$

b) $J = \int_E x\sqrt{1 - x^2 - y^2}\ dx\ dy,$ $E = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1, x \geq 0, y \geq 0\}.$

SOLUCIÓN

a) El disco $E = \{(x, y) : (x - 1)^2 + y^2 \leq 1\}$ se describe fácilmente como recinto simple de tipo $(1, 2)$:

$$E = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 2, -\sqrt{2x - x^2} \leq y \leq -\sqrt{2x - x^2}$$

lo que permite calcular I mediante la integral iterada

$$I = \int_0^2 \left(\int_{-\sqrt{2x-x^2}}^{+\sqrt{2x-x^2}} x\ dy \right) dx = \int_0^2 2x\sqrt{2x - x^2}\ dx$$

Como $2x - x^2 = 1 - (1 - x)^2$, es natural efectuar el cambio de variable $x = 1 + \operatorname{sen} t$ con el que se obtiene la integral

$$I = 2 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (1 + \sin t) \cos^2 t\ dt = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (1 + \cos 2t + 2\cos^2 t\ \operatorname{sen} t) dt = \pi$$

La integral I también se puede calcular con un cambio de variable a coordenadas polares. La descripción de E en coordenadas polares es bien sencilla

$$E = \{(r \cos\theta, r \operatorname{sen}\theta) : -\pi/2 \leq \theta \leq \pi/2, 0 \leq r \leq 2\cos\theta\}$$

y se obtiene

$$I = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left(\int_0^{2\cos\theta} r^2 \cos\theta\ dr \right) d\theta = \frac{8}{3} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^4 \theta\ d\theta = \pi$$

donde la última integral se ha calculado usando el desarrollo:

$$\cos^4 \theta = \left(\frac{1 + \cos 2\theta}{2} \right)^2 = \frac{1}{4} \left(1 + 2\cos 2\theta + \frac{1 + \cos 4\theta}{2} \right)$$

b) E es un recinto simple de tipo $(1, 2)$ y de tipo $(2, 1)$:

$$E = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq \sqrt{1 - x^2}\} = \{(x, y) : 0 \leq y \leq 1, 0 \leq x \leq \sqrt{1 - y^2}\}$$

y de las dos alternativas para calcular J mediante una integral iterada

$$J = \int_0^1 \left(\int_0^{\sqrt{1-y^2}} x\sqrt{1-x^2-y^2}\ dx \right) dy = \int_0^1 \left(\int_0^{\sqrt{1-x^2}} x\sqrt{1-x^2-y^2}\ dy \right) dx$$

elegimos la primera, que involucra el cálculo de una primitiva inmediata (respecto a la variable x). Se obtiene así

$$J = \frac{1}{3}\int_0^1 (1-y^2)^{3/2}\ dy$$

Al mismo resultado se llega con un cambio de variable a coordenadas polares en la integral doble:

$$J = \int_0^1 \left(\int_0^{\pi/2} r^2\sqrt{1-r^2}\cos\theta\ d\theta \right) dr = \int_0^1 r^2\sqrt{1-r^2}\ dr = \frac{1}{3}\int_0^1 (1-r^2)^{3/2}\ dr$$

donde la última igualdad es consecuencia de una integración por partes.

Con el cambio de variable $y = \operatorname{sen} t$ se obtiene

$$J = \frac{1}{3}\int_0^1 (1-y^2)^{3/2}\ dy = \frac{1}{3}\int_0^{\pi/2} \cos^4 t\ dt$$

La última integral se calcula mediante el desarrollo indicado en el apartado a), y se obtiene que $J = \pi/16$. ∎

Ejercicio 11.15 *Se supone que $M \subset \mathbb{R}^2$ es medible Jordan y simétrico respecto a la recta $x = y$. Demuestre que $E = \{(x,y) \in M : y \leq x\}$ también es medible Jordan y que si $f : M \to \mathbb{R}$ es una función integrable Riemann que verifica $f(x,y) = f(y,x)$ para todo $(x,y) \in M$ entonces*

$$\int_M f(x,y)\ dx\ dy = 2\int_E f(x,y)\ dy$$

Utilice esta propiedad y un cambio de variable apropiado, para calcular

$$\int_0^1 \left(\int_0^1 \sqrt{x^2+y^2}\ dx \right) dy$$

solución

Como M es acotado, estará contenido en un cuadrado $Q = [-R, R] \times [-R, R]$. Como el triángulo $T = \{(x,y) : -R \leq x \leq R, -R \leq y \leq x\}$ es medible Jordan, también lo será la intersección $E = T \cap M$.

Análogamente $F = \{(x,y) \in M : y \geq x\}$ es medible Jordan. Evidentemente $M = E \cup F$, y aunque $E \cap F$ no es vacío, como tiene contenido nulo, podemos asegurar que

$$\int_M f(x,y)\ dx\ dy = \int_E f(x,y)\ dx\ dy + \int_F f(x,y)\ dx\ dy$$

En la última integral se efectúa el cambio de variable dado por $g(u,v) = (v,u)$. Como $F = g(E)$, $|g'(u,v)| = 1$ y $f = f \circ g$ resulta:

$$\int_F f(x,y)\ dx\ dy = \int_{g(E)} f(x,y)\ dx\ dy = \int_E f(g(u,v))\ du\ dv = \int_E f(u,v)\ du\ dv$$

luego

$$\int_M f(x,y)\ dx\ dy = 2\int_E f(x,y)\ dx\ dy$$

Aplicando la fórmula anterior cuando $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$, $M = [0,1]\times[0,1]$, y $E = \{(x,y) : 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le x\}$, con un cambio a coordenadas polares, resulta

$$I = \int_0^1 \left(\int_0^1 \sqrt{x^2+y^2}\ dx\right) dy = 2\int_E \sqrt{x^2+y^2}\, dx\, dy = \int_0^{\pi/4}\left(\int_0^{1/\cos\theta} r^2\ dr\right) d\theta =$$

$$= \frac{1}{3}\int_0^{\pi/4} \frac{d\theta}{\cos^3\theta} = \frac{1}{3}\int_0^{\pi/4} \frac{\cos\theta\ d\theta}{(1-\operatorname{sen}^2\theta)^2} = \frac{1}{3}\int_0^{1/\sqrt{2}} \frac{dt}{(1-t^2)^2}$$

Hemos llegado a la integral de una función racional, fácilmente calculable por los métodos estandar y con ello se considera resuelto el problema. ■

Ejercicio 11.16 *Se considera la integral* $\alpha = \int_Q f(x,y)\ dx\ dy$*, donde*

$$f(x,y) = \frac{x}{(1+x^2)(1+xy)}; \quad Q = [0,1]\times[0,1]$$

Justifique la igualdad $2\alpha = \int_Q (f(x,y) + f(y,x))\ dx\ dy$ *y utilícela para calcular* α *y el valor de la integral* $\int_0^1 \frac{\log(1+x)}{1+x^2}\ dx$

SOLUCIÓN

Con el cambio de variable $\mathbf{g}(x,y) = (y,x)$, teniendo en cuenta que $\mathbf{g}(Q) = Q$, se obtiene que $\int_Q f(y,x)\ dx\ dy = \int_Q f(x,y)\ dx\ dy$ luego $2\alpha = \int_Q (f(x,y)+f(y,x))\ dx\ dy$.

$$f(x,y) + f(y,x) = \frac{(x+y)(1+xy)}{(1+xy)(1+x^2)(1+y^2)} = \frac{x+y}{(1+x^2)(1+y^2)}$$

luego

$$2\alpha = \int_Q \frac{x\ dx\ dy}{(1+x^2)(1+y^2)} + \int_Q \frac{y\ dx\ dy}{(1+x^2)(1+y^2)}$$

Estas integrales se calculan directamente usando integración iterada:

$$\int_Q \frac{x\ dx\ dy}{(1+x^2)(1+y^2)} = \int_0^1 \frac{x}{1+x^2}\left(\int_0^1 \frac{dy}{1+y^2}\right)\ dx = \frac{\pi}{8}\log 2$$

Análogamente

$$\int_Q \frac{y\ dx\ dy}{(1+x^2)(1+y^2)} = \frac{\pi}{8}\log 2$$

y se obtiene así el valor $\alpha = (\pi/8)/\log 2$. Con el teorema de Fubini se obtiene

$$\frac{\pi}{8}\log 2 = \int_Q \frac{x\ dx\ dy}{(1+x^2)(1+xy)} = \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}\int_0^1 \frac{x\ dy}{1+xy} = \int_0^1 \frac{\log(1+x)}{1+x^2}\ dx$$

■

Ejercicio 11.17 *En la integral*

$$\int_M \frac{dx\ dy\ dz}{\sqrt{x^2+y^2}} \quad \textit{donde} \quad M = \{(x,y,z) : x^2+y^2 \geq 1, x^2+y^2+z^2 \leq 4\}$$

a) Efectúe un cambio de variable a coordenadas esféricas.

b) Efectúe un cambio de variable a coordenadas cilíndricas.

c) Calcule su valor.

SOLUCIÓN

a) Cambio de variable a coordenadas esféricas

$$x = \rho\cos\varphi\cos\theta; \quad y = \rho\cos\varphi\,\mathrm{sen}\,\theta; \quad z = \rho\,\mathrm{sen}\,\theta$$

$$\mathbf{g}(\rho,\theta,\varphi) = (x,y,z); \quad |\det\mathbf{g}'(\rho,\theta,\varphi)| = \rho^2\cos\varphi$$

$M = g(B)$, con $B = \{(\rho,\theta,\varphi) : 0 \leq \theta \leq 2\pi,\ |\varphi| < \pi/3,\ 1/\cos\varphi \leq \rho \leq 2\}$.

$$I = \int_B \frac{\rho^2\cos\varphi}{\sqrt{\rho^2\cos^2\varphi}}\ d\theta d\varphi\ d\rho = \int_0^{2\pi} d\theta \int_{-\pi/3}^{\pi/3} d\varphi \int_{1/\cos\varphi}^{2} \rho\ d\rho =$$

$$= 2\pi\int_{-\pi/3}^{\pi/3} \frac{1}{2}\left(4 - \frac{1}{\cos^2\varphi}\right)\ d\varphi = \frac{8\pi^2}{3} - 2\pi\sqrt{3}$$

b) Cambio de variable a coordenadas cilíndricas

$$x = r\cos\theta; \quad y = r\,\mathrm{sen}\,\theta; \quad z = t$$

$$\mathbf{g}(r,\theta,t) = (x,y,z); \quad |\det\mathbf{g}'(r,\theta,t)| = r$$

$M = g(A)$, con $A = \{(r,\theta,t) : 0 \leq \theta \leq 2\pi,\ 1 \leq r \leq 2,\ |t| \leq \sqrt{4-r^2}\}$.

$$I = \int_0^{2\pi} d\theta \int_1^2 dr \int_{-\sqrt{4-r^2}}^{\sqrt{4-r^2}} dt = 4\pi\int_1^2 \sqrt{4-r^2}\ dr = \cdots = \frac{8\pi^2}{3} - 2\pi\sqrt{3}$$

■

Ejercicio 11.18 *Sea* $M = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : a^2 < x^2+y^2+z^2 < b^2\}$. *Para* $R \notin [a,b]$ *calcule el valor de la integral*

$$I(R) = \int_M \frac{dx\ dy\ dz}{\sqrt{x^2+y^2+(z-R)^2}}$$

y compruebe que no depende de R *para* $0 < R < a$.

SOLUCIÓN

Con un cambio de variable a coordenadas esféricas se llega a

$$I(R) = 2\pi \int_a^b \rho^2 J(\rho)\ d\rho \text{ donde } J(\rho) = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\cos\varphi\ d\varphi}{\sqrt{\rho^2 - 2R\rho \operatorname{sen}\varphi + R^2}}$$

Con el cambio de variable $u = 2R\rho \operatorname{sen}\varphi$ se calcula

$$J(\rho) = \frac{1}{2R\rho}\int_{-2R\rho}^{2R\rho} \frac{du}{\sqrt{R^2+\rho^2-u}} = \cdots = \frac{\sqrt{(R+\rho)^2} - \sqrt{(R-\rho)^2}}{2R\rho} = \frac{|R+\rho| - |R-\rho|}{2R\rho}$$

Teniendo en cuenta que $a \leq \rho \leq b$, resulta

a) $R < a \Rightarrow R < \rho \Rightarrow J(\rho) = 1/\rho \Rightarrow I(R) = 2\pi(b^2 - a^2)$

b) $R > b \Rightarrow R > \rho > \ \Rightarrow J(\rho) = 1/R \Rightarrow I(R) = \frac{2\pi}{3R}(b^3 - a^3)$

■

Ejercicio 11.19 *Calcule la integral* $I = \int_M (x+y+z)\ dx\ dy\ dz$, *y el baricentro de*

$$M = \{(x,y,z) : x^2+y^2 \leq 2z, \quad x^2+y^2+z^2 \leq 3\}$$

SOLUCIÓN

La esfera $x^2+y^2+z^2 = 3$ y el paraboloide de revolución $2z = x^2+y^2$ se cortan según una circunferencia, situada en el plano $z = 1$, cuya proyección en el plano xy es la circunferencia $x^2+y^2 = 2$.

[En efecto, si el punto (x,y,z) satisface las ecuaciones de las dos superficies debe cumplir $z \geq 0$ y $2z + z^2 = 3$, luego $z = 1$ y $x^2+y^2 = 2$].

Es decir, M es el recinto, situado sobre el disco $x^2+y^2 \leq 2$ del plano xy, entre el paraboloide (abajo) y la esfera (encima):

$$M = \{(x,y,z) : x^2+y^2 \leq 2,\ (x^2+y^2)/2 \leq z \leq \sqrt{3-(x^2+y^2)}\ \}$$

Como el eje Oz es un eje de simetría de M, su baricentro (x_0, y_0, z_0), está en este eje y debe cumplir

$$x_0 = \frac{1}{v(M)}\int_M x\ dx\ dy\ dz = 0; \quad y_0 = \frac{1}{v(M)}\int_M y\ dx\ dy\ dz = 0.$$

Se sigue que

$$I = \int_M z\ dx\ dy\ dz, \quad \text{y} \quad z_0 = I/v(M)$$

Usando coordenadas cilíndricas $x = r\cos\theta$, $y = r\operatorname{sen}\theta$, $z = t$, se tiene

$$M = \{(r\cos\theta, r\operatorname{sen}\theta, t) : 0 \le \theta \le 2\pi,\ 0 \le r \le \sqrt{2},\ r^2/2 \le t \le \sqrt{3-r^2}\ \}$$

luego

$$I = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\sqrt{2}} r\ dr \int_{r^2/2}^{\sqrt{3-r^2}} tdt = 2\pi \int_0^{\sqrt{2}} \frac{r}{2}\left(3 - r^2 - r^4/4\right)\ dr = \cdots$$

$$v(M) = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\sqrt{2}} r\ dr \int_{r^2/2}^{\sqrt{3-r^2}} dt = 2\pi \int_0^{\sqrt{2}} r(\sqrt{3-r^2} - r^2/2)\ dr = \cdots$$

integrales inmediatas que se dejan al cuidado del lector. ■

Ejercicio 11.20 *Se consideran los recintos planos*

$$A = \{(x,y) : (x-1)^2 + y^2 \le \sqrt{2}\}, \quad B = \{(x,y) : (x+1)^2 + y^2 \le \sqrt{2}\}$$

i) Calcule el volumen del sólido generado por $A \cap B$ al girar alrededor del eje Oy.
ii) Sean $E, F \subset \mathbb{R}^2$ medibles Jordan de área no nula tales que $E \cap F$ tiene contenido nulo. Obtenga una fórmula relacione el baricentro de $E \cup F$ con los baricentros de E y F. Utilice esta relación para calcular, sin usar integrales, el volumen del sólido generado por $A \setminus B$ al girar alrededor del eje Oy.

SOLUCIÓN

i) Volumen del sólido generado al girar $E = A \cap B$ alrededor del eje Oy.
Las circunferencias que limitan A y B, de radio $R = \sqrt[4]{2} > 1$, y centros $(1,0)$, $(-1,0)$ se cortan en los puntos $(0,b)$ y $(0,-b)$ donde $b^2 = R^2 - 1$.
Calcularemos el volumen $V(b)$ en función de b, y sustituyendo luego el valor concreto $b = \sqrt{\sqrt{2}-1}$ se obtendrá el volumen pedido. En lo que sigue $\alpha = \arccos(b/R) \in (0, \pi/2)$, de modo que $R\cos\alpha = b$, $R\operatorname{sen}\alpha = 1$ y $\operatorname{tg}\alpha = b$.

a) *Solución utilizando el método de las secciones:*
Cortando por planos perpendiculares al eje de revolución, para $-b \le y \le b$, se obtienen círculos de radio $f(y) = -1 + \sqrt{R^2 - y^2}$ luego

$$V_b = \int_{-b}^{b} \pi f(y)^2\ dy = \pi \int_{-b}^{b} [1 + R^2 - y^2 - 2\sqrt{R^2 - y^2}]\ dy =$$

$$= \pi[(1+R^2)2b - \frac{2}{3}b^3 - 2I] = \pi[(2+b^2)2b - \frac{2}{3}b^3 - 2I]$$

donde $I = \int_{-b}^{b} \sqrt{R^2 - y^2}\, dy$ se calcula con el cambio de variable $y = R \operatorname{sen} t$:

$$I = \int_{-\alpha}^{\alpha} R^2 \cos^2 t dt = \cdots = R^2\alpha + R^2 \operatorname{sen}\alpha\cos\alpha = R^2\alpha + b$$

y con este valor de I se obtiene $V(b) = 2\pi[b + \frac{2}{3}b^3 - \alpha(1 + b^2)]$.

b) *Solución utilizando la fórmula general:*

$$V_b = 2\pi \int_M x\, dx\, dy, \quad \text{donde} \quad M = \{(x, y) \in B : x \geq 0\}$$

Esta integral se calcula con el cambio de variable $x = -1 + r\cos\theta$, $y = r \operatorname{sen}\theta$.

$$V_b = 2\pi \int_{-\alpha}^{\alpha} d\theta \int_{1/(\cos\theta)}^{R} (-1+r\cos\theta) r\, dr = 2\pi \int_{-\alpha}^{\alpha} \left(\frac{1}{6\cos^2\theta} - \frac{R^2}{2} + \frac{R^3}{3}\cos\theta \right) d\theta =$$

$$= 2\pi[\frac{1}{3}\operatorname{tg}\alpha - R^2\alpha + \frac{2}{3}R^3 \operatorname{sen}\alpha] = 2\pi[b + \frac{2}{3}b^3 - \alpha(1 + b^2)]$$

ii) Sean $E, F \subset \mathbb{R}^2$ medibles Jordan de área no nula tales que $E \cap F$ tiene contenido nulo. Si (x_0, y_0), (x_E, y_E), (x_F, y_F) son los baricentros de $E \cup F$, E y F, respectivamente, como $E \cap F$ tiene contenido resulta:

$$c_2(E \cup F)x_0 = \int_{E\cup F} x\, dx\, dy = \int_E x\, dx\, dy + \int_F x\, dx\, dy = c_2(E)x_E + c_2(F)x_F$$

Los números $\alpha = c_2(E)/c_2(E \cup F)$ y $\beta = c_2(F)/c_2(E \cup F)$ verifican $\alpha + \beta = 1$ y con ellos se obtiene la relación: $x_0 = \alpha x_E + \beta x_F$. Análogamente $y_0 = \alpha y_E + \beta y_F$.
iii) Utilizando la relación anterior se puede calcular, sin usar integrales, el volumen del sólido generado por $A \setminus B$ al girar alrededor del eje Oy:
Apliquemos la relación con $E = A \cap B$, $F = A \setminus B$, de modo que $E \cup F = A$. Por razones de simetría $(x_E, y_E) = (0, 0)$, $(x_A, y_A) = (1, 0)$, luego

$$1 = \alpha x_E + \beta x_F = \beta x_F = x_F c_2(F)/c_2(A)$$

Según el teorema de Guldin el volumen del sólido que genera F al girar alrededor del eje Oy viene dado por $2\pi x_F\ c_2(F) = 2\pi c_2(A) = 2\pi 2\pi = 4\pi^2$. ∎

Ejercicio 11.21 *Sea $M \subset X \times Y$, donde $X \subset \mathbb{R}^k$, $Y \subset \mathbb{R}^m$ son rectángulos cerrados. Si M tiene contenido nulo en $\mathbb{R}^{k+m}$, demuestre que $M_{\mathbf{x}} = \{\mathbf{y} \in Y : (\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in M\}$ tiene contenido nulo (en $\mathbb{R}^m$) para casi todo $\mathbf{x} \in X$ (es decir, excepto en un conjunto de medida nula en $\mathbb{R}^k$).*

SOLUCIÓN

Según el teorema de Fubuni la función $u(\mathbf{x}) = \overline{\int_Y} \chi_M(\mathbf{x}, \mathbf{y})\, d\mathbf{y} \geq 0$ es integrable sobre X, con

$$\int_X u(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \int_A \chi_M(\mathbf{x}, \mathbf{y})\, d\mathbf{x}\, d\mathbf{y} = c_n(M) = 0$$

y aplicando el ejercicio 10.32 se obtiene que $N = \{\mathbf{x} \in X : u(\mathbf{x}) > 0\}$ tiene medida nula en $\mathbb{R}^k$. Claramente, $M_{\mathbf{x}}$ tiene contenido nulo si y sólo si $\mathbf{x} \notin N$. ∎

11.4. Ejercicios propuestos

$\diamondsuit$ **11.4.1** *Sean* $f_j : [a_j, b_j] \to \mathbb{R}$, $1 \le j \le n$, *integrables Riemann. Demuestre que*

$$f(x_1, x_2, \cdots x_n) = f_1(x_1) f_2(x_2) \cdots f_n(x_n)$$

es integrable Riemann sobre $A = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \cdots \times [a_n, b_n]$, *y*

$$\int_A f(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \left(\int_{a_1}^{b_1} f_1(t) dt \right) \left(\int_{a_2}^{b_2} f_2(t) dt \right) \cdots \left(\int_{a_n}^{b_n} f_n(t) dt \right)$$

$\diamondsuit$ **11.4.2** *Sea* $f : A \to \mathbb{R}$ *definida en* $A = [0, 1] \times [0, 1]$ *por*

$$f(x, 1/2) = \chi_{\mathbb{Q}}(x), \quad f(x, y) = 1 \quad \textit{si } y \neq 1/2$$

Demuestre que f *es integrable sobre* A *y exprese la integral doble* $\int_A f(x, y) dx dy$ *como integral iterada según los dos posibles ordenes de integración.*

$\diamondsuit$ **11.4.3** *Sea* $f : A \to \mathbb{R}$ *definida en* $A = [0, 1] \times [0, 1]$ *por* $f(x, y) = 1$ *si* $x \in \mathbb{Q}$, $f(x, y) = 2y$ *si* $x \notin \mathbb{Q}$. *Calcule* $\overline{J}(y) = \overline{\int_0^1} f(x, y) dx$, $\underline{J}(y) = \underline{\int_0^1} f(x, y) dx$ *y deduzca que* f *no es integrable sobre* A. *Compruebe que aunque* f *no es integrable sin embargo existe la integral iterada* $\int_0^1 \left(\int_0^1 f(x, y) dy \right) dx$. *Calcule* $\underline{\int_A} f(x, y) dx\, dy$, $\overline{\int_A} f(x, y) dx\, dy$.

$\diamondsuit$ **11.4.4** *Sean* $X \subset \mathbb{R}^k$, $Y \subset \mathbb{R}^m$ *rectángulos cerrados y* $M \subset X \times Y$ *medible Jordan en* $\mathbb{R}^{k+m}$.*Dado* $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^k$ *sea* $M_{\mathbf{x}} = \{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^m : (\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in M\}$. *Si* S *es el conjunto de los* $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^k$ *tales que* $M_{\mathbf{x}}$ *no es medible Jordan en* $\mathbb{R}^m$, *demuestre que* S *tiene medida nula k-dimensional.*

$\diamondsuit$ **11.4.5** *Se supone que* $f : M \to \mathbb{R}$ *es integrable sobre un conjunto medible Jordan* $M \subset \mathbb{R}^2$ *y que* $\varphi : [a, b] \to \mathbb{R}$ *es una función creciente continua tal que elconjunto* $M_t = \{(x, y) \in M : f(x, y) \le \varphi(t)\}$ *es medible Jordan para cada* $t \in [a, b]$, $M_a = \emptyset$ *y* $M_b = M$. *Si la función* $A(t) = \textit{área}(M_t)$ *es derivable, demuestre que* $F(t) = \int_{M_t} f(x, y) dx\, dy$ *también lo es, con derivada* $F'(t) = \varphi(t) A'(t)$.

$\diamondsuit$ **11.4.6** *Sea* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *una función continua. Se supone que* $E_t = \{(x, y) : f(x, y) \ge t\}$ *es medible Jordan para cada* $t \ge 0$ *y que la función* $\varphi(t) = \textit{área}(E_t)$ *es continua. Demuestre:*

a) f *alcanza un máximo absoluto en* E_0.

b) $M_t = \{(x, y, z) : t \le z \le f(x, y)\}$ *es medible Jordan para cada* $t \ge 0$ *y la función* $v(t) = \textit{Volumen}(M_t)$ *es derivable con derivada continua en* $[0 + \infty)$.

$\diamondsuit$ **11.4.7** *Se supone que* $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ *integrable Riemann sobre* $[0, a]$, *para cada* $a > 0$. *Utilice el teorema de Fubini para demostrar que la función*

$$F(x) = \int_0^x (x - t) f(t) dt$$

definida para todo $x > 0$, *es derivable con derivada continua* $F'(x) = \int_0^x f(t) dt$.

$\diamondsuit$ **11.4.8** *Sean $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, donde f es continua y g derivable. Demuestre que*

$$F(t) = \int_0^t f(x) \left(\int_x^t g(y)\ dy \right)\ dx$$

es derivable dos veces y obtenga la derivada segunda F''.

$\diamondsuit$ **11.4.9** *Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es continua, establezca la igualdad*

$$2 \int_a^b \left(\int_x^b f(x) f(y)\ dy \right)\ dx = \left(\int_a^b f(x)\ dx \right)^2$$

$\diamondsuit$ **11.4.10** *En cada caso obtenga un conjunto medible Jordan $E \subset \mathbb{R}^2$ tal que la integral $\int_E f(x,y) dxdy$ se exprese mediante la integral iterada que se indica. Obtenga también la integral iterada en el otro orden de integración.*

a) $\displaystyle\int_1^2 \left(\int_{-\sqrt{2x-x^2}}^{\sqrt{2x-x^2}} f(x,y) dy \right) dx$; *b)* $\displaystyle\int_0^2 \left(\int_{y/2}^{(4-y)/2} f(x,y) dx \right) dy$.

c) $\displaystyle\int_0^1 \left(\int_{\sqrt{y}}^{1+\sqrt{1-y^2}} f(x,y) dx \right) dy$; *d)* $\displaystyle\int_{-6}^2 \left(\int_{y^2/4-1}^{2-y} f(x,y) dx \right) dy$.

$\diamondsuit$ **11.4.11** *En cada caso, justifique que $f : A \to \mathbb{R}$ es integrable Riemann sobre el rectángulo A, y calcule la integral $\int_A f(x,y) dx\ dy$.*

a) $f(x,y) = x^{[y]} y^{[x]}$ *si* $x \neq 0,\ y \neq 0$, $\quad f(x,0) = f(0,y) = 0, \quad A = [0,2] \times [0,2]$.

b) $f(x,y) = (x-1)^{[3y]-1}, \quad A = [2,3] \times [0,1]$.

c) $f(x,y) = x$ *si* $x > y \quad f(x,y) = y^2$ *si* $x \leq y, \quad A = [0,1] \times [0,1]$.

d) $f(x,y) = |y - \operatorname{sen} x|, \quad A = [0,\pi] \times [0,1]$.

(Nota: $[a]$ denota la parte entera de $a \in \mathbb{R}$)

$\diamondsuit$ **11.4.12** *En cada caso justifique la existencia de la integral $\int_E f(x,y) dx\ dy$ y calcule su valor:*

a) $f(x,y) = [x+y], \qquad E = \{(x,y) : 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 2-x\}$.

b) $f(x,y) = (x+y)^{-4}, \qquad E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x, 1 \leq y, x+y \leq 4\}$.

(Nota: La integral b) se puede calcular interpretándola como un volumen que se calcula fácilmente considerando las secciones que producen los planos $x+y=c$).

$\diamondsuit$ **11.4.13** *En cada caso calcule la integral $\int_E f(x,y) dx\ dy$ mediante un cambio de variable a coordenadas polares.*

a) $f(x,y) = (x^2+y^2)^{-3/2}, \qquad E = \{(x,y) : x \leq y,\ 1 \leq x+y,\ x^2+y^2 \leq 1\}$.

b) $f(x,y) = x^2+y^2, \qquad E = \{(x,y) : 0 \leq x,\ x^2+y^2 \leq 2y,\ x^2+y^2 \leq 1\}$.

c) $f(x,y) = x^2+y^2, \qquad E = \{(x,y) : 0 \leq x, (x^2+y^2)^2 \leq 4(x^2-y^2)\}$.

d) $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}, \qquad E = \{(x,y) : 2x \leq x^2+y^2 \leq 1, x \geq 0, y \geq 0\}$

$\diamondsuit$ **11.4.14** *En cada caso calcule $\int_E f(x,y) dx\ dy$ con el cambio de variable indicado*

a) $f(x,y) = e^{(y-x)/(y+x)}$; $E = \{(x,y) : 0 \leq x,\ 0 \leq y, x+y \leq 2\}$.
$x = (v-u)/2$; $y = (v+u)/2$.

b) $f(x,y) = \dfrac{x^2+y}{\sqrt{1+4(x-y)}}$; $E = \{(x,y) : 0 \leq x \leq 2,\ -x^2 \leq y \leq x\}$,
$x = u+v$, $y = v-u^2$.

c) $f(x,y) = (y^2-x^2)^{xy}(x^2+y^2)$;
$E = \{(x,y) : 0 < x,\ 0 < y,\ a \leq xy \leq b,\ y^2-x^2 \leq 1,\ x \leq y\}$, $(0 < a \leq b)$;
$u = y^2-x^2$, $v = xy$.

♢ **11.4.15** *Considerando el cambio de variable* $u = 2x/(x^2+y^2)$, $v = 2y/(x^2+y^2)$, *en el abierto* $\Omega = \{(x,y) : x > 0, y > 0\}$, *calcule la integral doble* $\int_M \dfrac{dx\ dy}{(x^2+y^2)^2}$ *sobre el cuadrilátero curvilíneo* $M = \{(x,y) : 4x \leq x^2+y^2 \leq 6x,\quad 2y \leq x^2+y^2 \leq 8y\}$.

♢ **11.4.16** *Si* $0 < a < 1$ *demuestre que* $\mathbf{g}(x,y) = (x - a\cos y, y - a\cos x)$ *es una transformacion inyectiva de* $\mathbb{R}^2$ *que transforma abiertos en abiertos y conjuntos medibles Jordan en conjuntos medibles Jordan. Calcule el área de* $\mathbf{g}(T)$ *donde*

$$T = \{(x,y) :\ 0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq x\}$$

♢ **11.4.17** *Si* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *es una función continua par, y* $A = [0,a]\times[0,a]$, *establezca la igualdad*

$$\int_A f(x-y)dx\ dy = 2\int_0^a (a-t)f(t)dt$$

♢ **11.4.18** *Si* $D(r) = \{(x,y) : x^2+y^2 \leq r^2\}$ *y* $f : D(R) \to \mathbb{R}$ *es continua demuestre que* $\varphi(r) = \int_{D(r)} f(x,y)dx\ dy$ *es de clase* C^1 *en* $[0,R]$ *y obtenga una fórmula integral para la derivada.*

♢ **11.4.19** *Justifique que los siguientes conjuntos son medibles Jordan y calcule sus volúmenes:*
$A = \{(x,y,z) : 0 \leq x,\ 0 \leq y, 0 \leq z,\ \sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z} \leq 1\}$.
$B = \{(x,y,z) : 0 \leq x,\ 0 \leq y,\ 0 \leq z,\ x+y+z \leq a,\ az \leq xy\}$; $(a > 0)$.
$C = \{(x,y,z) : 2z^2 \leq x^2+y^2 \leq 1+z^2\}$.
$D = \{(x,y,z) : x^2+y^2+z^2 \leq a^2,\quad x^2+y^2 \leq z^2\}$.
$E = \{(x,y,z) : x^2+y^2+z^2 \leq a^2,\quad x^2+y^2 \leq ax;\quad 0 \leq z\}$.
$F = \{(x,y,z) : x^2/a^2+y^2/b^2 \leq 1+z^2/c^2,\quad 0 \leq z \leq 1\}$.

♢ **11.4.20** *Justifique que el conjunto* $M = \{(x,y,z) :\ x^2+y^2 \leq 2az,\ z \leq x+y\}$ *es medible Jordan y calcule su volumen (se supone que* $a > 0$*).*

♢ **11.4.21** *Calcule el volumen de*

$$E = \{(x,y,z) : x^2+y^2 \leq 2y;\ x^2+y^2 \leq 1;\ 0 \leq x;\ 0 \leq z \leq x^2+y^2\}$$

♢ **11.4.22** *Calcule el volumen de*

$$A = \{(x,y,z) : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} < 1, \quad \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} < 1\}$$

♢ **11.4.23** *Una copa que tiene forma de paraboloide de revolución está llena de vino hasta el borde. Bebemos hasta que el plano de la superficie del vino pasa por el fondo de la copa. Determine la cantidad de vino que queda en la copa.*

♢ **11.4.24** *En un recipiente que tiene la forma del paraboloide de revolución $2z = x^2 + y^2$ se encaja una esfera maciza de radio $\sqrt{5}$ y centro en el eje Oz. Determine el volumen del hueco que queda entre el recipiente y la esfera.*

♢ **11.4.25** *En el cono $z = a\sqrt{x^2 + y^2}$ se encaja una esfera de radio R. Calcule el volumen del recinto acotado limitado por el cono y la esfera.*

♢ **11.4.26** *Calcule el volumen del recinto acotado limitado por el elipsoide $3x^2 + 3y^2 + z^2 = 3$ y el cono $z = 2 - \sqrt{x^2 + y^2}$.*

♢ **11.4.27** *Considere los recintos C y H de $\mathbb{R}^3$ definidos por:*

$$C = \left\{(x,y,z) : \left(\frac{Rz}{h}\right)^2 \geq x^2 + y^2, 0 \leq z \leq h\right\}$$

$$H = \{(x,y,z) \in C : x^2 + y^2 - Ry \geq 0\}$$

a) Justifique que H es medible Jordan.
b) Calcule, por el método de las secciones $z =$constante, el volumen de C. Calcule el volumen de H, y compruebe que el cociente de los volúmenes de H y C no depende de los parámetros h, R.

♢ **11.4.28** *Sea $\mathbf{g}(x,y,z) = (u,v,w)$, donde $u = e^{2y} - e^{2z}$, $v = e^{2x} - e^{2z}$, $w = x - y$. Compruebe que $\mathbf{g}(\mathbb{R}^3) = \{(u,v,w); u > 0, u + v > 0, e^{2w} > v/u\}$ y que $\mathbf{g}$ establece un C^∞-difeomorfismo entre $\mathbb{R}^3$ y su imagen $\mathbf{g}(\mathbb{R}^3)$. Calcule el volumen de $\mathbf{g}([0,1]^3)$.*

♢ **11.4.29** *El potencial gravitacional producido por un sólido $W \subset \mathbb{R}^3$ (medible Jordan) con densidad de masa $p(x,y,z)$ es la suma de los potenciales producidos por los "elementos de masa infinitesimal" $dm = p(x,y,z)dxdydz$, y viene dado por la integral triple*

$$V(x_1,y_1,z_1) = Gm \int_W \frac{p(x,y,z)dx\, dy\, dz}{\sqrt{(x-x_1)^2 + (y-y_1)^2 + (z-z_1)^2}}$$

Sea $W = \{(x,y,z) : r^2 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2\}$ con densidad es uniforme. Justifique las siguientes afirmaciones

a) El potencial V es constante en el hueco $\Omega_1 = \{(x,y,z) : x^2 + y^2 + z^2 < r^2\}$, (es decir, no existe fuerza gravitacional dentro de un planeta hueco).

b) En el exterior de la esfera mayor $\Omega_2 = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 > R^2\}$ *el potencial es el mismo que produciría toda la masa de* W *concentrada en el centro de la esfera.*

♢ **11.4.30** *Sea* $S \subset \mathbb{R}^2$ *el recinto plano limitado por el eje de abscisas y el arco de cicloide*

$$x = r(t - \operatorname{sen} t), \quad y = r(1 - \cos t), \quad t \in [0, 2\pi].$$

(El arco descrito por un punto $\mathbf{p}$ *de una circunferencia de radio* r *que rueda sin deslizar sobre el eje de abscisas, entre dos pasos consecutivos de* $\mathbf{p}$ *por los puntos* $(0, 0)$ *y* $(2\pi r, 0)$ *de dicho eje.) Calcule el área de* S *y el volumen de los cuerpos que engendra* S *al girar alrededor de las siguientes rectas: a) El eje de abscisas* OX*; b) El eje de ordenadas* OY*; c) La recta* $x = \pi r$.

♢ **11.4.31** *Calcule el volumen de los siguientes sólidos de revolución:*
a) Cuerpo engendrado al girar alrededor del eje OY *el cuadrilátero curvilíneo limitado por las parábolas* $y^2 = a^3x$, $y^2 = b^3x$, $x^2 = c^3y$, $x^2 = d^3y$, *donde* $0 < a < b$, $0 < c < d$.
b) Cuerpo engendrado al girar alrededor de la recta $x + y = 0$ *el recinto plano limitado por la parábola* $y = x - x^2$ *y el eje de abscisas.*
c) Cuerpo engendrado cuando el recinto $\{(x, y) : 0 \leq y \leq 2a,\ 0 \leq x \leq e^{|y-a|}\}$, $(a > 0)$ *gira alrededor del eje* OX.
d) Cuerpo engendrado cuando el recinto $\{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1, x^2 + y^2 - 2x \leq 0\}$ *al girar alrededor del eje* OX.
e) Cuerpos engendrados por $\{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1, x^2 + y^2 - 2x \geq 0, x \geq 0, y \geq 0\}$ *al girar alrededor del eje* OX *y del eje* OY.

♢ **11.4.32** *Justifique que es medible Jordan el recinto*

$$B = \{(y, z) \in \mathbb{R}^2 : y = \rho \cos \varphi, z = \rho \operatorname{sen} \varphi) : |\varphi| \leq \pi/2,\ 0 \leq \rho \leq 1 + \operatorname{sen} \varphi\}$$

Sea $M \subset \mathbb{R}^3$ *el cuerpo de revolución que genera* $\{(0, y, z) : (y, z) \in B\}$ *al girar alrededor del eje* Oz. *Calcule el volumen y el baricentro de* M.

♢ **11.4.33** *Calcule las siguientes integrales iteradas*

a) $\int_0^{2a} \left(\int_0^{\sqrt{a^2-(x-a)^2}} \sqrt{4a^2 - x^2 - y^2}\, dy \right) dx.$

b) $\int_{-a}^{a} dx \int_{-\sqrt{a^2-x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}} dy \int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{\sqrt{1-x^2-y^2}} z\, dz, \quad 0 < a < 1.$

c) $\int_0^1 dx \int_{1-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{2x-x^2}} dy \int_0^{\max\{x,y\}} z^2 dz.$

♢ **11.4.34** *En cada caso calcule* $\int_E f(x, y, z)dx\ dy\ dz$ *con un cambio de variable apropiado:*

a)	$f(x,y,z) = x^2$;	$E = \{0 \leq x,\ x^2+y^2+(z-1)^2 \leq 1;\ 4z^2 \geq 3(x^2+y^2)\}$.
b)	$f(x,y,z) = yz\sqrt{x^2+y^2}$;	$E = \{0 \leq z \leq x^2+y^2,\ 0 \leq y \leq \sqrt{2x-x^2}\}$.
c)	$f(x,y,z) = z$;	$E = \{(x^2+y^2+z^2 \leq 2,\ x^2+y^2 \leq z\}$.
d)	$f(x,y,z) = z^2$;	$E = \{(x,y,z) : x^2+y^2+z^2 \leq R^2,\ x^2+y^2+z^2 \leq 2Rz\}$.
e)	$f(x,y,z) = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$;	$E = \{(x,y,z) : \sqrt{x^2+y^2} \leq z \leq 3\}$.
f)	$f(x,y,z) = z$;	$E = \{(x,y,z) : 2z^2 \leq x^2+y^2 \leq z^2+1,\ 0 \leq z\}$.
g)	$f(x,y,z) = x$;	$E = \{(x,y,z) : x^2+y^2+(z-1)^2 \leq 1,\ \ 3(x^2+y^2) \leq z^2\}$.
h)	$f(x,y,z) = 1/\sqrt{x^2+y^2+z^2}$;	$E = \{(x,y,z) : \frac{1}{2} \leq z \leq 1,\ x^2+y^2+z^2 \leq 1\}$.
i)	$f(x,y,z) = ze^{-(x^2+y^2)}$;	$E = \{(x,y,z) : z \geq 0, z^2-1 \leq (x^2+y^2) \leq z^2/2\}$.
j)	$f(x,y,z) = z^2$,	$E = \{(x,y,z) : x^2+y^2 \leq 2y, y \leq x, 0 \leq z \leq x\}$.
k)	$f(x,y,z) = z$;	$E = \{(x,y,z) : x^2+(y-1)^2+z^2 \leq 1;\ \ \sqrt{x^2+y^2} \leq z\}$.
l)	$f(x,y,z) = 1/\sqrt{x^2+y^2}$;	$E = \{(x,y,z) : x^2+y^2 \geq 1, x^2+y^2+z^2 \leq 4\}$.

$\diamondsuit$ **11.4.35** *Calcule* $\displaystyle\int_M \frac{dxdydz}{z^2}$, *donde*

$$M = \{(x,y,z) : 1 \leq 4z,\ \sqrt{x^2+y^2} \leq z \leq \sqrt{1-x^2-y^2}\}$$

$\diamondsuit$ **11.4.36** *Calcule la integral* $\int_M z\, dxdydz$, *donde*

$$M = \{(x,y,z) : x^2+y^2+z^2 \leq a^2,\ x^2+y^2 \geq 1+z^2,\ |y| \leq x\} \quad (a > 1)$$

$\diamondsuit$ **11.4.37** *Justifique que los siguientes conjuntos son medibles Jordan y calcule sus baricentros,*
a) $M = \{(x,y,z) : x^2+y^2+z^2 \leq 2z,\ \ (x^2+y^2)\operatorname{tg}^2\alpha \leq z^2\}$, *donde* $0 < \alpha < \pi/2$.
b) $M = \{(x,y,z) : x^2+y^2+z^2 \leq 2z,\ \ 3(x^2+y^2) \leq z^2\}$.
c) $M = \{(x,y,z) : z \geq 0,\ x^2+y^2 \leq 1/4,\ \ x^2+y^2+z^2 \leq 2z\}$.

$\diamondsuit$ **11.4.38** *Sea* V_n *el contenido n-dimensional de* $B_n = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \|\mathbf{x}\|_2 \leq 1\}$. *Demuestre que* $nV_n = 2\pi V_{n-2}$.

$\diamondsuit$ **11.4.39** *Sea* $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *continua y* $B(t) = \{(x,y) : x^2+y^2 \leq t^2\}$. *Demuestre que la función* $g(t) = \displaystyle\int_{B(t)} \varphi(x,y)dx\,dy$, *definida para* $t > 0$, *es de clase* C^1 *y que la condición* $\varphi(x,y) = o(x^2+y^2)$ *implica* $g(t) = o(t^4)$.

$\diamondsuit$ **11.4.40** *Sea* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *de clase* C^2. *Para cada* $\epsilon > 0$ *se define:*

$$M(\epsilon) = \frac{1}{\pi\epsilon^2}\int_{B(\epsilon)} f(x,y)dxdy \quad \text{donde} \quad B(\epsilon) = \{(x,y) : x^2+y^2 \leq \epsilon^2\}$$

Utilice el problema 11.4.39 y el desarrollo de Taylor de f *en* $(0,0)$ *para obtener que*

$$\lim_{\epsilon \to 0} \frac{M(\epsilon) - f(0,0)}{\epsilon^2} = \frac{1}{8}[D_{11}f(0,0) + D_{22}f(0,0)]$$