Capítulo 12

Integrales impropias. Integrales dependientes de un parámetro

Integrales impropias. Paso al límite bajo la integral. Continuidad y derivabilidad de las integrales dependientes de un parámetro

Un inconveniente de la integral de Riemann es que sólo se aplica a funciones acotadas sobre conjuntos acotados. Este inconveniente se resuelve parcialmente con la noción de integral impropia de Riemann absolutamente convergente con la que comienza este capítulo. Luego se estudia la validez del paso al límite bajo la integral de Riemann (y bajo una integral impropia absolutamente convergente), y se obtienen resultados sobre continuidad y derivabilidad de funciones definidas por integrales que dependen de un parámetro.

Aunque la integral de Riemann es completamente satisfactoria como herramienta para el cálculo de áreas y volúmenes de figuras geométricas sin embargo, para estos problemas de paso al límite, la integral de Riemann comienza a mostrar sus deficiencias: Para garantizar la integrabilidad de la función límite y el paso al límite bajo la integral hay que recurrir a la convergencia uniforme, una hipótesis que suele ser demasiado restrictiva en las aplicaciones.

12.1. Integrales impropias

El objetivo de esta sección es el de extender la definición de la integral $\int_\Omega f$ para el caso de funciones, que no se suponen acotadas, definidas en conjuntos $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ que tampoco se suponen acotados. En lo que sigue, dado un conjunto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, denotaremos por $\mathcal{K}_\Omega$ la familia de los compactos $K \subset \Omega$ que son medibles Jordan. En este capítulo sólo consideraremos dominios $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ que se pueden expresar en la forma $\Omega = \cup_{j=1}^{\infty} K_j$ donde $K_j \in \mathcal{K}_\Omega$ es una sucesión creciente tal que todo $K \in \mathcal{K}_\Omega$ está contenido en algún K_m. Diremos entonces que Ω es un *recinto de integración* y que (K_j) es una *sucesión expansiva* en Ω. Es obvio que todo compacto medible Jordan es un recinto de integración. La demostración de que todo abierto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ es un recinto de integración es una consecuencia inmediata del siguiente lema: Obsérvese que si $\{Q_j : j \in M\}$ es la sucesión que proporciona el lema, entonces $K_j = \cup\{\overline{Q_k} : k \in M, k < j\}$, es una sucesión expansiva de compactos medibles Jordan cuya unión es Ω.

Lema 12.1 *Si $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ es abierto existe una familia finita o numerable de cubos semiabiertos disjuntos dos a dos $\{Q_j : j \in M\}$, $M \subset \mathbb{N}$, con $\overline{Q_j} \subset \Omega$, tal que $\Omega = \cup_{j\in M} Q_j$, y cada compacto $K \subset \Omega$ se puede cubrir con una cantidad finita de cubos de la familia.*

DEM: Para cada $k \in \mathbb{N}$, sea $D_k = \{j2^{-k} : j \in \mathbb{Z}\}$. Llamaremos cubos diádicos de lado 2^{-k} a los cubos semiabiertos de la forma

$$Q = \prod_{j=1}^{n}[d_j, d_j + 2^{-k}), \text{ con } d_j \in D_k, \text{ para } 1 \leq j \leq n,$$

Sea $\mathcal{Q}_k$ la familia, finita o numerable formada por los cubos diádicos Q, de lado 2^{-k}, que cumplen $\overline{Q} \subset \Omega$, a los que llamaremos cubos de rango k. Sea $\mathcal{E}_1 = \mathcal{Q}_1$ la familia finita o numerable formada por los cubos de rango 1. De manera recurrente se define $\mathcal{E}_{k+1} \subset \mathcal{Q}_{k+1}$ como la familia finita o numerable formada por los cubos de rango $k + 1$, que no están contenidos en cubos de rango inferior. La unión de las familias $\mathcal{E} = \mathcal{E}_1 \cup \mathcal{E}_2 \cup \cdots \cup \mathcal{E}_k \cup \ldots$ proporciona una familia numerable de cubos diádicos semiabiertos y disjuntos $\{Q_j : j \in M\}$, con la propiedad requerida.

En efecto, el compacto $K \subset \Omega$, es disjunto del cerrado $F = \mathbb{R}^n \setminus \Omega$, y por lo tanto existe $\delta > 0$ tal que $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \geq \delta$ para cada $\mathbf{x} \in K$, y cada $\mathbf{y} \in F$.
En $\mathbb{R}^n$ consideramos la distancia asociada a la norma $\| \|_\infty$, para la que se cumple que el diámetro de cada $Q \in \mathcal{E}_k$ es 2^{-k}. Elegimos $p \in \mathbb{N}$ tal que $2^{-p} < \delta$. Entonces, dado $\mathbf{x} \in K$, hay un único cubo diádico Q de lado 2^{-p} tal que $\mathbf{x} \in Q$, y la condición $\operatorname{diam}(Q) = 2^{-p} < \delta$ implica que $\overline{Q} \subset \Omega$, luego $Q \in \mathcal{Q}_p$. Se sigue que Q está contenido en algún cubo de una familia $\mathcal{E}_j$ con $j \leq p$. Esto demuestra que K está cubierto por los cubos de las familias $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2, \cdots \mathcal{E}_p$, luego los cubos de la familia $\mathcal{E}_{p+1}$ no intersecan a K. Teniendo en cuenta que para cada $k \leq p \in \mathbb{N}$ la familia $\{Q \in \mathcal{E}_k : Q \cap K \neq \emptyset\}$ es finita (porque K es acotado), se obtiene que $\{j \in M : Q_j \cap K \neq \emptyset\}$ es finito. ■

Definición 12.2 *Una función $f : \Omega \to \mathbb{R}$, definida en un recinto de integración $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ se dice que es localmente integrable Riemann (brevemente, localmente integrable) cuando para cada $K \in \mathcal{K}_\Omega$ la restricción $f|_K$ es integrable Riemann sobre K. Una función localmente integrable Riemann $f : \Omega \to \mathbb{R}$ se dice que es absolutamente integrable Riemann sobre Ω, cuando cumple*

$$[IA] : \qquad \sup_{K\in\mathcal{K}_\Omega} \int_K |f| < +\infty$$

En virtud de 10.14, toda función continua $f : \Omega \to \mathbb{R}$ es localmente integrable. Es claro que la condición de integrabilidad absoluta $[IA]$, equivale a $\sup_{j\in\mathbb{N}} \int_{K_j} |f| < +\infty$, donde $K_j \in \mathcal{K}_\Omega$, es cualquier sucesión expansiva en Ω.

Proposición 12.3 *Si* $f : \Omega \to \mathbb{R}$ *es absolutamente integrable sobre el recinto de integración* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, *hay un único* $\alpha \in \mathbb{R}$ *que verifica: Para cada* $\epsilon > 0$ *existe* $K(\epsilon) \in \mathcal{K}_\Omega$ *tal que* $K \in \mathcal{K}_\Omega,\ K \supset K(\epsilon) \Rightarrow \left|\int_K f - \alpha\right| < \epsilon$.
Además, para cada sucesión expansiva $K_j \in \mathcal{K}_\Omega$ *se cumple* $\alpha = \lim_j \int_{K_j} f$.

DEM: En primer lugar, es claro que sólo puede haber un número real α verificando la condición del enunciado (basta razonar de forma análoga al caso de la unicidad del límite de una sucesión de números reales). Para demostrar la existencia de este número consideramos una sucesión $K_j \in \mathcal{K}_\Omega$ expansiva en Ω, y comenzamos viendo que la sucesión de las integrales $\alpha_j = \int_{K_j} f$ es de Cauchy.

Según la hipótesis, es finito el supremo $A = \sup_{K \in \mathcal{K}_\Omega} \int_K |f|$, luego para cada $\epsilon > 0$ existe $K(\epsilon) \in \mathcal{K}_\Omega$ tal que

$$\int_{K(\epsilon)} |f| \geq A - \epsilon/2$$

Como la sucesión (K_j) es expansiva, $K(\epsilon)$ está contenido en algún K_m. Entonces, si $p \geq q \geq m$ se cumple $K_p \supset K_q \supset K_m \supset K(\epsilon)$, luego

$$|\alpha_p - \alpha_q| = \left|\int_{K_p \setminus K_q} f\right| \leq \int_{K_p \setminus K_q} |f| = \int_{K_p} |f| - \int_{K_q} |f| \leq$$

$$\leq A - \int_{K(\epsilon)} |f| \leq A - (A - \epsilon/2) = \epsilon/2$$

Para terminar la demostración basta ver que el límite $\alpha = \lim_j \alpha_j$, de esta sucesión de Cauchy cumple la condición del enunciado.

Como la desigualdad $|\alpha_p - \alpha_q| \leq \epsilon/2$, es válida para $p > q \geq m$, aplicándola con $q = m$, y pasando al límite cuando $p \to +\infty$, se obtiene que

$$|\alpha - \alpha_m| \leq \epsilon/2$$

Es claro que cada $K \in \mathcal{K}_\Omega$ con $K \supset K_m$ verifica

$$\left|\int_K f - \alpha_m\right| = \left|\int_K f - \int_{K_m} f\right| = \left|\int_{K \setminus K_m} f\right| \leq \int_{K \setminus K_m} |f| =$$

$$= \int_K |f| - \int_{K_m} |f| \leq \int_K |f| - \int_{K(\epsilon)} |f| \leq A - (A - \epsilon/2) = \epsilon/2$$

luego

$$\left|\alpha - \int_K f\right| \leq |\alpha - \alpha_m| + \left|\alpha_m - \int_K f\right| \leq \epsilon/2 + \epsilon/2 = \epsilon$$

■

En lo que sigue, el número α que interviene en la proposición 12.3 lo denotaremos

$$\alpha = \lim_{K \in \mathcal{K}_\Omega} \int_K f(\mathbf{x})\, d\mathbf{x}$$

(Este es un caso particular de la noción de límite de una red que se suele estudiar en los cursos de Topología General).

Definición 12.4 *Cuando* $f : \Omega \to \mathbb{R}$ *es absolutamente integrable Riemann sobre el recinto de integración* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, *se define*

$$\int_\Omega f(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} = \alpha$$

donde $\alpha = \lim_{K \in \mathcal{K}_\Omega} \int_K f(\mathbf{x})\, d\mathbf{x}$ *es el número que interviene en la proposición 12.3. También se suele decir que* $\int_\Omega f$ *es una integral de Riemann impropia absolutamente convergente, de valor* α.

En las condiciones de la definición 12.3, para una función $\mathbf{f} \geq 0$, es fácil ver que

$$\int_\Omega f = \sup_{K \in \mathcal{K}_\Omega} \int_K f = \sup_{j \in \mathbb{N}} \int_{K_j} f$$

donde $K_j \in \mathcal{K}_\Omega$ es cualquier sucesión expansiva en Ω.
Cuando sólo se supone que $f \geq 0$ es localmente integrable en Ω, también se define

$$\int_\Omega f = \sup_{K \in K_\Omega} \int_K f = \sup_{j \in \mathbb{N}} \int_{K_j} f \leq +\infty$$

de modo que, en este caso, la integral $\int_\Omega f$ es (absolutamente) convergente cuando su valor es finito.

La segunda parte de la conclusión de la proposición 12.3 es útil a la hora de calcular el valor de una integral impropia absolutamente convergente $\int_\Omega f(\mathbf{x})\, d\mathbf{x}$: Se elige una sucesión expansiva $K_j \in \mathcal{K}_\Omega$ tal que las integrales $\alpha_j = \int_{K_j} f(\mathbf{x}) d\mathbf{x}$ sean fácilmente calculables y luego se calcula el límite $\int_\Omega f(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} = \lim_j \alpha_j$.

12.2. Paso al límite bajo la integral

Los resultados sobre continuidad y derivabilidad de integrales dependientes de un parámetro se refieren en última instancia a la posibilidad de que cierto proceso de paso al límite (límite funcional, límite de cocientes incrementales) pase bajo la integral. Comenzamos estudiando la validez de la integración término a término de sucesiones (integrales que dependen del parámetro $k \in \mathbb{N}$):

Teorema 12.5 *Sea* $f_k : M \to \mathbb{R}$ *una sucesión de funciones integrables Riemann sobre un conjunto medible Jordan* $M \subset \mathbb{R}^n$, *que converge uniformemente hacia* $f : M \to \mathbb{R}$. *Entonces* f *es integrable sobre* M, *y*

$$\int_M f(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \lim_k \int_M f_k(\mathbf{x}) d\mathbf{x}$$

Dem: Consideremos primero el caso $M = A \subset \mathbb{R}^n$, donde A es un rectángulo cerrado n-dimensional.

Por la convergencia uniforme, la sucesión $\rho_k = \sup_{\mathbf{x}\in A} |f_k(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x})| \leq +\infty$, converge hacia 0, luego existe k_0 tal que $\rho_k < +\infty$, para todo $k \geq k_0$.

Como $f_k(\mathbf{x}) - \rho_k \leq f(\mathbf{x}) \leq f_k(\mathbf{x}) + \rho_k$ para todo $\mathbf{x} \in A$, obtenemos que f es acotada sobre A. Además, para todo $k \in \mathbb{N}$ se cumple

$$\int_A f_k - \rho_k v(A) \leq \underline{\int_A} f \leq \overline{\int_A} f \leq \int_A f_k + \rho_k v(A)$$

luego

$$0 \leq \overline{\int_A} f - \underline{\int_A} f \leq 2\rho_k v(A)$$

y pasando al límite se obtiene $\overline{\int_A} f = \underline{\int_A} f$, es decir, f es integrable sobre A.

Por otra parte, usando la desigualdad $|f(\mathbf{x}) - f_k(\mathbf{x})| \leq \rho_k$, válida para todo $\mathbf{x} \in A$, y todo $k \in \mathbb{N}$, resulta

$$\left| \int_A f_k(\mathbf{x}) d\mathbf{x} - \int_A f(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \right| \leq \int_A |f(\mathbf{x}) - f_k(\mathbf{x})| d\mathbf{x} \leq \rho_k v(A)$$

luego, $\lim_k \int_A f_k(\mathbf{x}) = \int_A f(\mathbf{x}) d\mathbf{x}$.

Para demostrar el teorema cuando M es un conjunto medible Jordan arbitrario, basta fijar un rectángulo cerrado n-dimensional $A \supset M$ y aplicar lo que se acaba de demostrar a la sucesión $\hat{f}_k : A \to \mathbb{R}$, definida por

$$\hat{f}_k(\mathbf{x}) = f_k(\mathbf{x}) \text{ si } \mathbf{x} \in M, \; \hat{f}_k(\mathbf{x}) = 0 \text{ si } \mathbf{x} \notin M$$

Como esta sucesión converge uniformemente hacia $\hat{f} : A \to \mathbb{R}$, (definida en forma similar), resulta que $\hat{f}$ es integrable sobre A, y $\lim_k \int_A \hat{f}_k = \int_A \hat{f}$, lo que significa que f es integrable sobre M, y $\int_M f = \lim_k \int_M f_k$. ■

Corolario 12.6 *Sea $\sum_{n=1}^{\infty} f_k(\mathbf{x})$ una serie de funciones $f_k : M \to \mathbb{R}$, integrables Riemann sobre un conjunto medible Jordan $M \subset \mathbb{R}^n$, que converge uniformemente. Entonces $f(\mathbf{x}) = \sum_{n=1}^{\infty} f_k(\mathbf{x})$ es integrable sobre M, y se cumple*

$$\int_M f(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \sum_{k=1}^{\infty} \int_M f_k(\mathbf{x}) d\mathbf{x}$$

Dem: La sucesión $S_k = \sum_{j=1}^{k} f_j$, converge uniformemente sobre M hacia f, y en virtud de 12.5 la sucesión $\int_M S_k = \sum_{j=1}^{k} (\int_M f_j)$ converge hacia $\int_M f$. ■

Cuando se sabe que la función límite es integrable Riemann los siguientes resultados (teoremas 12.7 y 12.8) garantizan el paso al límite bajo la integral con hipótesis más débiles que la convergencia uniforme.

Teorema 12.7 *Sea $f_n : M \to \mathbb{R}$ una sucesión de funciones integrables Riemann en el conjunto medible Jordan $M \subset \mathbb{R}^n$ que converge puntualmente hacia una función $f : M \to \mathbb{R}$ que se supone integrable Riemann sobre M. Si la sucesión f_n es uniformemente acotada, (existe $C > 0$ tal que $|f_n(\mathbf{t})| \leq C$ para todo $\mathbf{t} \in M$, y todo $n \in \mathbb{N}$) entonces*

$$\int_M f(\mathbf{x})\ d\mathbf{x} = \lim_n \int_M f_n(\mathbf{x})\ d\mathbf{x}$$

En lo que sigue diremos que la sucesión $f_n : \Omega \to \mathbb{R}$ está dominada por la función $g : \Omega \to [0, +\infty)$ cuando para todo $\mathbf{t} \in \Omega$ y todo $n \in \mathbb{N}$ se cumple $|f_n(\mathbf{t})| \leq g(\mathbf{t})$.

Teorema 12.8 *Sea $f_n : \Omega \to \mathbb{R}$ una sucesión de funciones absolutamente integrables Riemann en el recinto de integración $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ que converge puntualmente sobre Ω hacia una función localmente integrable $f : \Omega \to \mathbb{R}$. Si la sucesión f_n está dominada por una función absolutamente integrable Riemann $g : \Omega \to [0, +\infty)$ entonces f es absolutamente integrable Riemann y se cumple $\int_\Omega f(\mathbf{t})d\mathbf{t} = \lim_n \int_\Omega f_n(\mathbf{t})d\mathbf{t}$.*

Los teoremas 12.7 y 12.7, en el contexto de la teoría de la integral de Lebesgue, son versiones particulares del teorema de la convergencia dominada.

Funciones definidas por integrales. Sea $M \subset \mathbb{R}^n$ medible Jordan, T un conjunto, y $f : T \times M \to \mathbb{R}$ una función tal que para cada $\mathbf{t} \in T$ la función parcial $f_\mathbf{t} : M \to \mathbb{R}$ es integrable Riemann. En estas condiciones la integral dependiente del parámetro $\mathbf{t} \in T$,

$$F(\mathbf{t}) = \int_M f(\mathbf{t}, \mathbf{x})d\mathbf{x}$$

define una función $F : T \to \mathbb{R}$.

Cuando T es un espacio métrico (resp. un abierto de $\mathbb{R}^k$) se estudian a continuación condiciones suficientes para que F sea continua (resp. derivable).

Teorema 12.9 *Sea (T, d) un espacio métrico, $M \subset \mathbb{R}^n$ un compacto medible Jordan. Si $f : T \times M \to \mathbb{R}$ es continua, la función*

$$F(\mathbf{t}) = \int_M f(\mathbf{t}, \mathbf{x})d\mathbf{x}$$

definida en T, también es continua.

DEM: Como (T, d) es un espacio métrico podemos utilizar la caracterización de la continuidad por sucesiones: Basta demostrar que si una sucesión $\mathbf{t}_k \in T$ converge hacia $\mathbf{t} \in T$, entonces $F(\mathbf{t}_k)$ converge hacia $F(\mathbf{t})$. Como $K = \{\mathbf{t}_k : n \in \mathbb{N}\} \cup \{\mathbf{t}\}$, y M son compactos también lo es $K \times M$, para la distancia $\rho((\mathbf{u}, \mathbf{x}), (\mathbf{v}, \mathbf{y})) = \max\{d(\mathbf{u}, \mathbf{v}), d_2(\mathbf{x}, \mathbf{y})\}$ luego f es uniformemente continua sobre $K \times M$, es decir, para cada $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$, tal que

$$\mathbf{u}, \mathbf{v} \in T,\quad \mathbf{x}, \mathbf{y} \in M,\quad d(\mathbf{u}, \mathbf{v}) < \delta,\quad d_2(\mathbf{x}, \mathbf{y}) < \delta\ \Rightarrow |f(\mathbf{u}, \mathbf{x}) - f(\mathbf{v}, \mathbf{y})| < \epsilon$$

Como $\mathbf{t}_k$ converge hacia $\mathbf{t}$, existe $n_\delta \in \mathbb{N}$ tal que $n \geq n_\delta \Rightarrow d(\mathbf{t}_k, \mathbf{t}) < \delta$, luego, para todo $\mathbf{x} \in M$ se cumple $|f(\mathbf{t}, \mathbf{x}) - f(\mathbf{t}_k, \mathbf{x})| < \epsilon$.

Esto significa que la sucesión $f_{\mathbf{t}_k}$ converge hacia $f_{\mathbf{t}}$ uniformemente sobre M, y aplicando el teorema 12.5 se concluye que la sucesión $F(\mathbf{t}_k) = \int_M f_{\mathbf{t}_k}$ converge hacia $F(\mathbf{t}) = \int_M f_{\mathbf{t}}$. ■

Teorema 12.10 *Sea* $\Omega \subset \mathbb{R}^k$ *abierto y* $M \subset \mathbb{R}^n$ *un compacto medible Jordan y* $f : \Omega \times M \to \mathbb{R}$ *una función continua, tal que en cada* $(\mathbf{t}, \mathbf{x}) \in \Omega \times K$ *existe y es continua la derivada parcial* $\dfrac{\partial f}{\partial t_j}(\mathbf{t}, \mathbf{x})$. *Entonces la función* $F(\mathbf{t}) = \int_M f(\mathbf{t}, \mathbf{x}) d\mathbf{x}$, *definida en* Ω, *es derivable en cada* $\mathbf{t} \in \Omega$, *respecto a la variable* t_j, *y se verifica*

$$\frac{\partial F(\mathbf{t})}{\partial t_j} = \int_M \frac{\partial f(\mathbf{t}, \mathbf{x})}{\partial t_j} d\mathbf{x}$$

DEM: Suponemos, para simplificar la escritura, que $j = 1$. Dado $\mathbf{t} \in \Omega$, fijemos una bola cerrada $\overline{B(\mathbf{t}, r)} \subset \Omega$. Así, para cada $h \in \mathbb{R}$, con $|h| < r$, está definido

$$\Delta(\mathbf{t}, h) = \frac{F(t_1 + h, t_2, t_3, \cdots, t_k) - F(t_1, t_2, t_3, \cdots, t_k)}{h} =$$

$$= \frac{1}{h} \int_M (f(t_1 + h, t_2, \cdots t_k, \mathbf{x}) - f(t_1, t_2, \cdots t_k, \mathbf{x})) d\mathbf{x}.$$

La función $s \to f(s, t_2, \cdots t_k, \mathbf{x})$, es derivable en el intervalo $(t_1 - r, t_1 + r)$, luego, en virtud del teorema del valor medio,

$$f(t_1 + h, t_2, \cdots t_k, \mathbf{x}) - f(t_1, t_2, \cdots t_k, \mathbf{x}) = h \frac{\partial f}{\partial t_1}(t_1 + h\theta_{\mathbf{x}}, t_2, \cdots t_k, \mathbf{x})$$

donde $\theta_{\mathbf{x}} \in [0, 1]$ depende de $\mathbf{x}$ y de h ($\mathbf{t}$ está fijo todo el rato). Se obtiene así que

$$\Delta(\mathbf{t}, h) = \int_M \frac{\partial f}{\partial t_1}(t_1 + h\theta_{\mathbf{x}}, t_2, \cdots t_k, \mathbf{x}) d\mathbf{x}$$

luego

$$\left| \Delta(\mathbf{t}, h) - \int_M \frac{\partial f}{\partial t_1}(\mathbf{t}, \mathbf{x}) d\mathbf{x} \right| \leq$$

$$\leq \int_M \left| \frac{\partial f}{\partial t_1}(t_1 + h\theta_{\mathbf{x}}, t_2, \cdots t_k, \mathbf{x}) - \frac{\partial f}{\partial t_1}(t_1, t_2, \cdots t_k, \mathbf{x}) \right| d\mathbf{x}$$

Como la derivada parcial $\partial f / \partial t_1$ es uniformemente continua sobre el compacto $\overline{B(\mathbf{t}, r)} \times M \subset \mathbb{R}^{k+n}$, para cada $\epsilon > 0$ existe $\delta \in (0, r)$ tal que para todo par $\mathbf{t}', \mathbf{t}'' \in \overline{B(\mathbf{t}, r)}$ con $d_{\mathbb{R}^k}(\mathbf{t}', \mathbf{t}'') < \delta$, y todo par, $\mathbf{x}', \mathbf{x}'' \in M$, con $d_{\mathbb{R}^n}(\mathbf{x}', \mathbf{x}'') < \delta$, se cumple

$$\left| \frac{\partial f}{\partial t_1}(\mathbf{t}', \mathbf{x}') - \frac{\partial f}{\partial t_1}(\mathbf{t}'', \mathbf{x}'') \right| < \epsilon$$

Si $|h| < \delta$ $(< r)$, los dos puntos $(t_1, t_2 \cdots t_k)$, $(t_1 + h\theta_{\mathbf{x}}, t_2, \cdots t_k)$ están en la bola $B(\mathbf{t}, r)$, y la distancia entre ellos es menor que δ, luego, para cada $\mathbf{x} \in M$

$$\left| \frac{\partial f}{\partial t_1}(t_1 + h\theta_{\mathbf{x}}, t_2, \cdots t_k, \mathbf{x}) - \frac{\partial f}{\partial t_1}(t_1, t_2, \cdots t_k, \mathbf{x}) \right| < \epsilon$$

Se sigue que para $|h| < \delta$ se verifica $\left| \Delta(\mathbf{t}, h) - \int_M \frac{\partial f}{\partial t_j}(\mathbf{t}, \mathbf{x}) d\mathbf{x} \right| \leq \epsilon c_n(M)$ y queda demostrado que

$$\lim_{h \to 0} \Delta(\mathbf{t}, h) = \int_M \frac{\partial f}{\partial t_1}(\mathbf{t}, \mathbf{x}) d\mathbf{x}$$

■

Finalmente exponemos algunos resultados de carácter complementario referentes a integrales impropias dependientes de un parámetro. Son versiones restringidas de resultados más generales cuya formulación adecuada requiere el conocimiento de la integral de Lebesgue. Se obtienen de forma natural combinando los resultados básicos obtenidos hasta ahora.

Proposición 12.11 *Sea (T, d) un espacio métrico, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un recinto de integración y $f : T \times \Omega \to \mathbb{R}$ una función continua tal que existe una función absolutamente integrable $g : \Omega \to [0, +\infty)$ verificando $|f(\mathbf{t}, \mathbf{x})| \leq g(\mathbf{x})$ para todo $\mathbf{t} \in T$ y todo $\mathbf{x} \in \Omega$. Entonces la función $F(\mathbf{t}) = \int_\Omega f(\mathbf{t}, \mathbf{x}) d\mathbf{x}$, está definida y es continua en T.*

Dem: La hipótesis implica que todas las integrales impropias $\int_\Omega f(\mathbf{t}, \mathbf{x}) d\mathbf{x}$ son absolutamente convergentes y por lo tanto $F(\mathbf{t})$ está definida para todo $\mathbf{t} \in T$.

Sea $K_j \in \mathcal{K}_\Omega$ una sucesión expansiva de compactos medibles Jordan contenidos en Ω. Según el teorema 12.9, las funciones $F_j(\mathbf{t}) = \int_{K_j} f(\mathbf{t}, \mathbf{x}) d\mathbf{x}$ están definidas y son continuas en T. Es evidente que la sucesión F_j converge puntualmente hacia F, y si demostramos que la convergencia es uniforme, acudiendo al teorema 12.9 obtendremos la continuidad de F.

Usando la convergencia de la sucesión $\int_{K_j} g(\mathbf{x}) d\mathbf{x}$, y la siguiente desigualdad, válida para $j \geq i$, y todo $\mathbf{t} \in T$,

$$|F_j(\mathbf{t}) - F_i(\mathbf{t})| \leq \int_{K_j \setminus K_i} |f(\mathbf{t}, \mathbf{x})| d\mathbf{x} \leq \int_{K_j \setminus K_i} g(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \int_{K_j} g(\mathbf{x}) d\mathbf{x} - \int_{K_i} g(\mathbf{x}) d\mathbf{x}$$

se obtiene fácilmente que la sucesión F_j cumple la condición de Cauchy para la convergencia uniforme sobre T. ■

Proposición 12.12 *Sea* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *un recinto de integración y* $f : (a, b) \times \Omega \to \mathbb{R}$ *una función continua, tal que para cada* $\mathbf{x} \in \Omega$ *la función parcial* $t \to f(t, \mathbf{x})$ *es derivable, y su derivada* $D_1 f(t, \mathbf{x})$, *define una función continua en* $(a, b) \times \Omega$.

Se supone que para algún $t_0 \in (a, b)$ *la función parcial* $\mathbf{x} \to f(t_0, \mathbf{x})$ *es absolutamente integrable Riemann sobre* Ω *y que las funciones* $x \to D_1 f(t, \mathbf{x})$ *están dominadas por una función absolutamente integrable Riemann* $g : \Omega \to \mathbb{R}$*:*

$$|D_1 f(t, \mathbf{x})| \leq g(\mathbf{x}) \quad \textit{para todo} \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad \textit{y todo} \quad t \in (a, b)$$

Entonces, todas las funciones parciales $\mathbf{x} \to f(t, \mathbf{x})$ *son absolutamente integrables, y la función definida por sus integrales*

$$F(t) = \int_\Omega f(t, \mathbf{x}) d\mathbf{x}$$

es derivable en (a, b), *con derivada*

$$F'(t) = \int_\Omega D_1 f(t, \mathbf{x}) d\mathbf{x}$$

Dem: Aplicando el teorema del incremento finito a la funión $t \to f(t, \mathbf{x})$, se deduce que para cada $t \in (a, b)$ se cumple

$$|f(t, \mathbf{x}) - f(t_0, \mathbf{x})| = |t - t_0||D_1 f(\xi, \mathbf{x})| \leq (b - a) g(\mathbf{x})$$

(donde $\xi \in (a, b)$ es un punto intermedio del intervalo de extremos t, t_0).

Se obtiene así que para todo $t \in (a, b)$ y todo $\mathbf{x} \in \Omega$ se cumple a desigualdad

$$|f(t, \mathbf{x})| \leq (b - a) g(\mathbf{x}) + |f(t_0, \mathbf{x})|$$

con la que se obtiene fácilmente que todas las funciones $\mathbf{x} \to f(t, \mathbf{x})$ son absolutamente integrables Riemann sobre Ω, luego para cada $t \in \Omega$ está definida

$$F(t) = \int_\Omega f(t, \mathbf{x}) d\mathbf{x}$$

Sea $K_j \in \mathcal{K}_\Omega$ una sucesión expansiva de compactos medibles Jordan en Ω. Según el teorema 12.10 las funciones $F_j(t) = \int_{K_j} f(t, \mathbf{x}) d\mathbf{x}$, están definidas y son derivables en (a, b), con derivada $F_j'(t) = \int_{K_j} D_1 f(t, \mathbf{x}) d\mathbf{x}$.

Obsérvese que la condición de dominación que figura como hipótesis implica que para cada $t \in (a, b)$ la función continua $\mathbf{x} \to D_1 f(t, \mathbf{x})$ es absolutamente integrable sobre Ω y por lo tanto, para cada $t \in (a, b)$, se cumple

$$\int_\Omega D_1 f(t, \mathbf{x}) d\mathbf{x} = \lim_j \int_{K_j} D_1 f(t, \mathbf{x}) d\mathbf{x} = \lim_j F_j'(t)$$

Además, para $j > i$ y cualquier $t \in (a, b)$ se verifica la desigualdad

$$|F_j'(t) - F_i'(t)| \leq \int_{K_j \setminus K_i} |D_1 f(t, \mathbf{x})| d\mathbf{x} \leq \int_{K_j \setminus K_i} g(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \int_{K_j} g(\mathbf{x}) d\mathbf{x} - \int_{K_i} g(\mathbf{x}) d\mathbf{x}$$

y con la condición de Cauchy se obtiene que F'_j converge uniformemente en (a,b).

Por otra parte, como la función $\mathbf{x} \to f(t_0, \mathbf{x})$ es absolutamente integrable, podemos asegurar que existe el límite

$$\lim_j F_j(t_0) = \lim_j \int_{K_j} f(t_0, \mathbf{x}) d\mathbf{x} = \int_\Omega f(t_0, \mathbf{x}) d\mathbf{x}$$

y aplicando el teorema A.11 a las sucesión F_j se deduce que $F(t) = \lim_j F_j(t)$, es derivable en (a,b), con derivada

$$F'(t) = \lim_j F'_j(t) = \int_\Omega D_1 f(t, \mathbf{x}) d\mathbf{x}$$

■

12.3. Ejercicios resueltos

Ejercicio 12.13 *Compruebe que la integral impropia*

$$I_p = \int_\Omega \frac{dx\ dy\ dz}{(x^2+y^2+z^2)^p}, \qquad \Omega = \{(x,y,z) : r^2 \leq x^2+y^2+z^2\}$$

es finita si y sólo si $2p > 3$, *y obtenga su valor.*

SOLUCIÓN

Como la integral se plantea sobre un conjunto no acotado, debemos considerarla como integral impropia. Es claro que Ω es un recinto de integración donde la sucesión de compactos medibles Jordan $K_j = \{(x,y,z) : r^2 \leq x^2+y^2+z^2 \leq (r+j)^2\}$ es expansiva. La función $f_p(x,y,z) = (x^2+y^2+z^2)^{-p}$ es continua en Ω y por lo tanto localmente integrable. Para calcular $I_p = \int_\Omega f_p$ comenzamos calculando las integrales $\alpha_j = \int_{K_j} f_p$.

Si $2p \neq 3$, con un cambio de variable a coordenadas esféricas se obtiene

$$\alpha_j = \int_0^{2\pi} d\theta \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\varphi \int_r^{r+j} \frac{\rho^2 \cos\varphi}{\rho^{2p}} d\rho = \frac{4\pi}{3-2p}[(r+j)^{3-2p} - r^{3-2p}]$$

Si $2p-3 > 0$, la sucesión α_j es convergente hacia el valor

$$I_p = \frac{4\pi}{3-2p} r^{3-2p}$$

Con el mismo cálculo, para $2p-3 < 0$, y con un cálculo similar para el caso $2p-3 = 0$, se obtiene que $\int_\Omega f_p = +\infty$ cuando $2p \leq 3$. ■

Ejercicio 12.14 *Para* $p > 0$ *se considera la integral impropia*

$$I_p = \int_\Omega \frac{dx\ dy\ dz}{(x^2+y^2+z^2)^p}, \qquad \Omega = \{(x,y,z) : 0 < x^2+y^2+z^2 \leq r^2\}$$

Compruebe que es convergente si y sólo si $2p < 3$, *y obtenga su valor.*

SOLUCIÓN

Aunque Ω es medible Jordan, la función $f_p(x,y,z) = (x^2+y^2+z^2)^{-p}$ no está acotada sobre Ω, por lo que la integral se debe considerar como integral impropia. Obsérvese que Ω es un recinto de integración y que f_p es localmente integrable en Ω, por ser continua. La sucesión de compactos medibles Jordan

$$K_j = \{(x,y,z) : j^{-2} \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq r^2\}$$

es expansiva en Ω, y para calcular I_p comenzamos calculando $\alpha_j = \int_{K_j} f_p$. Si $2p \neq 3$, con un cambio de variable a coordenadas esféricas se obtiene

$$\alpha_j = \int_0^{2\pi} d\theta \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\varphi \int_{1/j}^{r} \frac{\rho^2 \cos\varphi}{\rho^{2p}} d\rho = \frac{4\pi}{3-2p}[r^{3-2p} - j^{2p-3}]$$

Si $2p - 3 < 0$, la sucesión α_j es convergente hacia el valor

$$I_p = \frac{4\pi}{3-2p} r^{3-2p}$$

Con el mismo cálculo, para $2p - 3 > 0$, y con un cálculo similar para el caso $2p - 3 = 0$, se obtiene que $\int_\Omega f_p = +\infty$ cuando $2p \geq 3$. ■

Ejercicio 12.15 *Compruebe que la integral impropia*

$$I = \int_\Omega \frac{dx\ dy\ dz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}, \qquad \Omega = \{(x,y,z) : x^2 + y^2 + (z-R)^2 \leq R^2,\ z > 0\}$$

es convergente y calcule su valor.

SOLUCIÓN

Aunque Ω es medible Jordan, la función $f(x,y,z) = 1/\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ no es acotada en Ω (pues $f(0,0,z) = 1/z$, cuando $(0,0,z) \in \Omega$) luego la integral debe considerarse como integral impropia. Es obvio que Ω es un recinto de integración y que f es localmente integrable por ser continua. Si $\epsilon_j \in (0,1)$ es una sucesión decreciente que converge hacia 0, la sucesión de compactos medibles Jordan

$$K_j = \{(x,y,z) : x^2 + y^2 + (z-R)^2 \leq R^2, z \geq \epsilon_j\}$$

es expansiva en Ω, y para calcular I comenzamos calculando $\alpha_j = \int_{K_j} f$. Con un cambio de variable a coordenadas cilíndricas

$$x = r\cos\theta, \quad y = r\,\mathrm{sen}\,\theta, \quad z = t$$

se obtiene

$$\alpha_j = \int_{\epsilon_j}^{2R} dt \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\sqrt{2Rt-t^2}} \frac{r\ dr}{\sqrt{r^2+t^2}} = 2\pi \int_{\epsilon_j}^{2R} (\sqrt{2Rt} - t) dt$$

Como la función $t \to \sqrt{2Rt} - t$, es integrable en $[0, 2R]$ (por ser continua), y $\lim_j \epsilon_j = 0$, en virtud del teorema fundamental del cálculo existe el límite

$$\lim_j \alpha_j = \int_0^{2R} (\sqrt{2Rt} - t)dt = \frac{2}{3}R^2$$

lo que significa que la integral impropia converge y que su valor es $I = \frac{4}{3}\pi R^2$. ■

Ejercicio 12.16 *Compruebe que las siguientes integrales impropias son convergentes y calcule sus valores:*

a) $I = \int_\Omega \frac{dx\ dy}{\sqrt{x^2 + y^2 - R^2}}$, $\Omega = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq R^2\}$.

b) $J = \int_\Omega e^{-(x^2+y^2)} dx\ dy$, $\Omega = \mathbb{R}^2$.

solución

Como las funciones son no negativas, basta ver que las integrales tienen un valor finito que se puede calcular usando la sucesión expansiva de discos cerrados que se indica en cada caso.

a) Utilizamos la sucesión expansiva de discos $K_j = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq R_j^2\}$, donde $R_j \in (0, R)$ es una sucesión creciente convergente hacia R. Con un cambio de variable a coordenadas polares se obtiene que la integral sobre K_j vale,

$$\alpha_j = 2\pi(R_j - \sqrt{R^2 - R_j^2})$$

luego $I = \lim_j \alpha_j = 2\pi R$.

b) Consideramos la sucesión expansiva de discos $D_j = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq R_j^2\}$, donde $R_j > 0$ es una sucesión creciente convergente hacia $+\infty$. Con un cambio de variable a coordenadas polares se obtiene que la integral sobre D_j vale,

$$\beta_j = 2\pi \int_0^{R_j} re^{-r^2} dr = \pi(1 - e^{-R_j^2})$$

luego $J = \lim_j \beta_j = \pi$. ■

Ejercicio 12.17 *Se supone que* $g, h : (a, b) \to \mathbb{R}$ *son continuas, y que* $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ *es un abierto que contiene al conjunto* $\{(t, x) \in \mathbb{R}^2 : a < t < b,\ x \in [g(t), f(t)]\}$, *donde* $[g(t), h(t)] = \{\alpha g(t) + (1 - \alpha)h(t) : 0 \leq \alpha \leq 1\}$. *Si* $f : \Omega \to \mathbb{R}$ *es continua, demuestre que la siguiente integral*

$$F(t) = \int_{g(t)}^{h(t)} f(t, x)dx$$

define una función continua en (a, b).

SOLUCIÓN

Por hipótesis, para cada $t \in (a, b)$ el punto $(g(t), h(t), t)$ pertenece al conjunto

$$A = \{(u, v, t) \in \mathbb{R}^3 : \{t\} \times [u, v] \subset \Omega\}$$

donde $[u, v] = \{\alpha u + (1-\alpha)v : 0 \leq \alpha \leq 1\} \subset \mathbb{R}$ es el segmento de extremos u, v (¡atención: no se supone $u \leq v$!). La función F se puede expresar como la composición $F(t) = \varphi(g(t), h(t), t)$, donde $\varphi(u, v, t) = \int_u^v f(t, x)dx$, está definida en A, luego basta demostrar que φ es continua en A.

Para ello comenzamos viendo que A es un subconjunto abierto de $\mathbb{R}^3$, y esto lo haremos comprobando, con la técnica de las sucesiones, que su complemento $\mathbb{R}^3 \setminus A$, es cerrado: Si (u_n, v_n, t_n) es una sucesión en $\mathbb{R}^3 \setminus A$, que converge hacia (u, v, t), según la definición de A, para cada $n \in \mathbb{N}$ existe $\alpha_n \in [0, 1]$ tal que $(t_n, \alpha_n u_n + (1-\alpha_n)v_n) \not\in \Omega$. La sucesión α_n posee una subsucesión α_{n_k} convergente hacia un punto $\alpha \in [0, 1]$. Como $(t, \alpha u + (1-\alpha)v)$ es el límite de la sucesión $(t_{n_k}, \alpha_{n_k} u_{n_k} + (1-\alpha_{n_k})v_{n_k})$, que está contenida en el cerrado $\mathbb{R}^2 \setminus \Omega$, resulta $(t, \alpha u + (1-\alpha)v) \in \mathbb{R}^2 \setminus \Omega$, es decir $(u, v, t) \not\in \mathbb{R}^3 \setminus A$.

Como A es abierto, dado $(u_0, v_0, t_0) \in A$ existe $r > 0$ tal que

$$W_r = [u_0 - r, u_0 + r] \times [v_0 - r, v_0 + r] \times [t_0 - r, t_0 + r] \subset A$$

Para cada $(u, v, t) \in W_r$, los tres puntos (u_0, v_0, t), (u_0, v, t), (u_0, v_0, t), pertenecen a $W_r \subset A$, y podemos escribir

$$\varphi(u, v, t) - \varphi(u_0, v_0, t_0) =$$

$$(\varphi(u, v, t) - \varphi(u_0, v, t)) + (\varphi(u_0, v, t) - \varphi(u_0, v_0, t)) + (\varphi(u_0, v_0, t) - \varphi(u_0, v_0, t_0))$$

Los dos primeros sumandos se puede acotar en la forma

$$|\varphi(u, v, t) - \varphi(u_0, v, t)| \leq \int_{[u_0, u]} |f(t, x)|dx \leq C_1|u - u_0|$$

$$|\varphi(u_0, v, t) - \varphi(u_0, v_0, t)| \leq \int_{[v_0, v]} |f(t, x)|dx \leq C_2|v - v_0|$$

donde

$$C_1 = \max\{|f(t, x)| : |t - t_0| \leq r, |x - u_0| \leq r\}$$

$$C_2 = \max\{|f(t, x)| : |t - t_0| \leq r, |x - v_0| \leq r\}$$

y, según 12.9, el tercer sumando, $|\varphi(u_0, v_0, t) - \varphi(u_0, v_0, t)|$, tiende hacia, 0 cuando $t \to t_0$, Se sigue que para cada ϵ existe $\delta \in (0, r)$ tal que

$$\max\{|u - u_0|, |v - v_0|, |t - t_0|\} < \delta \Rightarrow |\varphi(u, v, t) - \varphi(u_0, v_0, t_0)| < \epsilon$$

Queda demostrado así que φ es continua en A, y con ello la continuidad de F. ■

Ejercicio 12.18 *En las condiciones de 12.17 si las funciones* $g, h : (a, b) \to \mathbb{R}$ *son derivables y la derivada parcial* $\frac{\partial f}{\partial t} f(t, x)$ *existe y es continua en todos los puntos de* Ω*, demuestre que* F *es derivable en* (a, b)*, y vale la regla de derivación de Leibniz:*

$$F'(t) = f(h(t), t)h'(t) - f(g(t), t)g'(t) + \int_{g(t)}^{h(t)} \frac{\partial f}{\partial t}(t, x)dx$$

SOLUCIÓN

Basta aplicar la regla de la cadena del cálculo diferencial a la función compuesta $F(t) = \varphi(g(t), h(t), t)$, donde $\varphi(u, v, t) = \int_u^v f(t, x)dx$ está definida en el abierto $A = \{(u, v, t) \in \mathbb{R}^3 : \{t\} \times [u, v] \subset \Omega\}$, (véase 12.17) y tiene derivadas parciales continuas: Efectivamente, en virtud del teorema fundamental del cálculo y de 12.10

$$\frac{\partial \varphi}{\partial u}(u, v, t) = -f(u, t), \quad \frac{\partial \varphi}{\partial v}(u, v, t) = f(v, t), \quad \frac{\partial \varphi}{\partial t}(u, v, t) = \int_u^v \frac{\partial f}{\partial t}(t, x)dx$$

Se sigue que φ es diferenciable, y usando la regla de la cadena del cálculo diferencial

$$F'(t) = D_1\varphi(g(t), h(t), t)g'(t) + D_2\varphi(g(t), h(t), t)h'(t) + D_3\varphi(g(t), h(t), t) =$$

$$= -f(g(t), t)g'(t) + f(h(t), t)h'(t) + \int_{g(t)}^{h(t)} \frac{\partial f}{\partial t}(t, x)dx$$

■

Ejercicio 12.19 *Sean* $K \subset \mathbb{R}^k$, $M \subset \mathbb{R}^n$ *compactos medibles Jordan. Dada una función continua* $f : K \times M \to \mathbb{R}$*, justifique que la integral sobre* K *de la función continua* $F(\mathbf{t}) = \int_M f(\mathbf{t}, \mathbf{x})d\mathbf{x}$*, viene dada por* $\int_K F(\mathbf{t})d\mathbf{t} = \int_M \left(\int_K f(\mathbf{t}, \mathbf{x})d\mathbf{t}\right) d\mathbf{x}$.

SOLUCIÓN

$K \times M$ es compacto en $\mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^n$, y medible Jordan en virtud del ejercicio 10.34. La función continua f es integrable Riemann sobre el conjunto medible Jordan $K \times M$, y aplicando el teorema de Fubini se obtiene que

$$\int_{K\times M} f(\mathbf{t}, \mathbf{x})d\mathbf{x}d\mathbf{t} = \int_K \left(\int_M f(\mathbf{t}, \mathbf{x})d\mathbf{x}\right) d\mathbf{t} = \int_M \left(\int_K f(\mathbf{t}, \mathbf{x})d\mathbf{t}\right) d\mathbf{x}$$

es decir

$$\int_K F(\mathbf{t})d\mathbf{t} = \int_M \left(\int_K f(\mathbf{t}, \mathbf{x})d\mathbf{t}\right) d\mathbf{x}$$

■

12.4. Ejercicios propuestos

♢ **12.4.1** *Calcule la integral impropia*

$$\int_E \frac{dx\ dy}{(x^2+y^2)^2}$$

donde $E = \{(x,y) : (x-1)^2 + y^2 < 1\}$

♢ **12.4.2** *Calcule la integral impropia* $\displaystyle\int_M \frac{dx\ dy\ dz}{z^2}$, *donde*

$$M = \{(x,y,z) : \sqrt{x^2+y^2} \leq z \leq \sqrt{1-x^2-y^2}\}$$

♢ **12.4.3** *Considerando la integral de* $e^{-(x^2+y^2)}$ *sobre los conjuntos*

$$Q_R = \{(x,y) : |x| < R,\ |y| < R\} \ \text{ y } \ D_R = \{(x,y) : x^2+y^2 < R^2\}.$$

calcule el valor de la integral impropia $\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\ dt$.

♢ **12.4.4** Criterio de Abel para la convergencia uniforme de integrales impropias. *Sea* T *un conjunto arbitrario y* $f : [a,+\infty) \times T \to \mathbb{R}$ *una función tal que todas las funciones parciales* $x \to f(x,t)$ *son continuas.*

Se dice que la integral $\int_a^{+\infty} f(x,t)\ dx$ *es uniformemente convergente sobre* T *cuando para cada sucesión* $u_n \geq a$ *con* $\lim_n u_n = +\infty$ *la sucesión de funciones* $F_n(t) = \int_a^{u_n} f(x,t)\ dx$ *converge uniformemente sobre* T. *Demuestre que esto ocurre cuando* f *es de la forma* $f(x,t) = \alpha(x,t)\beta(x,t)$ *donde todas las funciones parciales* $x \to \alpha(x,t)$, $x \to \beta(x,t)$ *son continuas y verifican:*

a) *Las funciones* $x \to \alpha(x,t)$ *son decrecientes y tienden hacia* 0, *cuando* x *tiende hacia* $+\infty$, *uniformemente en* T.

b) *Las integrales* $S_u(t) = \int_a^u \beta(x,t)\ dx$ *están uniformemente acotadas, e.d.*

$$\sup\{|S_u(t)| : t \in T, u \geq a\} < +\infty$$

Aplicación: Justifique que la integral $\int_0^{+\infty} te^{-(a^2+x^2)t^2} \cos x\ dx$ *converge uniformemente, respecto al parámetro real* t, *en todo* $\mathbb{R}$.

♢ **12.4.5** *Si* $f : [a,+\infty) \times [c,d] \to \mathbb{R}$ *es continua y la integral impropia* $F(t) = \int_a^{+\infty} f(x,t)\ dx$ *converge uniformemente sobre* $[c,d]$ *(véase la definición en 12.4.4) demuestre que*

$$\int_c^d F(t)\ dt = \int_a^{+\infty} \left(\int_c^d f(x,t)\ dt \right) dx$$

♢ **12.4.6** *Justifique las siguientes afirmaciones:*

a) $\displaystyle F(t,r) = \int_0^{+\infty} e^{-tx} \frac{\operatorname{sen} rx}{x}\ dx$ *converge para todo* $t \geq 0$ *y todo* $r \in \mathbb{R}$.

b) Para cada $r \in \mathbb{R}$ la función $t \to F(t, r)$ es continua en $[0, +\infty)$.

c) Para cada $t > 0$ la función $r \to F(t, r)$ es derivable y $\dfrac{\partial F}{\partial r}(t, r) = \dfrac{t}{t^2 + r^2}$.

Utilice a) y b) para calcular $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen} x}{x}\, dx = \frac{\pi}{2}$.

♢ **12.4.7** *Para $a > 0$ calcule la integral*

$$\int_0^{+\infty} e^{-ax} \operatorname{sen} tx\, dx = \frac{t}{t^2 + a^2}$$

y utilíce el resultado para obtener

a) $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-ax} \frac{\cos ux - \cos vx}{x}\, dx = \frac{1}{2} \log \frac{a^2 + v^2}{a^2 + u^2}$;

b) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\cos ux - \cos vx}{x}\, dx = \log \frac{v}{u}$.

♢ **12.4.8** *Establezca la igualdad* $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x^2} \frac{\operatorname{sen} ax}{x}\, dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \int_0^a e^{-t^2/4}\, dt$.

♢ **12.4.9** *Justifique que la integral* $F(a) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\log(1 + a^2 x^2)}{1 + x^2}\, dx$ *define en $\mathbb{R}$ una función continua que es derivable en cada $a \neq 0$. Calcule $F'(a)$ y obtenga que el valor de la integral es $F(a) = \pi \log(1 + |a|)$.*

♢ **12.4.10** *Considerando la derivada de la función* $g(x) = \displaystyle\int_0^1 \frac{e^{-x^2(1+t^2)}}{1 + t^2}\, dt$ *obtenga el valor de la integral* $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

♢ **12.4.11** *Derivando respecto al parámetro $a \in \mathbb{R}$, calcule el valor de las integrales:*

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2} \cos ax\, dx; \qquad \int_0^{+\infty} e^{-(x^2 + a^2/x^2)}\, dx.$$

♢ **12.4.12** *Justifique la igualdad*

$$\int_0^{+\infty} \left(\int_0^{+\infty} 2te^{-(a^2+x^2)t^2} \cos rx\, dx \right) dt = \int_0^{+\infty} \left(\int_0^{+\infty} 2te^{-(a^2+x^2)t^2} \cos rx\, dt \right) dx$$

y utilizando los resultados del problema 12.4.11 deduzca que

$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos rx}{a^2 + x^2}\, dx = \frac{\pi}{2a} e^{-a|r|}$$

♢ **12.4.13** *Utilice la igualdad obtenida en el problema 12.4.12 para calcular las integrales*

$$\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{sen} rx}{x(a^2 + x^2)}\, dx; \qquad \int_0^{+\infty} \frac{x \operatorname{sen} rx}{a^2 + x^2}\, dx.$$