Capítulo 13

Integral curvilínea

Campos de vectores y formas diferenciales. Integración curvilínea: Independencia del camino y existencia de función potencial. Teorema de Green. Aplicaciones

Para funciones reales de una variable real, toda función continua $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ es la derivada de su integral indefinida $f(x) = \int_a^x g(t)dt$. Además, si una derivada $f' : [a, b] \to \mathbb{R}$ es integrable, la clásica fórmula de Barrow relaciona la integral de f' en el intervalo $[a, b]$ con los valores de f en los extremos del mismo.

En el contexto de las funciones reales de varias variables si una función f es diferenciable en todos los puntos de su dominio, la alternativa a la función derivada es el campo de formas lineales $\mathbf{x} \to df(\mathbf{x})$ (o el campo de vectores $\mathbf{x} \to \nabla f(\mathbf{x})$). Ahora se plantean problemas análogos a los mencionados en el caso de las funciones de una sola variable: En primer lugar hay que averiguar cuando un campo de formas lineales (o un campo de vectores) es la diferencial (el gradiente) de alguna función real y en ese caso habrá que desarrollar mecanismos para calcularla. Los dos planteamientos, el de los campos de formas lineales y el de los campos de vectores conducen a dos lenguajes distintos para tratar el mismo problema. De momento usaremos el más familiar de los campos de vectores.

La integral curvilínea (o integral de línea) que se estudia con detalle en este capítulo, es la herramienta para calcular, en el caso de que exista, una primitiva de un campo de vectores, es decir una función real cuyo gradiente sea el campo dado. Con ella se obtienen versiones de los teoremas fundamentales del cálculo análogos a los mencionados al principio. La analogía consiste en que ahora la integral curvilínea también relaciona los valores de una función en los extremos de un camino con la integral curvilínea de su gradiente a lo largo del mismo. Como consecuencia de esto, cuando se sabe que un campo continuo de vectores es el gradiente de alguna función ésta se puede calcular mediante la integral curvilínea del campo de vectores a lo largo de un camino de origen fijo y extremo variable (una versión de la fórmula $f(x) = \int_a^x g(t)dt$ para obtener una primitiva de la función continua g).

Por otra parte, el problema de la existencia de primitiva de un campo de vectores no tiene una solución tan directa como en el caso de las funciones de una sola variable. Ahora no se puede asegurar que un campo continuo de vectores sea un gradiente:

Para que un campo de clase C^1 sea un gradiente es necesario que las derivadas parciales de sus componentes estén relacionadas por las condiciones que se precisan en 13.13. Estas condiciones no son suficientes para dominios arbitrarios, pero la integral curvilínea sirve para demostrar que son suficientes para dominios especiales (los estrellados). Este resultado es muy útil en la práctica porque proporciona, para este tipo de dominios, una regla sencilla para saber cuando un campo de vectores de clase C^1 es un gradiente.

La segunda parte del capítulo está dedicada a los aspectos especiales referentes a funciones de dos variables y a campos planos de vectores. En este contexto el resultado sobre los abiertos estrellados que se acaba de mencionar se extiende a la clase más amplia de los abiertos simplemente conexos del plano. En segundo lugar se demuestra una versión elemental del teorema de Green que tiene diversas aplicaciones. Este teorema puede considerarse como una generalización de la clásica regla de Barrow ya que relaciona una integral doble, en la que intervienen las derivadas parciales de las componentes del campo, con la integral del campo a lo largo del borde del dominio de integración.

13.1. Formas diferenciales e integral curvilínea

Una *forma diferencial* de grado 1 en un abierto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ es una campo de formas lineales, es decir una aplicación $\omega : \Omega \to \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ donde $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ es el espacio vectorial de las aplicaciones lineales $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Durante todo este capítulo sólo se van a considerar formas diferenciales de grado 1 y por ello cuando se hable de una forma diferencial deberá entenderse siempre que es de grado 1. Si en el espacio vectorial $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ se considera la base dual de la base canónica de $\mathbb{R}^n$, formada por las proyecciones $dx_j : (x_1, x_2, \cdots x_n) \to x_j$, entonces la forma diferencial ω se escribe en la forma canónica

$$\omega(\mathbf{x}) = \sum_{j=1} F_j(\mathbf{x}) dx_j$$

donde F_j son las funciones, definidas en Ω, que dan las coordenadas de $\omega(\mathbf{x})$ respecto a esta base. Para cada $\mathbf{x} \in \Omega$ y cada $\mathbf{h} \in \mathbb{R}^n$, la imagen del vector $\mathbf{h}$ mediante la aplicación lineal $\omega(\mathbf{x})$ viene dada por

$$\omega(\mathbf{x})\mathbf{h} = \left(\sum_{j=1} F_j(\mathbf{x}) dx_j \right) \mathbf{h} = \sum_{j=1} F_j(\mathbf{x}) h_j$$

Si las funciones coordenadas F_j son continuas (resp. de clase C^m) en Ω se dice que ω es continua (resp. de clase C^m) . Esta definición es intrínseca, es decir, no depende de la base considerada en $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$.

Después de estas definiciones queda establecido el significado de una expresión como la siguiente: $\operatorname{sen}(x + z)dx + zx^2y^3dy + \operatorname{sen} x \ dz$.

Por otra parte, en virtud de la estructura euclídea de $\mathbb{R}^n$, a cada forma diferencial de grado 1, $\omega : \Omega \to \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ se le puede asociar un campo de vectores $\mathbf{F} : \Omega \to \mathbb{R}^n$, asignando a cada $\mathbf{x} \in \Omega$, el único vector $\mathbf{F}(\mathbf{x}) \in \mathbb{R}^n$ que verifica

$$\omega(\mathbf{x})\mathbf{h} = \langle \mathbf{F}(\mathbf{x}) \mid \mathbf{h} \rangle \quad \text{para todo } \mathbf{h} \in \mathbb{R}^n.$$

Recíprocamente, a un campo de vectores $\mathbf{F} : \Omega \to \mathbb{R}^n$ se le asocia la forma diferencial ω cuyas funciones coordenadas respecto a la base canónica de $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ son las componentes del campo $\mathbf{F}$. Por las razones que se verán más adelante, a la forma diferencial $\sum_{j=1}^n F_j(\mathbf{x})dx_j$ asociada al campo $\mathbf{F}$ se le suele llamar *trabajo elemental* del campo de vectores $\mathbf{F}$.

Ejemplo 13.1 *Si $f : \Omega \to \mathbb{R}$ es diferenciable en un abierto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ entonces df es una forma diferencial cuya expresión canónica es $df(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^n D_j f(\mathbf{x})dx_j$ En particular, si f es la restricción a Ω de una aplicación lineal $L(\mathbf{x}) = \sum_j a_j x_j$, entonces df es constante, y su expresión canónica es $df(\mathbf{x}) = L = \sum_{j=1}^n a_j dx_j$, para todo $\mathbf{x} \in \Omega$.*

En el ejemplo anterior el campo vectorial asociado a la forma diferencial df es el gradiente, $\nabla f : \Omega \to \mathbb{R}^n$.

En lo que sigue $\Lambda_1(\Omega)$ designará el conjunto de las formas diferenciales de grado 1 definidas en Ω, $\Lambda_1^m(\Omega)$ el subconjunto de $\Lambda_1(\Omega)$ formado por las formas diferenciables de clase C^m y $\Lambda_1^0(\Omega)$ el conjunto de las formas diferenciales continuas. Obsérvese que $\Lambda_1(\Omega)$ (resp. $\Lambda_1^m(\Omega)$) es un espacio vectorial real con las operaciones naturales de suma y producto por un escalar

$$(\omega + \omega')(\mathbf{x}) = \omega(\mathbf{x}) + \omega'(\mathbf{x}); \qquad (c\omega)(\mathbf{x}) = c\omega(\mathbf{x})$$

También se puede definir el producto de una función $f : \Omega \to \mathbb{R}$ por una forma $\omega \in \Lambda_1(\Omega)$ del modo natural: $(f\omega)(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x})\omega(\mathbf{x})$. En particular, multiplicando las funciones F_j por las formas constantes dx_j resultan las formas diferenciales $F_j dx_j$, cuya suma es ω.

Si $\Lambda_0(\Omega)$ es el conjunto de las funciones diferenciables $f : \Omega \to \mathbb{R}$ (se les llama también formas diferenciales de grado 0) entonces la diferencial $d : f \to df$, es una aplicación lineal $d : \Lambda_0(\Omega) \to \Lambda_1(\Omega)$ que cumple $d(fg) = fdg + gdf$. Cuando Ω es conexo su núcleo son las funciones constantes (véase 5.23).

Definición 13.2 *Si ω es una forma diferencial en un abierto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ y existe una función diferenciable $f : \Omega \to \mathbb{R}$, tal que $\omega = df$ se dice que la forma diferencial ω es exacta y que f es una primitiva de ω. Si para cada $\mathbf{a} \in \Omega$ existe una bola abierta $B(\mathbf{a}, r) \subset \Omega$ tal que $\omega|_{B(\mathbf{a},r)}$ es exacta se dice que ω es una forma diferencial cerrada.*

Es decir, una forma diferencial ω es exacta si está en la imagen de la aplicación lineal $d : \Lambda_0(\Omega) \to \Lambda_1(\Omega)$. Si ω es exacta y Ω es conexo, la primitiva de ω queda unívocamente determinada salvo una constante aditiva.

Por las aplicaciones físicas conviene introducir también la terminología alternativa que corresponde al lenguaje de los campos de vectores: Si la forma diferencial ω asociada a un campo de vectores $\mathbf{F}$ es exacta y $\omega = df$ entonces el campo es un gradiente, $\mathbf{F} = \nabla f$, y se dice que f es una función potencial del campo $\mathbf{F}$. Cuando Ω es conexo, la función potencial de un campo de vectores, si existe, no es única, pero dos funciones potenciales del mismo campo difieren en una constante, de modo que una función potencial concreta se determina especificando su valor en un punto.

La integral curvilínea que se estudia a continuación es la herramienta que permite obtener primitivas de formas diferenciales y caracterizar las formas diferenciales exactas. Con el fin de motivar la definición de la integral curvilínea comenzamos formulándola en términos de campos de vectores. Conceptos físicos importantes como el trabajo realizado por una fuerza al mover una partícula material a lo largo de una curva o la circulación de un campo de velocidades a lo largo de una trayectoria se definen mediante integrales curvilíneas.

Un campo de vectores en un abierto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ es una aplicación continua $\mathbf{F} : \Omega \to \mathbb{R}^n$ que se suele representar dibujando, para cada $\mathbf{x} \in \Omega$, un vector $\mathbf{F}(\mathbf{x})$ aplicado en el punto $\mathbf{x}$. Para simplificar la cuestión de motivar la definición suponemos que $\boldsymbol{\gamma}$ es un camino en Ω de clase C^1 con derivada no nula en todo punto. Su abscisa curvilínea $s = v(t)$, es una función invertible de clase C^1 y con la sustitución $t = v^{-1}(s)$ se obtiene una representación paramétrica equivalente $\tilde{\boldsymbol{\gamma}}(s) = \boldsymbol{\gamma}(v^{-1}(s))$ cuyo parámetro es el arco. Si $L = \text{Long}(\gamma)$, para cada $s \in [0, L]$ la derivada $\tilde{\boldsymbol{\gamma}}'(s)$ es un vector tangente unitario y la componente del vector $\mathbf{F}(\tilde{\boldsymbol{\gamma}}(s))$ según este vector unitario viene dada por el producto escalar $\langle\ \mathbf{F}(\tilde{\boldsymbol{\gamma}}(s)) \mid \tilde{\boldsymbol{\gamma}}'(s)\ \rangle$. La integral de este producto escalar, sobre $[0, L]$, representa el trabajo realizado cuando la partícula material se mueve a lo largo de la trayectoria orientada $\boldsymbol{\gamma}$, sometida al campo de fuerzas $\mathbf{F}$. Si se efectúa el cambio de variable $s = v(t)$, teniendo en cuenta que $\boldsymbol{\gamma}'(t) = \tilde{\boldsymbol{\gamma}}'(s)v'(t)$, resulta

$$\int_0^L \langle\ \mathbf{F}(\tilde{\boldsymbol{\gamma}}(s)) \mid \tilde{\boldsymbol{\gamma}}'(s)\ \rangle ds = \int_a^b \langle\ \mathbf{F}(\boldsymbol{\gamma}(t)) \mid \boldsymbol{\gamma}'(t)\ \rangle\ dt$$

Esta interpretación es la que motiva la siguiente definición

Definición 13.3 *Dado un campo continuo $\mathbf{F} : \Omega \to \mathbb{R}^n$, $\mathbf{F} = (F_1, F_2, \cdots F_n)$ en un abierto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, y un camino regular a trozos $\boldsymbol{\gamma} : [a, b] \to \Omega$, $\boldsymbol{\gamma} = (\gamma_1, \gamma_2, \cdots \gamma_n)$, la integral curvilínea de $\mathbf{F}$ a lo largo de $\boldsymbol{\gamma}$ se define así:*

$$\int_{\boldsymbol{\gamma}} \mathbf{F} = \int_a^b \langle\ \mathbf{F}(\boldsymbol{\gamma}(t)) \mid \boldsymbol{\gamma}'(t)\ \rangle\ dt = \sum_{j=1}^n \int_a^b F_j(\boldsymbol{\gamma}(t))\boldsymbol{\gamma}_j'(t)\ dt$$

Obsérvese que $\boldsymbol{\gamma}$ es derivable en $[a, b]$ salvo en un conjunto finito de puntos $x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1}$ del intervalo abierto (a, b), por lo que la función

$$f(t) = \sum_{j=1}^n F_j(\boldsymbol{\gamma}(t))\boldsymbol{\gamma}_j'(t)$$

está definida en $[a, b]$ excepto en este conjunto finito. Sin embargo en todos los puntos $x_1, x_2 \cdots x_{n-1}$ existen las derivadas laterales de $\boldsymbol{\gamma}$, y f coincide en cada intervalo abierto (x_{i-1}, x_i) con la restricción de una función continua. Si se define f en los puntos $x_1, x_2, ..x_{n-1}$, asignándole valores arbitrarios, se obtiene una función integrable Riemann cuya integral no depende de los valores asignados a f en estos puntos (recuérdese que si una función integrable se modifican en un conjunto finito de puntos se obtiene otra función integrable con la misma integral).

A la integral curvilínea también se le suele llamar *integral de línea* o *integral de contorno* y para ella también se suelen utilizar las notaciones

$$\int \langle\, \mathbf{F} \mid d\boldsymbol{\gamma}\, \rangle = \int_{\boldsymbol{\gamma}} \sum_{j=1}^{n} F_j \; dx_j = \sum_{j=1}^{n} \int F_j \; d\gamma_j$$

En el lenguaje de las formas diferenciales, la definición se formula así

Definición 13.4 *Sea* $\omega(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^{n} F_j(\mathbf{x})dx_j$ *una forma diferencial de grado* 1 *definida y continua en un abierto* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. *Si* $\boldsymbol{\gamma} : [a, b] \to \Omega$ *es un camino regular a trozos, la integral curvilínea de* ω *a lo largo de* $\boldsymbol{\gamma}$ *se define como la integral curvilínea del campo de vectores asociado:*

$$\int_{\boldsymbol{\gamma}} \omega = \int_a^b \omega(\boldsymbol{\gamma}(t))\boldsymbol{\gamma}'(t) \; dt = \int_a^b \sum_{j=1}^{n} F_j(\boldsymbol{\gamma}(t))\gamma_j'(t) \; dt = \sum_{j=1}^{n} \int_a^b F_j(\boldsymbol{\gamma}(t))\gamma_j'(t) \; dt$$

donde γ_j, $1 \leq j \leq n$, *son las componentes de* $\boldsymbol{\gamma}$.

Las consideraciones preliminares que han motivado la definición, la integral curvilínea de un campo de vectores $\mathbf{F}$ a lo largo de un camino regular a trozos $\boldsymbol{\gamma}$ se puede interpretar como la integral respecto al arco de la componente de $\mathbf{F}$ según la dirección de la tangente al camino Por ello importantes conceptos físicos, como el trabajo realizado por una fuerza al mover una partícula material a lo largo de una curva o la circulación de un campo de velocidades a lo largo de una trayectoria se expresan mediante integrales curvilíneas de campos de vectores. Esta interpretación física es la que motiva el nombre de *trabajo elemental* del campo $\mathbf{F}$ que se suele utilizar para designar la forma diferencial $\sum_{j=1}^{n} F_j(\mathbf{x})dx_j$.

Aunque para interpretaciones físicas conviene considerar las integrales curvilíneas en términos de campos de vectores, sin embargo, desde el punto de vista algorítmico del cálculo tienen ventaja las integrales curvilíneas expresadas en términos de formas diferenciales. Con ellas se pone de manifiesto la utilidad de la expresión canónica de una forma diferencial y la ventaja de la notación empleada para la base canónica de $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$: Para calcular la integral de una forma diferencial ω sobre un camino $\mathbf{x}(t) = (x_1(t), \cdots x_n(t))$ basta calcular la integral definida de la función que se obtiene sustituyendo formalmente, $x_j = x_j(t)$, $dx_j = x_j'(t) \; dt$ en la expresión canónica de la forma diferencial

$$\sum_{j=1}^{n} F_j(x_1, x_2, \cdots, x_n)dx_j$$

Orientación de un arco de curva regular a trozos. Para caminos regulares a trozos, que son los que intervienen en la integral curvilínea, conviene considerar la siguiente relación de equivalencia: Dos caminos regulares a trozos $\mathbf{f}, \mathbf{g}$ son *equivalentes como caminos regulares a trozos* cuando se pueden expresar en la forma

$$\mathbf{f} = \mathbf{f}_1 \vee \mathbf{f}_2 \vee \cdots \vee \mathbf{f}_m, \quad \mathbf{g} = \mathbf{g}_1 \vee \mathbf{g}_2, \vee \cdots, \mathbf{g}_m$$

donde, para cada $k \in \{1, \cdots m\}$ los caminos $\mathbf{f}_k$ y $\mathbf{g}_k$ son C^1 equivalentes. Es fácil ver que, en este caso, un camino se obtiene efectuando en el otro un cambio de parámetro estrictamente monótono regular a trozos. Cuando sea creciente diremos que los dos caminos tienen la misma orientación y cuando sea decreciente que tienen orientaciones opuestas. En el primer caso los dos caminos tienen el mismo origen y el mismo extremo, pero en el segundo caso el origen de un camino coincide con el extremo del otro y los dos caminos recorren el mismo trayecto, pero en sentidos opuestos. La noción de caminos regulares a trozos equivalentes es una relación de equivalencia y cada clase de equivalencia se dice que es un *arco de curva regular a trozos*. Análogamente se define la noción de *arco de curva orientado regular a trozos* considerando como relación de equivalencia la de caminos regulares a trozos equivalentes con la misma orientación. Un arco de curva regular a trozos queda orientado cuando se elige una de sus representaciones paramétricas regulares a trozos.

Las siguientes propiedades de la integral curvilínea son consecuencia inmediata de la definición y de las propiedades básicas de la integral de Riemann:

Proposición 13.5 *Sean $\mathbf{F}_1$, $\mathbf{F}_2$ campos de vectores definidos y continuos en un abierto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ y $\boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\gamma}_1, \boldsymbol{\gamma}_2$ caminos regulares a trozos en Ω. Se verifica:*

i) $\int_{\boldsymbol{\gamma}}(\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2) = \int_{\boldsymbol{\gamma}} \mathbf{F}_1 + \int_{\boldsymbol{\gamma}} \mathbf{F}_2$

ii) $\int_{\boldsymbol{\gamma}} \mathbf{F} = \int_{\boldsymbol{\gamma}_1} \mathbf{F} + \int_{\boldsymbol{\gamma}_2} \mathbf{F}$ *si* $\boldsymbol{\gamma} = \boldsymbol{\gamma}_1 \vee \boldsymbol{\gamma}_2$

iii) $\int_{\sim\boldsymbol{\gamma}} \mathbf{F} = -\int_{\boldsymbol{\gamma}} \mathbf{F}$

iv) Si $\boldsymbol{\gamma}_1$, $\boldsymbol{\gamma}_2$ son caminos regulares a trozos equivalentes entonces $\int_{\boldsymbol{\gamma}_1} \mathbf{F} = \epsilon \int_{\boldsymbol{\gamma}_2} \mathbf{F}$ donde $\epsilon = 1$ (resp. $\epsilon = -1$) si los caminos tienen la misma orientación (resp. orientaciones opuestas).

La propiedad iv) de la proposición 13.5 permite definir la integral curvilínea de un campo de vectores continuo sobre un arco de curva orientado regular a trozos, a través de una cualquiera de sus representaciones paramétricas admisibles. Es decir, la integral curvilínea es realmente una noción asociada al arco de curva orientado, que cambia de signo cuando se cambia su orientación.

Aunque no se acostumbra a hacer énfasis en este hecho, sin embargo se hace uso frecuente del mismo sin advertirlo explícitamente. Así por ejemplo, como cualquier camino regular a trozos es equivalente a otro, con la misma orientación, cuyo dominio es un intervalo prefijado, frecuentemente se asume que el camino que interviene en una integral curvilínea está definido en el intervalo que convenga en cada caso. Esto es lo que se hace cuando se considera la yuxtaposición de dos caminos, que a priori no están definidos en intervalos contiguos, siempre que el extremo del primero coincida con el origen del segundo (para definir explícitamente la yuxtaposición sería preciso reparametrizar los caminos en intervalos contiguos).

Proposición 13.6 *Sea* $\mathbf{F}(\mathbf{x}) = (F_1(\mathbf{x}), \cdots, F_n(\mathbf{x}))$ *un campo vectorial continuo en un abierto* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *y* $\boldsymbol{\gamma}$ *un camino regular a trozos en* Ω. *Entonces*

$$\left|\int_{\boldsymbol{\gamma}} \mathbf{F}\right| \leq M Long(\boldsymbol{\gamma}) \quad con \quad M = \sup\{\|\mathbf{F}(\mathbf{x})\|_2 : \mathbf{x} \in \boldsymbol{\gamma}([a,b])\}$$

DEM: En virtud de la desigualdad de Cauchy, si $\mathbf{x} \in \boldsymbol{\gamma}([a,b])$

$$|\langle\, \mathbf{F}(\mathbf{x}) \mid \mathbf{h} \,\rangle| \leq \|\mathbf{F}(\mathbf{x})\|_2 \ \|\mathbf{h}\|_2 \leq M \, \|\mathbf{h}\|_2$$

luego

$$\left|\int_{\boldsymbol{\gamma}} \mathbf{F}\right| \leq \int_a^b |\langle\, \mathbf{F}(\boldsymbol{\gamma}(t)) \mid \boldsymbol{\gamma}'(t) \,\rangle| \ dt \leq M \int_a^b \|\boldsymbol{\gamma}'(t)\|_2 \ dt = M\mathrm{Long}(\boldsymbol{\gamma})$$

■

Se deja al cuidado del lector el enunciado de los resultados anteriores en términos de formas diferenciales. En lo que sigue, por comodidad de notación, consideraremos preferentemente integrales curvilíneas de formas diferenciales.

Independencia del camino.

Definición 13.7 *Si* ω *es una forma diferencial de grado* 1 *definida y continua en un abierto* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, *se dice que la integral curvilínea* $\int_{\boldsymbol{\gamma}} \omega$ *no depende del camino en* Ω *si para cada par de caminos regulares a trozos* $\boldsymbol{\gamma}_1, \boldsymbol{\gamma}_2$ *en* Ω, *con el mismo origen y el mismo extremo, se verifica* $\int_{\boldsymbol{\gamma}_1} \omega = \int_{\boldsymbol{\gamma}_2} \omega$.

Proposición 13.8 *Si* ω *es una forma diferencial de grado* 1 *continua en un abierto* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *son equivalentes*

a) La integral curvilínea $\int_{\boldsymbol{\gamma}} \omega$ *no depende del camino en* Ω.

b) $\int_{\boldsymbol{\gamma}} \omega = 0$ *para cada camino* $\boldsymbol{\gamma}$ *en* Ω, *cerrado y regular a trozos.*

DEM: a) $\Rightarrow$ b) es inmediato pues todo camino cerrado tiene los mismos extremos que un camino constante.
b) $\Rightarrow$ a) Si $\boldsymbol{\gamma}_1, \boldsymbol{\gamma}_2$ son caminos regulares a trozos en Ω con los mismos extremos entonces $\boldsymbol{\gamma} = \boldsymbol{\gamma}_1 \vee (\sim \boldsymbol{\gamma}_2)$ es un camino cerrado en Ω y por hipótesis

$$0 = \int_{\boldsymbol{\gamma}} \omega = \int_{\boldsymbol{\gamma}_1} \omega - \int_{\boldsymbol{\gamma}_2} \omega$$

■

Ejemplo 13.9 *La forma diferencial* $\omega(x,y) = ydx + 2xdy$, *está definida en todo el plano, y su integral curvilínea* $\int_{\boldsymbol{\gamma}} \omega$ *depende del camino.*

Dem: Obsérvese $\boldsymbol{\gamma}_1(t) = (t,t)$ y $\boldsymbol{\gamma}_2(t) = (t,t^2)$, $t \in [0,1]$, son caminos en $\mathbb{R}^2$ con el mismo origen y el mismo extremo, que proporcionan distinta integral curvilínea. ■

La siguiente proposición que da una condición suficiente para que la integral de línea $\int_{\boldsymbol{\gamma}} \omega$ sea independiente del camino en Ω, proporciona el procedimiento estandar para conseguir una primitiva de una forma diferencial exacta.

Proposición 13.10 *Sea ω una forma diferencial de grado 1 continua en un abierto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Si ω es exacta y f es una primitiva de ω entonces para todo camino regular a trozos $\boldsymbol{\gamma}$ en Ω de origen $\mathbf{x}$ y extremo $\mathbf{y}$, se verifica*

$$\int_{\boldsymbol{\gamma}} \omega = f(\mathbf{y}) - f(\mathbf{x})$$

Dem: Sea $\omega = df$ donde $f : \Omega \to \mathbb{R}$ es diferenciable. Consideremos una subdivisión $a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b$ de $[a,b]$ tal que cada $\boldsymbol{\gamma}|_{[x_{j-1},x_j]}$ es de clase C^1. Entonces

$$\int_{\boldsymbol{\gamma}} \omega = \int_{\boldsymbol{\gamma}} df = \sum_{j=1}^{n} \int_{x_{j-1}}^{x_j} df(\boldsymbol{\gamma}(t))\boldsymbol{\gamma}'(t)\ dt = \sum_{j=1}^{n} \int_{x_{j-1}}^{x_j} (f \circ \boldsymbol{\gamma})'(t)\ dt$$

Utilizando el teorema fundamental del cálculo y recordando que $\boldsymbol{\gamma}(a) = \mathbf{x}$, $\boldsymbol{\gamma}(b) = \mathbf{y}$ se obtiene

$$\int_{\boldsymbol{\gamma}} \omega = \sum_{j=1}^{n} [f(\boldsymbol{\gamma}(x_j) - f(\boldsymbol{\gamma}(x_{j-1}))] = f(\boldsymbol{\gamma}(b)) - f(\boldsymbol{\gamma}(a)) = f(\mathbf{y}) - f(\mathbf{x})$$

■

Esta última proposición pone de manifiesto que cuando se sabe que una forma diferencial ω es exacta, $\omega = df$, la integral curvilínea es la herramienta adecuada para determinar (salvo una constante) la primitiva f: Si Ω es conexo, se obtiene una primitiva f de ω fijando un punto $\mathbf{a} \in \Omega$ y definiendo $f(\mathbf{x}) = \int_{\boldsymbol{\gamma}_{\mathbf{x}}} \omega$ donde $\boldsymbol{\gamma}_{\mathbf{x}}$ es cualquier camino en Ω, regular a trozos, con origen fijo en $\mathbf{a}$ y extremo variable $\mathbf{x} \in \Omega$. (Si Ω no es conexo se obtiene la primitiva procediendo como se acaba de indicar en cada una de sus componentes conexas).

En el lenguaje de los campos de vectores, e interpretando la integral curvilínea como trabajo, la proposición anterior se traduce en el principio físico que dice que si un campo de fuerzas $\mathbf{F}$ admite función potencial f, entonces el trabajo realizado cuando una partícula recorre la trayectoria $\boldsymbol{\gamma}$ sometida al campo de fuerzas $\mathbf{F}$ es igual a la diferencia del potencial del campo entre los extremos de la trayectoria. En este caso el trabajo realizado no depende de la trayectoria que ha seguido la partícula; sólo depende de la posición final y de la posición inicial de la misma. Por esta razón se llaman conservativos a los campos de fuerzas cuya integral curvilínea no depende del camino, es decir el trabajo que realizan a lo largo de un camino sólo depende de los extremos del camino. En particular, no se realiza trabajo al cuando la partícula recorre una trayectoria cerrada. Con el siguiente teorema quedan caracterizados los campos conservativos como aquellos que tienen función potencial.

Teorema 13.11 *Si ω es una forma diferencial continua, de grado 1, definida en un abierto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ son equivalentes*

a) ω *es exacta.*

b) $\int_{\boldsymbol{\gamma}} \omega = 0$ *para cada camino cerrado y regular a trozos* $\boldsymbol{\gamma}$ *en* Ω.

Dem: a) $\Rightarrow$ b) Es consecuencia inmediata de la proposición 13.10
b) $\Rightarrow$ a) No es restrictivo suponer que Ω es conexo y por lo tanto conexo por poligonales, (si no es así se aplica el siguiente razonamiento en cada componente conexa). Fijado $\mathbf{a} \in \Omega$, para cada $\mathbf{x} \in \Omega$ existe un camino regular a trozos $\boldsymbol{\gamma}_{\mathbf{x}} : [0,1] \to \Omega$ de origen $\mathbf{a} = \boldsymbol{\gamma}_{\mathbf{x}}(0)$ y extremo $\mathbf{x} = \boldsymbol{\gamma}_{\mathbf{x}}(1)$ y se define

$$f(\mathbf{x}) = \int_{\boldsymbol{\gamma}_{\mathbf{x}}} \omega.$$

En virtud de la proposición 13.8 la definición de $f(\mathbf{x})$ sólo depende del extremo $\mathbf{x}$ del camino. El objetivo es demostrar que f es diferenciable en Ω con $df(\mathbf{x}) = \omega(\mathbf{x})$ para todo $\mathbf{x} \in \Omega$. Es decir, hay que demostrar que $\epsilon(\mathbf{h}) = f(\mathbf{x}+\mathbf{h}) - f(\mathbf{x}) - \omega(\mathbf{x})\mathbf{h}$ verifica

$$\lim_{\mathbf{h} \to 0} \epsilon(\mathbf{h})/\|\mathbf{h}\|_2 = 0$$

Fijado un punto $\mathbf{x} \in \Omega$ comenzamos eligiendo $\rho > 0$ tal que $B(\mathbf{x}, \rho) \subset \Omega$. De esta forma, si $\|\mathbf{h}\| < \rho$, podemos asegurar que el segmento $\sigma(t) = \mathbf{x} + t\mathbf{h}$, $t \in [0,1]$ está contenido en Ω y con ello que el camino regular a trozos $\boldsymbol{\gamma}_{\mathbf{x}} \vee \sigma$, de origen $\mathbf{a}$ y extremo $\mathbf{x}+\mathbf{h}$, está contenido en Ω, de modo que podemos utilizado para calcular $f(\mathbf{x}+\mathbf{h})$. Usando las propiedades de la integral curvilínea

$$f(\mathbf{x}+\mathbf{h}) - f(\mathbf{x}) = \int_{\boldsymbol{\gamma}_{\mathbf{x}} \vee \sigma} \omega - \int_{\boldsymbol{\gamma}_{\mathbf{x}}} \omega = \int_{\sigma} \omega$$

Si $\mathbf{F}$ es el campo vectorial asociado a ω, como $\sigma'(t) = \mathbf{h}$, resulta

$$\epsilon(\mathbf{h}) = \int_{\sigma} \omega - \omega(\mathbf{x})\mathbf{h} = \int_0^1 \langle\, \mathbf{F}(\sigma(t)) - \mathbf{F}(\mathbf{x}) \mid \mathbf{h} \,\rangle \, dt$$

Como $\mathbf{F}$ es continuo en $\mathbf{x} \in \Omega$ existe $B(\mathbf{x}, r) \subset B(\mathbf{x}, \rho)$ tal que $\|\mathbf{F}(\mathbf{y}) - \mathbf{F}(\mathbf{x})\|_2 < \epsilon$ para todo $\mathbf{y} \in B(\mathbf{x}, r)$. Entonces, si $\|\mathbf{h}\|_2 < r$, en virtud de la desigualdad de Cauchy,

$$|\langle\, \mathbf{F}(\sigma(t)) - \mathbf{F}(\mathbf{x}) \mid \mathbf{h} \,\rangle| \leq \|\mathbf{F}(\sigma(t)) - \mathbf{F}(\mathbf{x})\|_2 \; \|\mathbf{h}\|_2 \leq \epsilon \, \|\mathbf{h}\|_2$$

y se obtiene

$$|\epsilon(\mathbf{h})| \leq \int_0^1 |\langle\, \mathbf{F}(\sigma(t)) - \mathbf{F}(\mathbf{x}) \mid \mathbf{h} \,\rangle| \, dt \leq \epsilon \, \|\mathbf{h}\|_2$$

es decir

$$\|\mathbf{h}\|_2 < r \Rightarrow |\epsilon(\mathbf{h})| < \epsilon \, \|\mathbf{h}\|_2$$

y esto termina la prueba. ■

Si $\omega(\mathbf{x}) = df(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^n D_j f(\mathbf{x}) dx_j$ es una forma diferencial exacta de clase C^1, sus funciones coordenadas $F_j(\mathbf{x}) = D_j f(\mathbf{x})$ son de clase C^1, lo que significa que f es de clase C^2 y aplicando el teorema de Young 6.4 se obtiene que que para todo $i, j \in \{1, 2 \cdots n\}$ y todo $\mathbf{x} \in \Omega$ se cumple $D_i F_j(\mathbf{x}) = D_{ij} f(\mathbf{x}) = D_{ji} f(\mathbf{x}) = D_j F_i(\mathbf{x})$. El recíproco se cumple cuando el abierto Ω es estrellado:

Definición 13.12 *Un abierto Ω de $\mathbb{R}^n$ se dice que es estrellado si hay un punto $\mathbf{a} \in \Omega$ tal que para cada $\mathbf{x} \in \Omega$ el segmento $[\mathbf{a}, \mathbf{x}]$ está contenido en Ω.*

Teorema 13.13 *Si $\omega(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^n F_j(\mathbf{x}) dx_j$ es una forma diferencial de clase C^1 definida en un abierto estrellado $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, son equivalentes:*

i) ω es exacta.

ii) $D_i F_j(\mathbf{x}) = D_j F_i(\mathbf{x})$ para cada $i, j \in \{1, 2, \cdots n\}$ y cada $\mathbf{x} \in \Omega$.

DEM: Ya hemos visto que i) $\Rightarrow$ ii) aunque Ω no sea estrellado,
ii) $\Rightarrow$ i) Supongamos, para simplificar la escritura, que Ω es estrellado respecto al origen. Para cada $\mathbf{x} \in \Omega$ sea $\sigma_{\mathbf{x}}(t) = t\mathbf{x}$, $t \in [0, 1]$, el segmento de origen 0 y extremo $\mathbf{x}$, que por hipótesis está contenido en Ω, lo que permite definir la función

$$f(\mathbf{x}) = \int_{\sigma_{\mathbf{x}}} \omega = \int_0^1 \langle \, \mathbf{F}(t\mathbf{x}) \mid \mathbf{x} \, \rangle \; dt = \int_0^1 h(\mathbf{x}, t) \; dt$$

donde $\mathbf{F}$ es el campo vectorial asociado a ω. La función

$$h(\mathbf{x}, t) \; = \; \sum_{j=1}^n x_j F_j(t\mathbf{x})$$

posee derivadas parciales continuas respecto a las variables $x_1, x_2, \cdots x_n$

$$\frac{\partial h}{\partial x_k}(\mathbf{x}, t) = F_k(t\mathbf{x}) + \sum_{j=1}^n t x_j D_k F_j(t\mathbf{x})$$

En virtud de la hipótesis ii), $D_k F_j = D_j F_k$ luego

$$\frac{\partial h}{\partial x_k}(\mathbf{x}, t) = F_k(t\mathbf{x}) + \sum_{j=1}^n t x_j D_j F_k(t\mathbf{x}) = \; \frac{d}{dt}(t F_k(t\mathbf{x}))$$

Utilizando 12.10 se concluye que f posee derivadas parciales continuas en Ω que se obtienen derivando bajo la integral

$$D_k f(\mathbf{x}) = \int_0^1 \frac{\partial h}{\partial x_k} h(\mathbf{x}, t) \; dt = \int_0^1 \frac{d}{dt}(t F_k(t\mathbf{x})) dt = F_k(\mathbf{x}), \quad 1 \le k \le n$$

luego f es diferenciable en Ω y $df = \omega$ ■

Como las bolas son conjuntos estrellados, aplicando el teorema anterior sobre cada bola $B(\mathbf{a}, r) \subset \Omega$ se caracterizan las formas diferenciales cerradas de clase C^1

Corolario 13.14 *Si* $\omega(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^{n} F_j(\mathbf{x})dx_j$ *es una forma diferencial de clase* C^1 *definida en un abierto* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$*, son equivalentes:*

i) ω *es cerrada.*

ii) $D_iF_j(\mathbf{x}) = D_jF_i(\mathbf{x})$ *para cada* $i, j \in \{1, 2, \cdots n\}$ *y cada* $\mathbf{x} \in \Omega$.

El siguiente ejemplo pone de manifiesto que el resultado expuesto en el teorema 13.13 no se cumple cuando Ω es un abierto arbitrario.

Ejemplo 13.15

En virtud del corolario 13.14 la forma diferencial

$$\omega(x, y) = \frac{-y}{x^2 + y^2}dx + \frac{x}{x^2 + y^2}dy$$

es cerrada en el abierto $\Omega = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$. Sin embargo no es exacta porque $C(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t)$, $0 \leq t \leq 2\pi$ es un camino cerrado en Ω y $\int_C \omega = 2\pi \neq 0$. ■

Ejemplo 13.16

En virtud del teorema 13.13 la forma diferencial $\omega(x, y) = 2xydx + (x^2 + 2y)dy$, definida en $\mathbb{R}^2$, es exacta. Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una primitiva de ω debe cumplir $D_1f(x, y) = 2xy$, $D_2f(x, y) = x^2 + 2y$. De la primera condición se sigue que f es de la forma $f(x, y) = x^2y + \varphi(y)$ donde $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una función derivable, y utilizando la segunda condición se llega a que $x^2+2y = x^2+\varphi'(y)$ luego $\varphi(y) = y^2+c$. Se obtiene así la primitiva $f(x, y) = x^2y + y^2 + c$.

13.2. Formas diferenciales en el plano

En esta sección se consideran aspectos particulares de las formas diferenciales de dos variables que escribiremos en la forma $\omega(x, y) = P(x, y)dx + Q(x, y)dy$.

Mediante el corolario 13.14 han quedado caracterizadas las formas diferenciales cerrada de clase C^1 como aquellas que verifican la condición $D_2P = D_1Q$. Cuando $n = 2$ las formas diferenciales cerradas también se pueden caracterizar mediante una condición de distinta naturaleza, que tiene la ventaja de aplicarse a formas diferenciales que sólo se suponen continuas (véase 13.17). También se estudia en esta sección el problema general de la independencia del camino para el caso de las formas diferenciales de dos variables.

En lo que sigue cuando se hable de rectángulos en el plano se supondrá que son cerrados de lados paralelos a los ejes, es decir, de la forma

$$R = \{(x, y) : x \in [a, b], y \in [c, d]\}$$

En ese caso ∂R denota al camino poligonal cerrado que recorre la frontera en el sentido $(a, c) \to (b, c) \to (b, d) \to (a, d) \to (a, c)$.

Diremos que Ω es un *abierto especial* si existe $(a,b) \in \Omega$ tal que para cada $(x,y) \in \Omega$ el rectángulo R de vértices opuestos (a,b), (x,y) está contenido en Ω. (Nótese que R puede degenerar en un segmento si $x = a$ o si $y = b$). Son abiertos especiales los discos, los semiplanos abiertos determinados por rectas paralelas a uno de los ejes y los cuadrantes abiertos. Para los abiertos especiales se verifica

Teorema 13.17 *Si $\omega(x,y) = P(x,y)dx + Q(x,y)dy$ es una forma diferencial definida y continua en un abierto especial $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, son equivalentes*

a) ω es exacta.

b) $\int_{\partial R} \omega = 0$ para cada rectángulo $R \subset \Omega$.

DEM: a) $\Rightarrow$ b) está probado en 13.11.
b) $\Rightarrow$ a) Sea $(a,b) \in \Omega$ un punto tal que para todo $(x,y) \in \Omega$ el rectángulo R determinado por $(a,b),(x,y)$ está contenido en Ω. Su borde orientado es la yuxtaposición de cuatro segmentos

$$\partial R = \sigma_1 \vee \sigma_2 \vee \sigma_3 \vee \sigma_4$$

donde σ_j son los segmentos que se indican a continuación

σ_1 es el segmento horizontal de origen (a,b) y extremo (x,b).

σ_2 es el segmento vertical de origen (x,b) y extremo (x,y).

σ_3 es el segmento horizontal de origen (x,y) y extremo (a,y).

σ_4 es el segmento vertical de origen (a,y) y extremo (a,b).

Consideremos los dos caminos $\boldsymbol{\gamma}_1 = \sigma_1 \vee \sigma_2$, $\boldsymbol{\gamma}_2 = (\sim \sigma_3) \vee (\sim \sigma_4)$ de origen (a,b) y extremo (x,y). Como $\partial R = \boldsymbol{\gamma}_1 \vee (\sim \boldsymbol{\gamma}_2)$, en virtud de la hipótesis b) se cumple

$$\int_{\boldsymbol{\gamma}_1} \omega - \int_{\boldsymbol{\gamma}_2} \omega = \int_{\partial R} = 0$$

Para cada $(x,y) \in \Omega$ sea $f(x,y) = \int_{\boldsymbol{\gamma}_{(x,y)}} \omega$ donde $\boldsymbol{\gamma}_{(x,y)}$ es uno de los dos caminos $\boldsymbol{\gamma}_1$, $\boldsymbol{\gamma}_2$ que se acaban de considerar. Bastará demostrar que para todo $(x,y) \in \Omega$ se cumple $D_1 f(x,y) = P(x,y)$ y $D_2 f(x,y) = Q(x,y)$ pues de aquí se sigue, usando la continuidad de P y Q, que f es diferenciable en Ω con $df = \omega$.

Fijado $(x,y) \in \Omega$, sea $r > 0$ tal que $\overline{B((x,y),r)} \subset \Omega$. Entonces si $|h| \leq r$ podemos asegurar que el segmento $\sigma_h(t) = (x + th, y)$, $0 \leq t \leq 1$, está contenido en $\overline{B((x,y),r)}$. Si usamos el camino $\boldsymbol{\gamma}_2$ para calcular $f(x,y)$ y el camino $\boldsymbol{\gamma}_2 \vee \sigma_h$ para calcular $f(x+h,y)$ obtenemos la siguiente expresión del cociente incremental

$$\Delta(h) = \frac{f(x+h,y) - f(x,y)}{h} = \frac{1}{h} \int_{\sigma_h} \omega = \frac{1}{h} \int_0^1 P(x+th,y)h \; dt$$

En virtud del teorema 12.9 la función $\Delta(h) = \int_0^1 P(x+th,y) \; dt$ es continua en $[-r,r]$ y se sigue que $\lim_{h \to 0} \Delta(h) = \Delta(0) = P(x,y)$.

Con un razonamiento análogo se demuestra que $D_2 f = Q$. En este caso, hay que considerar cociente incremental

$$\Delta(h) = \frac{f(x, y+h) - f(x, y)}{h}$$

y para calcular $f(x, y+h)$ (resp. $f(x, y)$) debemos usar el camino $\boldsymbol{\gamma}_1 \vee \sigma_h$ (resp. $\boldsymbol{\gamma}_1$) con $\sigma_h(t) = (x, y + th)$, $0 \leq t \leq 1$. ■

NOTA: En las condiciones del teorema anterior, haciendo explícitas las dos integrales de línea que se pueden usar para obtener la primitiva f se llega a las siguientes fórmulas para una primitiva de $P(x, y)dx + Q(x, y)dy$ en Ω.

$$f(x, y) = \int_{y_0}^{y} Q(x_0, t)\ dt + \int_{x_0}^{x} P(t, y)\ dt = \int_{x_0}^{x} P(t, y_0)\ dt + \int_{y_0}^{y} Q(x, t)\ dt$$

En la definición de forma diferencial cerrada sólo se exige que fijado un punto $\mathbf{a} \in \Omega$ haya una bola suficientemente pequeña $B(\mathbf{a}, r) \subset \Omega$ donde la forma diferencial tenga primitiva. Cuando $n = 2$ ocurre lo mismo cuando la bola se toma todo lo grande que se pueda. Esto es consecuencia de la siguiente proposición, según la cual en los abiertos especiales toda forma diferencial continua y cerrada es exacta.

Proposición 13.18 *Si ω es una forma diferencial de grado 1 definida y continua en un abierto $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, son equivalentes:*

a) ω es cerrada.

b) $\int_{\partial R} \omega = 0$ para cada rectángulo $R \subset \Omega$.

c) ω posee primitiva en cada abierto especial $V \subset \Omega$ (y en particular en cada bola $B(\mathbf{a}, r) \subset \Omega$)

DEM: b) $\Rightarrow$ c) está probado en 13.17 y c) $\Rightarrow$ a) es evidente.
a) $\Rightarrow$ b) Se puede probar por reducción al absurdo, suponiendo que $\int_{\partial R} \omega \neq 0$ para algún rectángulo cerrado $R \subset \Omega$. Sea $\Delta = \text{diámetro}(R)$. Trazando los segmentos que unen los puntos medios de los lados opuestos se descompone R en cuatro rectángulos congruentes R^1,R^2,R^3,R^4. Teniendo en cuenta las cancelaciones de la integral curvilínea sobre segmentos opuestos resulta:

$$0 \neq \int_{\partial R} \omega = \sum_{j=1}^{4} \int_{\partial R_j} \omega$$

luego $\int_{\partial R^i} \omega \neq 0$ para algún $i \in \{1, 2, 3, 4\}$. Si $R_1 = R^i$ se tiene, $\text{diámetro}(R_1) = \Delta/2$. Repitiendo con R_1 el razonamiento que se acaba de hacer con R se obtiene un rectángulo cerrado $R_2 \subset R_1$ tal que $\text{diámetro}(R_2) = \Delta/2$ y $\int_{\partial R_2} \omega \neq 0$. De modo recurrente se obtiene una sucesión decreciente de rectángulos cerrados R_n tal que para todo $n \in \mathbb{N}$ se cumple

$$\text{diámetro}(R_n) = \Delta/2^n \quad \text{y} \quad \int_{\partial R_n} \omega \neq 0$$

La intersección de la sucesión decreciente de compactos R_n no es vacía (de hecho se reduce a un punto). Si $(x_0, y_0) \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} R_n$, por hipótesis ω tiene primitiva en alguna bola $B = B((x_0, y_0), r) \subset \Omega$. Sin embargo para n suficientemente grande es $R_n \subset B$ y $\int_{\partial R_n} \omega \neq 0$. Con esta contradicción concluye la demostración ■

Homotopía e independencia del camino. Diremos provisionalmente que un abierto $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ tiene la propiedad P si todas las formas diferenciales cerradas y continuas definidas en Ω son exactas. Según el ejemplo 13.15 el abierto $\Omega = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ no tiene la propiedad P y la proposición 13.18 dice que todos los abiertos especiales la tienen. Los abiertos con la propiedad P se pueden caracterizar en términos topológicos mediante la noción de homotopía que estudiamos a continuación.

Definición 13.19 *Dos caminos cerrados $\boldsymbol{\gamma}_0, \boldsymbol{\gamma}_1 : [0,1] \to \Omega$ en un abierto $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ se dice que son Ω-homotópicos (como caminos cerrados) si existe una función continua $H : [0,1] \times [0,1] \to \Omega$ que verifica:*

i) $H(0,t) = \boldsymbol{\gamma}_0(t)$, $H(1,t) = \boldsymbol{\gamma}_1(t)$, para todo $t \in [0,1]$.

ii) $H(s,0) = H(s,1)$ para todo $s \in [0,1]$.

Dos caminos $\boldsymbol{\gamma}_0$, $\boldsymbol{\gamma}_1 : [0,1] \to \Omega$, con los mismos extremos: $\boldsymbol{\gamma}_0(0) = \boldsymbol{\gamma}_1(0) = \mathbf{x}_0$, $\boldsymbol{\gamma}_0(1) = \boldsymbol{\gamma}_1(1) = \mathbf{x}_1$, se dice que son Ω-homotópicos (con los extremos fijos) si existe una función continua $H : [0,1] \times [0,1] \to \Omega$ que cumple:

i) $H(0,t) = \boldsymbol{\gamma}_0(t)$, $H(1,t) = \boldsymbol{\gamma}_1(t)$, para todo $t \in [0,1]$.

ii) $H(s,0) = \mathbf{x}_0$, $H(s,1) = \mathbf{x}_1$ para todo $s \in [0,1]$.

Para interpretar el significado de la Ω-homotopía de caminos cerrados consideremos el conjunto $\Lambda(\Omega)$ formado por los caminos cerrados $\boldsymbol{\gamma} : [0,1] \to \Omega$, dotado de la distancia de la convergencia uniforme

$$d_\infty(\boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\eta}) = \text{máx}\{\|\boldsymbol{\gamma}(t) - \boldsymbol{\eta}(t)\|_2 : 0 \leq t \leq 1\}$$

Si $H : [0,1] \times [0,1] \to \Omega$ es una homotopía entre los caminos cerrados $\boldsymbol{\gamma}_0$, $\boldsymbol{\gamma}_1$, para cada $s \in [0,1]$ la función parcial $H_s : [0,1] \to \Omega$, $H_s(t) = H(s,t)$ es un camino cerrado en Ω, con $H_0 = \boldsymbol{\gamma}_0$ y $H_1 = \boldsymbol{\gamma}_1$.

Como H es uniformemente continua en el compacto $[0,1] \times [0,1]$, dado $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $s, s' \in [0,1]$ y $t, t' \in [0,1]$ verifican $|s - s'| < \delta$, $|t - t'| < \delta$ entonces $\|H(s,t) - H(s',t')\|_2 < \epsilon$. Entonces, si $|s - s'| < \delta$, para cada $t \in [0,1]$ se verifica $d_\infty(H_s, H_{s'}) \leq \epsilon$, lo que significa que la aplicación $s \to H_s$ de $[0,1]$ en el espacio métrico $(\Lambda(\Omega), d_\infty)$ es continua. Vemos así que el hecho de que dos caminos cerrados $\boldsymbol{\gamma}_0$ y $\boldsymbol{\gamma}_1$ sean Ω-homótopicos (como caminos cerrados) significa que existe una familia uniparamétrica H_s de caminos cerrados en Ω, que depende continuamente de $s \in [0,1]$, mediante la cual el camino $\boldsymbol{\gamma}_0 = H_0$ se va deformando continuamente, dentro de Ω, hasta transformarse en $\boldsymbol{\gamma}_1 = H_1$.

La interpretación de la Ω-homotopía de caminos con extremos fijos es similar considerando el conjunto $\Lambda_{\mathbf{x}_0\mathbf{x}_1}(\Omega)$ formado por los caminos $\boldsymbol{\gamma} : [0,1] \to \Omega$, con

$\boldsymbol{\gamma}(0) = \mathbf{x}_0$, $\boldsymbol{\gamma}(1) = \mathbf{x}_1$, dotado de la métrica de la convergencia uniforme. Ahora todos los caminos intermedios H_s tienen los mismos extremos que $\boldsymbol{\gamma}_0$ y $\boldsymbol{\gamma}_1$.

Comenzamos con algunas observaciones preliminares que ayudarán a redactar la prueba de teorema 13.22. Si ω es una forma diferencial cerrada definida en un abierto $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, dados dos caminos regulares a trozos con los mismos extremos $\boldsymbol{\gamma}, \tilde{\boldsymbol{\gamma}} : [0,1] \to \Omega$, diremos que $\tilde{\boldsymbol{\gamma}}$ es una ω-modificación elemental de $\boldsymbol{\gamma}$ si existe un intervalo $[t_0, t_1] \subset [0,1]$ tal que $\boldsymbol{\gamma}(t) = \tilde{\boldsymbol{\gamma}}(t)$ para todo $t \in [0,1] \setminus [t_0, t_1]$ y además

$$\boldsymbol{\gamma}([t_0, t_1]) \subset D, \quad \tilde{\boldsymbol{\gamma}}([t_0, t_1]) \subset D$$

donde $D \subset \Omega$ es un disco abierto tal que $\omega|_D$ es exacta. Si $\tilde{\boldsymbol{\gamma}}$ se obtiene a partir de $\boldsymbol{\gamma}$ mediante una cadena finita de modificaciones elementales sucesivas diremos que $\tilde{\boldsymbol{\gamma}}$ es una ω-modificación de $\boldsymbol{\gamma}$.

Lema 13.20 *Sea ω una forma diferencial cerrada y continua, definida en un abierto $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ y $\boldsymbol{\gamma}, \tilde{\boldsymbol{\gamma}} : [0,1] \to \Omega$ dos caminos regulares a trozos en Ω, con los mismos extremos. Si $\tilde{\boldsymbol{\gamma}}$ es una ω-modificación de $\boldsymbol{\gamma}$ se cumple*

$$\int_{\boldsymbol{\gamma}} \omega = \int_{\tilde{\boldsymbol{\gamma}}} \omega$$

Dem: Basta demostrarlo cuando $\tilde{\boldsymbol{\gamma}}$ es una ω-modificación elemental de $\boldsymbol{\gamma}$. En este caso basta observar que las integrales de ω a lo largo de $\boldsymbol{\gamma}|_{[t_0,t_1]}$ y $\tilde{\boldsymbol{\gamma}}|_{[t_0,t_1]}$ coinciden en virtud del teorema 13.11. ■

Lema 13.21 *Sea ω una forma diferencial cerrada, definida en un abierto $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ y $H : Q \to \Omega$ una función continua definida en $Q = [0,1] \times [0,1]$. Entonces existe una subdivisión $p \in \mathcal{P}(Q)$ tal que para cada rectángulo $S \in \Delta(p)$ hay un disco abierto $D_S \subset \Omega$ tal que $H(S) \subset D_S$ y $\omega|_{D_S}$ es exacta.*

Dem: Consideremos una sucesión $p_n \in \mathcal{P}(Q)$ tal que cada p_{n+1} es más fina que p_n y $\|p_n\| \to 0$. Para cada n, diremos que $S \in \Delta(p_n)$ es aceptable si cumple la condición requerida en el enunciado (e.d. existe un disco abierto $D_S \subset \Omega$ tal que $H(S) \subset D_S$ y $\omega|_{D_S}$ es exacta). Sea K_n la unión de los rectángulos no aceptables $S \in \Delta(p_n)$. Al refinar una subdivisión, los rectángulos aceptables se descomponen en rectángulos aceptables luego K_n es una sucesión decreciente de compactos. La prueba habrá terminado cuando probemos que algún K_n es vacío (ya que, en ese caso, todos los rectángulos de $\Delta(p_n)$ serán aceptables). Esto lo haremos por reducción al absurdo. Si suponemos lo contrario la intersección de la sucesión decreciente de compactos K_n será no vacía y si $\mathbf{a} = (s_0, t_0)$ es un punto de esta intersección, para cada n existirá un rectángulo no aceptable $S_n \in \Delta(p_n)$ tal que $\mathbf{a} \in S_n$. Por otra parte, como ω es cerrada habrá un disco $D = B(H(\mathbf{a}), r) \subset \Omega$ tal que $\omega|_D$ es exacta. Entonces, en virtud de la continuidad de H, existirá $\delta > 0$ tal que $H(Q \cap B(\mathbf{a}, \delta)) \subset D$. Como $\mathbf{a} \in S_n$ y $\operatorname{diam}(S_n) \leq \|p_n\| \to 0$, para algún n se cumplirá $S_n \subset Q \cap B(\mathbf{a}, \delta)$ luego $H(S_n) \subset D$ y por lo tanto S_n será aceptable. Con esta contradicción queda demostrado que algún K_n es vacío ■

Teorema 13.22 *Sea* $\omega : \Omega \to \mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ *una forma diferencial cerrada, definida y continua en un abierto* $\Omega \subset \mathbb{R}^2$. *Si* $\boldsymbol{\gamma}_0, \boldsymbol{\gamma}_1 : [0,1] \to \Omega$ *son caminos regulares a trozos* Ω*-homotópicos con los extremos fijos se cumple*

$$\int_{\boldsymbol{\gamma}_0} \omega = \int_{\boldsymbol{\gamma}_1} \omega$$

Dem: En virtud del lema 13.20 basta demostrar que $\boldsymbol{\gamma}_1$ es una ω-modificación de $\boldsymbol{\gamma}_0$. Sea $Q = [0,1] \times [0,1]$ y $H : Q \to \Omega$ una homotopía de caminos con extremos fijos entre $\boldsymbol{\gamma}_0$ y $\boldsymbol{\gamma}_1$. Según el lema 13.21 existe una subdivisión de Q, $p = ((s_0, s_1, \cdots s_n), (t_0, t_1, t_2, \cdots t_m))$ tal que para cada rectángulo $S_{ij} = [s_{i-1}, s_i] \times [t_{j-1}, t_j]$, existe un disco abierto $D_{ij} \subset \Omega$ tal que $H(S_{ij}) \subset D_{ij}$ y $\omega|_{D_{ij}}$ es exacta. .

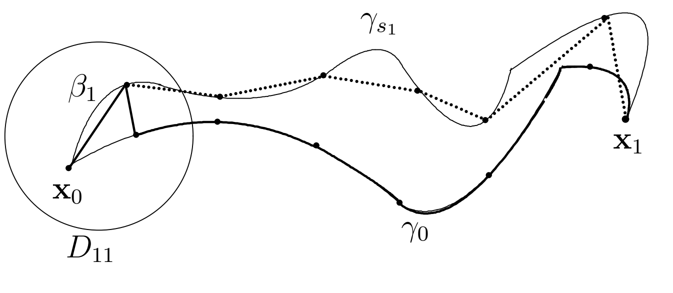
Consideremos los caminos continuos $\boldsymbol{\gamma}_{s_k}(t) = H(s_k, t)$, $t \in [0,1]$. Para $1 \leq k < n$ sea χ_{s_k} el camino poligonal de origen $\mathbf{x}_0 = \boldsymbol{\gamma}_0(0)$ y extremo $\mathbf{x}_1 = \boldsymbol{\gamma}_0(1)$, inscrito en $\boldsymbol{\gamma}_{s_k}$, con vértices en los puntos $\boldsymbol{\gamma}_{s_k}(t_i)$, $1 \leq i < m$; es decir, χ_{s_k} se obtiene mediante yuxtaposición sucesiva de los segmentos $[\boldsymbol{\gamma}_{s_k}(t_{i-1}), \boldsymbol{\gamma}_{s_k}(t_i)]$ $i = 1, \cdots m$.

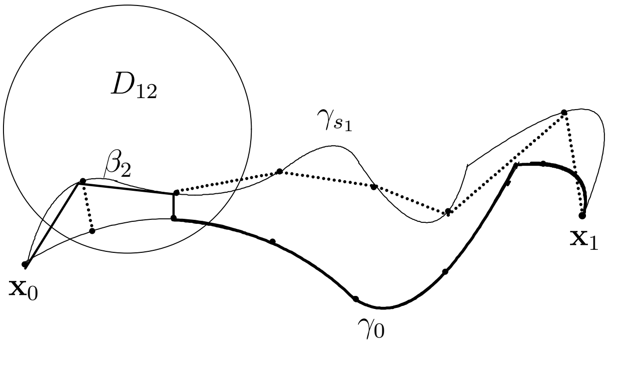
En una primera etapa el camino $\boldsymbol{\gamma}_0$ se transforma en la poligonal χ_{s_1} mediante una cadena de m modificaciones elementales, sucesivas $\beta_1, \beta_2, \cdots \beta_m$, realizadas en la forma indicada en la figura.

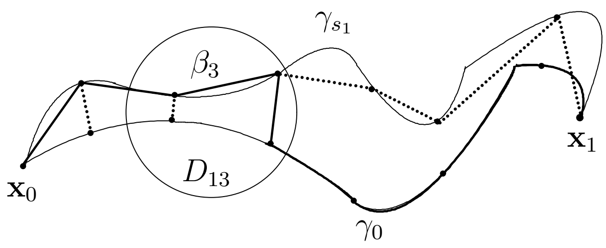
La primera modificación β_1 de $\boldsymbol{\gamma}_0$ se realiza dentro del disco D_{11}, sustituyendo el trozo del camino $\boldsymbol{\gamma}_0|_{[t_0,t_1]}$ por la yuxtaposición de dos segmentos contenidos en este disco. Análogamente la modificación β_{j+1} de β_j se realiza dentro del disco D_{1j}, donde ω tiene primitiva.

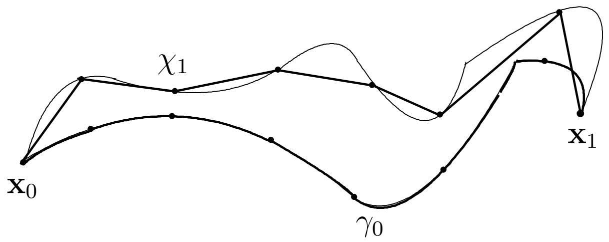
En una segunda etapa, mediante otra cadena de m modificaciones elementales sucesivas se transforma la poligonal χ_{s_1} en la poligonal χ_{s_2}.

Finalmente, en la última etapa se obtiene $\boldsymbol{\gamma}_1$ como una ω-modificación de la poligonal χ_{n-1}. Queda demostrado así que $\boldsymbol{\gamma}_1$ es una ω-modificación de $\boldsymbol{\gamma}_0$.









Fin de la primera etapa

■ .

Con una demostración similar se obtiene

Teorema 13.23 *Sea $\omega : \Omega \to \mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ una forma diferencial cerrada, definida y continua en un abierto $\Omega \subset \mathbb{R}^2$. Si $\boldsymbol{\gamma}_0, \boldsymbol{\gamma}_1 : [0,1] \to \Omega$ son caminos cerrados regulares a trozos Ω-homotópicos (como caminos cerrados) se cumple*

$$\int_{\boldsymbol{\gamma}_0} \omega = \int_{\boldsymbol{\gamma}_1} \omega$$

Definición 13.24 *Un subconjunto abierto y conexo $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ se dice que es simplemente conexo si cada camino cerrado $\boldsymbol{\gamma}$ en Ω es Ω-homotópico a un camino constante.*

Los abiertos estrellados son simplemente conexos: Todo abierto estrellado $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ es conexo porque es conexo por poligonales y si $\boldsymbol{\gamma} : [0,1] \to \Omega$ es un camino cerrado en Ω, que se supone estrellado respecto al punto $a \in \Omega$, entonces la función

$$H(s,t)) = sa + (1-s)\boldsymbol{\gamma}(t) \in \Omega, \quad (s,t) \in [0,1] \times [0,1]$$

establece una homotopía en Ω mediante la cual $\boldsymbol{\gamma} = H_0$ se transforma en el camino constante $H_1 = a$. También es inmediato que todo abierto homeomorfo a un abierto simplemente conexo es simplemente conexo. Se sigue de esto que son simplemente conexos todos los abiertos $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ que son homeomorfos al disco $D(0,1)$.

El siguiente resultado topológico, que no será demostrado, proporciona una caracterización útil de los abiertos simplemente conexos como los abiertos conexos que no tienen orificios. Esta noción se formula de modo preciso utilizando la compactificación por un punto del plano euclídeo $\mathbb{R}^2$, denotada $\mathbb{R}^2_\infty$.

Proposición 13.25 *Las siguientes propiedades de un abierto conexo $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ son equivalentes*

a) *Ω es homeomorfo al disco $D(0,1)$.*

b) *Ω es simplemente conexo.*

c) *Toda pareja de caminos en Ω con los mismos extremos, son Ω-homotópicos como caminos con extremos fijos.*

d) *Para toda curva cerrada simple (curva de Jordan) C en Ω la región interior a C está contenida en Ω.*

e) *$\mathbb{R}^2_\infty \setminus \Omega$ es conexo.*

Teorema 13.26 *Si ω es una forma diferencial cerrada definida y continua en un abierto simplemente conexo $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ se verifica:*

a) *$\int_{\boldsymbol{\gamma}} \omega = 0$ para cada camino cerrado y regular a trozos $\boldsymbol{\gamma}$ en Ω*

b) *$\int_{\boldsymbol{\gamma}_0} \omega = \int_{\boldsymbol{\gamma}_1} \omega$ para cada par de caminos $\boldsymbol{\gamma}_0, \boldsymbol{\gamma}_1$ en Ω regulares a trozos y con los mismos extremos.*

Es decir toda forma diferencial cerrada ω definida y continua en un abierto simplemente conexo es exacta.

DEM: a) Como Ω es simplemente conexo $\boldsymbol{\gamma}$ es Ω-homotópico a un camino constante $\boldsymbol{\gamma}_1$, para el que es obvio que $\int_{\boldsymbol{\gamma}_1} \omega = 0$, luego, en virtud del teorema 13.22, $\int_{\boldsymbol{\gamma}} \omega = 0$.
b) Si se plica a) al camino cerrado $\boldsymbol{\gamma} = \boldsymbol{\gamma}_0 \vee (\sim \boldsymbol{\gamma}_1)$ resulta $0 = \int_{\boldsymbol{\gamma}} \omega = \int_{\boldsymbol{\gamma}_0} \omega - \int_{\boldsymbol{\gamma}_1} \omega$. (también se puede obtener como consecuencia de 13.25 y 13.22) y con el teorema 13.11 se concluye que ω es exacta. ■

Corolario 13.27 *Sea $\omega = P(x,y)dx + Q(x,y)dy$ una forma diferencial continua en un abierto simplemente conexo $\Omega \subset \mathbb{R}^2$. Son equivalentes*

a) *ω es exacta.*

b) *$\int_{\partial R} \omega = 0$ para todo rectángulo cerrado $R \subset \Omega$.*

Cuando P, Q son de clase $C^1(\Omega)$ también es equivalente

c) *$D_2P(x,y) = D_1Q(x,y)$ para todo $(x,y) \in \Omega$.*

DEM: Es consecuencia inmediata de 13.26, 13.18 y 13.14. ■

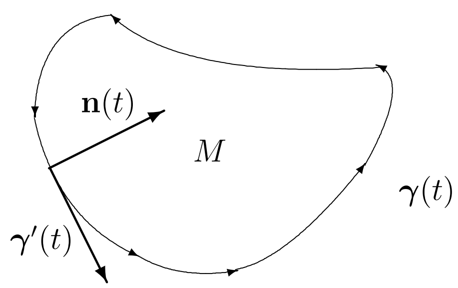
13.3. El teorema de Green

La fórmula de Green relaciona una integral doble sobre un recinto plano M con una integral de línea a lo largo de su frontera ∂M:

$$\int_M (D_1 Q - D_2 P) dx dy = \int_{\partial M} P dx + Q dy$$

Las hipótesis para la validez de esta fórmula son las naturales para que tengan sentido las integrales que figuran en ella: Por una parte $M \subset \mathbb{R}^2$ es un compacto medible Jordan cuya frontera ∂M es una curva cerrada simple, regular a trozos (brevemente, región de Green). En la integral curvilínea de la derecha se supone que la frontera ∂M está orientada positivamente (es decir, en el sentido opuesto al de las manecillas del reloj). Por otra parte, para asegurar la existencia de las integrales involucradas, se supone que P y Q son funciones continuas en un abierto $\Omega \supset M$ donde existen y son continuas las derivadas parciales $D_1 Q$, $D_2 P$.

La condición de que ∂M sea una curva cerrada simple regular a trozos significa que existe un camino cerrado simple y regular a trozos $\boldsymbol{\gamma} : [0, 1] \to \mathbb{R}^2$, tal que $\partial M = \boldsymbol{\gamma}([0, 1])$. Las curvas cerradas simples se suelen llamar curvas de Jordan, debido al famoso teorema de Camile Jordan (1838-1922) que asegura que toda curva plana cerrada simple descompone al plano en dos abiertos conexos que tienen a la curva como frontera común. Uno de ellos es acotado y se llama región interior a la curva y el otro, que no es acotado, se llama región exterior. La orientación positiva de una curva cerrada simple es la que se obtiene al recorrerla en sentido opuesto al de las manecillas del reloj, de modo que la región interior quede siempre a la izquierda (se supone que usan los criterios habituales para representar los ejes de coordenadas en el plano). Esta definición, que no es rigurosa pero tiene la virtud de ser muy clara a nivel intuitivo, se puede formular de modo más formal pero más oscuro (que a lo mejor tranquiliza a algún lector muy escrupuloso con el rigor): Una parametrización regular a trozos $\boldsymbol{\gamma}(t) = (x(t), y(t))$ de la curva cerrada simple C tiene orientación positiva cuando para cada $t \in [0, 1]$ donde existe y no es nulo el vector tangente $\boldsymbol{\gamma}'(t)$ se cumple que el vector normal $\mathbf{n}(t) = (-y'(t), x'(t))$ (obtenido girando $\pi/2$ el vector tangente) entra en M, región interior a C, es decir, existe $\delta > 0$ tal que $0 < s < \delta \Rightarrow \boldsymbol{\gamma}(t) + s\mathbf{n}(t) \in M$.



No demostraremos la versión general de la fórmula de Green. Solo veremos la demostración para regiones de Green que son de uno de los dos tipos siguientes

I) $M = \{(x, y) : a \leq x \leq b, f_1(x) \leq y \leq f_2(x)\}$

II) $M = \{(x, y) : c \leq y \leq d, g_1(y) \leq x \leq g_2(y)\}$

donde las funciones que las determinan $f_1, f_2 : [a, b] \to \mathbb{R}$, $g_1, g_2 : [c, d] \to \mathbb{R}$ son de clase C^1 a trozos. Con esta definición conviene advertir que una región tan sencilla como el disco $M := \{(x, y)) : x^2 + y^2 \leq 1\}$ no es ni de tipo tipo I) ni de tipo II) porque al describirlo en la forma $\{(x, y) : -1 \leq x \leq 1,\ -\sqrt{1 - x^2} \leq y \leq \sqrt{1 - x^2}\}$ las funciones involucradas en la descripción no son derivables en los extremos del intervalo $[-1, 1]$. La mayor parte de los textos que demuestran la fórmula de Green sólo lo hacen para regiones de Green que son simultáneamente de los tipos I) y II) pero no advierten que con esta hipótesis una región tan simple como un disco compacto queda excluida de la clase de regiones para las que demuestran la fórmula.

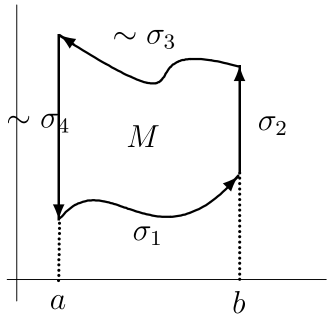
Obsérvese que para una región de tipo I) la frontera se recorre en sentido positivo mediante la curva cerrada simple regular a trozos $\boldsymbol{\gamma} = \sigma_1 \vee \sigma_2 \vee (\sim \sigma_3) \vee (\sim \sigma_4)$.

i) $\sigma_1(t) = (t, f_1(t)), \quad a \leq t \leq b.$

ii) $\sigma_2(t) = (b, t), \quad f_1(b) \leq t \leq f_2(b).$

iii) $\sigma_3(t) = (t, f_2(t)), \quad a \leq t \leq b.$

iv) $\sigma_4(t) = (a, t), \quad f_1(a) \leq t \leq f_2(a).$



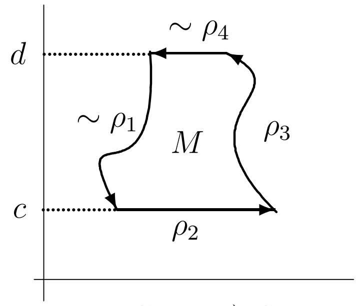
Análogamente, para una región de tipo II) la frontera se recorre en sentido positivo mediante la curva cerrada simple, regular a trozos $\boldsymbol{\gamma} = (\sim \rho_1) \vee \rho_2 \vee (\rho_3) \vee (\sim \rho_4)$.

i) $\rho_1(t) = (g_1(t), t), \quad c \leq t \leq d.$

ii) $\rho_2(t) = (t, c), \quad g_1(c) \leq t \leq g_2(c).$

iii) $\rho_3(t) = (t, g_2(t)), \quad c \leq t \leq d.$

iv) $\rho_4(t) = (t, d), \quad g_1(d) \leq t \leq g_2(d).$



Teorema 13.28 (Versión elemental del teorema de Greeen) *Sean $P, Q : \Omega \to \mathbb{R}$ funciones continuas en un abierto $\Omega \subset \mathbb{R}$, tales que las derivadas parciales D_1Q, D_2P existen y son continuas en todo Ω. Si $M \subset \Omega$ es una región de Green que simultáneamente es de tipo de tipo I) y de tipo II) se verifica*

$$\int_M (D_1Q - D_2P)dxdy = \int_{\partial M} Pdx + Qdy$$

donde la frontera ∂M se supone orientada positivamente.

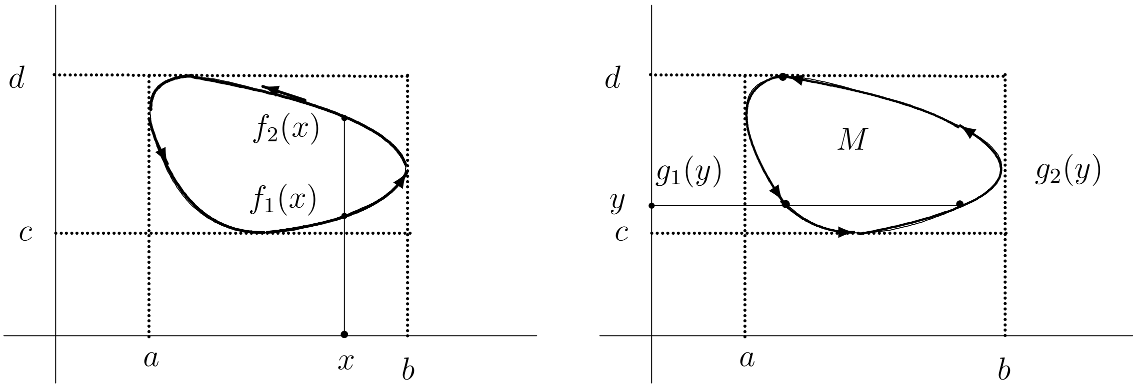
Dem: Utilizando la descripción de M como región de tipo I) se probará la igualdad

$$-\int_M D_2 P dxdy = \int_{\partial M} P dx \qquad \text{(I)}$$

Análogamente, usando la descripción de M como región de tipo II) resultará

$$\int_M D_1 Q dxdy = \int_{\partial M} Q dy, \qquad \text{(II)}$$

y sumando miembro a miembro las dos igualdades se obtendrá el resultado. Bastará hacer con detalle la prueba de (I) pues la prueba de (II) es análoga.



Si M es de tipo I), utilizando la parametrización de ∂M descrita anteriormente para las regiones de este tipo resulta

$$\int_{\partial M} P dx = \int_{\sigma_1} P dx + \int_{\sigma_2} P dx - \int_{\sigma_3} P dx - \int_{\sigma_4} P dx =$$

$$\int_{\sigma_1} P dx - \int_{\sigma_3} P dx = \int_a^b P(t, f_1(t))dt - \int_a^b P(t, f_2(t))dt$$

Por otra parte, utilizando el teorema de Fubini y el teorema fundamental del cálculo

$$\iint_M D_2 P dxdy = \int_a^b dx \int_{f_1(x)}^{f_2(x)} D_2 P dy =$$

$$= \int_a^b [P(x, f_2(x)) - P(x, f_1(x))]dx = -\int_{\partial M} P dx$$

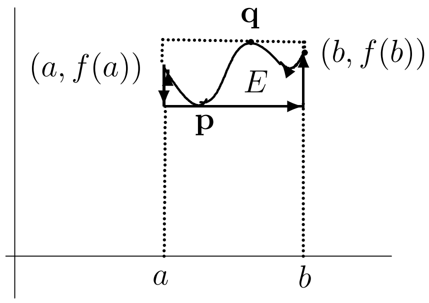
■

La versión elemental del teorema de Green que acabamos de demostrar se aplica en particular a los rectángulos $M = [a,b] \times [c,d]$ y esto será la clave para la demostración cuando M es un recinto que sólo se supone de tipo I (o de tipo II).

Antes de emprender la demostración de este resultado conviene hacer algunas observaciones preliminares que recogemos en forma de lemas

Lema 13.29 *Sea* $E = \{(x, y) : x \in [a, b],\ m \leq y \leq f(x)\}$*, donde* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *es regular a trozos y* $m = \inf\{f(t) : t \in [a, b]\}$*. Entonces* $Long(\partial E) \leq 4 Long(\boldsymbol{\gamma})$ *donde* $\boldsymbol{\gamma}(t) = (t, f(t))$*,* $t \in [a, b]$*.*

Dem: ∂E está formado por cuatro trozos: Dos segmentos verticales, un segmento horizontal y el camino $\boldsymbol{\gamma}$. Basta ver que los tres segmentos tienen longitudes menores o iguales que Long$(\boldsymbol{\gamma})$.



La longitud del segmento horizontal es $b - a$ y teniendo en cuenta que $\boldsymbol{\gamma}$ pasa por $(a, f(a))$ y $(b, f(b))$ resulta $b - a \leq$ Long$(\boldsymbol{\gamma})$.

Por otra parte, si $M = \max\{f(t) : t \in [a, b]\}$, la longitud de cada segmento vertical es menor o igual que $\leq M - m$. Como existen $\alpha, \beta \in [a, b]$ con $m = f(\alpha)$ y $M = f(\beta)$, y el camino $\boldsymbol{\gamma}$ pasa por $\mathbf{p} = (\alpha, m)$ y $\mathbf{q} = (\beta, M)$ resulta

$$M - m \leq \|p - q\|_2 \leq \text{Long}(\boldsymbol{\gamma})$$

$\blacksquare$.

Lema 13.30 *En las condiciones del lema 13.29 si la forma diferencial*

$$\omega = P\ dx + Q\ dy$$

está definida y es continua en un abierto $\Omega \supset \partial E$*, se verifica*

$$\left| \int_{\partial E} \omega \right| \leq M Long(\partial E)$$

donde

$$M = \sup\{\|\mathbf{F}(x, y) - \mathbf{F}(s, t)\|_2 : (x, y), (s, t) \in \partial E\}$$

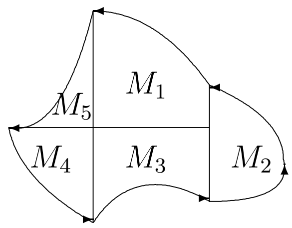
es la oscilación sobre ∂E *de* $\mathbf{F} = (P, Q)$*.*

Dem: Fijado un punto $(x_0, y_0) \in E$, como la forma diferencial constante $\omega_0 = P(x_0, y_0)dx + Q(x_0, y_0)dy$ es exacta, se cumple $\int_{\partial E} \omega_0 = 0$, y utilizando la desigualdad 13.6 se obtiene

$$\left| \int_{\partial E} \omega \right| = \left| \int_{\partial E} (\omega - \omega_0) \right| \leq M\text{Long}(\partial E)$$

■

La siguiente observación, que se aplicará varias veces durante la prueba del teorema 13.31, también es útil en la práctica para justificar que la fórmula de Green es válida para una región concreta. Sea M una región que se puede descomponer, sin solapamiento, en un número finito de regiones M_j, $1 \le j \le m$, para cada una de las cuales vale la fórmula de Green.



Se supone que la descomposición tiene la propiedad de que la curva orientada ∂M se deduce de las curvas orientadas ∂M_j efectuando las cancelaciones de los trozos de estas curvas que intervienen dos veces, pero con orientaciones opuestas. Entonces es inmediato que la fórmula de Green también se verifica para la región M.

Teorema 13.31 (Teorema de Green para regiones de tipo I) *Sean $P, Q : \Omega \to \mathbb{R}$ funciones continuas en un abierto $\Omega \subset \mathbb{R}$, en el que existen y son continuas las derivadas parciales D_1Q, D_2P. Si $M \subset \Omega$ es una región de tipo I o de tipo II se verifica*

$$\int_M (D_1Q - D_2P)dxdy = \int_{\partial M} Pdx + Qdy$$

donde ∂M se supone con la orientación positiva.

Dem: Bastará hacer la prueba para regiones de tipo I

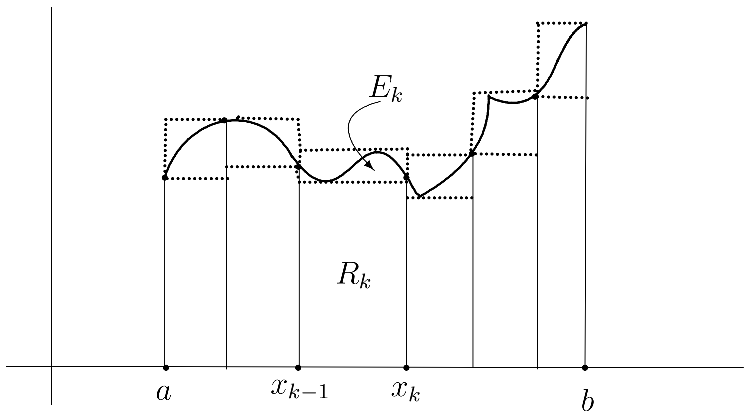
$$M = \{(x, y) : x \in [a, b],\ g(x) \le y \le f(x)\}$$

donde f y g son regulares a trozos (la prueba para regiones de tipo II es similar.) Consideraremos primero el caso en que una de las funciones que intervienen en la definición de M es constante; Si suponemos que g es la función constante 0, se tendrá

$$M = \{(x, y) : x \in [a, b],\ 0 \le y \le f(x)\}$$

Sea $L = \text{Long}(\boldsymbol{\gamma})$ donde $\boldsymbol{\gamma}(t) = (t, f(t))$, $t \in [a, b]$. Utilizando la sobreyectividad de la función abscisa curvilínea $v(t) = V(\boldsymbol{\gamma}, [a, t])$ podemos obtener una subdivisión $p_n = (t_0 < t_1 < \cdots t_n)$ de $[a, b]$ tal que todos los trozos $\boldsymbol{\gamma}_k = \boldsymbol{\gamma}|_{[x_{k-1}, x_k]}$ tienen la misma longitud $\text{Long}(\boldsymbol{\gamma}_k) = L/n$. Obsérvese que $x_k - x_{k-1} \le L/n$ luego $\|p_n\| \le L/n$. Entonces, dado $\epsilon > 0$ existe un $n \in \mathbb{N}$ que cumple

$$\int_a^b f(x)dx - s(f, p_n) < \epsilon$$



Si $R_k = [t_{k-1}, t_k] \times [m_k, M_k]$, con $m_k = \inf\ f[t_{k-1,}t_k])$ y $M_k = \sup\ f[t_{k-1}, t_k]$, la última desigualdad se traduce en los siguientes términos

$$\text{Área}(M) - \sum_{k=1}^{n} \text{Área}(R_k) < \epsilon$$

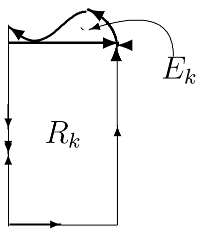
La fórmula de Green es cierta para rectángulos, y en virtud de la observación previa al enunciado del teorema, también lo es para la región $M_\epsilon = \bigcup_{k=1}^n R_k$.

$$\int_{M_\epsilon} (D_1Q - D_2P)dxdy = \int_{\partial M_\epsilon} Pdx + Qdy$$

Como $\text{Área}(M \setminus M_\epsilon) = \text{Área}(M) - \sum_{k=1}^n \text{Área}(R_k) < \epsilon$ resulta

$$\left| \int_M (D_1Q - D_2P)dxdy - \int_{M_\epsilon} (D_1Q - D_2P)dxdy \right| \leq K\text{Área}(M \setminus M_\epsilon) \leq K\epsilon$$

donde $K > 0$ es el máximo de la función continua $|D_1Q - D_2P|$ sobre el compacto M.



En virtud del lema 13.29, cada $E_k = \{(x, y) : x \in [t_{k-1}, t_k],\ m_k \leq y \leq f(x)\}$ cumple $\text{Long}(\partial E_k) < 4L/n$ luego $\text{diam}(E_k) \leq 4\sqrt{2}L/n$. En virtud de la continuidad uniforme de $\mathbf{F} = (P, Q)$ sobre el compacto M, tomando n suficientemente grande podemos garantizar que la oscilación de $\mathbf{F}$ sobre cada E_k es menor que ϵ y aplicando el lema 13.30 se obtiene

$$\left| \int_{\partial E_k} \omega \right| \leq \epsilon\text{Long}(\partial E_k) \leq \epsilon 4L/n$$

Sea $G_k = \{(x,y) : x \in [x_{k-1}, x_k],\ 0 \leq y \leq f(x)\} = R_k \cup E_k$ Teniendo en cuenta las cancelaciones de la integral sobre segmentos opuestos podemos escribir

$$\int_{\partial M} \omega = \sum_{k=1}^{n} \int_{\partial G_k} \omega = \sum_{k=1}^{n} \left(\int_{\partial R_k} \omega + \int_{\partial E_k} \omega \right) = \int_{\partial M_\epsilon} \omega + \sum_{k=1}^{n} \int_{\partial E_k} \omega$$

y se obtiene

$$\left| \int_{\partial M} \omega - \int_{\partial M_\epsilon} \omega \right| \leq \sum_{k=1}^{n} \left| \int_{\partial E_k} \omega \right| \leq n\epsilon 4L/n = \epsilon 4L$$

Combinando la igualdad $\int_{M_\epsilon} (D_1 Q - D_2 P) dx dy = \int_{\partial M_\epsilon} P dx + Q dy$ con las dos desigualdades que hemos obtenido resulta

$$\left| \int_M (D_1 Q - D_2 P) dx dy - \int_{\partial M} \omega \right| \leq (K + 4L)\epsilon$$

y como $\epsilon > 0$ es arbitrario, la demostración ha terminado para el caso particular que hemos considerado.

Supongamos ahora que $M = \{(x,y) : a \leq x \leq b,\ g(x) \leq y \leq f(x)\}$ es de tipo I, pero con la condición adicional: $f(x) < g(x)$ para todo $x \in [a,b]$. En este caso $\mu = \text{mín}\{f(x) - g(x) : x \in [a,b]\}$ se alcanza en algún punto, luego $\mu > 0$, y en virtud de la continuidad uniforme de g sobre $[a,b]$ existe $\delta > 0$ tal que todo par $s, t \in [a,b]$ con $|s - t| < \delta$ cumple $-\mu < g(s) - g(t) < \mu$.

Entonces, para una subdivisión $(a = x_0 < x_1 < \cdots < x_m = b)$ que cumpla la condición $\text{máx}\{x_k - x_{k-1} : 1 \leq k \leq m\} < \delta$ se verifica

$$c_k = \text{máx}\{g(t) : t \in [x_{k-1}, x_k]\} \leq \text{mín}\{f(t) : t \in [x_{k-1}, x_k]\}$$

(Efectivamente, si $s_k \in [x_{k-1}, x_k]$ es tal que $f(s_k) = \text{mín}\{f(t) : t \in [x_{k-1}, x_k]\}$, entonces para todo $t \in [x_k, x_{k-1}]$ se cumple

$$f(s_k) \geq \mu + g(s_k) = \mu + (g(s_k) - g(t)) + g(t) \geq \mu - \mu + g(t) = g(t)$$

. Ahora, si descomponemos M en las regiones

$$A_k = \{(x,y) : x \in [x_{k-1}, x_k],\ g(x) \leq y \leq c_k\}$$

$$B_k = \{(x,y) : x \in [x_{k-1}, x_k],\ c_k \leq y \leq f(x)\}$$

para las que ya hemos demostrado que se cumple la fórmula de Green, obtenemos que dicha fórmula se sigue cumpliendo para M.

Finalmente, sea M una región de tipo I sin condición adicional. Si $r > 0$ es suficientemente pequeño la región $M_r = \{(x,y) : a \leq x \leq b,\ g(x) \leq y \leq f(x) + r\}$ está contenido en Ω y cumple la condición adicional bajo la que tenemos demostrada la igualdad

$$\int_{M_r} (D_1 Q - D_2 P) dx dy = \int_{\partial M_r} P dx + Q dy$$

Es fácil ver que

$$\lim_{r \to 1} \int_{M_r} (D_1Q - D_2P)dxdy = \int_M (D_1Q - D_2P)dxdy$$

$$\lim_{r \to 1} \int_{\partial M_r} Pdx + Qdy = \int_{\partial M} Pdx + Qdy$$

(esto se deja como ejercicio) y así queda establecida la fórmula de Green para las regiones de tipo I. ■

La validez de la fórmula de Green para un recinto circular $\{(x, y) : x^2 + y^2 \leq R\}$ no se obtiene con una aplicación directa del teorema 13.31. Se puede justificar a posteriori descomponiendo el disco en tres regiones, trazando dos cuerdas paralelas al eje de abscisas, una por encima y otra por debajo del centro. Para las tres regiones se tiene demostrada la validez de la fórmula: Obsérvese que la que contiene al centro es de tipo II mientras que las otras dos (segmentos circulares) son de tipo I.

Aplicaciones del teorema de Green. La caracterización de las formas diferenciales cerradas obtenida en el teorema 13.13, bastante útil en la práctica, tiene el inconveniente de que sólo se aplica a formas diferenciales de clase C^1. Por otra parte, en la proposición 13.18 se obtuvo otra caracterización, usando una condición de distinta naturaleza, que tiene la ventaja de aplicarse a todas las formas diferenciales continuas. El teorema de Green, en su versión elemental para rectángulos, permite aclarar la relación que hay entre las condiciones que intervienen las dos caracterizaciones mencionadas. Al mismo tiempo proporciona otra demostración de una versión algo más general de la proposición 13.14, que no utiliza el teorema de derivación de integrales dependientes de un parámetro. Para demostrar el teorema 13.33 se necesita el siguiente lema que se deja como ejercicio

Lema 13.32 *Si $f : \Omega \to \mathbb{R}$ es continua en un abierto $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ y $\int_R f(x, y)dxdy = 0$ para todo rectángulo cerrado $R \subset \Omega$ entonces f es idénticamente nula.*

Teorema 13.33 *Sea $\omega(x, y) = P(x, y)dx + Q(x, y)dy$ una forma diferencial definida y continua en un abierto $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ tal que en todo punto $(x, y) \in \Omega$ las derivadas parciales $D_2P(x, y)$, $D_1Q(x, y)$ existen y son continuas. Entonces son equivalentes*

a) $D_2P(x, y) = D_1Q(x, y)$ para todo $(x, y) \in \Omega$.

b) $\int_{\partial R} \omega = 0$ para cada rectángulo $R \subset \Omega$.

c) ω es cerrada.

Si Ω es simplemente conexo, también es equivalente

d) ω es exacta.

Dem: a) $\Rightarrow$ b) es consecuencia inmediata del teorema de Green en su versión elemental para rectángulos.
b $\Rightarrow$ a) se obtiene combinando el teorema de Green con el lema 13.32 aplicado a la función $f = D_2P - D_1Q$. El resto de las afirmaciones del enunciado han sido probadas anteriormente. ■

El siguiente corolario proporciona una nueva demostración, basada en el teorema de Green, de un resultado obtenido en el capítulo 6.

Corolario 13.34 *Sea $f : \Omega \to \mathbb{R}$ una función de clase $C^1(\Omega)$ tal que en todo punto $(x, y) \in \Omega$ existen y son continuas las derivadas parciales $D_{21}f(x, y)$, $D_{12}f(x, y)$. Entonces $D_{21}f(x, y) = D_{12}f(x, y)$ para todo $(x, y) \in \Omega$.*

Dem: Basta aplicar el teorema anterior a la forma diferencial $df(x, y) = D_1f(x, y)dx + D_2f(x, y)dy$. ■

El teorema de Green se aplica tanto para el cálculo de integrales curvilíneas, (transformándolas en integrales dobles) como para el cálculo de integrales dobles (transformándolas en integrales curvilíneas). En particular se puede aplicar para calcular áreas:

Proposición 13.35 *Sea $M \subset \mathbb{R}^2$ una región de Green y $\boldsymbol{\gamma}(t) = (x(t), y(t))$, $t \in [a, b]$ un camino regular a trozos que recorre la frontera ∂M, con la orientación positiva. Entonces*

$$\text{Área}(M) = \frac{1}{2}\int_{\gamma} xdy - ydx = \int_a^b (y'(t)x(t) - x'(t)y(t))dt$$

Dem: Basta aplicar el teorema de Green con $P(x, y) = -y/2$, $Q(x, y) = x/2$. ■

13.4. Ejercicios resueltos

Ejercicio 13.36 *Estudie si la forma diferencial* $\omega(x, y) = \dfrac{-2xy}{x^4 + y^2}dx + \dfrac{x^2}{x^4 + y^2}dy$ *es cerrada o exacta en el abierto $\Omega = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$. Calcule $\int_\gamma \omega$, donde γ es un camino regular a trozos en Ω, de origen $(-a, 0)$ y extremo $(a, 0)$.*

solución

Como las funciones

$$P(x, y) = \frac{-2xy}{x^4 + y^2}, \qquad Q(x, y) = \frac{x^2}{x^4 + y^2}$$

son de clase $C^1(\Omega)$ y $D_2P(x, y) = D_1Q(x, y)$ para todo $(x, y) \in \Omega$ podemos afirmar que la forma diferencial es cerrada en Ω. Obsérvese que Ω no es estrellado, de modo que sólo podemos asegurar que $\omega|_G$ es exacta sobre cada abierto estrellado $G \subset \Omega$.

En particular, sobre el abierto $A = \{(x, y) : x > 0\}$, la restricción $\omega|_A$ es exacta y es fácil encontrar una primitiva f de $\omega|_A$: Buscamos una función diferenciable $f : A \to \mathbb{R}$, que verifique $D_1 f(x, y) = P(x, y)$, $D_2 f(x, y) = Q(x, y)$. Para cada $x > 0$ la función parcial

$$y \to Q(x, y) = \frac{x^2}{x^4 + y^2}$$

tiene primitivas inmediatas. Son las funciones de la forma $\operatorname{Arctg}(y/x^2) + \varphi(x)$ donde $\operatorname{Arctg} : \mathbb{R} \to (-\pi/2, \pi/2)$ es la rama principal de la función multivaluada arc tg, y φ es una función derivable que hay que se determinar imponiendo la condición

$$P(x, y) = \frac{\partial}{\partial x}\big(\operatorname{Arctg}(y/x^2) + \varphi(x)\big)$$

es decir

$$\frac{-2xy}{x^4 + y^2} = \frac{-2xy}{x^4 + y^2} + \varphi'(x)$$

Se concluye que φ es constante y con ello que $f(x, y) = \operatorname{Arctg}(y/x^2)$ es una primitiva de $\omega|_A$. Se aprecia que la primitiva f, definida inicialmente en A, se puede extender una primitiva F definida en Ω:

$$F(x, y) = \operatorname{Arctg}(y/x^2) \text{ si } x \neq 0;$$

$$F(0, y) = -\pi/2 \text{ si } y < 0; \quad F(0, y) = \pi/2 \text{ si } y > 0.$$

Es fácil comprobar que en cada punto de la forma $(0, b)$, con $b \neq 0$, la función F tiene derivadas parciales, $D_1F(0, b) = 0 = P(0, b)$, $D_2F(0, b) = 0 = Q(0, b)$, y que las funciones $D_1F = P$, $D_2F = Q$ son continuas en dicho punto. Por lo tanto F es de clase $C^1(\Omega)$ y $dF = \omega$.

Como la forma diferencial ω es exacta, la integral $\int_\gamma \omega$ no depende del camino regular a trozos γ en Ω de origen $(-a, 0)$ y extremo $(a, 0)$. Para calcular su valor podemos elegir un camino particular con el que los cálculos sean sencillos. Por ejemplo un camino poligonal formado por tres segmentos de lados paralelos a los ejes que pase por los puntos $(-a, 0)$, $(-a, 1)$, $(a, 1)$, $(a, 0)$, en este orden. Con este camino se obtiene fácilmente que $\int_\gamma \omega = 0$.

NOTA: También se puede razonar de modo alternativo comenzando con el cálculo de las primitivas de la función de una variable $x \to P(x, y)$ que para $y > 0$ son de la forma

$$-\operatorname{Arctg}(x^2/y) + \psi(y)$$

donde ψ es una función derivable que queda determinada por la condición

$$Q(x, y) = \frac{\partial}{\partial y}\big(-\operatorname{Arctg}(x^2/y) + \psi(y)\big)$$

Ahora también se obtiene que la función ψ es constante y se llega a que $g(x, y) = -\operatorname{Arc\,tg}(x^2/y)$ es una primitiva de $\omega|_B$ en el abierto $B = \{(x, y) : y > 0\}$. Esta primitiva g, definida inicialmente en B se puede extender a una primitiva G definida en todo Ω mediante la fórmula

$$G(x,y) = -\mathrm{Arctg}(x^2/y) \text{ si } y > 0; \quad G(x,y) = -\mathrm{Arctg}(x^2/y) - \pi \text{ si } y < 0;$$

$$G(x,0) = -\pi/2$$

Se deja al cuidado del lector la comprobación de que G también es una primitiva de ω clase $C^1(\Omega)$. Como Ω es conexo y $F(1,0) - G(1,0) = \pi/2$ podemos afirmar que $F(x,y) - G(x,y) = \pi/2$ para todo $(x,y) \in \Omega$. ∎

Ejercicio 13.37 *Sea $f : \Omega \to \mathbb{R}$ de clase C^1 en $\Omega = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. Demuestre que la forma diferencial $\omega(x,y) = yf(x,y)dx - xf(x,y)dy$ es cerrada si y sólo si la función $r^2 f(r\cos\theta, r\,\mathrm{sen}\,\theta)$ no depende de r.*

En el caso particular $f(x,y) = x^2/(x^2+y^2)^2$ justifique que ω no tiene primitiva en Ω pero tiene primitiva en $A = \mathbb{R}^2 \setminus \{(x,0) : x \leq 0\}$.

Sea g la primitiva de ω en A determinada por $g(1,0) = 0$. Calcule $g(rcos\theta, r\,\mathrm{sen}\,\theta)$ donde $r > 0$ y $-\pi < \theta < \pi$.

SOLUCIÓN

Las funciones $P(x,y) = yf(x,y)$, $Q(x,y) = -xf(x,y)$ son de clase C^1 luego la forma diferencial $\omega(x,y) = P(x,y)dx + Q(x,y)dy$ es cerrada si y sólo si $D_2P = D_1Q$ es decir $2f(x,y) + xf_x(x,y) + yf_y(x,y) = 0$. Con el cambio de variable a coordenadas polares la condición anterior se expresa en la forma $2F(r,\theta) + rF_r(r,\theta) = 0$ donde $F(r,\theta) = f(r\cos\theta, r\,\mathrm{sen}\,\theta)$. Multiplicando por $r > 0$ resulta la condición

$$0 = 2rF(r,\theta) + r^2F_r(r,\theta) = \frac{d}{dr}[r^2F(r,\theta)]$$

que equivale a que $r^2F(r,\theta)$ no depende de r.

En el caso particular $f(x,y) = x^2/(x^2+y^2)^2$ se comprueba fácilmente que la circunferencia $C(t) = (\cos t, \mathrm{sen}\,t)$, $t \in [0,2\pi]$ proporciona una integral no nula $\int_C \omega \neq 0$, luego ω no es exacta en Ω. Sin embargo, como A es estrellado, se puede asegurar que $\omega|_A$ es exacta. Si g es la primitiva de ω en A que se anula en $(0,1)$ para calcular $g(r\cos\theta, r\sin\theta)$ basta calcular la integral curvilínea de ω a lo largo de cualquier camino regular a trozos de origen $(1,0)$ y extremo $(r\cos\theta, r\,\mathrm{sen}\,\theta)$. Tomamos el camino compuesto del segmento σ de origen $(1,0)$ y extremo $(r,0)$, seguido de un arco del circunferencia γ de origen $(r,0)$ y extremo $(r\cos\theta, r\,\mathrm{sen}\,\theta)$, contenido en A: $\gamma(t) = (r\cos t\theta, r\,\mathrm{sen}\,t\theta)$, $t \in [0,1]$. Este camino regular a trozos conduce al valor $g(r\cos\theta, r\,\mathrm{sen}\,\theta) = \int_\sigma \omega + \int_\gamma \omega$. Es inmediato que $\int_\sigma \omega = 0$, luego $g(r\cos\theta, r\,\mathrm{sen}\,\theta) = \int_\gamma \omega = -\int_0^\theta \cos^2 t dt = \cdots$. ∎

Ejercicio 13.38 *Calcule la integral curvilínea $\displaystyle\int_C \omega$ donde*

$$\omega(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}dx + y[xy + \log(x + \sqrt{x^2+y^2})]dy$$

y C es el borde de $M = \{(x,y) : 0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq x,\ x^2+y^2 \geq 1\}$, orientado en sentido positivo.

SOLUCIÓN

Las funciones $P(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$, $Q(x,y) = y(xy + \log(x + \sqrt{x^2+y^2}))$ son de clase C^1 en $\Omega = \{(x,y) : x > 0\}$ y $M \subset \Omega$ es una región simple

$$M = \{(x,y) : \alpha \leq x \leq 1,\ \sqrt{1-x^2}^{x}\} \quad \text{con} \quad \alpha = \sqrt{2}/2$$

Según la versión elemental del teorema de Green,

$$\int_C \omega = \int_M [Q_x(x,y) - P_y(x,y)]dxdy = \int_M y^2 dxdy = \int_\alpha^1 dx \int_{\sqrt{1-x^2}}^x y^2 dy =$$

$$= \frac{1}{3}\int_\alpha^1 [x^3 - (1-x^2)^{3/2}]dx = \frac{1}{12}(1-\alpha^4) - \frac{1}{3}\beta$$

donde

$$\alpha = \sqrt{2}/2; \quad \beta = \int_\alpha^1 (1-x^2)\sqrt{1-x^2}dx = \int_0^{\pi/4} (\operatorname{sen} s)^4 ds = \frac{3\pi - 4}{16}$$

luego $I = (5-3\pi)/48$. ■

13.5. Ejercicios propuestos

♢ **13.5.1** *Obtenga la forma canónica de las siguientes formas diferenciales:*

a) $\omega = d(f^2) - 3dg$, *donde* $f(x, y) = \sqrt{xy}$, $g(x, y) = (x + 2y)\log(x^2 + y^2)$ *se suponen definidas en* $\Omega = \{(x, y) : x > 0, y > 0\}$.

b) $x\,\omega(x, y) + \cos y\; df(x, y)$, *donde* $\omega(x, y) = e^y\, dx + dy/x$, $f(x, y) = \operatorname{sen}\sqrt{x + y^2}$, *se suponen definidas en* $\Omega = \{(x, y) : x > 0\}$.

c) $d\left(\sum_{i\neq j} x_i x_j\right)$.

♢ **13.5.2** *Sea* $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2 \cdots \mathbf{u}_n\}$ *una base de* $\mathbb{R}^n$ *y* $\{d\alpha_1, d\alpha_2, \cdots d\alpha_n\}$ *su base dual en* $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$. *Obtenga el campo vectorial asociado a la forma diferencial* $\omega = \sum_{j=1}^n A_j d\alpha_j$

♢ **13.5.3** *Calcule las siguientes integrales curvilineas*

a) $\int_\gamma \operatorname{sen} z\; dx + \cos z\; dy - \sqrt[3]{xy}\; dz$ *donde* $\gamma : [0, 1] \to \mathbb{R}^3$ *es el camino definido por* $\gamma(t) = (\cos^3 t,\ \operatorname{sen}^3 t,\ t)$, $t \in [0, 7\pi/2]$.

b) $\int_\gamma y^2 \cos(xy^2)\; dx + 2xy\cos(xy^2)\; dy$ *donde* $\gamma : [0, 1] \to \mathbb{R}^2$ *es el camino definido por* $x(t) = t^4$, $y(t) = \operatorname{sen}^3(\pi t/2)$.

♢ **13.5.4** *Compruebe que el campo de vectores* $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$,

$$F(x, y) = (3x^2 + 2y \operatorname{sen} 2x,\ 2(\sin x)^2 + 6y^2)$$

es un gradiente y obtenga un potencial del campo.

♢ **13.5.5** *Demuestre que existe una función diferenciable* $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *que verifica*

$$D_1F(x, y) = e^{x^2-y^2} \operatorname{sen}(2xy), \quad D_2F(x, y) = e^{x^2-y^2} \cos(2xy)$$

Obtenga una fórmula integral para la función F.

♢ **13.5.6** *Sea* $\omega(x, y) = P(x, y)dx + Q(x, y)dy$, *donde*

$$P(x, y) = Q(y, x) = \frac{(x^2 + y^2)(3x^2 - y^2)}{x^2 y}$$

Compruebe que la forma diferencial es exacta en $\Omega = \{(x, y) : x > 0, y > 0\}$ *y obtenga una primitiva. Calcule* $\int_\gamma \omega$ *donde* $\gamma(t) = (t + \cos 3t,\ 1 + \operatorname{sen}^2 t)$, $0 \le t \le \pi/2$.

♢ **13.5.7** *Compruebe que la forma diferencial*

$$\omega(x, y, z) = 2xy\; dx + (x^2 + \log z)\; dy + (y/z)\; dz$$

es exacta en $\Omega = \{(x, y, z) : z > 0\}$ *y obtenga una primitiva.*

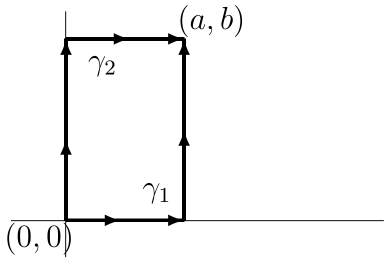
♢ **13.5.8** *Considerando la integral curvilinea de*

$$\omega(x.y) = e^{x^2-y^2} \operatorname{sen}(2xy)\ dx + e^{x^2-y^2} \cos(2xy)\ dy$$

a lo largo de los caminos poligonales γ_1, γ_2, *que se indican en la figura, cacule la integral impropia*

$$J = \int_0^{+\infty} e^{-t^2} \cos(2at)\ dt$$

en función de $I = \int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt$. *(*$a > 0,\ b > 0$*).*



♢ **13.5.9** *Sea* $\omega(x, y) = P(x, y)\ dx + Q(x, y)\ dy$, *donde*

$$P(x, y) = \frac{e^{-y}}{x^2 + y^2}(x \operatorname{sen} x - y \cos x); \quad Q(x, y) = \frac{e^{-y}}{x^2 + y^2}(x \cos x + y \operatorname{sen} x)$$

a) Compruebe que ω *es una forma diferencial cerrada en* $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$.

b) Calcule el valor de la integral $\int_\gamma \omega$ *donde* γ *es un camino cerrado que recorre la frontera de* $K(\epsilon, R) = \{(x, y) : \epsilon^2 \leq x^2 + y^2 \leq R^2, y \geq 0\}$.

c) Deduzca de b), tomando limites cuando $\epsilon \to 0$, $R \to +\infty$, *el valor de la integral impropia*

$$\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x}\ dx = \frac{\pi}{2}$$

♢ **13.5.10** *En cada uno de los siguientes casos, compruebe que el campo de vectores:* $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ *es un gradiente y obtenga una función potencial del campo:*

a) $F(x, y, z) = (2xyz + z^2 - 2y^2 + 1,\ x^2z - 4xy,\ x^2y + 2xz - 2)$.

b) $F(x, y, z) = (2xyze^{x^2},\ ze^{x^2} + 2ye^z,\ y^2e^z + ye^{x^2})$.

c) $F(x, y, z) = (e^{-xy}(y - xy^2 + yz),\ e^{-xy}(x - x^2y + xz),\ e^{-xy})$.

♢ **13.5.11** *Si* $g : U \to \mathbb{R}$ *es continua en un abierto* $U \subset \mathbb{R}$, *demuestre que la forma diferencial*

$$\omega(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^{n} g(\|\mathbf{x}\|_2) x_j\ dx_j$$

es exacta en el abierto $\Omega = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \|\mathbf{x}\|_2 \in U\}$, *y obtenga una primitiva.*

Sea $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. *Justifique que el campo de vectores*

$$F(x, y, z) = \frac{1}{r^3}(x, \ y, \ z)$$

admite función potencial en $\mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}$.

♢ **13.5.12** *Si* $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ *es diferenciable, demuestre que la forma diferencial*

$$\omega(x, y, z) = xf(x, y, z) \ dx + yf(x, y, z) \ dy + zf(x, y, z) \ dz$$

es exacta si y sólo si f *es constante sobre cada esfera centrada en* $(0, 0, 0)$.

♢ **13.5.13** *El campo de fuerzas ejercido por una masa* M *colocada en* $\mathbf{0} = (0, 0, 0)$ *sobre una masa* m *colocada en* $\mathbf{p} = (x, y, z) \neq (0, 0, 0)$, *viene dado por*

$$\mathbf{F}(x, y, z) = -\frac{GMm}{r^3}(x, y, z)$$

donde G *es una constante y* $r = \|\mathbf{p}\|_2 = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

Demuestre que el trabajo realizado por este campo de fuerzas cuando la partícula de masa m *se mueve desde el punto* $\mathbf{p}_1 = (x_1, y_1, z_1)$ *hasta el punto* $\mathbf{p}_2 = (x_2, y_2, z_z)$, *(a lo largo un camino regular a trozos que no pasa por* $\mathbf{0}$*) sólo depende de* $r_1 = \|\mathbf{p}_1\|_2$ *y* $r_2 = \|\mathbf{p}_2\|_2$.

♢ **13.5.14** *Una partícula de masa* m *se mueve en el espacio* $\mathbb{R}^3$ *a lo largo de una curva* $\boldsymbol{\gamma}$ *bajo la acción de un campo de fuerzas* $\mathbf{F}$.

Su energía cinética en el instante t *es* $e(t) = \frac{1}{2}m\mathbf{v}(t)^2$ *donde* $\mathbf{v}(t)$ *es la velocidad de la partícula en el instante* t. *Demuestre que la variación de la energía cinética en un intervalo de tiempo* $[t_0, t_1]$ *es igual al trabajo realizado durante dicho intervalo.*

Si se supone que el campo de fuerzas $\mathbf{F}$ *tiene una función potencial* f, *se dice que* $-f(\mathbf{x})$ *es la energía potencial en el punto* $\mathbf{x}$. *La energía mecánica de la particula en el instante* t *es la suma de la energía cinética y de la energía potencial, es decir* $E(t) = e(t) - f(\gamma(t))$. *Demuestre la ley de conservación de la energía mecánica: Si una partícula se mueve sometida a un campo de fuerzas conservativo entonces la energía mecánica* $E(t)$ *permanece constante.*

♢ **13.5.15** *Utilice el teorema de Green para hallar el área de los recintos planos que se indican*

i) *Recinto encerrado por la elipse* $(x/a)^2 + (y/2)^2 = 1$.

ii) *Recinto encerrado por la hipocicloide* $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$.

iii) *Un lazo de la rosa de cuatro hojas de ecuación (en polares)* $r = 3 \operatorname{sen} 2t$.

iv) *Recinto limitado por el eje de abscisas y un arco de cicloide*

$$x(t) = a(t - \cos t); \quad y(t) = a(1 - \operatorname{sen} t); \quad 0 \leq t \leq 2\pi; \quad (a > 0)$$

♢ **13.5.16** *Utilice el teorema de Green para deducir la fórmula que da el área de una region plana descrita en coordenadas polares:*

$$M = \{(r\cos t, r\,\mathrm{sen}\, t) : \alpha < t < \beta, 0 < r < f(t)\}$$

donde f se supone de clase C^1.

♢ **13.5.17** *Enuncie y demuestre la versión del teorema de Green para una region de la forma $M = \overline{B(0,R)} \setminus (B(a,r) \cup B(-a,r))$ donde $a + r < R$.*

♢ **13.5.18** *Sea $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1, x^2 + y^2 - 2x \geq 0, x \geq 0, y \geq 0\}$ y γ el borde de B orientado positivamente. Calcule:*

$$\int_\gamma y^2 dx - x^2 dy$$

(Nota: La solución se puede dar en términos de $S =$ área(B)).