Capítulo 3

Límites y continuidad

Límite funcional; el problema de su existencia. Continuidad en un punto y continuidad global. Funciones continuas en conjuntos compactos. Existencia de extremos absolutos de funciones reales continuas. Espacios normados de dimensión finita. Norma de una aplicación lineal continua. Continuidad uniforme y convergencia uniforme.

Los fundamentos del Análisis Matemático se basan esencialmente en las nociones de límite y continuidad, a las que está dedicado este capítulo. La continuidad se estudia con detalle en los cursos de topología y aquí el estudio se centra en los resultados, básicos para la teoría de funciones, referentes a las propiedades de las funciones continuas sobre los conjuntos compactos. Como aplicación se demuestra que en los espacios vectoriales de dimensión finita todas las normas son equivalentes. La caracterización de los espacios normados de dimensión finita como aquellos para los que sus bolas cerradas son compactas es un resultado interesante que se ofrece como material de carácter complementario.

Como la noción de límite interviene de manera esencial en la mayor parte de las definiciones y resultados fundamentales del Análisis Matemático, en este capítulo se consideran algunos aspectos que no se suelen enseñar en los cursos de topología general: Técnicas de cálculo de límites; condición de Cauchy para el límite funcional; utilización del límite para extender aplicaciones uniformemente continuas; papel de la convergencia uniforme en el problema del intercambio de límites. Para hacer alguna propaganda de los resultados que conciernen a este problema basta decir que la demostración de teoremas importantes del Análisis Matemático (tanto de este curso como de los posteriores) se reducen en última instancia a conseguir cambiar el orden en dos procesos iterados de paso al límite.

En el apéndice C.1 se expone el problema de intercambio de límites desde un punto de vista general haciendo intervenir la noción de límite a través de una base de filtro. Esta noción general de límite engloba a las diferentes nociones de límite que intervienen en la teoría de funciones.

3.1. Definiciones y resultados básicos

Definición 3.1 *Sean (E,d), (F,ρ) espacios métricos, $M \subset E$, y $\mathbf{a} \in M'$ un punto de acumulación de M (que puede pertenecer o no a M). Una aplicación $\mathbf{f} : M \to F$ tiene límite $\mathbf{b} \in F$, cuando $\mathbf{x}$ tiende hacia $\mathbf{a}$, si verifica:*

Para cada $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $[\mathbf{x} \in M, \quad 0 < d(\mathbf{x},\mathbf{a}) < \delta] \Rightarrow \rho(\mathbf{f}(\mathbf{x}),\mathbf{b}) < \epsilon$

También se dice que existe el límite de $\mathbf{f}(\mathbf{x})$, cuando $\mathbf{x} \to \mathbf{a}$, y se escribe

$$\lim_{\mathbf{x} \to \mathbf{a}} \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{b}$$

Obsérvese que el límite, si existe, es único y que en la definición de límite, cuando $\mathbf{a} \in M$, no interviene el valor $\mathbf{f}(\mathbf{a})$.

Si $\mathbf{a}$ es punto de acumulación de un subconjunto $A \subset M$ y la restricción $\mathbf{f}|_A : A \to F$ tiene límite $\mathbf{b}_A$, cuando $\mathbf{x}$ tiende hacia $\mathbf{a}$, se dice que $\mathbf{b}_A$ es el límite de $\mathbf{f}(\mathbf{x})$, cuando $\mathbf{x}$ tiende hacia $\mathbf{a}$ a través del conjunto A, y se escribe

$$\lim_{\mathbf{A} \ni \mathbf{x} \to \mathbf{a}} \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{b}_A$$

Es obvio que si existe el límite $\lim_{\mathbf{x} \to a} \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{b}$ también existe $\lim_{A \ni \mathbf{x} \to \mathbf{a}} \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{b}$.

Esta observación es muy útil en la práctica para decidir que el límite no existe: Basta encontrar un conjunto $A \subset M$, con $\mathbf{a} \in A'$, a través del cual no exista el límite, o dos conjuntos $A_1, A_2 \subset M$, con $\mathbf{a} \in A'_1$, $\mathbf{a} \in A'_2$, a través de los cuales existan y sean distintos los límites.

Para estudiar la existencia de límite la tarea se simplifica cuando disponemos de un candidato a límite (un punto $\mathbf{b} \in F$ del se puede asegurar que si existe límite vale $\mathbf{b}$) con el fin de someterlo a la definición. Si a través de algún conjunto $A \subset M$ existe el límite y vale $\mathbf{b}_A$, este será el candidato a límite. Para funciones de dos variables reales hay otro método, basado en la siguiente proposición sobre límites iterados, que puede ser útil para decidir la no existencia de límite o para obtener un candidato a límite. En 3.11 y 3.12 se pueden ver ejemplos sencillos que ilustran la aplicación de estos métodos.

Proposición 3.2 *Sea $f : M \to \mathbb{R}$ una función de dos variables reales, definida en $M \supset \{(s,t) \in \mathbb{R}^2 : 0 < |s-a| < r, 0 < |t-b| < r\}$, que cumple*

i) Existe el límite doble, $\lim_{(s,t) \to (a,b)} f(s,t) = L$;

ii) Cuando $0 < |s-a| < r$, existen los límite parciales $\lim_{t \to b} f(s,t) = \alpha(s)$;

Entonces existe el límite $\lim_{s \to b} \alpha(s) = L$, es decir, existe el límite iterado

$$\lim_{s \to a} \left(\lim_{t \to b} f(s,t) \right) = \lim_{(s,t) \to (a,b)} f(s,t)$$

y vale lo mismo que el límite doble.

DEM: En $\mathbb{R}^2$ utilizamos la norma $\| \|_\infty$. Según i), dado $\epsilon > 0$, existe $0 < \delta < r$ tal que

$$0 < \text{máx}\{|s-a|, |t-b|\} < \delta \Rightarrow |f(s,t) - L| < \epsilon/2$$

Para demostrar que $\text{lím}_{s \to a} \alpha(s) = L$ basta ver que con este δ se cumple

$$0 < |s-a| < \delta \Rightarrow |\alpha(s) - L| < \epsilon$$

En efecto, si $0 < |s-a| < \delta$, en virtud de ii), existe un punto t_s, $0 < |t_s - b| < \delta$, tal que $|f(s,t_s) - \alpha(s)| < \epsilon/2$. Como $0 < \text{máx}\{|s-a|, |t_s - b|\} < \delta$, se cumple $|f(s,t_s) - L| < \epsilon/2$, luego $|\alpha(s) - L| \leq |\alpha(s) - f(s,t_s)| + |f(s,t_s) - L| \leq \epsilon/2 + \epsilon/2 = \epsilon$. ■

OBSERVACIÓN: En la proposición 3.2, si en vez de suponer ii) se supone

ii') Cuando $0 < |t-b| < r$, existen los límite parciales $\text{lím}_{s \to a} f(s,t) = \beta(t)$,

se obtiene análogamente que existe el límite $\text{lím}_{t \to b} \beta(t) = L$. Por lo tanto, si f cumple las condiciones i), ii) y ii'), entonces existen los dos límites iterados y son iguales al límite doble:

$$\text{lím}_{s \to a} (\text{lím}_{t \to b} f(s,t)) = \text{lím}_{t \to b} (\text{lím}_{s \to a} f(s,t)) = L$$

Esta observación es la base de un método muy popular para decidir que una función de dos variables no tiene límite en un punto: Cuando existen y son distintos los límites iterados

$$\text{lím}_{x \to a} (\text{lím}_{y \to b} f(x,y)), \quad \text{lím}_{y \to b} (\text{lím}_{x \to a} f(x,y))$$

se puede asegurar que $f(x,y)$ no tiene límite cuando $(x,y) \to (a,b)$.

La proposición 3.2 también proporciona un método alternativo para obtener un candidato a límite doble. Si existe alguno de los límites iterados, y vale L, este valor es candidato a límite doble. Ejemplos sencillos ponen de manifiesto el alcance limitado de esta proposición como herramienta para abordar estudio de límites de funciones de dos variables: La existencia e igualdad de los límites iterados

$$\text{lím}_{x \to a} (\text{lím}_{y \to b} f(x,y)) = \text{lím}_{y \to b} (\text{lím}_{x \to a} f(x,y))$$

no implica la existencia del límite ordinario $\text{lím}_{(x,y) \to (a,b)} f(x,y)$ (véase 3.11 a)). También puede ocurrir que exista el límite ordinario aunque no existan los límites iterados (véase 3.13).

Cuando no se dispone del candidato a límite (como ocurre al estudiar la convergencia de integrales impropias) y el espacio de llegada (F, ρ) es completo, hay un criterio de Cauchy para el límite funcional muy útil para determinar la existencia de límite, sin conocer su valor.

Teorema 3.3 *Sean* (E,d), (F,ρ) *espacios métricos y* $\mathbf{a} \in M'$ *un punto de acumulación de* $M \subset E$. *Si* (F,ρ) *es completo, la siguiente condición (de Cauchy) es necesaria y suficiente para que* $\mathbf{f} : M \to F$ *tenga límite cuando* $\mathbf{x} \to \mathbf{a}$*:*
Para cada $\epsilon > 0$ *existe* $\delta > 0$ *tal que*

$$[\mathbf{x}, \mathbf{y} \in M, \quad 0 < d(\mathbf{x}, \mathbf{a}) < \delta, \quad 0 < d(\mathbf{y}, \mathbf{a}) < \delta] \Rightarrow \rho(\mathbf{f}(\mathbf{x}), \mathbf{f}(\mathbf{y})) < \epsilon$$

Dem: Se deja al cuidado del lector la demostración de que la condición de Cauchy es necesaria para la existencia del límite (aunque (F,ρ) no sea completo). Veamos que la condición de Cauchy es suficiente cuando (F,ρ) es completo.

Como $\mathbf{a}$ es punto de acumulación de M, para cada $n \in \mathbb{N}$ existe $\mathbf{x}_n \in M$ con $0 < d(\mathbf{x}_n, \mathbf{a}) < 1/n$. La sucesión $\mathbf{f}(\mathbf{x}_n) \in F$ es de Cauchy: En efecto, dado $\epsilon > 0$, sea $\delta > 0$ el número proporcionado por la condición del enunciado. Eligiendo $m \in \mathbb{N}$ de modo que $1/m < \delta$ podemos asegurar que para $p > q \geq m$ se cumple $0 < d(\mathbf{x}_p, \mathbf{a}) < \delta$, $0 < d(\mathbf{x}_q, \mathbf{a}) < \delta$, luego $\rho(\mathbf{f}(\mathbf{x}_p), \mathbf{f}(\mathbf{x}_q)) < \epsilon$.

Como el espacio métrico (F,ρ) es completo, existe el límite $\lim_n \mathbf{f}(\mathbf{x}_n) = \mathbf{b}$, y para terminar basta ver que $\lim_{x \to \mathbf{a}} \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{b}$. Efectivamente, si $\mathbf{x} \in M$ y $0 < d(\mathbf{x}, \mathbf{a}) < \delta$, para todo $n \geq m$ se cumple $0 < d(\mathbf{x}_n, \mathbf{a}) \leq 1/n \leq 1/m < \delta$ luego $\rho(\mathbf{f}(\mathbf{x}), \mathbf{f}(\mathbf{x}_n)) < \epsilon$ y aplicando la desigualdad triangular se obtiene:

$$\rho(\mathbf{f}(\mathbf{x}), \mathbf{b}) \leq \rho(\mathbf{f}(\mathbf{x}), \mathbf{f}(\mathbf{x}_n)) + \rho(\mathbf{f}(\mathbf{x}_n), \mathbf{b}) < \epsilon + \rho(\mathbf{f}(\mathbf{x}_n), \mathbf{b})$$

Cuando $n \to +\infty$ la desigualdad $\rho(\mathbf{f}(\mathbf{x}), \mathbf{b}) < \epsilon + \rho(\mathbf{f}(\mathbf{x}_n), \mathbf{b})$, válida para todo $n \geq m$, se convierte en $\rho(\mathbf{f}(\mathbf{x}), \mathbf{b}) \leq \epsilon$. ■

Definición 3.4 *Sean* (E,d), (F,ρ) *espacios métricos y* $M \subset E$. *Una aplicación* $\mathbf{f} : M \to F$ *es continua en* $\mathbf{a} \in M$ *cuando para cada* $\epsilon > 0$ *existe* $\delta > 0$ *tal que*

$$[\mathbf{x} \in M, \quad d(\mathbf{x}, \mathbf{a}) < \delta] \Rightarrow \rho(\mathbf{f}(\mathbf{x}), \mathbf{f}(\mathbf{a})) < \epsilon$$

Se dice que $\mathbf{f}$ *es continua cuando es continua en cada punto de su dominio.*

Si $\mathbf{a} \in M'$ es claro que $\mathbf{f}$ es continua en $\mathbf{a}$ si y sólo si $\lim_{\mathbf{x} \to \mathbf{a}} \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{f}(\mathbf{a})$. Cuando $\mathbf{a}$ es punto aislado de M, toda aplicación $\mathbf{f} : M \to F$ es continua en $\mathbf{a}$.

En las condiciones de la definición 3.4 es fácil obtener la caracterización habitual de la continuidad global: $\mathbf{f}$ *es continua si y sólo si para cada abierto* $V \subset F$ *existe un abierto* $U \subset E$ *tal que* $\mathbf{f}^{-1}(V) = M \cap U$.

Por otra parte, en la situación considerada en 3.4, dado $A \subset M$, conviene distinguir entre las afirmaciones: "$\mathbf{f}$ es continua en cada $\mathbf{a} \in A$", y "$\mathbf{f}|_A$ es continua". La primera implica la segunda, pero el recíproco es falso (como se pone de manifiesto considerando $M = E = \mathbb{R}$, $A = \mathbb{Q}$, y f la función que vale 0 sobre los racionales y 1 sobre los irracionales).

En el contexto de los espacios métricos, es útil la siguiente caracterización del límite y la continuidad mediante sucesiones:

Proposición 3.5 *Sean* (E,d), (F,ρ) *espacios métricos y* $\mathbf{f} : M \to F$ *definida en* $M \subset E$. *Si* $\mathbf{a} \in M$ *(resp.* $\mathbf{a} \in M'$*), son equivalentes:*

a) $\mathbf{f}$ *es continua en* $\mathbf{a}$ *(resp. existe* $\lim_{\mathbf{x} \to \mathbf{a}} \mathbf{f}(\mathbf{x})$*).*

b) $\lim_n \mathbf{f}(\mathbf{x}_n) = \mathbf{f}(\mathbf{a})$ *para cada sucesión* $\mathbf{x}_n \in M$ *convergente hacia* $\mathbf{a}$. *(resp.* $\mathbf{f}(\mathbf{x}_n)$ *converge para cada sucesión* $\mathbf{x}_n \in M \setminus \{\mathbf{a}\}$, *convergente hacia* $\mathbf{a}$*).*

DEM: Demostramos la equivalencia de las afirmaciones sobre límites (las referentes a continuidad, que son más sencillas, se dejan al cuidado del lector).
a) $\Rightarrow$ b): Si $\mathbf{b} = \lim_{\mathbf{x} \to \mathbf{a}} \mathbf{f}(\mathbf{x})$ es inmediato que $\mathbf{f}(\mathbf{x}_n)$ converge hacia $\mathbf{b}$ para toda sucesión $\mathbf{x}_n \in M \setminus \{\mathbf{a}\}$, convergente hacia $\mathbf{a}$.
b) $\Rightarrow$ a): Comencemos viendo que todas las sucesiones $\mathbf{x}_n \in M \setminus \{\mathbf{a}\}$ que convergen hacia $\mathbf{a}$ proporcionan el mismo límite de $\mathbf{f}(\mathbf{x}_n)$: Si $\mathbf{x}_n, \mathbf{y}_n$ son sucesiones en $M\setminus\{\mathbf{a}\}$ convergentes hacia $\mathbf{a}$, la sucesión mezclada $(\mathbf{x}_1, \mathbf{y}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{y}_2, \cdots, \mathbf{x}_n, \mathbf{y}_n, \cdots)$ también converge hacia $\mathbf{a}$ luego, por hipótesis, su imagen mediante $\mathbf{f}$ es una sucesión convergente. Como $\mathbf{f}(\mathbf{x}_n)$, $\mathbf{f}(\mathbf{y}_n)$ son subsucesiones de esta sucesión, sus límites deben ser iguales.

Para terminar demostramos, por reducción al absurdo, que el límite común $\mathbf{b}$ de las sucesiones $\mathbf{f}(\mathbf{x}_n)$ consideradas en b) es el límite de $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ cuando $\mathbf{x} \to \mathbf{a}$. En caso contrario existe $\epsilon > 0$ tal que para todo $\delta > 0$ hay un $\mathbf{x}_\delta \in M$, con $0 < d(\mathbf{x}_\delta, \mathbf{a}) < \delta$, que verifica $\rho(\mathbf{f}(\mathbf{x}_\delta), \mathbf{b}) \geq \epsilon$. Tomando δ de la forma $1/n$ encontramos una sucesión $\mathbf{x}_n \in M \setminus \{\mathbf{a}\}$, convergente hacia $\mathbf{a}$ tal que $\mathbf{f}(\mathbf{x}_n)$ no converge hacia $\mathbf{b}$, y con esta contradicción termina la demostración. ■

Hay una caracterización similar de la continuidad, mediante la conservación de puntos adherentes, que se deja como ejercicio al cuidado del lector:

Proposición 3.6 *Si (E, d), (F, ρ) son espacios métricos y $\mathbf{f} : M \to F$ está definida en $M \subset E$, se verifica:*

a) f es continua en $\mathbf{a} \in M$ si y sólo si para cada $A \subset M$ con $\mathbf{a} \in \overline{A}$ se cumple $\mathbf{f}(\mathbf{a}) \in \overline{\mathbf{f}(A)}$.

b) $\mathbf{f}$ es continua si y sólo si $\mathbf{f}(\overline{A} \cap M) \subset \overline{\mathbf{f}(A)}$ para cada $A \subset M$.

3.2. Reglas para obtener el límite y la continuidad

Las proposiciones que siguen, de carácter elemental, son útiles para obtener el límite o la continuidad de funciones concretas sin acudir a la definición. La primera de ellas pone de manifiesto que para funciones con valores en $\mathbb{R}^n$, el estudio se reduce al caso $n = 1$.

Proposición 3.7 *Sea $\mathbf{f} : M \to \mathbb{R}^n$, $\mathbf{f} = (f_1, f_2, \cdots f_n)$, definida en un subconjunto M del espacio métrico (E, d), y $\mathbf{a} \in M'$ (resp. $\mathbf{a} \in M$). Son equivalentes:*

i) Existe el límite $\lim_{\mathbf{x} \to \mathbf{a}} \mathbf{f}(\mathbf{x}) = (b_1, b_2, \cdots b_n)$, (resp. $\mathbf{f}$ es continua en $\mathbf{a}$).

ii) Para $1 \leq j \leq n$ existe $\lim_{\mathbf{x} \to \mathbf{a}} f_j(\mathbf{x}) = b_j$ (resp. f_j es continua en $\mathbf{a}$).

DEM: Si $\mathbf{b} = (b_1, b_2, \cdots b_n)$ la afirmación sobre límites es consecuencia de las desigualdades

$$|f_j(\mathbf{x}) - b_j| \leq \|\mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{b}\|_2 \leq \sum_{j=1}^{n} |f_j(\mathbf{x}) - b_j|$$

válidas para todo $j \in \{1, \cdots n\}$. (La afirmación alternativa sobre continuidad se obtiene con $\mathbf{b} = \mathbf{f}(\mathbf{a})$). ■

Proposición 3.8 *Sea* (E, d) *un espacio métrico,* $M \subset E$, $\mathbf{a} \in M'$, *y* $(F, \| \ \|)$ *un espacio normado sobre* $\mathbb{K}$ *(=* $\mathbb{R}$ *o* $\mathbb{C}$*). Dadas las funciones* $\mathbf{f}, \mathbf{g} : M \to F$, $\alpha : M \to \mathbb{K}$, *se verifica:*

a) Si $\mathbf{f}$, $\mathbf{g}$ *tienen límite cuando* $\mathbf{x} \to \mathbf{a}$, *entonces también lo tiene* $\mathbf{f} + \mathbf{g}$, *y*

$$\lim_{\mathbf{x} \to \mathbf{a}} (\mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{g}(\mathbf{x})) = \lim_{\mathbf{x} \to \mathbf{a}} \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \lim_{\mathbf{x} \to \mathbf{a}} \mathbf{g}(\mathbf{x})$$

Si las funciones $\mathbf{f}$, $\mathbf{g}$ *son continuas en* $\mathbf{a} \in M$, *también lo es* $\mathbf{f} + \mathbf{g}$.

b) Si α, $\mathbf{g}$ *tienen límite cuando* $\mathbf{x} \to \mathbf{a}$, *también lo tiene su producto* $\alpha\mathbf{g}$, *y*

$$\lim_{\mathbf{x} \to \mathbf{a}} (\alpha(\mathbf{x})\mathbf{g}(\mathbf{x})) = (\lim_{\mathbf{x} \to \mathbf{a}} \alpha(\mathbf{x})(\lim_{\mathbf{x} \to \mathbf{a}} \mathbf{g}(\mathbf{x}))$$

Si las funciones α, $\mathbf{g}$ *son continuas en* $\mathbf{a} \in M$ *también lo es* $\alpha\mathbf{g}$.

c) Si las funciones α, $\mathbf{g}$ *tienen límite cuando* $\mathbf{x} \to \mathbf{a}$ *y* $\lim_{\mathbf{x} \to \mathbf{a}} \alpha(\mathbf{x}) \neq 0$, *también tiene límite* $(1/\alpha)\mathbf{g}$ *(definida en* $M \cap B(\mathbf{a}, r)$ *para algún* $r > 0$*) y*

$$\lim_{\mathbf{x} \to \mathbf{a}} (\alpha(\mathbf{x})^{-1}\mathbf{g}(\mathbf{x})) = (\lim_{\mathbf{x} \to \mathbf{a}} \alpha(\mathbf{x}))^{-1}(\lim_{\mathbf{x} \to \mathbf{a}} \mathbf{g}(\mathbf{x}))$$

Si las funciones $\alpha, \mathbf{g}$ *son continuas en* $\mathbf{a} \in M$ *y* $\alpha(\mathbf{a}) \neq 0$, *también lo es* $\alpha^{-1}\mathbf{g}$.

d) Si la norma de F *procede de un producto escalar* $\langle \ | \ \rangle$, *y las funciones* $\mathbf{f}, \mathbf{g}$ *tienen límite cuando* $\mathbf{x} \to \mathbf{a}$, *también lo tiene el producto* $\langle \mathbf{f}(\mathbf{x}) \mid \mathbf{g}(\mathbf{x}) \rangle$, *y*

$$\lim_{\mathbf{x} \to \mathbf{a}} \langle \mathbf{f}(\mathbf{x}) \mid \mathbf{g}(\mathbf{x}) \rangle = \langle \lim_{\mathbf{x} \to \mathbf{a}} \mathbf{f}(\mathbf{x}) \mid \lim_{\mathbf{x} \to \mathbf{a}} \mathbf{g}(\mathbf{x}) \rangle$$

En particular, si las funciones $\mathbf{f}$, $\mathbf{g}$ *son continuas en* $\mathbf{a} \in M$, *también lo es el producto* $\langle \mathbf{f}(\mathbf{x}) \mid \mathbf{g}(\mathbf{x}) \rangle$.

Dem: a), b) y c) se demuestran como en el caso de las funciones reales de variable real. La demostración de d) es análoga a la de b), pero utilizando la desigualdad de Cauchy Schwarz: Sea $\mathbf{b} = \lim_{\mathbf{x} \to \mathbf{a}} \mathbf{f}(\mathbf{x})$, y $\mathbf{b}' = \lim_{\mathbf{x} \to \mathbf{a}} \mathbf{g}(\mathbf{x})$. Existe $r > 0$ tal que si $\mathbf{x} \in M$ y $0 < d(\mathbf{x}, \mathbf{a}) < r$ entonces $\|\mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{b}\| < 1$, luego $\|\mathbf{f}(\mathbf{x})\| \leq 1 + \|\mathbf{b}\|$. Si escribimos

$$\langle \mathbf{f}(\mathbf{x}) \mid \mathbf{g}(\mathbf{x}) \rangle = \langle \mathbf{f}(\mathbf{x}) \mid \mathbf{g}(\mathbf{x}) - \mathbf{b}' \rangle + \langle \mathbf{f}(\mathbf{x}) \mid \mathbf{b}' \rangle$$

basta observar que, cuando $\mathbf{x} \to \mathbf{a}$, el primer sumando de la derecha tiende hacia 0 y el segundo tiende hacia $\langle \mathbf{b} \mid \mathbf{b}' \rangle$. Esto es consecuencia de las desigualdades

i) $|\langle \mathbf{f}(\mathbf{x}) \mid \mathbf{g}(\mathbf{x}) - \mathbf{b}' \rangle| \leq \|\mathbf{f}(\mathbf{x})\| \, \|\mathbf{g}(\mathbf{x}) - \mathbf{b}'\| \leq (1 + \|\mathbf{b}\|) \, \|\mathbf{g}(\mathbf{x}) - \mathbf{b}'\|$.

ii) $|\langle \mathbf{f}(\mathbf{x}) \mid \mathbf{b}' \rangle - \langle \mathbf{b} \mid \mathbf{b}' \rangle| = |\langle \mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{b} \mid \mathbf{b}' \rangle| \leq \|\mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{b}\| \, \|\mathbf{b}'\|$.

que se cumplen cuando $\mathbf{x} \in M$, y $0 < d(\mathbf{x}, \mathbf{a}) < r$. ∎

Proposición 3.9 [Regla de la cadena] *Para* $j = 1, 2, 3$ *sea* (E_j, d_j)*, un espacio métrico y* M_j *un subconjunto de* E_j*. Sea supone que* $\mathbf{f} : M_1 \to M_2$ *tiene límite* $\mathbf{b} \in M_2$ *cuando* $\mathbf{x} \to \mathbf{a} \in M_1'$*. Si* $\mathbf{g} : M_2 \to E_3$ *es continua en* $\mathbf{b}$ *entonces existe el límite de la función compuesta*

$$\lim_{\mathbf{x} \to \mathbf{a}} \mathbf{g}(\mathbf{f}(\mathbf{x})) = \mathbf{g}(\mathbf{b})$$

Si $\mathbf{a} \in M_1$*, y* $\mathbf{f}$ *es continua en* $\mathbf{a}$*, entonces* $\mathbf{g} \circ \mathbf{f}$ *también es continua en* $\mathbf{a}$*.*

DEM: Se deja como ejercicio. ∎

Las siguientes observaciones son útiles para establecer la continuidad de funciones de n variables reales sin acudir a la definición ϵ, δ:

i) Sea $L = \{n_1, n_2, \cdots n_k\} \subset \{1, 2, \cdots n\}$, donde $1 \leq n_1 < n_2 <, \cdots n_k \leq n$. La proyección $\pi_L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$, $\pi_L(x_1, x_2, \cdots x_n) = (x_{n_1}, x_{n_2}, \cdots x_{n_k})$, es continua en todo punto.

ii) Si una función f de k variables reales es continua en $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \cdots a_k)$ entonces para cada $n > k$, y cada conjunto finito $L = \{n_1, n_2, \cdots n_k\} \subset \{1, 2, \cdots n\}$, la función de n variables reales $F(x_1, x_2, \cdots x_n) = f(x_{n_1}, x_{n_2}, \cdots x_{n_k})$, es continua en cada punto $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^n$ tal que $\pi_L(\mathbf{p}) = \mathbf{a}$, es decir, la continuidad se conserva cuando una función de k variables se considera como función de más variables.

iii) Los polinomios en n variables reales definen funciones continuas en todo $\mathbb{R}^n$: Como las proyecciones $\pi_k : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $\pi_k(x_1, x_2, \cdots x_n) = x_k$ son continuas, también son continuas las funciones definidas mediante un producto finito de proyecciones

$$(x_1, x_2, \cdots x_n) \to x_1^{p_1} x_2^{p_2} \cdots x_n^{p_n}, \quad (p_k \in \{0, 1, 2 \cdots\})$$

y sus combinaciones lineales, que son los polinomios en n variables reales.

Combinando estas observaciones con los resultados de las proposiciones 3.8 y 3.9 se obtiene fácilmente la continuidad en todo punto de funciones de dos y tres variables, $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, como las siguientes

$$f(x, y) = \operatorname{sen} x + \cos xy^2 + e^y; \quad g(x, y, z) = \frac{xe^y}{1 + z^2} + x + z$$

que se expresan combinando polinomios con funciones elementales de una variable mediante operaciones que preservan la continuidad. Para funciones de este tipo no es recomendable intentar establecer la continuidad acudiendo a la definición ϵ, δ. Sólo se debe recurrir a la definición cuando las reglas anteriores no son aplicables. Incluso en este caso conviene examinar atentamente la función pues a veces alguna consideración preliminar permite aplicarlas, como ocurre en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 3.10 *La función* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *definida por*

$$f(x, y) = \frac{\operatorname{sen}(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2}, \quad si \quad (x, y) \neq (0, 0); \quad f(0, 0) = 1$$

es continua en todo $\mathbb{R}^2$*.*

Las reglas anteriores, que se aplican directamente en cada punto $(x,y) \neq (0,0)$, permiten afirmar que f es continua en todo punto de $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. Para obtener la continuidad en el punto $(0,0)$, donde parece que no se pueden aplicar estas reglas, basta considerar la función real de variable real

$$\varphi(t) = \frac{\operatorname{sen} t}{t}, \quad \text{si} \quad t \neq 0; \quad \varphi(0) = 1$$

que es continua en $t = 0$, ya que $\lim_{t \to 0} \varphi(t) = 1 = \varphi(0)$. Entonces, en virtud de la regla de la cadena, la función compuesta $f(x,y) = \varphi(x^2 + y^2)$ es continua en $(0,0)$

Con un razonamiento similar se establece que si g es una función de dos variables definida y continua en $\mathbb{R}^2$, entonces la función

$$f(x,y) = \frac{\operatorname{sen} g(x,y)}{g(x,y)} \quad \text{si} \quad g(x,y) \neq 0; \quad f(x,y) = 1 \text{ si } \quad g(x,y) = 0;$$

es continua en todo punto. ■

Ejemplos 3.11 *Estudio de la existencia de límite, cuando* $(x,y) \to (0,0)$*, de las siguientes funciones de dos variables definidas en* $M = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$*:*

a) $f(x,y) = \dfrac{xy}{x^2 + y^2}$;

b) $g(x,y) = 1$ *si* $0 < |y| < 2x^2$, $g(x,y) = 0$ *en los restantes puntos;*

c) $h(x,y) = \dfrac{xy^2}{x^2 + y^2}$.

a) Aunque existen y son iguales los límites iterados

$$\lim_{x \to 0} (\lim_{y \to 0} f(x,y)) = \lim_{y \to 0} (\lim_{x \to 0} f(x,y)) = 0$$

sin embargo no existe el límite de $f(x,y)$ cuando $(x,y) \to (0,0)$ porque a través de cada $A_m = \{(x,y) : y = mx, x \neq 0\} \subset M$ el límite de $f(x,y)$ existe y vale $m/(1+m^2)$. (Si existiese el límite de $f(x,y)$ estos límites deberían ser iguales).

La no existencia del límite de $f(x,y)$ en $(0,0)$ significa que es imposible definir $f(0,0)$ para conseguir una extensión continua de f a todo $\mathbb{R}^2$.

Definiendo $f(0,0) = 0$, se comprueba fácilmente que todas las funciones parciales $x \to f(x,b)$, $y \to f(a,y)$, son continuas en todo punto. Con este ejemplo se pone de manifiesto que la continuidad, en cualquier punto, de las las funciones parciales no implica que la función dada sea continua en todo punto.

Representando gráficamente la función $t/(1+t^2)$ se observa que todo $z \in (-1/2, 1/2)$ es de la forma $z = m/(1+m^2)$ para algún $m \in \mathbb{R}$, luego, en todo entorno del punto $(0,0,z)$ hay puntos de la forma $(x, mx, f(x,mx)) = (x, mx, z)$, $x \neq 0$, que pertenecen a la gráfica $G(f)$.
Es decir, el segmento $S = \{(0,0,z) : |z| < 1/2\}$ está contenido en $\overline{G(f)}$, y lo mismo le ocurre al segmento cerrado $\overline{S} = \{(0,0,z) : |z| \leq 1/2\}$. Este comportamiento

de $G(f)$ cerca de $(0,0)$ se puede visualizar con DPgraph.

b) Sean A_m los conjuntos considerados en a). Dibujando un esquema de la región $U = \{(x,y) : g(x,y) = 0\}$ se observa que para cada $m \in \mathbb{R}$ existe $\delta_m > 0$ tal que si $(x,y) \in A_m$ y $\|(x,y)\|_2 < \delta_m$ entonces $(x,y) \in U$, luego $g(x,y) = 0$. Vemos así que a través de cada A_m existe el límite de g y vale 0 y esto permite afirmar que 0 es un candidato a límite. En este caso el límite no existe porque a través de $A = \{(x,y) : y = x^2, x \neq 0\}$ la función g tiene límite 1 (ya que vale 1 en los puntos de A). Definiendo $g(0,0) = 0$ se consigue una extensión de g a todo $\mathbb{R}^2$, que no es continua en $(0,0)$, pero tiene una restricción continua a cada recta que pasa por $(0,0)$.

c) h tiene límite 0 a través de cada $A_m = \{(x,y) : y = mx, x \neq 0\} \subset M$ pues $h(x,mx) = xm^2/(1+m^2)$, luego 0 es el candidato a límite. En este caso es fácil ver que $h(x,y)$ tiene límite 0 pues $|h(x,y)| \leq |x| \leq \|(x,y)\|_2$. Por lo tanto, definiendo $h(0,0) = 0$ se consigue una extensión continua de h a todo $\mathbb{R}^2$. ■

Ejemplos 3.12 *Estudio de la existencia de límite, cuando* $(x,y) \to (0,0)$, *de las siguientes funciones de dos variables definidas en* $M = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$:

a) $f(x,y) = (x^2 - y^2)/(x^2 + y^2)$;

b) $g(x,y) = (x^2 + y^2)/(x^2 + y)$ *si* $x^2 + y \neq 0$, $g(x,-x^2) = 0$;

a) La función f no tiene límite en $(0,0)$ porque existen y son distintos los límites iterados: $\lim_{y \to 0} f(x,y) = 1$ si $x \neq 0$; $\lim_{x \to 0} f(x,y) = -1$ si $y \neq 0$, luego

$$\lim_{x \to 0}(\lim_{y \to 0} f(x,y)) = 1, \quad \lim_{y \to 0}(\lim_{x \to 0} f(x,y)) = -1.$$

También se puede razonar considerando los límites a través de las rectas perforadas $A_m = \{(x,mx) : x \neq 0\}$, que existen y son distintos.

b) La función g tampoco tiene límite en $(0,0)$. Efectivamente:
$\lim_{y \to 0} g(x,y) = 1$, si $x \neq 0$, luego $\lim_{x \to 0}(\lim_{y \to 0} g(x,y)) = 1$.
$\lim_{x \to 0} g(x,y) = y$, si $y \neq 0$, luego $\lim_{y \to 0}(\lim_{x \to 0} g(x,y)) = 0$.
Se llega a la misma conclusión observando que los límites a través de las parábolas perforadas $P_m = \{(x,mx^2) : x \neq 0\}$ existen y son distintos. ■

Ejemplo 3.13 *Una función de dos variables* $g(x,y)$ *que tiene límite ordinario en* $(0,0)$, *aunque no existen los correspondientes límites iterados.*

Sea $g(x,y) = x \operatorname{sen}(x/y) + y \operatorname{sen}(y/x)$, si $x \neq 0$, $y \neq 0$; $g(0,y) = g(x,0) = 0$.
Esta función, definida en $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, tiene límite 0 cuando $(x,y) \to (0,0)$, porque $|g(x,y)| \leq |x| + |y| = \|(x,y)\|_1$. Sin embargo no existen los límites iterados en $(0,0)$, porque ni siquiera existen los límites parciales: Si $x \neq 0$ no existe $\lim_{y \to 0} g(x,y)$ (porque $\lim_{y \to 0} y \operatorname{sen}(y/x) = 0$, pero no existe $\lim_{y \to 0} x \operatorname{sen}(x/y) = 0$). Análogamente, si $y \neq 0$, tampoco existe $\lim_{x \to 0} g(x,y)$. ■

3.3. Funciones continuas en conjuntos compactos

En esta sección se demuestran, usando la técnica de las sucesiones, las propiedades básicas de las funciones continuas sobre los subconjuntos compactos de los espacios métricos.

Teorema 3.14 *Sean* (E, d), (F, ρ) *espacios métricos. Si* $K \subset E$ *es compacto y* $\mathbf{f} : K \to F$ *es continua entonces* $\mathbf{f}(K)$ *es compacto.*

DEM: La demostración que se ofrece está basada en el teorema 2.7 y en la caracterización de la continuidad mediante sucesiones (proposición 3.5). Si $K \subset E$ es compacto, para demostrar que $\mathbf{f}(K)$ también lo es basta ver que toda sucesión $\mathbf{y}_n \in \mathbf{f}(K)$ tiene una subsucesión convergente hacia un punto de $\mathbf{f}(K)$. Efectivamente, $\mathbf{y}_n = \mathbf{f}(\mathbf{x}_n)$ donde $\mathbf{x}_n \in K$. Como K es compacto, la sucesión $\mathbf{x}_n$ posee una subsucesión $\mathbf{x}_{n_k}$ que converge hacia un punto $\mathbf{x} \in K$. Como $\mathbf{f}$ es continua, la subsucesión $\mathbf{y}_{n_k} = \mathbf{f}(\mathbf{x}_{n_k})$ converge hacia $\mathbf{f}(\mathbf{x}) \in \mathbf{f}(K)$. ■

Aunque la siguiente proposición se puede obtener como corolario directo del teorema 3.14 ofrecemos una demostración con la técnica de las sucesiones para insistir en ella, dando un ejemplo de cómo se suele utilizar el corolario 2.8.

Proposición 3.15 *Sean* (E, d), (F, ρ) *espacios métricos y* $\mathbf{f} : X \to F$ *una aplicación continua e inyectiva definida en un compacto* $X \subset E$. *Entonces la inversa,* $\mathbf{f}^{-1} : Y \to X$, *definida en* $Y = \mathbf{f}(X)$, *es continua.*

DEM: Según la proposición 3.5 basta demostrar que si $\mathbf{y}_n$ es una sucesión en Y que converge hacia $\mathbf{y}$ entonces $\mathbf{x}_n = \mathbf{f}^{-1}(\mathbf{y}_n)$ converge hacia $\mathbf{x} = \mathbf{f}^{-1}(\mathbf{y})$.

Como la sucesión $\mathbf{x}_n$ está contenida en el compacto X, basta demostrar que $\mathbf{x}$ es su único punto de aglomeración (2.8): Si $\mathbf{x}' = \lim_k \mathbf{x}_{n_k}$ es un punto de aglomeración de esta sucesión, en virtud de la continuidad de $\mathbf{f}$,

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}') = \lim_k \mathbf{f}(\mathbf{x}_{n_k}) = \lim_k \mathbf{y}_{n_k} = \mathbf{y} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$$

y usando que $\mathbf{f}$ es inyectiva se concluye que $\mathbf{x} = \mathbf{x}'$. ■

Teorema 3.16 *Toda función continua* $f : K \to \mathbb{R}$, *definida en un subconjunto compacto* K *de un espacio métrico, alcanza en* K *un máximo y un mínimo absoluto: Existen* $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in K$ *tales que* $f(\mathbf{a}) \leq f(\mathbf{x}) \leq f(\mathbf{b})$, *para todo* $\mathbf{x} \in K$.

DEM: Es consecuencia inmediata del teorema 3.14 teniendo en cuenta que el extremo inferior y el extremo superior y de un conjunto acotado de números reales son valores adherentes a dicho conjunto. Como $f(K) \subset \mathbb{R}$ es cerrado y acotado los números $\alpha = \inf f(K)$, $\beta = \sup f(K)$ pertenecen a $f(K)$ es decir, existen $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in K$ tales que $\alpha = f(\mathbf{a})$ y $\beta = f(\mathbf{b})$. ■

En ciertas situaciones, en ausencia de compacidad, es posible utilizar el resultado anterior para justificar que una función real continua alcanza un máximo o un mínimo absoluto. En la siguiente proposición se describe una situación que se presenta con bastante frecuencia.

Proposición 3.17 *Si $f : A \to \mathbb{R}$ es una función continua definida en un conjunto cerrado no acotado $A \subset \mathbb{R}^n$, se verifica:*

a) Si $\lim_{\|\mathbf{x}\|_2 \to +\infty} f(\mathbf{x}) = +\infty$ entonces f alcanza en A un mínimo absoluto.

b) Si $\lim_{\|\mathbf{x}\|_2 \to +\infty} f(\mathbf{x}) = -\infty$ entonces f alcanza en A un máximo absoluto.

c) Si $\lim_{\|\mathbf{x}\|_2 \to +\infty} f(\mathbf{x}) = L$ entonces f alcanza en A un máximo absoluto o un mínimo absoluto.

DEM: a) Elegimos un punto $\mathbf{z} \in A$ y una constante $M > f(\mathbf{z})$. En virtud de la hipótesis existe $r > 0$ tal que si $\mathbf{x} \in A$ y $\|\mathbf{x}\|_2 > r$ entonces $f(\mathbf{x}) > M$. El conjunto $K = \{\mathbf{x} \in A : \|\mathbf{x}\|_2 \leq r\}$ es compacto, (porque es un subconjunto cerrado y acotado de $\mathbb{R}^n$) y por lo tanto $f|_K$ alcanza en K un mínimo absoluto $f(\mathbf{a})$ en algún punto $\mathbf{a} \in K \subset A$. Es claro que $\mathbf{z} \in K$, luego $f(\mathbf{a}) \leq f(\mathbf{z})$ y se sigue que para todo $\mathbf{x} \in A \setminus K$ también se cumple $f(\mathbf{x}) \geq f(\mathbf{a})$ porque $f(\mathbf{x}) > M > f(\mathbf{z}) \geq f(\mathbf{a})$. Queda demostrado que f alcanza en $\mathbf{a}$ un mínimo absoluto.
b) Basta aplicar el resultado anterior a la función $-f$.
c) Si f es constante $= L$ el resultado es trivial. En otro caso, si existe $\mathbf{z} \in A$ con $f(\mathbf{z}) > L$, con un razonamiento análogo al realizado en el apartado a) se demuestra que f alcanza en A un máximo absoluto. Análogamente, si $f(\mathbf{w}) < L$ para algún $\mathbf{w} \in A$ entonces f alcanza en A un mínimo absoluto. ■

Dado un cerrado $A \subset \mathbb{R}^n$ y un punto $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^n \setminus A$, en virtud de la proposición 3.17 podemos asegurar que la función continua $f(\mathbf{x}) = \|\mathbf{p} - \mathbf{x}\|_2$ alcanza en A un mínimo absoluto. En particular, si $\mathbf{g} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ es continua y el conjunto $A = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{g}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}\}$ no es vacío, entre todos los puntos de A hay uno $\mathbf{a} \in A$ que es el más cercano a $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^n \setminus A$ con la distancia usual. Este resultado se aplica, en particular, cuando $A \subset \mathbb{R}^3$ es una curva o superficie definida de forma implícita.

3.4. Espacios normados de dimensión finita

Una consecuencia importante del teorema 3.16 es el siguiente resultado que fue anunciado en el capítulo 2

Teorema 3.18 *Sobre un espacio vectorial de dimensión finita (real o complejo) todas las normas son equivalentes.*

DEM: Comenzamos demostrando que cualquier norma $\| \ \|$ sobre $\mathbb{R}^n$ es equivalente a la norma euclídea. Según la proposición 2.4 debemos encontrar $\alpha > 0$, $\beta > 0$, tales que para todo $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ se cumpla:

$$\alpha \|\mathbf{x}\|_2 \leq \|\mathbf{x}\| \leq \beta \|\mathbf{x}\|_2$$

Si $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \cdots \mathbf{e}_n\}$ es la base canónica de $\mathbb{R}^n$, aplicando la desigualdad triangular se obtiene que $\beta = \sum_{k=1}^{k} \|\mathbf{e}_k\|$ cumple la desigualdad de la derecha:

$$\|\mathbf{x}\| = \left\| \sum_{k=1}^{n} x_k \mathbf{e}_k \right\| \leq \sum_{k=1}^{n} |x_k| \|\mathbf{e}_k\| \leq \sum_{k=1}^{n} \|\mathbf{x}\|_2 \|\mathbf{e}_k\| = \beta \|\mathbf{x}\|_2$$

Esta desigualdad implica que la función $\mathbf{x} \to \|\mathbf{x}\|$ es continua sobre $\mathbb{R}^n$ con su topología usual (la asociada a $\| \|_2$) y por lo tanto alcanza un mínimo absoluto sobre el compacto $K = \{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n : \|\mathbf{y}\|_2 = 1\}$, es decir, existe $\mathbf{a} \in K$ tal que $\|\mathbf{a}\| \leq \|\mathbf{y}\|$ para todo $\mathbf{y} \in K$. El número $\alpha = \|\mathbf{a}\| > 0$ cumple la desigualdad de la izquierda: Basta considerar $\mathbf{x} \neq 0$; como $\mathbf{y} = \mathbf{x}/\|\mathbf{x}\|_2 \in K$, se obtiene $\alpha \leq \|\mathbf{y}\| = \|\mathbf{x}\| / \|\mathbf{x}\|_2$.

Sea ahora E un espacio vectorial de dimensión n sobre el cuerpo $\mathbb{R}$. Fijada una base $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \cdots, \mathbf{u}_n\}$ de E podemos identificar E con $\mathbb{R}^n$ mediante el isomorfismo algebraico $S : \mathbb{R}^n \to E$, que asocia a $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ el vector $S(\mathbf{x}) = \sum_{k=1}^n x_k \mathbf{u}_k$.

Si $\| \|$, $\| \|'$ son normas sobre E entonces $\|\mathbf{x}\|_S = \|S(\mathbf{x})\|$, y $\|\mathbf{x}\|'_S = \|S(\mathbf{x})\|'$ son normas equivalentes sobre $\mathbb{R}^n$. Como S es sobreyectiva, se sigue que las normas $\| \|$, $\| \|'$ son equivalentes. ■

Proposición 3.19 *Todo espacio normado de dimensión finita $(E, \| \|)$ es completo y su bola unidad $B_E = \{\mathbf{x} \in E : \|\mathbf{x}\| \leq 1\}$ es compacta.*

Dem: Sea n la dimensión de E como espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$, $\{\mathbf{u}_1, \cdots \mathbf{u}_n\}$ una base de E y $S : \mathbb{R}^n \to E$ el isomorfismo asociado $S(\mathbf{x}) = \sum_{k=1}^n x_k \mathbf{u}_k$.

Es fácil ver que $\|\mathbf{x}\|_S = \|S(\mathbf{x})\|_E$ es una norma sobre $\mathbb{R}^n$ cuya bola unidad

$$K = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \|\mathbf{x}\|_S \leq 1\} = S^{-1}(B_E)$$

es un conjunto cerrado y acotado. Como esta norma es equivalente a la norma euclídea, K también es cerrado y acotado para ella, y por lo tanto es compacto. Para obtener que $B_E = S(K)$ es compacto basta tener en cuenta que S es continua (es una isometría entre $(\mathbb{R}^n, \| \|_S)$ y $(E, \| \|)$), y por lo tanto transforma compactos en compactos.

El hecho de que la bola B_E sea compacta implica que las bolas cerradas de E son compactas. Toda sucesión de Cauchy $(\mathbf{y}_n)$ en E es acotada luego está contenida en alguna bola compacta $\{\mathbf{y} \in E : \|\mathbf{y}\| \leq R\}$ y por lo tanto posee una subsucesión convergente. Basta recordar que toda sucesión de Cauchy con una subsucesión convergente es convergente para obtener que $(E, \| \|)$ es completo. ■

Teorema 3.20 *Un espacio normado $(E, \| \|)$ (real o complejo) es de dimensión finita si y sólo si su bola unidad $B_E = \{\mathbf{x} \in E : \|\mathbf{x}\| \leq 1\}$ es compacta.*

Dem: Después de la proposición 3.19 queda por demostrar que si la bola B_E es compacta entonces E finito dimensional. Efectivamente, fijado $0 < \epsilon < 1$, podemos recubrir el compacto B_E con un número finito de bolas abiertas de radio $\epsilon > 0$,

$$B_E \subset \bigcup_{j=1}^m B(\mathbf{a}_j, \epsilon)$$

Si $F \subset E$ es el subespacio finito dimensional engendrado por $\{\mathbf{a}_j : 1 \leq j \leq m\}$ demostraremos que $E = F$. Lo haremos por reducción al absurdo suponiendo que existe $\mathbf{x} \in E \setminus F$. En virtud de la proposición 3.19 F es un subespacio completo y por lo tanto cerrado. Entonces podemos asegurar que

$$\alpha = d(\mathbf{x}, F) := \inf\{\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| : \mathbf{y} \in F\}$$

no es nulo. Como $\alpha < \alpha/\epsilon$, la definición de extremo inferior asegura que existe $\mathbf{y} \in F$ tal que $\alpha \leq \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| < \alpha/\epsilon$. El vector $\mathbf{z} = (\mathbf{x} - \mathbf{y})/\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|$ pertenece a B_E, luego $\|\mathbf{z} - \mathbf{a}_j\| < \epsilon$ para algún $j \in \{1, 2, \cdots m\}$. Entonces el vector $\mathbf{x}$ se puede escribir en la forma

$$\mathbf{x} = \mathbf{y} + \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| \mathbf{z} = (\mathbf{y} + \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| \mathbf{a}_j) + \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| (\mathbf{z} - \mathbf{a}_j) = \mathbf{u} + \mathbf{v}$$

donde $\mathbf{u} = \mathbf{y} + \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| \mathbf{a}_j$ pertenece a F. Se sigue que

$$\alpha \leq \|\mathbf{x} - \mathbf{u}\| = \|\mathbf{v}\| = \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| \|\mathbf{z} - \mathbf{a}_j\| \leq \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| \epsilon < \epsilon\alpha/\epsilon = \alpha$$

y con esta contradicción concluye la prueba. ■

Aplicaciones lineales continuas

Proposición 3.21 *Sean* $(E, \| \|)$, $(F, \| \|')$ *espacios normados sobre el mismo cuerpo (*$\mathbb{R}$ *o* $\mathbb{C}$*). Para una aplicación lineal* $T : E \to F$, *son equivalentes*

a) T *es continua;*

b) T *es continua en* 0*;*

c) Existe $C > 0$ *tal que* $\|T(\mathbf{x})\|' \leq C \|\mathbf{x}\|$ *para todo* $\mathbf{x} \in E$.

Si E *es de dimensión finita, toda aplicación lineal* $T : E \to F$ *es continua.*

DEM: Es inmediato que c) $\Rightarrow$ a) $\Rightarrow$ b) y basta demostrar b) $\Rightarrow$ c). Si T es continua en 0 existe $\delta > 0$ tal que

$$\|\mathbf{y}\| < \delta \Rightarrow \|T(\mathbf{y})\|' = \|T(\mathbf{y}) - T(\mathbf{0})\|' < 1$$

La constante $C = 2/\delta$ cumple c): Es evidente si $\mathbf{x} = 0$, y si $\mathbf{x} \neq 0$ basta considerar $\mathbf{y} = (C \|\mathbf{x}\|)^{-1}\mathbf{x}$, que cumple $\|\mathbf{y}\| = 1/C < \delta$, para obtener

$$1 > \|T(\mathbf{y})\|' = (C \|\mathbf{x}\|)^{-1} \|T(\mathbf{x})\|'$$

es decir, $\|T(\mathbf{x})\|' \leq C \|\mathbf{x}\|$.

Si E es de dimensión finita n sobre el cuerpo $\mathbb{R}$, dada una base de E, $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \cdots \mathbf{u}_n\}$, se considera el isomorfismo algebraico $S : \mathbb{R}^n \to E$:

$$S(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \sum_{k=1}^{n} x_j \mathbf{u}_j$$

Para cada $\mathbf{x} = \sum_{k=1}^{n} x_k \mathbf{u}_k \in E$, es claro que $\|\mathbf{x}\|^* = \sum_{k=1}^{n} |x_k| = \|S^{-1}(\mathbf{x})\|_1$ define una norma sobre E, equivalente a la norma inicial $\| \ \|$ (véase 3.18). La constante $C = \text{máx}\{\|T(\mathbf{u}_k)\| : 1 \leq k \leq n\}$ verifica:

$$\|T(\mathbf{x})\|' = \left\| \sum_{k=1}^{n} x_k T(\mathbf{u}_k) \right\|' \leq \sum_{k=1}^{n} |x_k| \, \|T(\mathbf{u}_k)\| \leq C \, \|\mathbf{x}\|^*$$

En virtud de b) T es continua para la norma $\| \ \|^*$ y también para la norma equivalente $\| \ \|$. ■

Si $(E, \| \ \|$, $(F, \| \ \|')$ son espacios normados sobre $\mathbb{K}$ el conjunto de las aplicaciones lineales continuas $T : E \to F$, denotado $\mathcal{L}(E, F)$, también es un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$. En virtud de la proposición 3.21, para cada $T \in \mathcal{L}(E, F)$, el número

$$\|T\| = \sup\{\|T(\mathbf{x})\|' : \|\mathbf{x}\| \leq 1\}$$

es finito y se comprueba fácilmente que define una norma sobre $\mathcal{L}(E, F)$. Es fácil ver que $\|T(\mathbf{x})\| \leq \|T\| \, \|\mathbf{x}\|$ para cada $\mathbf{x} \in E$. También es claro que $\|T\| \leq C$, donde C es cualquier constante que verifique la condición c) de la proposición 3.21, luego $\|T\|$ es la mejor constante (la mínima) que cumple esta condición.

Conviene advertir que el valor numérico de la norma de una aplicación lineal continua $T \in \mathcal{L}(E, F)$ depende de las normas de los espacios E y F. Si en estos espacios se cambian las normas por otras equivalentes, en $\mathcal{L}(E, F)$ resulta otra norma equivalente a la antigua (la comprobación de esta afirmación se deja como ejercicio). Cuando $E = \mathbb{R}^n$ y $F = \mathbb{R}^m$, cada $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ se puede identificar con su matriz $A = (a_{ij})_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n}$, respecto a las bases canónicas de $\mathbb{R}^n$ y $\mathbb{R}^m$:

$$T(\mathbf{x}) = \mathbf{y} \text{ donde } y_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j, \quad 1 \leq i \leq m$$

En este caso, en vez de hablar de la norma de la aplicación lineal T se suele hablar de la norma de la matriz asociada A. La norma de la matriz A depende de las normas consideradas en $\mathbb{R}^n$ y en $\mathbb{R}^m$ (véanse los ejercicios 3.8.25, 3.8.26).

3.5. Continuidad uniforme

Definición 3.22 *Sean (E, d), (F, ρ) espacios métricos. Una aplicación $\mathbf{f} : M \to F$ definida en $M \subset E$ se dice que es uniformemente continua cuando para cada $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $[\mathbf{x}, \mathbf{y} \in M, \quad d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) < \delta] \Rightarrow \rho(\mathbf{f}(\mathbf{x}), \mathbf{f}(\mathbf{y})) < \epsilon$.*

Si $K \subset M$ y $\mathbf{f}|_K$ es uniformemente continua se dice que $\mathbf{f}$ es uniformemente continua sobre K.

La continuidad uniforme es una noción que se refiere al comportamiento global de la aplicación $\mathbf{f}$ en todo su dominio. Se puede formular de modo equivalente en los siguientes términos: Para cada $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que para todo $A \subset M$ con d-diam$(A) < \delta$ se verifica ρ-diam$(\mathbf{f}(A)) < \epsilon$.

La diferencia entre la continuidad y la continuidad uniforme es la siguiente: $\mathbf{f}$ es continua si para cada $\epsilon > 0$ y cada $\mathbf{a} \in M$ existe $\delta(\mathbf{a}, \epsilon) > 0$ (que depende de $\mathbf{a}$ y de ϵ) tal que todo $\mathbf{x} \in M$ con $d(\mathbf{x}, \mathbf{a}) < \delta(\mathbf{a}, \epsilon)$ verifica $\rho(\mathbf{f}(\mathbf{x}), \mathbf{f}(\mathbf{a})) < \epsilon$. Puede ocurrir que $\mathbf{f}$ sea continua en cada punto de M pero al cambiar de un punto $\mathbf{a} \in M$ a otro $\mathbf{a}' \in M$ el número $\delta(\mathbf{a}, \epsilon)$ que servía para el primer punto no sirva para el otro. La continuidad uniforme exige que para cada $\epsilon > 0$ exista $\delta(\epsilon) > 0$, (dependiendo sólo de ϵ) tal que la condición de continuidad se cumple de modo simultáneo en todos los puntos:
Para todo $\mathbf{a} \in M$ *y todo* $\mathbf{x} \in M$ *con* $d(\mathbf{x}, \mathbf{a}) < \delta(\epsilon)$ *se cumple* $\rho(\mathbf{f}(\mathbf{x}), \mathbf{f}(\mathbf{a})) < \epsilon$.
Toda aplicación uniformemente continua es continua pero el recíproco no es cierto, como se pone de manifiesto con los ejemplos b) y c) que siguen.

Ejemplos 3.23

a) Se dice que $\mathbf{f} : M \to F$ es *Lipschitziana* con constante de Lipschitz $C > 0$ si para cada par de puntos $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in M$ se cumple $\rho(\mathbf{f}(\mathbf{x}), \mathbf{f}(\mathbf{y})) \leq C d(\mathbf{x}, \mathbf{y})$.
Es inmediato que toda aplicación Lipschitziana es uniformemente continua En particular, toda función derivable $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ con derivada acotada es uniformemente continua ya que, en virtud del teorema del incremento finito es Lipschitziana con constante $C = \sup\{|f'(x)| : a < x < b\}$.

b) La función real de variable real $f(x) = x^2$ no es uniformemente continua en $\mathbb{R}$ porque transforma los intervalos $A_\epsilon = (1/\epsilon, \epsilon + 1/\epsilon)$, de diámetro ϵ en los intervalos $f(A_\epsilon) = (1/\epsilon^2, (\epsilon + 1/\epsilon)^2)$ de diámetro $2 + \epsilon^2 > 2$.

c) La función real de variable real $g(x) = \operatorname{sen}(1/x)$ no es uniformemente continua en $(0, 1)$ ya que transforma los intervalos $(0, \epsilon)$, en conjuntos de diámetro 2.

Teorema 3.24 *Sean* (E, d), (F, ρ) *espacios métricos. Toda aplicación continua* $\mathbf{f} : M \to F$ *definida en* $M \subset E$, *es uniformemente continua sobre cada compacto* $K \subset M$.

DEM: Lo demostramos por reducción al absurdo suponiendo que hay una función continua $\mathbf{f} : M \to F$, que no es uniformemente continua sobre un compacto $K \subset M$. Entonces existe $\epsilon > 0$ tal que para cada $\delta > 0$ hay puntos $\mathbf{x}_\delta, \mathbf{y}_\delta \in K$ tales que $d(\mathbf{x}_\delta, \mathbf{y}_\delta) < \delta$ pero $\rho(\mathbf{f}(\mathbf{x}_\delta), \mathbf{f}(\mathbf{y}_\delta)) \geq \epsilon$. Con $\delta = 1/n$, $n \in \mathbb{N}$, se obtienen sucesiones $\mathbf{x}_n, \mathbf{y}_n \in K$ tales que $d(\mathbf{x}_n, \mathbf{y}_n) < 1/n$, pero $\rho(\mathbf{f}(\mathbf{x}_n), \mathbf{f}(\mathbf{y}_n)) \geq \epsilon$.

Como K es compacto la sucesión $(\mathbf{x}_n)$ posee una subsucesión $(\mathbf{x}_{n_k})$ convergente hacia un punto $\mathbf{x} \in K$ (teorema 2.7). La subsucesión $(\mathbf{y}_{n_k})$ también converge hacia $\mathbf{x}$ porque $0 \leq d(\mathbf{y}_{n_k}, \mathbf{x}) \leq d(\mathbf{y}_{n_k}, \mathbf{x}_{n_k}) + d(\mathbf{x}_{n_k}, \mathbf{x}) \leq 1/n_k + d(\mathbf{x}_{n_k}, \mathbf{x}) = \alpha_k$, donde α_k tiende hacia 0. En virtud de la continuidad de $\mathbf{f}$ las sucesiones $\mathbf{f}(\mathbf{x}_{n_k})$, $\mathbf{f}(\mathbf{y}_{n_k})$ convergen hacia $\mathbf{f}(\mathbf{x})$, luego $\lim_k \rho(\mathbf{f}(\mathbf{x}_{n_k}), \mathbf{f}(\mathbf{y}_{n_k})) = 0$. Se llega así a una contradicción porque las sucesiones $\mathbf{x}_n$, $\mathbf{y}_n$ fueron elegidas verificando $\rho(\mathbf{f}(\mathbf{x}_n), \mathbf{f}(\mathbf{y}_n)) \geq \epsilon$ para todo $n \in \mathbb{N}$. ■

OBSERVACIÓN: En la demostración del teorema anterior no se ha usado que la sucesión $\mathbf{y}_n$ esté en el compacto K. La misma demostración permite mejorar la conclusión del teorema en la forma siguiente: Para cada $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $[\mathbf{x} \in K,\ \mathbf{y} \in M,\ d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) < \delta] \Rightarrow \rho(\mathbf{f}(\mathbf{x}), \mathbf{f}(\mathbf{y})) < \epsilon$. Esta mejora del teorema 3.24 se suele llamar *teorema de la continuidad uniforme mejorado.*

Con hipótesis adicionales, en ausencia de compacidad, es posible utilizar el teorema 3.24 para justificar que una función real continua es uniformemente continua. Así ocurre en la situación considerada en la siguiente proposición, cuya demostración sirve además para mostrar la simplificación que se consigue en algunos razonamientos cuando se tiene presente el teorema de la continuidad uniforme mejorado

Proposición 3.25 *Sea $f : A \to \mathbb{R}$ una función continua definida en un conjunto cerrado no acotado $A \subset \mathbb{R}^n$. Si existe y es finito el límite* $\lim_{\|\mathbf{x}\|_2 \to +\infty} f(\mathbf{x}) = L$ *entonces f es uniformemente continua.*

DEM: Según la definición de límite, dado $\epsilon > 0$ existe $r > 0$ tal que

$$[\mathbf{x} \in A,\ \|\mathbf{x}\|_2 > r] \Rightarrow |f(\mathbf{x}) - L| < \epsilon/2$$

El conjunto $K = \{\mathbf{x} \in A : \|\mathbf{x}\|_2 \leq r\}$ es compacto, (porque es un subconjunto cerrado y acotado de $\mathbb{R}^n$) y utilizando el teorema de la continuidad uniforme mejorado podemos asegurar la existencia de un número $\delta > 0$ tal que si uno de los puntos $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in A$ está en K y $\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|_2 < \delta$ entonces $|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{y})| < \epsilon$. En caso contrario, si ninguno de los puntos está en K, también se cumple

$$|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{y})| \leq |f(\mathbf{x}) - L| + |L - f(\mathbf{y})| \leq \epsilon/2 + \epsilon/2 = \epsilon$$

En definitiva, cualquier pareja de puntos $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in A$ con $\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|_2 < \delta$ hace que se cumpla la desigualdad $|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{y})| < \epsilon$ y así queda demostrado que f es uniformemente continua. ■

En el ejercicio resuelto 3.37 se puede ver un resultado similar al expuesto en la proposición 3.25. La solución propuesta muestra como habría que proceder sin tener en cuenta el teorema de la continuidad uniforme mejorado. Se invita al lector a que lo utilice para dar una solución más breve.

Teorema 3.26 *Sean (E, d), (F, ρ) espacios métricos y $M \subset E$. Si (F, ρ) es completo, cada aplicación uniformemente continua $\mathbf{f} : M \to F$ se puede extender a una única aplicación uniformemente continua $\overline{\mathbf{f}} : \overline{M} : \to F$.*

DEM: Si (F, ρ) es completo la extensión $\overline{\mathbf{f}}$ se define por

$$\overline{\mathbf{f}}(\mathbf{a}) = \mathbf{f}(\mathbf{a}) \text{ si } \mathbf{a} \in M; \quad \overline{\mathbf{f}}(\mathbf{a}) = \lim_{\mathbf{x} \to \mathbf{a}} \mathbf{f}(\mathbf{x}) \text{ si } \mathbf{a} \in \overline{M} \setminus M \subset M'.$$

una vez que se haya demostrado que el límite existe. Para ello, según el teorema 3.3 basta ver que se cumple la condición de Cauchy:
Dado $\epsilon > 0$ sea $\delta > 0$ es el suministrado por la continuidad uniforme de $\mathbf{f}$ que hace que se cumpla $[\mathbf{x}, \mathbf{y} \in M, d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) < \delta] \Rightarrow \rho(\mathbf{f}(\mathbf{x}), \mathbf{f}(\mathbf{y})) < \epsilon$. Entonces, para toda pareja $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in M$, con $0 < d(\mathbf{x}, \mathbf{a}) < \delta/2$, $0 < d(\mathbf{y}, \mathbf{a}) < \delta/2$, se verifica $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) < \delta$, luego $\rho(\mathbf{f}(\mathbf{x}), \mathbf{f}(\mathbf{y})) < \epsilon$. Queda visto que $\overline{\mathbf{f}}$ está bien definida y sólo queda demostrar que es uniformemente continua.

Veremos que, dado $\epsilon > 0$, el número $\delta > 0$ proporcionado por la continuidad uniforme de $\mathbf{f}$ sirve para establecer la continuidad uniforme de $\overline{\mathbf{f}}$. Efectivamente, si $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \overline{M}$, y $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) < \delta$, existen sendas sucesiones $\mathbf{x}_n, \mathbf{y}_n \in M$, convergentes hacia $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ respectivamente (si $\mathbf{x} \in M$ tomamos $\mathbf{x}_n = \mathbf{x}$ para cada $n \in \mathbb{N}$, y si $\mathbf{y} \in M$ tomamos $\mathbf{y}_n = \mathbf{y}$ para cada $n \in \mathbb{N}$). En virtud de la desigualdad triangular

$$d(\mathbf{x}_n, \mathbf{y}_n) \leq d(\mathbf{x}_n, \mathbf{x}) + d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + d(\mathbf{y}, \mathbf{y}_n) = \alpha_n$$

donde la sucesión α_n converge hacia $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) < \delta$. Se sigue que existe $m \in \mathbb{N}$ tal que todo $n \geq m$ cumple $d(\mathbf{x}_n, \mathbf{y}_n) \leq \alpha_n < \delta$ y por lo tanto $\rho(\mathbf{f}(\mathbf{x}_n), \mathbf{f}(\mathbf{y}_n)) \leq \epsilon$. Utilizando otra vez la desigualdad triangular obtenemos

$$\rho(\overline{\mathbf{f}}(\mathbf{x}), \overline{\mathbf{f}}(\mathbf{y})) \leq \rho(\overline{\mathbf{f}}(\mathbf{x}), \mathbf{f}(\mathbf{x}_n)) + \rho(\mathbf{f}(\mathbf{x}_n), \mathbf{f}(\mathbf{y}_n)) + \rho(\mathbf{f}(\mathbf{y}_n), \overline{\mathbf{f}}(\mathbf{y}))$$

y podemos asegurar que para todo $n \geq m$ se cumple

$$\rho(\overline{\mathbf{f}}(\mathbf{x}), \overline{\mathbf{f}}(\mathbf{y})) \leq \rho(\overline{\mathbf{f}}(\mathbf{x}), \mathbf{f}(\mathbf{x}_n)) + \epsilon + \rho(\mathbf{f}(\mathbf{y}_n), \overline{\mathbf{f}}(\mathbf{y}))$$

Pasando al límite cuando $n \to +\infty$, y usando, cuando $\mathbf{x}$ ó $\mathbf{y}$ no pertenecen a M, la caracterización del límite mediante sucesiones (3.5) se obtiene que

$$\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \overline{M}, \quad d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) < \delta \Rightarrow \rho(\overline{\mathbf{f}}(\mathbf{x}), \overline{\mathbf{f}}(\mathbf{y})) \leq \epsilon$$

La unicidad de la extensión $\overline{\mathbf{f}}$ es inmediata: Si $\mathbf{g} : \overline{M} \to F$ es una extensión continua de $\mathbf{f}$, para todo $\mathbf{a} \in \overline{M} \setminus M$ se cumple $\mathbf{g}(\mathbf{a}) = \lim_{\mathbf{x} \to \mathbf{a}} \mathbf{g}(\mathbf{x})$, y considerando el límite a través de M resulta $\mathbf{g}(\mathbf{a}) = \lim_{\mathbf{x} \to \mathbf{a}} \mathbf{g}|_M(\mathbf{x}) = \lim_{\mathbf{x} \to \mathbf{a}} \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \overline{\mathbf{f}}(\mathbf{a})$. ■

Observación: Si $(E, \| \|)$, $(F, \| \|$ son espacios normados según la proposición 3.21, cada aplicación lineal continua $T : E \to F$ es Lipschitziana, con constante de Lipschitz $\|T\|$, luego es uniformemente continua. Por lo tanto, cuando F es completo, se puede aplicar el teorema de extensión 3.26 y es fácil comprobar que la extensión sigue siendo lineal y tiene la misma norma que T.

Corolario 3.27 *Sea* $\mathbf{f} : M \to F$ *una función continua, definida en un conjunto acotado* $M \subset \mathbb{R}^n$, *con valores en un espacio métrico completo* (F, ρ).
Son equivalentes:

i) $\mathbf{f}$ *se puede extender a una (única) aplicación continua* $\overline{\mathbf{f}} : \overline{M} \to F$*;*

ii) $\mathbf{f}$ *es uniformemente continua.*

Dem: i) $\Rightarrow$ ii): Como $\overline{M}$ es un subconjunto compacto de $\mathbb{R}^n$ (por ser cerrado y acotado), la extensión continua $\overline{\mathbf{f}} : \overline{M} \to F$ es uniformemente continua (en virtud del teorema 3.24) y por lo tanto $\mathbf{f} = \overline{\mathbf{f}}|_M$ también lo es. El recíproco ii) $\Rightarrow$ i) es el teorema 3.26. ■

Propiedades topológicas y propiedades uniformes.

Definición 3.28 *Un isomorfismo uniforme entre espacios métricos* (E, d), (F, ρ) *es una aplicación biyectiva uniformemente continua* $\mathbf{f} : (E, d) \to (F, \rho)$ *con inversa uniformemente continua. Dos distancias* d, d' *sobre un conjunto* E *se dice que son uniformemente equivalentes cuando la identidad* $i : (E, d) \to (E, d')$ *es un isomorfismo uniforme.*

Una noción referente a un espacio métrico (E, d) se dice que es *topológica* cuando sólo depende de la topología del espacio y por lo tanto permanece cuando se cambia la distancia d por otra equivalente. Una noción referente a un espacio métrico (E, d) se dice que es *uniforme* cuando permanece al cambiar la distancia d por otra uniformemente equivalente.

Las nociones de conjunto abierto, cerrado, compacto, adherencia, interior, sucesión convergente y función continua son topológicas. Todas las nociones topológicas son uniformes pero el recíproco es falso: Con el ejercicio 2.6.5 se pone de manifiesto que las nociones de sucesión de Cauchy y de espacio completo no son topológicas, pero son uniformes como consecuencia directa del siguiente ejercicio:

Ejercicio 3.29 *Si* $\mathbf{f} : (E, d) \to (F, \rho)$ *es uniformemente continua demuestre que* $\mathbf{f}$ *transforma sucesiones de Cauchy en sucesiones de Cauchy.*
Si $\mathbf{f} : (E, d) \to (F, \rho)$ *es una biyección uniformemente continua con inversa continua y* (F, ρ) *es completo demuestre que* (E, d) *también es completo.*

La noción de conjunto totalmente acotado (o precompacto) que se considera en el apéndice B.2 también es una noción uniforme que no es topológica.

La noción de conjunto acotado no es uniforme pues en $\mathbb{R}$ la distancia usual d y la distancia $d^*(x, y) = \min\{1, d(x, y)\}$ son uniformemente equivalentes pero no producen los mismos conjuntos acotados.

Todo isomorfismo uniforme entre dos espacios métricos es un homeomorfismo, y dos distancias d, d' uniformemente equivalentes son equivalentes, pero los recíprocos son falsos: En $\mathbb{R}$ las distancias d, d' consideradas en el problema 2.6.5 son equivalentes pero no son uniformemente equivalentes porque si lo fuesen producirían las mismas sucesiones de Cauchy en virtud del ejercicio 3.29.

Si dos espacios métricos son homeomorfos y uno de ellos es compacto el otro también lo es (en virtud de 3.14) y el homeomorfismo es un isomorfismo uniforme en virtud del teorema 3.24. En particular, si dos distancias en E son equivalentes y E es compacto para la topología asociada a las distancias entonces las distancias son uniformemente equivalentes. Un resultado análogo se verifica cuando E es un espacio vectorial (real o complejo): Si d, d' son distancias equivalentes sobre E, asociadas a normas, entonces son uniformemente equivalentes en virtud de 2.4.

Como la composición de aplicaciones uniformemente continuas es uniformemente continua se sigue que si tenemos una aplicación $\mathbf{f} : (E,d) \to (F,\rho)$ uniformemente continua y cambiamos las distancias d y ρ por otras uniformemente equivalentes entonces $\mathbf{f}$ sigue siendo uniformemente continua respecto a las nuevas distancias. Esto significa que la continuidad uniforme es una noción uniforme respecto a ambos espacios E y F. Otra noción uniforme de especial interés es la convergencia uniforme que se estudia a continuación.

3.6. Convergencia uniforme

En esta sección se extienden al contexto de los espacios métricos los resultados básicos sobre convergencia uniforme. En particular se muestra que la convergencia uniforme es una noción uniforme.

Sea (F,ρ) un espacio métrico y $\mathbf{f}_n : T \to F$ una sucesión de funciones definidas en un conjunto no vacío T. Se dice que la sucesión $\mathbf{f}_n$ *converge puntualmente* cuando para cada $t \in T$ la sucesión $\mathbf{f}_n(t)$ converge en el espacio métrico (F,ρ). En este caso el límite puntual es la función $\mathbf{f} : T \to F$, definida por $\mathbf{f}(t) = \lim_n \mathbf{f}_n(t)$.

En el contexto de las funciones reales de variable real ejemplos sencillos, como $f_n(x) = 1/(1+x^{2n})$, muestran que el límite puntual de una sucesión de funciones continuas puede no ser continuo.

La convergencia uniforme es una noción más fuerte que la convergencia puntual pues se exige que el valor de n a partir del cual se logra la aproximación $\rho(\mathbf{f}_n(t),\mathbf{f}(t)) \le \epsilon$, no depende del punto $t \in T$, es decir se exige una aproximación al límite uniforme en todos los puntos de T. La convergencia uniforme, con la que se consigue la continuidad del límite de una sucesión de funciones continuas (3.31), en el contexto de los espacios métricos se formula así:

Definición 3.30 *Sea (F,ρ) un espacio métrico y T un conjunto. La sucesión $\mathbf{f}_n : T \to F$ converge uniformemente hacia $\mathbf{f} : T \to F$ cuando para cada $\epsilon > 0$ existe $n(\epsilon) \in \mathbb{N}$ (que depende sólo de ϵ) tal que para todo $n \ge n(\epsilon)$ y todo $t \in T$ se cumple $\rho(\mathbf{f}_n(t),\mathbf{f}(t)) \le \epsilon$.*

Si $K \subset T$ y la sucesión $\mathbf{f}_n|_K$ converge puntualmente (resp. uniformemente) se dice, más brevemente, que la sucesión $\mathbf{f}_n$ converge puntualmente (resp. uniformemente) sobre K. A veces ocurre que una sucesión de funciones $\mathbf{f}_n : T \to F$, no converge uniformemente sobre todo T, pero la convergencia es uniforme sobre los conjuntos de una familia $\mathcal{C}$ de subconjuntos de T. Un caso particular, cuando $\mathcal{C}$ es la familia de los subconjuntos compactos de T, es el de la convergencia uniforme sobre compactos. La convergencia uniforme sobre T implica la convergencia uniforme sobre cada $C \in \mathcal{C}$, lo que implica la convergencia puntual sobre $\bigcup \mathcal{C}$, pero las afirmaciones recíprocas son falsas.

Con el fin de formular la condición de convergencia uniforme de modo más conciso conviene introducir la siguiente notación: Si $K \subset T$, dadas $\mathbf{f},\mathbf{g} : T \to F$, se define

$$\rho_K(\mathbf{f},\mathbf{g}) = \sup\{\rho(\mathbf{f}(t),\mathbf{g}(t)) : t \in K\} \quad (\le +\infty)$$

El hecho de que la sucesión $\mathbf{f}_n : T \to F$ sea uniformemente convergente hacia $\mathbf{f} : T \to F$ se escribe en la forma $\lim_n \rho_T(\mathbf{f}_n, \mathbf{f}) = 0$. Análogamente, la convergencia uniforme sobre $K \subset T$ se expresa mediante la condición $\lim_n \rho_K(\mathbf{f}_n, \mathbf{f}) = 0$.

Teorema 3.31 *Sean $(T, d), (F, \rho)$ espacios métricos. Si la sucesión $\mathbf{f}_n : T \to F$ converge uniformemente hacia $\mathbf{f} : T \to F$ y cada $\mathbf{f}_n$ es continua en $a \in T$ entonces el límite $\mathbf{f}$ también lo es. En particular, si las funciones $\mathbf{f}_n$ son continuas en todo punto, el límite uniforme $\mathbf{f}$ también lo es.*

Dem: Dado $\epsilon > 0$, en virtud de la convergencia uniforme, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que para todo $t \in T$ se cumple $\rho(\mathbf{f}_m(t), \mathbf{f}(t)) \leq \epsilon/3$.

Por la continuidad de $\mathbf{f}_m$ en a, existe una bola abierta $B(a, r) \subset T$, tal que todo $t \in B(a, r)$ cumple $\rho(\mathbf{f}_m(t), \mathbf{f}_m(a)) \leq \epsilon/3$, luego

$$\rho(\mathbf{f}(t), \mathbf{f}(a)) \leq \rho(\mathbf{f}(t), \mathbf{f}_m(t)) + \rho(\mathbf{f}_m(t), \mathbf{f}_m(a)) + \rho(\mathbf{f}_m(a), \mathbf{f}(a)) \leq$$

$$\leq \epsilon/3 + \epsilon/3 + \epsilon/3 = \epsilon$$

■

En las condiciones del teorema anterior, para conseguir la continuidad de $\mathbf{f}$ en un punto $a \in T$ basta suponer que, desde un valor de n en adelante, las funciones $\mathbf{f}_n$ son continuas en a, y que la convergencia es uniforme en algún entorno de a. En particular, para conseguir la continuidad global del límite basta la convergencia uniforme local, lo que significa que cada $t \in T$ tiene un entorno abierto V_t donde la convergencia es uniforme. La convergencia uniforme local implica la convergencia uniforme sobre compactos (porque todo compacto $K \subset T$ se puede recubrir con una cantidad finita de entornos abiertos sobre los que hay convergencia uniforme).

Aunque el teorema 3.31 sigue valiendo para un espacio topológico general T, el siguiente resultado utiliza que T es un espacio métrico.

Corolario 3.32 *Sean $(T, d), (F, \rho)$ espacios métricos. Si una sucesión de funciones continuas $\mathbf{f}_n : T \to F$, converge uniformemente sobre compactos hacia $\mathbf{f} : T \to F$, entonces $\mathbf{f}$ es continua.*

Dem: Demostraremos que $\mathbf{f}$ es continua en cada $t \in T$ viendo que si $t_n \in T$ es una sucesión convergente hacia t entonces la sucesión $\mathbf{f}(t_n)$, converge hacia $\mathbf{f}(t)$: Como el conjunto $K = \{t\} \cup \{t_n : n \in \mathbb{N}\}$ es compacto (véase el problema 2.6.23) la sucesión $\mathbf{f}_n$ converge uniformemente sobre K hacia $\mathbf{f}$, y aplicando el teorema 3.31 a la sucesión $\mathbf{f}_n|_K$ se obtiene que $\mathbf{f}|_K$ es continua. Como t_n es una sucesión en K que converge hacia $t \in K$ se concluye que $\mathbf{f}(t) = \mathbf{f}|_K(t) = \lim_n \mathbf{f}|_K(t_n) = \lim_n \mathbf{f}(t_n)$.
■

La proposiciones siguientes relacionan la continuidad uniforme con la convergencia uniforme.

Proposición 3.33 *Sean $(T, d), (F, \rho)$ espacios métricos y $\mathbf{f}_n : T \to F$ una sucesión uniformemente convergente de funciones uniformemente continuas. Entonces la función límite $\mathbf{f} : T \to F$ es uniformemente continua.*

Dem: La demostración, análoga a la del teorema 3.31, se deja como ejercicio. ■

Proposición 3.34 *Sean* $(E, d), (F, \rho)$ *espacios métricos. Si* $\mathbf{g} : E \to F$ *es uniformemente continua y la sucesión* $\mathbf{f}_n : T \to E$ *converge uniformemente hacia* $\mathbf{f} : T \to E$ *entonces* $\mathbf{g} \circ \mathbf{f}_n : T \to F$ *converge uniformemente hacia* $\mathbf{g} \circ \mathbf{f} : T \to F$.

Dem: Es consecuencia directa de las definiciones y se deja como ejercicio. ■

Obsérvese que la proposición 3.34 nos dice que la convergencia uniforme, como indica su nombre, es una noción uniforme. Es decir, si ρ, ρ' son dos distancias uniformemente equivalentes en F y la sucesión $\mathbf{f}_n : T \to F$ converge uniformemente hacia $\mathbf{f} : T \to F$ con la distancia ρ, también converge uniformemente con la distancia ρ'.

Proposición 3.35 [Condición de Cauchy] *Si el espacio métrico* (F, ρ) *es completo, una condición necesaria y suficiente para que la sucesión* $\mathbf{f}_n : T \to F$ *sea uniformemente convergente es que cumpla la condición de Cauchy: Para cada* $\epsilon > 0$ *existe* $n(\epsilon) \in \mathbb{N}$ *tal que* $[q > p \geq n(\epsilon),\ \ t \in T] \ \Rightarrow\ \rho(\mathbf{f}_p(t), \mathbf{f}_q(t)) \leq \epsilon$.

Dem: La demostración de que la condición es necesaria es inmediata y se deja al cuidado del lector.

La condición es suficiente: Para cada $t \in T$ es $\rho(\mathbf{f}_p(t), \mathbf{f}_q(t)) \leq \rho_T(\mathbf{f}_p, \mathbf{f}_q)$, luego $\mathbf{f}_n(t)$ es una sucesión de Cauchy en el espacio métrico completo (F, ρ) y por lo tanto converge hacia un punto $\mathbf{f}(t) \in F$. Así queda establecido que la sucesión es puntualmente convergente y debemos verificar que la convergencia es uniforme.

Dado $\epsilon > 0$ si $q > p \geq n(\epsilon)$, para todo $t \in T$ se cumple $\rho(\mathbf{f}_p(t), \mathbf{f}_q(t)) \leq \epsilon$. Fijando $t \in T$ y pasando al límite cuando $q \to +\infty$ la última desigualdad se convierte en $\rho(\mathbf{f}_p(t), \mathbf{f}(t)) \leq \epsilon$, que resulta válida para todo $t \in T$ y todo $p > n(\epsilon)$. ■

Métrica de la convergencia uniforme. Sea F^T el conjunto de las aplicaciones $\mathbf{f} : T \to F$. Cuando la distancia ρ es acotada, para cada $\mathbf{f}, \mathbf{g} \in F^T$ el supremo

$$\rho_T(\mathbf{f}, \mathbf{g}) = \sup\{\rho(\mathbf{f}(t), \mathbf{g}(t)) : t \in T\} < +\infty$$

es finito y define una distancia en F^T tal que las sucesiones convergentes en el espacio métrico (F^T, ρ_T) son precisamente las uniformemente convergentes, es decir la convergencia uniforme se metriza con la distancia ρ_T.

Cuando la distancia ρ no es acotada, podemos sustituir ρ por una distancia acotada uniformemente equivalente (p.e. $\rho'(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \min\{1, \rho(\mathbf{x}, \mathbf{y})\}$). Como la convergencia uniforme con una distancia equivale a la convergencia uniforme con otra distancia uniformemente equivalente también es posible, en este caso, metrizar la convergencia uniforme. Cuando T es un subconjunto abierto de $\mathbb{R}^n$ también se puede demostrar que la convergencia uniforme sobre compactos es metrizable.

Cuando T es un espacio métrico (o más generalmente, un espacio topológico) el teorema 3.31 asegura que el conjunto $C(T, F)$ formado por las funciones continuas $\mathbf{f} : T \to F$, es un subconjunto cerrado del espacio métrico (F^T, ρ_T).

Si la distancia ρ es acotada la proposición 3.35 se puede reformular diciendo que si el espacio métrico (F,ρ) es completo entonces (F^T,ρ_T) también lo es.

Cuando $(F,\| \|)$ es un espacio normado el subconjunto $l^\infty(T,E)$ de F^T formado por las aplicaciones acotadas de T en F, es un espacio vectorial en el que se puede definir la norma de la convergencia uniforme

$$\|\mathbf{f}\|_T = \sup\{\|\mathbf{f}(t)\| : t \in T\}$$

llamada así porque con ella se metriza la convergencia uniforme en $l^\infty(T,F)$. En virtud de 3.35 el espacio normado $(l^\infty(T,F), \| \|_T)$ es completo si $(F,\| \|)$ lo es. Cuando T es un espacio métrico compacto $C(T,F)$ es un subespacio vectorial cerrado de $(l^\infty(T,F), \| \|_T)$ y por lo tanto será completo cuando $(F,\| \|)$ lo sea.

Convergencia uniforme de series. Para funciones con valores en un espacio normado $(F,\| \|)$ se pueden considerar series $\sum_{n=1}^\infty \mathbf{f}_n$ de funciones $\mathbf{f}_n : T \to F$. Se dice que la serie converge puntualmente (resp. uniformemente) si la sucesión de sumas parciales $\mathbf{s}_m(t) = \sum_{n=1}^m \mathbf{f}_n(t)$ tiene la correspondiente propiedad. En ese caso queda definida en T la función suma

$$\mathbf{f}(t) = \sum_{n=1}^\infty \mathbf{f}_n(t)$$

Con demostraciones análogas a las del caso de funciones numéricas (véase el apéndice A) se establecen los criterios de convergencia uniforme de series que llevan los nombres de Weierstrass, Abel y Dirichlet, que se pueden ver en el apéndice C.2.

3.7. Ejercicios resueltos

Ejercicio 3.36 *Sean (E,d), (F,d') espacios métricos y $\mathbf{f} : E \to F$ una biyección continua tal que $\mathbf{f}^{-1}(K)$ es compacto en E para cada compacto $K \subset F$. Demuestre que $\mathbf{f}^{-1}$ es continua.*

SOLUCIÓN

Demostraremos que $\mathbf{f}^{-1}$ es continua usando la caracterización de la continuidad por sucesiones 3.5. Basta demostrar que si la sucesión $\mathbf{y}_n \in F$ converge hacia $\mathbf{b} \in F$ entonces $\mathbf{x}_n = \mathbf{f}^{-1}(\mathbf{y}_n)$ converge hacia $\mathbf{a} = \mathbf{f}^{-1}(\mathbf{b})$. Según 2.6.23 el conjunto $K = \{\mathbf{y}_n : n \in \mathbb{N}\} \cup \{\mathbf{b}\}$ es compacto en F y en virtud de la hipótesis $\mathbf{f}^{-1}(K)$ es compacto en E. Como la sucesión $(\mathbf{x}_n)$ está en este compacto, para ver que converge hacia $\mathbf{a} = \mathbf{f}^{-1}(\mathbf{b})$ basta comprobar que $\mathbf{a}$ es su único punto de aglomeración (véase 2.8).

En efecto, si $\mathbf{x} = \lim_k \mathbf{x}_{n_k}$ es un punto de aglomeración de la sucesión $(\mathbf{x}_n)$, en virtud de la continuidad de $\mathbf{f}$ en $\mathbf{x}$ se tiene $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \lim_k \mathbf{f}(\mathbf{x}_{n_k}) = \lim_k \mathbf{y}_{n_k}$. Como la sucesión $\mathbf{y}_n$ era convergente hacia $\mathbf{b}$ lo mismo le ocurre a la subsucesión $\mathbf{y}_{n_k}$, luego $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{b}$ y por lo tanto $\mathbf{x} = \mathbf{a}$ (ya que $\mathbf{f}$ es inyectiva). ■

Ejercicio 3.37 *Demuestre que toda función monótona continua y acotada $f : I \to \mathbb{R}$ definida en un intervalo cerrado no acotado I (de la forma $[a, +\infty)$, $(-\infty, a]$, ó $(-\infty, +\infty)$) es uniformemente continua.*

SOLUCIÓN

Consideremos primero el caso $I = [a, +\infty)$.
Al ser f monótona y acotada, existe el límite $\lim_{x \to +\infty} f(x) = l$ luego dado $\epsilon > 0$ existe $b > a$ tal que $x \geq b \Rightarrow |f(x) - l| < \epsilon/2$. Por lo tanto, en virtud de la desigualdad triangular

$$x, y \in [b, +\infty) \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq |f(x) - l| + |f(y) - l| < \epsilon/2 + \epsilon/2 = \epsilon$$

Por otra parte, como la función continua f es uniformemente continua sobre el intervalo compacto $[a, b+1]$ existe $\delta \in (0, 1)$ tal que

$$x, y \in [a, b+1] \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \epsilon$$

Entonces se cumple

$$x, y \in [a, +\infty), \quad |x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \epsilon$$

Para ver esto, basta tener en cuenta que al ser $|x - y| < \delta < 1$, o bien ambos puntos x, y están en $[a, b+1]$ ó ambos puntos están en $[b, +\infty)$ (si un punto x cumple $x \geq b + 1 > b$ entonces el otro punto y cumple $y \geq b$). ■

Ejercicio 3.38 *Sean (E, d), (F, ρ) espacios métricos, $M \subset E$, y $a \in M'$. Se supone que la sucesión $\mathbf{f}_n : M \to F$ converge uniformemente hacia $\mathbf{f} : M \to F$ y que cada $\mathbf{f}_n$ tiene límite $\mathbf{b}_n$ cuando $t \to a$. Si el espacio métrico (F, ρ) es completo, demuestre que existen y son iguales los límites $\lim_{t \to a} \mathbf{f}(t) = \lim_n \mathbf{b}_n$, es decir*

$$\lim_{t \to a} (\lim_n \mathbf{f}_n(t)) = \lim_n (\lim_{t \to a} \mathbf{f}_n(t))$$

SOLUCIÓN

Como (F, ρ) se supone completo, para ver que la sucesión $(\mathbf{b}_n)$ converge basta demostrar que es de Cauchy. Dado $\epsilon > 0$, según la condición de Cauchy para la convergencia uniforme (proposición 3.35) existe $n(\epsilon) \in \mathbb{N}$ tal que si $p > q \geq n(\epsilon)$ entonces

$$\rho(\mathbf{f}_p(t), \mathbf{f}_q(t)) \leq \epsilon/3 \quad \text{para todo } t \in M$$

Por otra parte, una vez que hemos fijado $p > q \geq n(\epsilon)$, usando la definición de $\mathbf{b}_p$ $\mathbf{b}_q$ como límites, podemos encontrar $z \in M$, próximo al punto a, verificando las dos desigualdades

$$\rho(\mathbf{b}_p, \mathbf{f}_p(z)) < \epsilon/3, \quad \rho(\mathbf{b}_q, \mathbf{f}_q(z)) < \epsilon/3.$$

Combinando las desigualdades anteriores, se obtiene

$$\rho(\mathbf{b}_p, \mathbf{b}_q) \leq \rho(\mathbf{b}_p, \mathbf{f}_p(z)) + \rho(\mathbf{f}_p(z), \mathbf{f}_q(z)) + \rho(\mathbf{f}_q(z), \mathbf{b}_q) \leq \epsilon/3 + \epsilon/3 + \epsilon/3 = \epsilon$$

Queda demostrado que $(\mathbf{b}_n)$ es una sucesión de Cauchy, luego existe el límite $\mathbf{b} = \lim_n \mathbf{b}_n$, y para terminar tenemos que demostrar que $\lim_{t \to a} \mathbf{f}(t) = \mathbf{b}$.

Fijado $\epsilon > 0$, en virtud de la convergencia de $(\mathbf{b}_n)$ y de la convergencia uniforme de $(\mathbf{f}_n)$, existe $m \in \mathbb{N}$ que verifica simultáneamente

$$\rho(\mathbf{b}_m, \mathbf{b}) < \epsilon/3, \quad \rho(\mathbf{f}_m(t), \mathbf{f}(t)) \leq \epsilon/3 \quad \text{para todo } t \in M.$$

Como $\mathbf{b}_m = \lim_{t \to a} \mathbf{f}_m(t)$, existe $\delta > 0$ tal que si $t \in M$ y $0 < d(t,a) < \delta$ se verifica $\rho(\mathbf{f}_m(t), \mathbf{b}_m) < \epsilon/3$. Por lo tanto, cuando $t \in M$, y $0 < d(t,a) < \delta$, se cumple

$$\rho(\mathbf{f}(t), \mathbf{b}) \leq \rho(\mathbf{f}(t), \mathbf{f}_m(t)) + \rho(\mathbf{f}_m(t), \mathbf{b}_m) + \rho(\mathbf{b}_m, \mathbf{b}) \leq \epsilon/3 + \epsilon/3 + \epsilon/3 = \epsilon.$$

■

Ejercicio 3.39 *Sean (E,d), (F,ρ) espacios métricos y $M \subset E$. Una sucesión $\mathbf{f}_n : M \to F$ se dice que es equicontinua en $a \in M$ si para cada $\epsilon > 0$ existe $\delta(\epsilon) > 0$ tal que para todo $t \in M$ con $d(t,a) < \delta$ y todo $n \in \mathbb{N}$ se cumple $\rho(\mathbf{f}_n(t), \mathbf{f}_n(a)) < \epsilon$. (Es decir, todas las funciones $\mathbf{f}_n$ son continuas en a y la condición de continuidad se cumple con un número $\delta(\epsilon)$ que sirve para todas las funciones a la vez) Demuestre las siguientes afirmaciones:*
a) Si $\mathbf{f}_n : M \to F$ es una sucesión equicontinua en $a \in M$ que converge puntualmente hacia $\mathbf{f} : M \to F$, entonces $\mathbf{f}$ es continua en a.
b) Si $\mathbf{f}_n : M \to F$ es una sucesión equicontinua en cada $t \in M$ que converge puntualmente hacia $\mathbf{f} : M \to F$, entonces $\mathbf{f}_n$ converge uniformemente sobre compactos hacia $\mathbf{f}$.

solución

a) Por la equicontinuidad en a, dado $\epsilon > 0$, existe $\delta(\epsilon) > 0$ tal que

$$[t \in M,\ d(t,a) < \delta(\epsilon)] \Rightarrow [\rho(\mathbf{f}_n(t), \mathbf{f}_n(a)) < \epsilon \ \text{ para todo } n \in \mathbb{N}]$$

Fijado $t \in M$ con $d(t,a) < \delta(\epsilon)$, la desigualdad $\rho(\mathbf{f}_n(t), \mathbf{f}_n(a)) \leq \epsilon$ se cumple para todo $n \in \mathbb{N}$, y pasando al límite la desigualdad se conserva. Se obtiene así que $[t \in M,\ d(t,a) < \delta(\epsilon)] \Rightarrow \rho(\mathbf{f}(t), \mathbf{f}(a)) \leq \epsilon$, luego $\mathbf{f}$ es continua en a.
b) Por la equicontinuidad, para cada $\epsilon > 0$, y cada $t \in M$ existe $\delta_t > 0$ tal que

$$[s \in M,\ d(s,t) < \delta_t,\ n \in \mathbb{N}] \Rightarrow \rho(\mathbf{f}_n(s), \mathbf{f}_n(t)) < \epsilon$$

Según el apartado a) $\mathbf{f}$ es continua en cada $t \in M$, luego podemos suponer que cada δ_t ha sido elegido de modo que también cumpla la condición

$$s \in M, \quad d(s,t) < \delta_t \Rightarrow \rho(\mathbf{f}(s), \mathbf{f}(t)) < \epsilon$$

Dado un compacto $K \subset M$, la familia de las bolas abiertas $\{B(t, \delta_t) : t \in K\}$ recubre K luego existe un conjunto finito $H \subset K$ tal que $K \subset \bigcup_{a \in H} B(t, \delta_t)$. Como H es finito, por la convergencia puntual de la sucesión, existe $m \in \mathbb{N}$ tal

que para todo $n \geq m$ y todo $t \in H$ se cumple $\rho(\mathbf{f}_n(t), \mathbf{f}(t)) < \epsilon$.
Entonces, para todo $n \geq m$ y todo $s \in K$ se cumple $\rho(\mathbf{f}_n(s), \mathbf{f}(s)) \leq 3\epsilon$, pues dado $s \in K$ existe $t \in H$ tal que $s \in B(t, \delta_t)$, y por lo tanto

$$\rho(\mathbf{f}_n(s), \mathbf{f}(s)) \leq \rho(\mathbf{f}_n(s), \mathbf{f}_n(t)) + \rho(\mathbf{f}_n(t), \mathbf{f}(t)) + \rho(\mathbf{f}(t), \mathbf{f}(s)) \leq \epsilon + \epsilon + \epsilon = 3\epsilon$$

■

Ejercicio 3.40 *Sea $\mathcal{P}_m$ el conjunto de los polinomios de grado $\leq m$. Demuestre que para cada $k \in [1, 2, \cdots m]$ existe $C_k > 0$ tal que para todo $p \in \mathcal{P}_m$, y todo $a \in [0, 1]$ se cumple*

$$|p^{(k)}(a)| \leq C_k \max\{|p(x)| : 0 \leq x \leq 1\}$$

solución

$\mathcal{P}_m$, con la norma de la convergencia uniforme $\|p\|_\infty = \max\{|p(x)| : 0 \leq x \leq 1\}$ es un espacio normado de dimensión finita. Por lo tanto, la aplicación lineal

$$T_k : (\mathcal{P}_m, \| \ \|_\infty) \to (C[0, 1], \| \ \|_\infty), \quad T_k(p) = p^{(k)}$$

es continua y esto significa que existe $C_k > 0$ tal que para todo $p \in \mathcal{P}_m$ se cumple $\|T_k(p)\|_\infty \leq C_k \|p\|_\infty$, luego, para cada $p \in \mathcal{P}_m$ y cada $a \in [0, 1]$, se cumple la desigualdad del enunciado. ■

3.8. Ejercicios propuestos

♢ **3.8.1** *Calcule, si existen, los límites en* $(0,0)$ *de las siguientes funciones*

i) $f(x,y) = \dfrac{y}{x^2+y}$ *si* $x^2+y \neq 0$, $f(x,-x^2) = 0$.

ii) $f(x,y) = \dfrac{x^2+y^2}{x^2+y}$ *si* $x^2+y \neq 0$, $f(x,-x^2) = 0$.

iii) $f(x,y) = \dfrac{xy^2}{x^2+y^4}$ *si* $(x,y) \neq (0,0)$, $f(0,0) = 0$.

iv) $f(x,y) = \dfrac{x-y}{x+y}$ *si* $x+y \neq 0$, $f(x,-x) = 0$.

♢ **3.8.2** *Sea* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, *donde* $f(x,y) = \dfrac{xy}{x^2+y^2}$ *si* $(x,y) \neq (0,0)$, $f(0,0) = 0$. *Compruebe que* f *no es continua pero todas las funciones parciales* $x \to f(x,b)$, $y \to f(a,y)$, *son continuas. Obtenga la clausura de la gráfica de* f.

♢ **3.8.3** *Estudie la continuidad de las siguientes funciones*

i) $f(x,y) = \dfrac{x \operatorname{sen} y}{x^2+y^2}$ *si* $(x,y) \neq (0,0)$, $f(0,0) = 0$.

ii) $f(x,y) = \dfrac{\operatorname{sen}(x^2+y^2)}{x^2+y^2}$ *si* $(x,y) \neq (0,0)$, $f(0,0) = 1$.

iii) $f(x,y) = x$ *si* $|x| \leq |y|$, $f(x,y) = y$ *si* $|x| > |y|$.

iv) $f(x,y) = \dfrac{x}{4x^2+y^2-1}$ *si* $4x^2+y^2 \neq 1$, $f(x,y) = 1$ *si* $4x^2+y^2 = 1$.

v) $f(x,y) = \dfrac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}$ *si* $(x,y) \neq (0,0)$, $f(0,0) = 1$.

vi) $f(x,y) = (x+y)\operatorname{sen}(1/x)\operatorname{sen}(1/y)$ *si* $x \neq 0$, $y \neq 0$, $f(0,y) = f(x,0) = 0$.

vii) $f(x,y) = \dfrac{x+\operatorname{sen}(x+y)}{x+y}$ *si* $x+y \neq 0$, $f(x,-x) = 0$.

viii) $f(x,y) = \dfrac{x}{y}\operatorname{sen}(x^2+y^2)$ *si* $y \neq 0$, $f(x,0) = 0$.

ix) $f(x,y) = \dfrac{x^3}{x^2-y^2}$ *si* $x^2-y^2 \neq 0$, $f(x,y) = 0$ *si* $x^2-y^2 = 0$.

♢ **3.8.4** *Si* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *es derivable se le asocia la función de dos variables*

$$F(x,y) = \frac{f(x)-f(y)}{x-y} \text{ si } x \neq y; \quad F(x,x) = f'(x).$$

Si f' *es continua demuestre que* F *es continua en* $\mathbb{R}^2$. *Considerando la función* $f(t) = t^2 \operatorname{sen}(1/t)$ *si* $t \neq 0$, $f(0) = 0$, *muestre que el resultado es falso cuando* f' *no es continua.*

♢ **3.8.5** *Demuestre que $K \subset \mathbb{R}^n$ es compacto si y sólo si toda función continua de K en $\mathbb{R}$ es acotada.*

♢ **3.8.6** *Si (E, d) es un espacio métrico, $\mathbf{x} \in E$ y A, B son subconjuntos no vacíos de E, se define*

$$d(\mathbf{x}, B) = \inf\{d(\mathbf{x}, \mathbf{b}) : \mathbf{b} \in B\}; \quad d(A, B) = \inf\{d(\mathbf{a}, \mathbf{b}) : \mathbf{a} \in A, \mathbf{b} \in B\}.$$

Demuestre las siguientes afirmaciones:

a) La aplicación $\mathbf{x} \to d(\mathbf{x}, A)$ es uniformemente continua y $\mathbf{x} \in \overline{A}$ si y sólo si $d(\mathbf{x}, A) = 0$.

b) Si $A, B \subset E$ son cerrados disjuntos, existen abiertos disjuntos U, V tales que $A \subset U$ y $B \subset V$.

c) Si A es compacto, $d(A, B) = d(\mathbf{a}, B)$ para algún $\mathbf{a} \in A$. Si además B es cerrado, entonces $d(A, B) > 0$ si y sólo si $A \cap B = \emptyset$. Muestre que esta afirmación es falsa cuando sólo se supone que A y B son cerrados: Obtenga dos cerrados disjuntos $A, B \subset \mathbb{R}^2$ tales que no existen $\mathbf{a} \in A$, $\mathbf{b} \in B$ con $d(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = d(A, B) = 0$.

d) Si $A \subset \mathbb{R}^n$ es cerrado y d es la distancia usual en $\mathbb{R}^n$, entonces para cada compacto $B \subset \mathbb{R}^n$ existen $\mathbf{a} \in A$ y $\mathbf{b} \in B$ tales que $d(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = d(A, B)$. (en particular, para cada $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$ existe $\mathbf{a} \in A$ tal que $d(\mathbf{b}, A) = (\mathbf{b}, \mathbf{a})$).

♢ **3.8.7** *Un subespacio M de un espacio normado $(E, \| \ \|)$ se dice que tiene la propiedad de aproximación óptima si para cada $\mathbf{x} \in E$ existe $\mathbf{p}(\mathbf{x}) \in M$ tal que*

$$\|\mathbf{x} - \mathbf{p}(\mathbf{x})\| = \text{mín}\{\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| : \mathbf{y} \in M\}$$

Demuestre que todo subespacio finito dimensional tiene esta propiedad.

Si $\mathcal{P}_m$ es el conjunto de los polinomios de grado $\leq m$ y $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ es continua, demuestre que existe $q \in \mathcal{P}_m$ tal que para todo $p \in \mathcal{P}_m$ se cumple

$$\text{máx}\{|f(t) - q(t)| : t \in [0, 1]\} \leq \text{máx}\{|f(t) - p(t)| : t \in [0, 1]\}$$

♢ **3.8.8** *Sea (E, d) un espacio métrico completo. A un conjunto abierto $V \subset E$ se le asocia la función $\rho_V(\mathbf{x}) = 1/d(\mathbf{x}, V^c)$. Demuestre que*

$$d_V(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + |\rho_V(\mathbf{x}) - \rho_V(\mathbf{y})|$$

define en V una distancia, equivalente a la inducida por d en V, con la cual (V, d_V) es un espacio métrico completo.

♢ **3.8.9** *Demuestre que $f(\mathbf{x}) = \frac{\|\mathbf{x}\|}{1+\|\mathbf{x}\|}$ es uniformemente continua en todo $\mathbb{R}^n$.*

♢ **3.8.10** *Sea $M = A \cup B \subset \mathbb{R}^n$ donde A y B son conjuntos cerrados. Se supone que $f : M \to \mathbb{R}$ es continua y que $f|_A$, $f|_B$ son uniformemente continuas. Demuestre que f es uniformemente continua cuando alguno de los conjuntos A, B es acotado. Utilice el siguiente ejemplo para mostrar que este resultado es falso cuando A y B no son acotados.*
EJEMPLO: *$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : xy \geq 1\}$, $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : xy \leq -1\}$ y $f : A \cup B \to \mathbb{R}$ definida por $f(x, y) = x$ si $(x, y) \in A$, $f(x, y) = y$ si $xy \in B$.*

♢ **3.8.11** *Demuestre que la función $\dfrac{\operatorname{sen} x + \operatorname{sen} y}{1 + x^2 + y^2}$ es uniformemente continua en $\mathbb{R}^2$ y alcanza un máximo y un mínimo absoluto en $\mathbb{R}^2$.*

♢ **3.8.12** *Sea $f : [0, 1] \times [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ una función continua tal que $|f(x, y)| \leq \varphi(y)$, para todo $x \in [0, 1]$, y todo $y \geq 0$, donde $\varphi : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$, verifica $\lim_{y \to +\infty} \varphi(y) = 0$. Demuestre que f es uniformemente continua. y que $|f|$ alcanza un máximo absoluto.*

♢ **3.8.13** *Estudie la continuidad uniforme de las siguientes funciones en el conjunto A que se indica en cada caso:*

i) $f(x, y) = \dfrac{x}{1 + x^2} + \dfrac{y}{1 + y^2}$; $A = \mathbb{R}^2$.

ii) $f(x, y) = \dfrac{\operatorname{sen}^2(x^2 + y^2 - 1)}{\cos(x^2 + y^2 - 1)}$; $A = \{(x, y) : x^2 + y^2 < 1 + \pi/2\}$.

iii) $f(x, y) = (x + y) \operatorname{sen}(1/x) \operatorname{sen}(1/y)$ *si* $x \neq 0$ *e* $y \neq 0$, $f(0, y) = f(x, 0) = 0$; $A = \{(x, y) : 0 < x \leq 1, 0 < y \leq 1\}$.

iv) $f(x, y) = x + y/x$; $A = \{(x, y) : x \neq 0\}$.

v) $f(x, y) = \dfrac{xy}{x - 1}$; $A = \{(x, y) : x^2 + y^2 < 1\}$.

vi) $f(x, y) = \dfrac{x^3 - y^3}{x^2 + y^2}$ *si* $(x, y) \neq (0, 0)$, $f(0, 0) = 0$; $A = \mathbb{R}^2$.

vii) $f(x, y) = \cos^3\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right)$; $A = \{(x, y) : x^2 + y^2 > 1\}$.

viii) $f(x, y) = (x^2 + y^2) \operatorname{sen}^3(\frac{1}{x^2+y^2})$ *si* $(x, y) \neq (0, 0)$, $f(0, 0) = 0$; $A = \mathbb{R}^2$

ix) $f(x, y) = \dfrac{\operatorname{sen}(x + y)}{|x| + |y|}$, $A = \{(x, y) : x \geq 0, y \geq 0, x + y > 0\}\backslash$.

♢ **3.8.14** *Sea $f : M \to \mathbb{R}$ una función continua en $M = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : 0 < \|\mathbf{x}\|_2 \leq 1\}$. Demuestre que f es uniformemente continua si y sólo si existe el límite $\lim_{\mathbf{x} \to 0} f(\mathbf{x})$.*

♢ **3.8.15** *Si $f : [a, b] \times [c, d] \to \mathbb{R}$ es continua y la sucesión $x_n \in [a, b]$ converge demuestre que la sucesión $f_n(t) = f(x_n, t)$ converge uniformemente sobre $[c, d]$. Demuestre que la sucesión $f_n(t) = (n/t) \log(1 + t/n)$ converge uniformemente sobre $[0, d]$, pero no converge uniformemente sobre $[0, +\infty)$.*

$\diamondsuit$ **3.8.16** *a) Si* $f : [a,b] \times [0,+\infty) \to \mathbb{R}$ *es uniformemente continua y la sucesión* $x_n \in [a,b]$ *converge demuestre que la sucesión* $f_n(t) = f(x_n, t)$ *converge uniformemente sobre* $[0,+\infty)$.
b) Sea $g : [0,1] \times [0,+\infty) \to \mathbb{R}$ *definida por* $g(x,y) = \frac{\log(1+xy)}{xy}$ *si* $xy \neq 0$; $g(x,y) = 1$ *si* $xy = 0$. *Utilice a) para demostrar que la sucesión* $f_n(t) = (n/t)\log(1 + t/n)$ *converge uniformemente sobre cada intervalo* $[0,r]$. *Compruebe que la sucesión* f_n *no converge uniformemente sobre* $[0,+\infty)$ *y obtenga que* g *no es uniformemente continua.*

$\diamondsuit$ **3.8.17** *Sean* T, E *espacios métricos y* $f_n : T \to E$ *una sucesión de funciones continuas que converge uniformemente sobre* $A \subset T$. *Si* E *es completo, demuestre que la sucesión también converge uniformemente sobre* $\overline{A}$.

$\diamondsuit$ **3.8.18** *Sean* (E,d), (F,d') *espacios métricos y* $f_n : E \to F$ *una sucesión que converge uniformemente sobre compactos hacia* $f : E \to F$. *Si* $g : F \to \mathbb{R}$ *es uniformemente continua compruebe que* $g \circ f_n$ *converge uniformemente sobre compactos. Demuestre el mismo resultado cuando sólo se supone que* g *es continua, pero todas las funciones* f_n *son continuas.*

$\diamondsuit$ **3.8.19** *Sea* K *un subconjunto compacto de un espacio métrico* (E,d) *y* $f_n : K \to \mathbb{R}$ *una sucesión de funciones continuas que converge puntualmente hacia una función continua* $f : K \to \mathbb{R}$. *Si la sucesión* $f_n(\mathbf{x})$ *es decreciente para todo* $\mathbf{x} \in K$, *demuestre que la sucesión* f_n *es uniformemente convergente sobre* K.

$\diamondsuit$ **3.8.20** *Sean* (E,d), (F,d') *espacios métricos y* $f_n : E \to F$ *una sucesión que converge uniformemente hacia* $f : E \to F$. *Demuestre las siguientes afirmaciones:*

a) Si cada f_n *es uniformemente continua entonces* f *también lo es.*

b) Si $g : F \to \mathbb{R}$ *es uniformemente continua entonces* $g \circ f_n$ *es uniformemente convergente.*

$\diamondsuit$ **3.8.21** *Se dice que* $\mathbf{g} : [a,b] \to E$ *es escalonada cuando existe una subdivisión* $p = (t_0 < t_1 < t_2 \cdots t_m)$ *de* $[a,b]$ *tal que* $\mathbf{g}$ *es constante en cada intervalo* (t_{i-1}, t_i), $(1 \leq i \leq m)$. *Una función* $\mathbf{f} : [a,b] \to E$ *con valores en un espacio normado* E *se dice que es* reglada *cuando es límite uniforme de una sucesión de funciones escalonadas. Demuestre que a)* $\Rightarrow$ *b)* $\Rightarrow$ *c), y que si* E *es completo entonces a)* $\Leftrightarrow$ *b).*
a) Todas las discontinuidades de $\mathbf{f} : [a,b] \to E$ *son de primera especie (e.d. en cada* $t \in (a,b)$ *existen los límites laterales* $\mathbf{f}(t-), \mathbf{f}(t+)$ *y cuando* $x = t$ *ó* $t = b$ *existe el correspondiente límite lateral).*
b) $\mathbf{f}$ *es reglada.*
c) El conjunto de las discontinuidades de $\mathbf{f}$ *es numerable.*

$\diamondsuit$ **3.8.22** *Demuestre que la gráfica* $G(\mathbf{f}) = \{(\mathbf{x},\mathbf{y}) \in E \times F : \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{y}\}$ *de una función continua* $\mathbf{f} : (E,d) \to (F,d')$ *es un subconjunto cerrado de* $E \times F$. *Muestre que el recíproco es falso en general pero es cierto cuando* F *es compacto. Demuestre que* $G(\mathbf{f})$ *es compacto en* $E \times F$ *si y sólo si* E *es compacto.*

$\diamondsuit$ **3.8.23** *Si el espacio métrico* (E, d) *es compacto y* $\mathbf{f} : E \to E$ *verifica*

$$d(\mathbf{f}(\mathbf{x}), \mathbf{f}(\mathbf{y})) < d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \quad \textit{para todo} \quad (\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in E \times E, \ \mathbf{x} \neq \mathbf{y}$$

demuestre que $\mathbf{f}$ *tiene un punto fijo. (Indicación: Considere* $g(\mathbf{x}) = d(\mathbf{x}, \mathbf{f}(\mathbf{x}))$*))*

$\diamondsuit$ **3.8.24** *Sea* (E, d) *un espacio métrico compacto. Si* $\mathbf{g} : E \to E$ *cumple*

$$d(\mathbf{g}(\mathbf{x}), \mathbf{g}(\mathbf{y})) \geq d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \textit{ para todo } (\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in E \times E$$

demuestre que $\mathbf{g}$ *es una isometría.*

$\diamondsuit$ **3.8.25** *Sea* $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \cdots a_n) \in \mathbb{R}^n$ *y* $f_{\mathbf{a}} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *la forma lineal definida por* $f_{\mathbf{a}}(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n a_i x_i$. *Demuestre que* $\|f_{\mathbf{a}}\|_1 = \|\mathbf{a}\|_\infty$, $\|f_{\mathbf{a}}\|_2 = \|\mathbf{a}\|_2$, *y* $\|f_{\mathbf{a}}\|_\infty = \|\mathbf{a}\|_1$.

$\diamondsuit$ **3.8.26** *Sea* $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ *la aplicación lineal definida por* $A(\mathbf{x}) = \mathbf{y}$, *donde* $y_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j$, $\ 1 \leq i \leq m$. *Compruebe, para* $p = 1, \infty$, *que la norma* $\|A\|_p = \sup\{\|A(\mathbf{x})\|_p : \|\mathbf{x}\|_p \leq 1\}$, *viene dada por*

$$\|A\|_1 = \max\{\sum_{i=1}^m |a_{ij}| : 1 \leq j \leq n\}; \quad \|A\|_\infty = \max\{\sum_{j=1}^n |a_{ij}| : 1 \leq i \leq m\}.$$

$\diamondsuit$ **3.8.27** *Sea* $(E, \| \ \|)$ *un espacio normado, que no se supone completo, cuya norma procede de un producto escalar. Utilice el resultado del problema 3.8.27 para demostrar que si* $A \subset E$ *es un conjunto cerrado convexo contenido en un subespacio finito dimensional de* E *entonces existe un único* $\mathbf{a} \in A$ *que verifica*

$$\|\mathbf{a}\| = \min\{\|\mathbf{x}\| : \mathbf{x} \in A\}$$

$\diamondsuit$ **3.8.28** *Si* $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ *es continua, para cada* $f \in C[a, b]$ *se define* $T_g(f) = \int_a^b f(t) g(t) dt$. *Demuestre que la forma lineal* $T_g : C[a, b] \to \mathbb{R}$ *es continua para las tres normas* $\| \ \|_1, \| \ \|_2, \| \ \|_\infty$.

$\diamondsuit$ **3.8.29** *Sea* $\mathcal{P}[0, 1]$ *el subespacio de* $C[0, 1]$ *formado por las funciones polinomiales, dotado con la norma de la convergencia uniforme* $\| \ \|_\infty$. *Compruebe que la aplicación lineal* $T : \mathcal{P}[0, 1] \to \mathbb{R}$ *definida por* $T(p) = p(2)$ *no es continua.*

$\diamondsuit$ **3.8.30** *Demuestre que una sucesión de polinomios de grado* $\leq m$, $p_n = \sum_{k=0}^m a_k(n) x^k$ *es uniformemente convergente en un intervalo* $[a, b]$ *si y sólo si para cada* $k \in \{0, 1, 2, \cdots m\}$ *la sucesión* $(a_k(n))_{n \in \mathbb{N}}$ *converge, y en ese caso el limite uniforme es el polinomio* $p(x) = \sum_{k=0}^m a_k x^k$ *de coeficientes* $a_k = \lim_n a_k(n)$, $1 \leq k \leq m$.