Capítulo 7

Desarrollo de Taylor

Funciones diferenciables m veces y funciones de clase C^m. Polinomio de Taylor. Serie de Taylor de una función de clase C^∞

En este capítulo seguimos considerando funciones de n variables reales con valores en un espacio vectorial normado. Como esto involucra, en los resultados centrales relativos al desarrollo de Taylor, la consideración de polinomios con coeficientes vectoriales, el lector que no se encuentre cómodo considerando estos polinomios generalizados puede suponer que las funciones toman valores reales.

Si $\mathbf{f}$ es diferenciable en $\mathbf{a}$, la definición de diferencial asegura que $\mathbf{P}_1(\mathbf{x}-\mathbf{a}) = \mathbf{f}(\mathbf{a})+\sum_{j=1}^n D_j\mathbf{f}(\mathbf{a})(x_j-a_j)$ es un polinomio de primer grado en las n variables reales $x_1, x_2, \cdots x_n$, con coeficientes en F, con el que se consigue una aproximación local de primer orden de $\mathbf{f}$ en el punto $\mathbf{a}$, es decir $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{P}_1(\mathbf{x}-\mathbf{a}) + \mathbf{R}_1(\mathbf{x}-\mathbf{a})$ donde $\mathbf{R}_1(\mathbf{x}-\mathbf{a}) = o(\|\mathbf{x}-\mathbf{a}\|)$. En el capítulo 6 ya se ha visto que si $\mathbf{f}$ es diferenciable 2 veces en $\mathbf{a} \in \Omega$, entonces hay un polinomio de grado 2, en las variables $x_1, x_2, \cdots, x_n$, que proporciona una aproximación local de orden 2, de la función $\mathbf{f}$, en el punto $\mathbf{a}$.

En este capítulo, después de considerar la noción de función m veces diferenciable y de función de clase C^m, extendemos el resultado al caso de una función diferenciable m veces en un punto. En este caso hay un polinomio de grado m, en las variables $x_1, x_2, \cdots, x_n$, con coeficientes en F, llamado polinomio de Taylor de $\mathbf{f}$ en $\mathbf{a}$, que proporciona una aproximación local de orden m, de la función $\mathbf{f}$ en el punto $\mathbf{a}$. Esto significa que el polinomio de Taylor $\mathbf{P}_m(\mathbf{x}-\mathbf{a}) = \mathbf{P}_m(x_1-a_1, x_2-a_2, \cdots x_n-a_n)$, (que conviene escribir usando potencias de $x_j - a_j$) cumple la condición

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{P}_m(\mathbf{x}-\mathbf{a}) + \mathbf{R}_m(\mathbf{x}-\mathbf{a}) \text{ donde } \mathbf{R}_m(\mathbf{x}-\mathbf{a}) = o(\|\mathbf{x}-\mathbf{a}\|^m)$$

Cuando $\mathbf{f}$ es de clase C^{m+1} se puede conseguir una fórmula explícita, en forma de integral, para el término complementario $\mathbf{R}_m(\mathbf{x}-\mathbf{a})$ y acotaciones útiles de este término. Esta fórmula integral requiere la consideración de la integral de una función continua $\mathbf{f} : [a,b] \to F$ con valores en un espacio normado completo $(F, \| \ \|)$, que el lector interesado puede consultar en el apéndice D.

Los resultados de este capítulo se pueden completar con la breve incursión a la teoría de las funciones analíticas de varias variables reales que se ofrece, como material de carácter complementario, en el apéndice G. Allí se presenta una caracterización útil de estas funciones y se mencionan, a título informativo, algunos resultados de carácter básico.

7.1. Funciones diferenciables m veces

Para $m > 2$ las derivadas parciales de orden m se definen análogamente a como se han definido las derivadas parciales de segundo orden y se usan notaciones análogas. Para una función de n-variables reales $\mathbf{f}(x_1, x_2, \cdots, x_n)$, con valores en un espacio normado $(F, \| \ \|)$ la derivada tercera $D_{ijk}\mathbf{f}(\mathbf{a})$, si existe, es la que resulta al derivar respecto a la variable x_i la función de n variables $D_{jk}\mathbf{f}(x_1, x_2, \cdots, x_n)$. También se usa la notación

$$\frac{\partial^3 \mathbf{f}}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k}(\mathbf{a}); \qquad \frac{\partial^3 \mathbf{f}}{\partial x_i^3}(\mathbf{a}) \text{ si } i = j = k.$$

Si hay dos índices repetidos p.e. $i = j \neq k$, cuando se pueda asegurar que el orden de derivación es indiferente (véase el corolario 6.5) el valor común de las derivadas $D_{iik}\mathbf{f}(\mathbf{a}) = D_{iki}\mathbf{f}(\mathbf{a}) = D_{kii}\mathbf{f}(\mathbf{a})$, se designará con la notación habitual

$$\frac{\partial^3 \mathbf{f}}{\partial x_i^2 \partial x_k}(\mathbf{a}) = \frac{\partial^3 \mathbf{f}}{\partial x_k \partial x_i^2}(\mathbf{a})$$

En el caso de funciones de tres variables, $\mathbf{f}(x, y, z)$, para las derivadas parciales de tercer orden también se usan las notaciones $\mathbf{f}_{xxx}$, $\mathbf{f}_{xxy}$, $\mathbf{f}_{xxz}$, $\mathbf{f}_{xyx}$, $\mathbf{f}_{xyz}$, etc. cuyo significado es claro.

Según las observaciones que siguen a la definición 6.1 toda función $\mathbf{f} : \Omega \to F$ de clase $C^2(\Omega, F)$ es diferenciable dos veces en Ω, lo que significa que las derivadas parciales $D_j\mathbf{f}$, $1 \leq j \leq n$, están definidas y son diferenciables en Ω. En este caso todas las derivadas parciales de segundo orden $D_{ij}\mathbf{f}$ están definidas en Ω y en virtud de 6.4 en todo punto $\mathbf{x} \in \Omega$ se cumple la condición de simetría:

$$D_{ij}\mathbf{f}(\mathbf{x}) = D_{ji}\mathbf{f}(\mathbf{x}) \text{ para todo par } i, j \in \{1, 2, \cdots n\}$$

Si $\mathbf{f} : \Omega \to F$ es diferenciable dos veces en un abierto $V \subset \Omega$ y todas las derivadas parciales de segundo orden $D_{ij}\mathbf{f} : V \to F$ son diferenciables en $\mathbf{a} \in V$, se dice que $\mathbf{f}$ es diferenciable tres veces en $\mathbf{a}$. En este caso existen las derivadas parciales de tercer orden $D_{kij}\mathbf{f}(\mathbf{a}) = D_k D_{ij}\mathbf{f}(\mathbf{a})$, $1 \leq k, i, j \leq n$, y se cumple

$$\text{i)} \quad D_{kij}\mathbf{f}(\mathbf{a}) = D_{kji}\mathbf{f}(\mathbf{a}) \qquad \text{ii)} \quad D_{kij}\mathbf{f}(\mathbf{a}) = D_{ikj}\mathbf{f}(\mathbf{a})$$

La igualdad i) es consecuencia de la igualdad $D_{ij}\mathbf{f}(\mathbf{x}) = D_{ji}\mathbf{f}(\mathbf{x})$ válida en todo $\mathbf{x} \in V$. La igualdad ii) se cumple porque $D_j\mathbf{f}(\mathbf{x})$ es dos veces diferenciable en $\mathbf{a}$ y por lo tanto $D_{ki}(D_j\mathbf{f})(\mathbf{a}) = D_{ik}(D_j\mathbf{f})(\mathbf{a})$. Combinando i) y ii) se concluye que $D_{j_1 j_2 j_3}\mathbf{f}(\mathbf{a}) = D_{j_{\sigma(1)} j_{\sigma(2)} j_{\sigma(3)}}\mathbf{f}(\mathbf{a})$ para cada permutación σ de $\{1, 2, 3\}$.

La definición de función diferenciable m veces se hace por recurrencia: Se suponen definidas las funciones diferenciables $m - 1$ veces en un abierto $V \subset \Omega$, lo que lleva consigo la existencia en V de todas las derivadas parciales de orden $m - 1$.

Definición 7.1 *Se dice que* $\mathbf{f} : \Omega \to F$ *es diferenciable* m *veces en* $\mathbf{a} \in \Omega$ *si hay un entorno abierto de* $\mathbf{a}$*,* $V_{\mathbf{a}} \subset \Omega$*, donde* $\mathbf{f}$ *es diferenciable* $m-1$ *veces y todas sus derivadas parciales de orden* $m-1$ *son diferenciables en* $\mathbf{a}$.

Evidentemente, $\mathbf{f}$ es diferenciable m veces en $\mathbf{a}$ si y sólo si existe un entorno abierto de $\mathbf{a}$, $V_{\mathbf{a}} \subset \Omega$, donde $\mathbf{f}$ es diferenciable y todas las derivadas parciales $D_1\mathbf{f}$, $D_2\mathbf{f}$, ..., $D_n\mathbf{f}$, que están definidas en $V_{\mathbf{a}}$, son diferenciables $m-1$ veces en $\mathbf{a}$.

Proposición 7.2 *Sea* $\Omega \subset \mathbb{R}$ *abierto y* $\mathbf{f} : \Omega \to F$ *una función diferenciable* m *veces en* $\mathbf{a} \in \Omega$ *(*$m \geq 2$*). Entonces existen todas las derivadas parciales de orden* m*,* $D_{j_1 j_2 \cdots j_m}\mathbf{f}(\mathbf{a})$*,* $1 \leq j_1, j_2 \cdots j_m \leq n$*, y se verifica la condición de simetría:* $D_{j_1 j_2 \cdots j_m}\mathbf{f}(\mathbf{a}) = D_{j_{\sigma(1)} j_{\sigma(2)} \cdots j_{\sigma(m)}}\mathbf{f}(\mathbf{a})$*, para toda permutación* σ *de* $\{1, 2 \cdots m\}$.

DEM: Ya sabemos que el resultado es cierto para $m = 2$ y $m = 3$. La demostración general se puede hacer por inducción sobre m. Para ello suponemos que el resultado es cierto para $m - 1 \geq 1$. Si $\mathbf{f} : \Omega \to F$ es diferenciable m veces en $\mathbf{a}$, sus derivadas de orden $m-1$ están definidas en un entorno abierto de $\mathbf{a}$, $V_{\mathbf{a}} \subset \Omega$, y en todo $\mathbf{x} \in V_{\mathbf{a}}$ se cumple la condición de simetría de orden $m-1$: Para toda permutación σ de $\{2, 3, \cdots m\}$ y todo $\mathbf{x} \in V_{\mathbf{a}}$ se verifica $D_{j_2 j_3 \cdots j_m}\mathbf{f}(\mathbf{x}) = D_{j_{\sigma(2)} j_{\sigma(3)} \cdots j_{\sigma(m)}}\mathbf{f}(\mathbf{x})$, luego

$$D_{j_1 j_2 j_3, \cdots j_m}\mathbf{f}(\mathbf{a}) = D_{j_1 j_{\sigma(2)} j_{\sigma(3)} \cdots j_{\sigma(m)}}\mathbf{f}(\mathbf{a})$$

es decir, se cumple la condición de simetría de orden m cuando σ es una permutación de $\{1, 2 \cdots m\}$ que cumple $\sigma(1) = 1$.

Por otra parte, como $D_{j_3 \cdots j_m}\mathbf{f}(\mathbf{x})$ es diferenciable dos veces en $\mathbf{a}$, en virtud del teorema de Young 6.4, se cumple

$$D_{ij j_3 \cdots j_m}\mathbf{f}(\mathbf{a}) = D_{ji j_3 \cdots j_m}\mathbf{f}(\mathbf{a})$$

luego también se cumple la condición de simetría de orden m cuando σ es la permutación de $\{1, 2, \cdots m\}$ definida por $\sigma(1) = 2$, $\sigma(2) = 1$, $\sigma(k) = k$ si $3 \leq k \leq m$.

Para terminar la demostración basta tener en cuenta que cualquier permutación σ de $\{1, 2, \cdots m\}$ se puede obtener componiendo permutaciones de los dos tipos para los que hemos demostrado la validez de la condición de simetría. ■

Si $\mathbf{f} : \Omega \to F$ es diferenciable m veces en $\mathbf{a} \in \Omega$, en virtud de la simetría de las derivadas $D_{j_1 j_2 \cdots j_m}\mathbf{f}(\mathbf{a})$ no es preciso tener en cuenta el orden en que se han realizado las derivaciones; basta conocer el número de veces que se deriva respecto a cada variable. Si en la sucesión finita $(j_1, j_2, \cdots j_m)$ el subíndice i aparece p_i veces es decir si se deriva p_i veces respecto a la variable x_i, $1 \leq i \leq n$, se introduce la notación

$$\frac{\partial^m \mathbf{f}(\mathbf{a})}{\partial x_1^{p_1} \partial x_2^{p_2} \partial x_n^{p_n}} := D_{j_1 j_2 \cdots j_m}\mathbf{f}(\mathbf{a})$$

Esto motiva la utilización de los índices múltiples: Si $\mathbf{p} = (p_1, p_2, \cdots p_n)$, con $p_i \in \{0, 1, 2, \cdots\}$, y se define $|\mathbf{p}| := p_1 + p_2 + \cdots + p_n$ entonces la derivada parcial de orden m considerada arriba se escribe con la notación más breve

$$D^{\mathbf{p}}\mathbf{f}(\mathbf{a}) := \frac{\partial^{|\mathbf{p}|}\mathbf{f}(\mathbf{a})}{\partial x_1^{p_1} \partial x_2^{p_2} \partial x_n^{p_n}} \quad \text{con } |\mathbf{p}| = m.$$

Funciones de clase C^m. Análogamente a como se hizo para $m = 2$ se definen las funciones de clase $C^m(\Omega, F)$. Estas funciones son diferenciables m veces en Ω, y las funciones diferenciables m veces en Ω son de clase $C^{m-1}(\Omega, F)$.

Cuando $F = \mathbb{R}^n$ es inmediato que $\mathbf{f} : \Omega \to \mathbb{R}^n$, $\mathbf{f} = (f_1, f_2 \cdots f_n)$ es de clase C^m si y sólo si cada componente f_j es de clase C^m.

Proposición 7.3 *Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ abierto y $(F, \| \ \|)$ un espacio normado.*

i) $\mathbf{f}, \mathbf{g} \in C^m(\Omega, F) \ \Rightarrow \mathbf{f} + \mathbf{g} \in C^m(\Omega, F)$

ii) $f \in C^m(\Omega, \mathbb{R})$, $\mathbf{g} \in C^m(\Omega, F) \ \Rightarrow f\mathbf{g} \in C^m(\Omega, F)$

Dem: i) es inmediato y ii) se demuestra fácilmente por inducción sobre m usando que las derivadas parciales del producto $\boldsymbol{\varphi} = f\mathbf{g}$ vienen dadas por la fórmula

$$D_j\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}) = D_j f(\mathbf{x})\mathbf{g}(\mathbf{x}) + f(\mathbf{x})D_j\mathbf{g}(\mathbf{x}), \quad 1 \le j \le n.$$

Con ella se obtiene que el resultado es cierto para $m = 1$ y que si se supone cierto para funciones de clase C^m también lo es para funciones de clase C^{m+1}. ■

Proposición 7.4 *Sean $\mathbf{g} : U \to \mathbb{R}^n$, $\mathbf{f} : \Omega \to \mathbb{R}^p$ funciones de clase C^m, donde $U \subset \mathbb{R}^k$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ son abiertos y $\mathbf{g}(U) \subset \Omega$. Entonces $\boldsymbol{\varphi} = \mathbf{f} \circ \mathbf{g} : U \to \mathbb{R}^p$ es de clase C^m (brevemente, la composición de dos aplicaciones de clase C^m es de clase C^m).*

Dem: Lo demostraremos por inducción sobre m. En virtud de la regla de la cadena, $\boldsymbol{\varphi} = \mathbf{f} \circ \mathbf{g}$ es diferenciable en U y según la fórmula 5.1 de la sección 5.3, para $1 \le j \le k$, la derivada parcial $D_j\varphi_i$ de la componente φ_i viene dada por

$$D_j\varphi_i(\mathbf{x}) = D_1 f_i(\mathbf{g}(\mathbf{x}))D_j g_1(\mathbf{x}) + D_2 f_i(\mathbf{g}(\mathbf{x}))D_j g_2(\mathbf{x}) + \cdots + D_n f_i(\mathbf{g}(\mathbf{x}))D_j g_n(\mathbf{x})$$

En el caso $m = 1$ las funciones $D_r f_i(\mathbf{g}(\mathbf{x}))$, $D_j g_r(\mathbf{x})$ son continuas, luego las derivadas parciales $D_j\varphi_i(\mathbf{x})$ son continuas en U y por lo tanto $\boldsymbol{\varphi}$ es de clase C^1.

Si suponemos que el resultado es cierto para funciones de clase $m \ge 1$, dadas $\mathbf{f}$, $\mathbf{g}$ de clase C^{m+1}, las derivadas parciales $D_j g_r$, $D_r f_i$ son de clase C^m y por hipótesis de inducción $D_r f_i(\mathbf{g}(\mathbf{x}))$ también es de clase C^m. Según la proposición 7.3 la suma y el producto de funciones de clase C^m es de la misma clase, luego todas las derivadas parciales

$$D_j\varphi_i(\mathbf{x}) = \sum_{r=1}^{n} D_r f_i(\mathbf{g}(\mathbf{x}))D_j g_r(\mathbf{x})$$

son de clase C^m lo que significa que $\boldsymbol{\varphi}$ es de clase C^{m+1}. ■

Cuando $\mathbf{f}$ es diferenciable m veces en $\mathbf{a}$, según la proposición 7.2, entre las derivadas parciales $D_{j_1 j_2 \cdots j_m}\mathbf{f}(\mathbf{a})$, hay muchas repetidas que conviene contar: Los subíndices $(j_1, j_2, \cdots, j_m)$ recorren las permutaciones con repetición de $(1, 2, \cdots, n)$ y aparecerán repetidas las derivadas que corresponden a las permutaciones en las que el 1 aparece p_1 veces, el 2 aparece p_2 veces... y el n aparece p_n veces (con $p_1 + p_2 + \cdots + p_n = m$). El número de estas permutaciones es

$$\frac{m!}{p_1!p_2!p_3!\cdots p_n!}$$

lo que motiva la introducción de la notación $\mathbf{p}!$ para designar el producto de los factoriales de las componentes: $\mathbf{p}! := p_1!p_2!\cdots p_n!$. Con esta notación el número de derivadas parciales de orden m, con índice de derivación $\mathbf{p} = (p_1, p_2, \cdots p_n)$, que se repiten en virtud del principio de simetría, es exactamente $m!/\mathbf{p}! = |\mathbf{p}|!/\mathbf{p}!$. Para lo que sigue, si $\mathbf{h} = (h_1, h_2, \cdots, h_n) \in \mathbb{R}^n$ y $\mathbf{p} = (p_1, p_2, \cdots, p_n)$ también resultará cómoda la notación abreviada: $\mathbf{h}^\mathbf{p} = h_1^{p_1} h_2^{p_2} \cdots h_n^{p_n}$.

Lema 7.5 *Sea* $\mathbf{f} : \Omega \to F$ *diferenciable* $m > 1$ *veces en cada punto del segmento* $[\mathbf{a}, \mathbf{a} + \mathbf{h}] = \{\mathbf{a} + t\mathbf{h} : 0 \leq t \leq 1\} \subset \Omega$. *Entonces la función* $\mathbf{v} : [0, 1] \to F$, *definida por* $\mathbf{v}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{a}+t\mathbf{h}))$, *es derivable* m *veces en cada* $t \in [0, 1]$ *y sus derivadas sucesivas vienen dadas por*

$$\mathbf{v}^{(k)}(t) = \sum_{j_1, j_2 \cdots j_k = 1}^{n} D_{j_1 j_2 \cdots j_k} \mathbf{f}(\mathbf{a} + t\mathbf{h}) h_{j_1} h_{j_2} \cdots h_{j_k} = k! \sum_{|\mathbf{p}|=k} \frac{D^\mathbf{p} \mathbf{f}(\mathbf{a} + t\mathbf{h})}{\mathbf{p}!} \mathbf{h}^\mathbf{p}$$

DEM: En virtud de la regla de la cadena $\mathbf{v}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{a} + t\mathbf{h})$ es derivable en cada $t \in [0, 1]$ y su derivada es

$$\mathbf{v}'(t) = \sum_{j=1}^{n} D_j \mathbf{f}(\mathbf{a} + t\mathbf{h}) h_j$$

Como $m > 1$ esta función vuelve a ser derivable con derivada

$$\mathbf{v}''(t) = \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{n} D_i D_j \mathbf{f}(\mathbf{a} + t\mathbf{h}) h_i \right) h_j = \sum_{i,j=1}^{n} D_{ij} \mathbf{f}(\mathbf{a} + t\mathbf{h}) h_i h_j$$

y de modo recurrente se obtiene que $\mathbf{v}$ es derivable m veces en $[0, 1]$ y que

$$\mathbf{v}^{(k)}(t) = \sum_{j_1, j_2 \cdots j_k = 1}^{n} D_{j_1 j_2 \cdots j_k} \mathbf{f}(\mathbf{a} + t\mathbf{h}) h_{j_1} h_{j_2} \cdots h_{j_k}, \quad \text{con} \quad 1 \leq k \leq m.$$

En virtud del principio de simetría en la última suma hay $k!/\mathbf{p}!$ sumandos repetidos para cada índice de derivación $\mathbf{p} = (p_1, p_2, \cdots, p_n)$, con $|\mathbf{p}| = k$. Agrupando los sumandos que se repiten resulta

$$\mathbf{v}^{(k)}(t) = \sum_{|\mathbf{p}|=k} \frac{k!}{\mathbf{p}} D^\mathbf{p} \mathbf{f}(\mathbf{a} + t\mathbf{h}) \mathbf{h}^\mathbf{p}$$

■

Ejemplo 7.6

Veamos, en un caso concreto, como se agrupan en el sumatorio del lema 7.5, los términos repetidos de cuarto orden: Si $f(x_1, x_2, x_3)$ es una función de 3 variables, diferenciable cuatro veces en $\mathbf{a}$, aparecen $4!/2 = 12$ términos iguales a $D_{1123}f(\mathbf{a})h_1h_1h_2h_3$, que corresponden a las 12 ordenaciones posibles de los símbolos $1, 1, 2, 3$:

$$D_{1123}f(\mathbf{a})h_1h_1h_2h_3, \quad D_{1213}f(\mathbf{a})h_1h_2h_1h_3, \quad D_{2113}f(\mathbf{a})h_2h_1h_1h_3, ...$$

En cada término interviene dos veces la derivada respecto a x_1 , una vez la derivada respecto a x_2 y una vez la derivada respecto a x_3, luego $\mathbf{p} = (2, 1, 1)$, $\mathbf{p}! = 2$, y la suma de los 12 términos iguales vale

$$12\frac{\partial^4 f(\mathbf{a})}{\partial x_1^2 \partial x_2 \partial x_3} = \frac{4!}{\mathbf{p}!}D^{\mathbf{p}}f(\mathbf{a})$$

7.2. Desarrollo de Taylor

El polinomio Taylor de una función vectorial de n variables reales $\mathbf{f} : \Omega \to F$ es un polinomio en n variables reales con coeficientes en F y para escribirlo cómodamente conviene utilizar los índices múltiples, es decir n-plas $\mathbf{p} = (p_1, p_2 \cdots p_n)$ donde $p_1, p_2, \cdots p_n$ son números enteros mayores o iguales que 0. Un polinomio en las n variables reales $x_1, x_2, \cdots, x_n$, de grado $\leq m$, con coeficientes en F, se escribirá en la forma abreviada

$$\mathbf{P}(\mathbf{x}) = \sum_{|\mathbf{p}| \leq m} \mathbf{a_p x^p}$$

donde $\mathbf{a_p} \in F$, $\mathbf{x^p} = x_1^{p_1} x_2^{p_2} \cdots x_n^{p_n}$ y $|\mathbf{p}| = p_1 + p_2 + \cdots + p_n$. En esta suma interviene el índice múltiple $\mathbf{0} = (0, 0, \cdots, 0)$ con $|\mathbf{0}| = 0$, para el cual se obtiene el término independiente $\mathbf{a_0}$. Agrupando los términos de grado 0, de grado 1, de grado 2, etc. el polinomio se expresa en la forma

$$\mathbf{P}(\mathbf{x}) = \mathbf{A}_0 + \mathbf{A}_1(\mathbf{x}) + \mathbf{A}_2(\mathbf{x}) + \mathbf{A}_3(\mathbf{x}) + \cdots + \mathbf{A}_m(\mathbf{x})$$

donde $\mathbf{A}_0 = \mathbf{a}_0$ y para $k \geq 1$, y $\mathbf{A}_k(\mathbf{x}) = \sum_{|\mathbf{p}|=k} \mathbf{a_p x^p}$, es un polinomio homogéneo de grado k, es decir, $\mathbf{A}(t\mathbf{x}) = t^k \mathbf{A}(\mathbf{x})$ para todo $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ y todo $t \in \mathbb{R}$.

Para motivar la definición del polinomio de Taylor de una función de varias variables conviene comenzar con la siguiente versión del desarrollo de Taylor que sólo es válida para funciones con valores reales. Esta versión es consecuencia directa del desarrollo de Taylor para funciones reales de una variable real con el término complementario en la forma de Lagrange:

Teorema 7.7 *Sea $f : \Omega \to \mathbb{R}$ de clase $C^{m+1}(\Omega)$ en un abierto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Si el segmento $[\mathbf{a}, \mathbf{a} + \mathbf{h}] = \{\mathbf{a} + t\mathbf{h} : 0 \leq t \leq 1\}$ está contenido en Ω, existe $\theta \in (0, 1)$ tal que*

$$f(\mathbf{a} + \mathbf{h}) = \sum_{|\mathbf{p}| \leq m} \frac{D^{\mathbf{p}} f(\mathbf{a})}{\mathbf{p}!} \mathbf{h^p} + \sum_{|\mathbf{p}|=m+1} \frac{D^{\mathbf{p}} f(\mathbf{a} + \theta \mathbf{h})}{\mathbf{p}!} \mathbf{h^p}$$

DEM: Según la proposición 7.4 la función real de variable real $v(t) = f(\mathbf{a} + t\mathbf{h})$, está definida y es de clase C^{m+1} en el abierto $\{t \in \mathbb{R} : \mathbf{a} + t\mathbf{h} \in \Omega\} \supset [0,1]$. Basta considerar su desarrollo de Taylor con el resto en la forma de Lagrange:

$$v(1) = v(0) + v'(0) + \cdots + \frac{1}{k!}v^{(k)}(0) + \cdots + \frac{1}{m!}v^{(m)}(0) + \frac{1}{(m+1)!}v^{(m+1)}(\theta)$$

y sustituir los valores $v^{(k)}$ calculados en el lema 7.5 para obtener el resultado. ■

El polinomio que interviene en 7.7, escrito en términos de $\mathbf{x} = \mathbf{a} + \mathbf{h}$

$$P_m(\mathbf{x} - \mathbf{a}) = \sum_{|\mathbf{p}| \leq m} \frac{D^{\mathbf{p}} f(\mathbf{a})}{\mathbf{p}!}(\mathbf{x} - \mathbf{a})^{\mathbf{p}}$$

se llama polinomio de Taylor de orden m de la función f en el punto $\mathbf{a}$ y a la diferencia $R_m(\mathbf{x} - \mathbf{a}) = f(\mathbf{x}) - P_m(\mathbf{x} - \mathbf{a})$ se le suele llamar término complementario. La formula que adopta el término complementario en el teorema 7.7, llamada forma de Lagrange, no es posible conseguirla para el caso de funciones con valores en un espacio de dimensión ≥ 2, pues en el caso $m = 1$ ya vimos en el capítulo 5 que era imposible expresar el incremento $\mathbf{R}_1(\mathbf{h}) = \mathbf{f}(\mathbf{a} + \mathbf{h}) - \mathbf{f}(\mathbf{a})$ en términos de la diferencial primera evaluada en un punto intermedio $\mathbf{a} + \theta\mathbf{h}$, con $\theta \in (0,1)$.

La definición del polinomio de Taylor se extiende en forma natural al caso de funciones con valores vectoriales:

Definición 7.8 *Si* $\mathbf{f} : \Omega \to F$ *es diferenciable* m *veces en* $\mathbf{a} \in \Omega$, *se llama polinomio de Taylor de* $\mathbf{f}$ *en* $\mathbf{a}$, *de orden* $\leq m$, *al polinomio (con coeficientes en* F*)*

$$\mathbf{P}_m(\mathbf{x} - \mathbf{a}) = \sum_{|\mathbf{p}| \leq m} \frac{D^{\mathbf{p}} \mathbf{f}(\mathbf{a})}{\mathbf{p}!}(\mathbf{x} - \mathbf{a})^{\mathbf{p}}$$

En el sumatorio anterior interviene el índice múltiple $\mathbf{0} = (0, 0, \cdots 0)$, que da lugar, con los convenios habituales, al término independiente del polinomio

$$\frac{D^{\mathbf{0}} \mathbf{f}(\mathbf{a})}{\mathbf{0}!}(\mathbf{x} - \mathbf{a})^{\mathbf{0}} = \mathbf{f}(\mathbf{a})$$

Para una función con valores vectoriales que sólo se supone diferenciable m veces en el punto $\mathbf{a}$ se puede conseguir un desarrollo de Taylor en ese punto con término complementario en forma infinitesimal. En este caso, si $\mathbf{f}$ es diferenciable m veces en $\mathbf{a} \in \Omega$, existe un entorno abierto de $\mathbf{a}$ donde están definidas todas las derivadas parciales $D_j\mathbf{f}(\mathbf{x})$, $1 \leq j \leq m$, y son diferenciables $m-1$ veces en $\mathbf{a}$. Necesitamos el siguiente lema, según el cual el desarrollo de Taylor, de orden $m-1$, de estas derivadas parciales es el que cabe esperar.

Lema 7.9 *En las condiciones de la definición 7.8 el polinomio de Taylor de grado* $\leq m-1$, *en el punto* $\mathbf{a}$, *de la derivada parcial* $D_j\mathbf{f}(\mathbf{x})$ *es* $D_j\mathbf{P}_m(\mathbf{x} - \mathbf{a})$, *es decir*

$$D_j\mathbf{P}_m(\mathbf{x} - \mathbf{a}) = \sum_{|\mathbf{q}| \leq m-1} \frac{D^{\mathbf{q}} D_j \mathbf{f}(\mathbf{a})}{\mathbf{q}!}(\mathbf{x} - \mathbf{a})^{\mathbf{q}}$$

Dem: Para simplificar la escritura se supone $j = 1$. Al derivar $\mathbf{P}_m(\mathbf{x}-\mathbf{a})$ respecto a la variable x_1 los únicos términos del polinomio que tienen derivada no nula son los de la forma

$$\frac{1}{\mathbf{p}!}D^{\mathbf{p}}\mathbf{f}(\mathbf{a})(\mathbf{x}-\mathbf{a})^{\mathbf{p}} = \frac{1}{\mathbf{p}!}D^{\mathbf{p}}\mathbf{f}(\mathbf{a})(x_1-a_1)^{p_1}(x_2-a_2)^{p_2}\cdots(x_n-a_n)^{p_n}$$

con $p_1 \geq 1$. Si $\mathbf{q} = (p_1 - 1, p_2, \cdots p_n)$ entonces $D^{\mathbf{p}}\mathbf{f} = D^{\mathbf{q}}D_1\mathbf{f}$ y la derivada respecto a x_1 de estos términos se expresa en la forma

$$\frac{1}{p_1!p_2!\cdots p_n!}D^{\mathbf{q}}D_1\mathbf{f}(\mathbf{a})p_1(x_1-a_1)^{p_1-1}(x_2-a_2)^{p_2}\cdots(x_n-a_n)^{p_n} = \frac{D^{\mathbf{q}}D_1\mathbf{f}(\mathbf{a})}{\mathbf{q}!}(\mathbf{x}-\mathbf{a})^{\mathbf{q}}$$

La suma de todos estos términos da el resultado

$$D_1\mathbf{P}_m(\mathbf{x}-\mathbf{a}) = \sum_{|\mathbf{q}|\leq m-1}\frac{D^{\mathbf{q}}D_1\mathbf{f}(\mathbf{a})}{\mathbf{q}!}(\mathbf{x}-\mathbf{a})^{\mathbf{q}}$$

■

El siguiente teorema es una versión para funciones de varias variables del correspondiente resultado referente a funciones de una variable. Su demostración por inducción, esencialmente la misma que se hizo en el caso $m = 2$ (6.9), se basa en el teorema de incremento finito. Antes de enunciar el teorema hay que introducir la siguiente notación que interviene en el mismo: Si E, F son espacios normados y $\mathbf{f}, \mathbf{g} : \Omega \to F$ son funciones definidas en un abierto $\Omega \subset E$ se dice que $\mathbf{g}$ es una aproximación local de orden $m \geq 1$ de $\mathbf{f}$ en el punto $\mathbf{a} \in \Omega$ si

$$\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}}\frac{\mathbf{f}(\mathbf{x})-\mathbf{g}(\mathbf{x})}{\|\mathbf{x}-\mathbf{a}\|^m} = 0$$

En este caso se escribe $\mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{g}(\mathbf{x}) = o(\|\mathbf{x}-\mathbf{a}\|^m)$ y se dice que que $\mathbf{f}$ y $\mathbf{g}$ tienen en en el punto $\mathbf{a}$ un contacto o tangencia de orden m.

Teorema 7.10 *Si $\mathbf{f} : \Omega \to F$ es diferenciable m veces en $\mathbf{a} \in \Omega$, y $\mathbf{P}_m(\mathbf{x}-\mathbf{a})$ es su polinomio de Taylor en $\mathbf{a}$, de grado $\leq m$, se verifica*

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{P}_m(\mathbf{x}-\mathbf{a}) + \mathbf{R}_m(\mathbf{x}-\mathbf{a}) \quad \textit{donde} \quad \mathbf{R}_m(\mathbf{x}-\mathbf{a}) = o(\|\mathbf{x}-\mathbf{a}\|)^m$$

Dem: En lo que sigue $\mathbf{h} = \mathbf{x}-\mathbf{a}$. El resultado es cierto para $m = 1$ ya que

$$\mathbf{P}_1(\mathbf{h}) = \mathbf{f}(\mathbf{a}) + \sum_{j=1}^{n} D_j\mathbf{f}(\mathbf{a})\mathbf{h}_j = \mathbf{f}(\mathbf{a}) + d\mathbf{f}(\mathbf{a})\mathbf{h}$$

y sabemos que, según la definición de diferencial, $\mathbf{R}_1(\mathbf{h}) = \mathbf{f}(\mathbf{a}+\mathbf{h}) - \mathbf{P}_1(\mathbf{h})$ cumple la condición requerida, $\mathbf{R}_1(\mathbf{h}) = o(\|\mathbf{h}\|)$.

Supongamos el resultado cierto para funciones diferenciables $m-1$ veces en $\mathbf{a}$, con $m \geq 2$. Si $\mathbf{f} : \Omega \to F$ es diferenciable m veces en $\mathbf{a} \in \Omega$, existe $B(\mathbf{a}, r) \subset \Omega$ tal que en todos los puntos de $B(\mathbf{a}, r)$ la función $\mathbf{f}$ es diferenciable $m-1$ veces.

En lo que sigue en $\mathbb{R}^n$ se considera la norma $\| \|_1$. Para cada $1 \leq j \leq n$ la función $D_j\mathbf{f}(\mathbf{x})$ es diferenciable $m-1$ veces en $\mathbf{a}$ y en virtud del lema 7.9 su polinomio de Taylor de grado $\leq m-1$ es $D_j\mathbf{P}_m(\mathbf{x}-\mathbf{a})$ por lo que, en virtud de la hipótesis de inducción, se cumple

$$D_j\mathbf{f}(\mathbf{a}+\mathbf{h}) = D_j\mathbf{P}_m(\mathbf{h}) + o(\|\mathbf{h}\|_1^{m-1})$$

Si cambiamos de notación y escribimos $\mathbf{g}(\mathbf{h}) = \mathbf{f}(\mathbf{a}+\mathbf{h}) - \mathbf{P}_m(\mathbf{h})$, tenemos que para $1 \leq j \leq n$ se cumple $D_j\mathbf{g}(\mathbf{h}) = o(\|\mathbf{h}\|_1^{m-1})$ luego, dado $\epsilon > 0$ existe $0 < \delta < r$ tal que para todo $j \in \{1, 2 \cdots n\}$ podemos asegurar que

$$\mathbf{y} \in B(0,\delta) \Rightarrow \|D_j\mathbf{g}(\mathbf{y})\| \leq \epsilon \|\mathbf{y}\|_1^{m-1}$$

Fijado $\mathbf{h} \in \mathbb{R}^n$ con $\|\mathbf{h}\|_1 < \delta$, la función auxiliar $\boldsymbol{\varphi}(t) = \mathbf{g}(t\mathbf{h}) = \mathbf{f}(\mathbf{a}+t\mathbf{h}) - \mathbf{P}_m(t\mathbf{h})$, está definida y es derivable en $[0,1]$ (ya que $[\mathbf{a}, \mathbf{a}+\mathbf{h}] \subset B(\mathbf{a}, r)$). Su derivada viene dada por $\boldsymbol{\varphi}'(t) = \sum_{j=1}^n D_j\mathbf{g}(t\mathbf{h})h_j$, luego para $0 \leq t \leq 1$ se verifica

$$\|\boldsymbol{\varphi}'(t)\| \leq \sum_{j=1}^n \|D_j\mathbf{g}(t\mathbf{h})\| \, |h_j| \leq \sum_{j=1}^n \epsilon \|\mathbf{h}\|_1^{m-1} |h_j| = \epsilon \|\mathbf{h}\|_1^m$$

En virtud del teorema del incremento finito, $\|\boldsymbol{\varphi}(1) - \boldsymbol{\varphi}(0)\| \leq \epsilon \|\mathbf{h}\|_1^m$, es decir

$$\|\mathbf{f}(\mathbf{a}+\mathbf{h}) - \mathbf{P}_m(\mathbf{h})\| \leq \epsilon \|\mathbf{h}\|_1^m \quad \text{si} \quad \|\mathbf{h}\| < \delta$$

y queda demostrado así que $\mathbf{f}(\mathbf{a}+\mathbf{h}) - \mathbf{P}_m(\mathbf{h}) = o(\|\mathbf{h}\|_1^m)$. ■

Nuestro siguiente objetivo es obtener el llamado recíproco del desarrollo de Taylor. Este resultado, recogido en la proposición 7.12, suele resultar útil a la hora de obtener desarrollos de Taylor de funciones concretas. La demostración que ofrecemos se basa en el siguiente lema que extiende al contexto n-dimensional un resultado bien conocido para los polinomios reales de una variable real

Lema 7.11 *Si $\mathbf{Q}(\mathbf{x}) = \sum_{|\mathbf{p}| \leq m} \mathbf{a_p}\mathbf{x}^p$ es un polinomio de grado $\leq m$ con coeficientes $\mathbf{a}_p \in F$, son equivalentes*

a) $\mathbf{Q}(\mathbf{x}) = o(\|\mathbf{x}\|^m)$.

b) $\mathbf{Q}(\mathbf{x}) = 0$ *para cada* $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$*;*

c) $\mathbf{a_p} = 0$ *para cada* $|\mathbf{p}| \leq m$.

Dem: a) $\Rightarrow$ b): Es fácil ver esta implicación se cumple para polinomios de una variable real: Si $\mathbf{Q}(t) = \mathbf{a}_0 + \mathbf{a}_1 t + \mathbf{a}_2 t^2 + \cdots + \mathbf{a}_m t^m = o(|t|^m)$ debe ser $\mathbf{a}_0 = 0$, luego $\mathbf{a}_1 + a_2 t + \cdots + \mathbf{a}_m t^{m-1} = o(|t|^{m-1})$ de donde se sigue que $\mathbf{a}_1 = 0$, etc ... y así se obtiene que $\mathbf{a}_k = 0$ para $0 \leq k \leq m$ y por lo tanto $\mathbf{Q}(t) = 0$ para todo $t \in \mathbb{R}$.
La demostración para polinomios de n variables se reduce al caso de una variable: Fijado $\mathbf{x} \neq 0$ se considera el polinomio de la variable real t

$$\mathbf{Q}_\mathbf{x}(t) = \mathbf{Q}(t\mathbf{x}) = a_0 + \sum_{k=1}^m \left(\sum_{|\mathbf{p}|=k} a_\mathbf{p}\mathbf{x}^\mathbf{p} \right) t^k$$

Si se cumple a) es fácil ver que $\mathbf{Q_x}(t) = o(|t|^m)$, luego el polinomio de una variable $\mathbf{Q_x}(t)$ es idénticamente nulo y en particular $\mathbf{Q}(\mathbf{x}) = \mathbf{Q_x}(1) = 0$.

Para demostrar que b) $\Rightarrow$ c) se puede razonar por inducción sobre el número n de variables. El resultado es inmediato cuando $n = 1$. Supongamos que es cierto para polinomios de $n-1$ variables y sea $\mathbf{Q}(\mathbf{x})$ un polinomio idénticamente nulo de n variables. Si para cada $1 \leq k \leq n$ se agrupan los términos donde figura x_1^k, y se saca este factor común podemos escribir $\mathbf{Q}(\mathbf{x})$ en la forma

$$\mathbf{Q}(\mathbf{x}) = \mathbf{c}_0 x_1^m + \mathbf{c}_1(x_2, x_3, \cdots x_n) x_1^{m-1} + \cdots + \mathbf{c}_m(x_2, x_3, \cdots x_n) = 0$$

donde cada $\mathbf{c}_k(x_2, x_3, \cdots x_n)$ es un polinomio de grado k en $m-1$ variables.

Manteniendo fijos $x_2, x_3 \cdots x_n$, y considerando sólo la variable x_1, obtenemos un polinomio idénticamente nulo en esta variable. Como el resultado que queremos demostrar es cierto para polinomios de una variable concluimos que son nulos todos sus coeficientes, es decir, $\mathbf{c}_k(x_2, x_3, \cdots x_n) = 0$, $0 \leq k \leq m$. Esta afirmación es cierta para cualquier $(x_2, x_3 \cdots x_n) \in \mathbb{R}^{n-1}$, aplicando la hipótesis de inducción obtenemos que los coeficientes de los polinomios $\mathbf{c}_k$ son nulos, lo que significa que todos los coeficientes de $\mathbf{Q}$ son nulos.
La implicación c) $\Rightarrow$ a) es evidente. ■

Proposición 7.12 *Sea* $\mathbf{f} : \Omega \to F$ *diferenciables* m *veces en* $\mathbf{a} \in \Omega$ *y* $\mathbf{Q}(\mathbf{x} - \mathbf{a})$ *un polinomio de grado* $\leq m$ *que verifica* $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{Q}(\mathbf{x} - \mathbf{a}) + o(\|\mathbf{x} - \mathbf{a}\|^m)$*. Entonces* $\mathbf{Q}(\mathbf{x} - \mathbf{a})$ *es el polinomio de Taylor de orden* m*, de la función* $\mathbf{f}$ *en el punto* $\mathbf{a}$*.*

Dem: Si $\mathbf{P}_m(\mathbf{x} - \mathbf{a})$ es el polinomio de Taylor de $\mathbf{f}$ en $\mathbf{a}$ (de orden m) en virtud de la hipótesis y del teorema 7.10 podemos asegurar que la diferencia

$$\mathbf{S}(\mathbf{x} - \mathbf{a}) = \mathbf{P}_m(\mathbf{x} - \mathbf{a}) - \mathbf{Q}(\mathbf{x} - \mathbf{a})$$

es un polinomio que cumple $\mathbf{S}(\mathbf{x} - \mathbf{a}) = o(\|\mathbf{x} - \mathbf{a}\|^m)$ y aplicando el lema 7.11 se concluye que $\mathbf{Q} = \mathbf{P}_m$. ■

Proposición 7.13 *Si* $\mathbf{f}, \mathbf{g} : \Omega \to F$ *son diferenciables* m *veces en* $\mathbf{a} \in \Omega \subset \mathbb{R}^n$*, son equivalentes*

a) $\mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{g}(\mathbf{x}) = o(\|\mathbf{x} - \mathbf{a}\|^m)$*;*

b) $\mathbf{f}(\mathbf{a}) = \mathbf{g}(\mathbf{a})$ *y* $D^{\mathbf{p}}\mathbf{f}(\mathbf{a}) = D^{\mathbf{p}}\mathbf{g}(\mathbf{a})$ *cuando* $|\mathbf{p}| \leq m$*.*

Dem: Sean $\mathbf{P}_m(\mathbf{x} - \mathbf{a})$ y $\mathbf{Q}_m(\mathbf{x} - \mathbf{a})$, respectivamente, los polinomios de Taylor (de orden m) de las funciones $\mathbf{f}$ y $\mathbf{g}$, en el punto $\mathbf{a}$. Según el teorema 7.10 se verifica

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{P}_m(\mathbf{x} - \mathbf{a}) = o(\|\mathbf{x} - \mathbf{a}\|^m), \quad \mathbf{g}(\mathbf{x}) - \mathbf{Q}_m(\mathbf{x} - \mathbf{a}) = o(\|\mathbf{x} - \mathbf{a}\|^m \qquad (*)$$

a $\Rightarrow$ b): Si se cumple a), con los desarrollos anteriores se obtiene

$$\mathbf{P}_m(\mathbf{x} - \mathbf{a}) - \mathbf{Q}_m(\mathbf{x} - \mathbf{a}) = o(\|\mathbf{x} - \mathbf{a}\|^m)$$

y con el lema 7.11 se concluye que los coeficientes de $\mathbf{P}_m(\mathbf{x}-\mathbf{a}) - \mathbf{Q}_m(\mathbf{x}-\mathbf{a})$ son idénticamente nulos, luego $D^{\mathbf{p}}\mathbf{f}(\mathbf{a}) - D^{\mathbf{p}}\mathbf{g}(\mathbf{a}) = \mathbf{0}$ siempre que $|\mathbf{p}| \leq m$.
b) $\Rightarrow$ a): Si se cumple b) entonces $\mathbf{P}_m = \mathbf{Q}_m$ y usando los desarrollos de Taylor (*) se obtiene que $\mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{g}(\mathbf{x}) = o(\|\mathbf{x}-\mathbf{a}\|^m)$. ■

7.3. Serie de Taylor de una función de clase C^∞

Dada una función $\mathbf{f}$ de clase C^∞ en un abierto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ y un punto $\mathbf{a} \in \Omega$ podemos considerar en este punto polinomios de Taylor de $\mathbf{f}$ arbitrariamente largos, que generan una serie de potencias en varias variables reales, llamada *serie de Taylor* de la función en el punto $\mathbf{a}$. En el teorema 7.15 se obtendrá, para una función de clase C^∞, una condición suficiente para que su serie de Taylor en un punto sea convergente y represente a la función en un entorno de ese punto.

Comenzamos obteniendo una acotación útil del error que se comete cuando se utiliza el polinomio de Taylor para aproximar a la función en un entorno del punto donde se efectúa el desarrollo.

Teorema 7.14 *Sea* $\mathbf{f} : \Omega \to F$ *una función de clase* $C^{m+1}(\Omega, F)$ *definida en un abierto* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$*, con valores en un espacio normado* $(F, \|\ \|)$*. Si el segmento* $[\mathbf{a}, \mathbf{a}+\mathbf{h}]$ *está contenido en* Ω *y* $\mathbf{P}_m(\mathbf{x}-\mathbf{a})$ *es el polinomio de Taylor de* $\mathbf{f}$ *en* $\mathbf{a}$*, de orden* m*, entonces para el término complementario* $\mathbf{R}_m(\mathbf{x}-\mathbf{a}) = \mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{P}_m(\mathbf{x}-\mathbf{a})$ *vale la siguiente acotación*

$$\|\mathbf{R}_m(\mathbf{h})\| \leq \frac{M}{(m+1)!} \|\mathbf{h}\|_1^{m+1}$$

donde

$$M = \sup\{\left\|D_{j_1 j_2 \cdots j_{m+1}}\mathbf{f}(\mathbf{z})\right\| : 1 \leq j_1, j_2, \cdots j_{m+1} \leq n, \quad \mathbf{z} \in [\mathbf{a}, \mathbf{a}+\mathbf{h}]\}$$

DEM: En $[0,1]$ están definidas las funciones $\mathbf{v}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{a}+t\mathbf{h})$, y

$$\mathbf{g}(t) = \mathbf{v}(t) + (1-t)\mathbf{v}'(t) + \frac{1}{2!}(1-t)^2\mathbf{v}''(t) + \cdots + \frac{1}{m!}(1-t)^m\mathbf{v}^{(m)}(t)$$

cuya derivada

$$\mathbf{g}'(t) = \frac{(1-t)^m}{m!}\mathbf{v}^{(m+1)}(t) = \sum_{j_1 j_2 \cdots j_{m+1}=1}^{n} D_{j_1 j_2 \cdots j_{m+1}}\mathbf{f}(\mathbf{a}+t\mathbf{h}) h_{j_1} h_{j_2} \cdots h_{j_{m+1}}$$

cumple la desigualdad

$$\|\mathbf{g}'(t)\| \leq \frac{M\,\|\mathbf{h}\|_1^{m+1}}{m!}(1-t)^m$$

es decir

$$\|\mathbf{g}'(t)\| \leq \alpha'(t) \quad \text{con} \quad \alpha(t) = -\,\frac{M\,\|\mathbf{h}\|_1^{m+1}}{(m+1)!}(1-t)^{m+1}$$

Utilizando el teorema del incremento finito 4.7 se concluye que

$$\|\mathbf{R}_m(\mathbf{h})\| = \|\mathbf{g}(1) - \mathbf{g}(0)\| \leq \alpha(1) - \alpha(0) = \frac{M}{(m+1)!} \|\mathbf{h}\|_1^{m+1}$$

■

Teorema 7.15 *Sea* $\mathbf{f} : \Omega \to \mathbf{F}$ *de clase* C^∞ *en un abierto* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$*, con valores en un espacio normado* $(F, \| \ \|)$ *y* $B(\mathbf{a}, \delta) \subset \Omega$ *una bola tal que existen constantes* $M > 0$ *y* $R > 0$ *que verifican*

$$\mathbf{x} \in B(\mathbf{a}, \delta), \quad |\mathbf{p}| = k \Rightarrow |D^{\mathbf{p}}\mathbf{f}(\mathbf{x})| \leq Mk!R^k$$

Entonces, si $\mathbf{x} = \mathbf{a} + \mathbf{h} \in B(\mathbf{a}, \delta)$ *y* $\|\mathbf{h}\|_1 < 1/R$ *se verifica*

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{|\mathbf{p}|=k} \frac{D^{\mathbf{p}}\mathbf{f}(\mathbf{a})}{\mathbf{p}!}\mathbf{h}^{\mathbf{p}}, \quad y \quad \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{|\mathbf{p}|=k} \left\| \frac{D^{\mathbf{p}}\mathbf{f}(\mathbf{a})}{\mathbf{p}!}\mathbf{h}^{\mathbf{p}} \right\| < +\infty$$

Dem: Observemos en primer lugar que

$$\|\mathbf{h}\|_1^k = (|h_1| + |h_2| + \cdots + |h_n|)^k = \sum_{j_1 j_2 \cdots j_k = 1}^{n} |h_{j_1}||h_{j_2}| \cdots |h_{j_k}| = \sum_{|\mathbf{p}|=k} \frac{k!}{\mathbf{p}!}|\mathbf{h}|^{\mathbf{p}}$$

luego

$$\sum_{|\mathbf{p}|=k} \left\| \frac{D^{\mathbf{p}}\mathbf{f}(\mathbf{a})}{\mathbf{p}!}\mathbf{h}^{\mathbf{p}} \right\| \leq MR^k \sum_{|\mathbf{p}|=k} \frac{k!}{\mathbf{p}!}|\mathbf{h}|^{\mathbf{p}} = M(R\|\mathbf{h}\|_1)^k$$

Como $R\|\mathbf{h}\|_1 < 1$, se obtiene la convergencia absoluta de la serie

$$\sum_{k=0}^{\infty} \sum_{|\mathbf{p}|=k} \frac{D^{\mathbf{p}}\mathbf{f}(\mathbf{a})}{\mathbf{p}!}\mathbf{h}^{\mathbf{p}}$$

Para terminar debemos demostrar su suma es $\mathbf{f}(\mathbf{x})$, y para ello basta ver que el término complementario del desarrollo de Taylor

$$\mathbf{R}_m(\mathbf{h}) = \mathbf{f}(\mathbf{x}) - \sum_{k=0}^{m} \sum_{|\mathbf{p}|=k} \frac{D^{\mathbf{p}}\mathbf{f}(\mathbf{a})}{\mathbf{p}!}\mathbf{h}^{\mathbf{p}}$$

converge hacia $\mathbf{0}$ cuando $m \to \infty$.

Por hipótesis, para todo $\mathbf{z} \in [\mathbf{a}, \mathbf{a} + \mathbf{h}] \subset B(\mathbf{a}, \delta)$ todas las derivadas $D^{\mathbf{p}}(\mathbf{z})$ con $|\mathbf{p}| = m + 1$ cumplen la desigualdad $\|D^{\mathbf{p}}\mathbf{f}(\mathbf{z})\| \leq M(m+1)!\ R^{m+1}$ y teniendo en cuenta el teorema 7.14 se obtiene la desigualdad

$$\|\mathbf{R}_m(\mathbf{h})\| \leq \frac{M(m+1)!|R^{m+1}}{(m+1)!} \|\mathbf{h}\|_1^{m+1} = M(R\|\mathbf{h}\|_1)^{m+1}$$

y con ella el resultado deseado, porque $R\|\mathbf{h}\|_1 < 1$. ■

7.4. Fórmula integral para el resto

En el caso de funciones con valores vectoriales se puede conseguir una fórmula integral para el resto o término complementario del desarrollo de Taylor. Como en ella interviene la integral de una función continua con valores en F, para este resultado hay que suponer que el espacio normado $(F, \| \|)$ es completo (véase el apéndice D). Para mayor simplicidad, el lector puede considerar sólo funciones con valores en $F = \mathbb{R}^k$, ya que en este caso la integral de una función continua se puede definir componente a componente y los resultados de integración vectorial requeridos son consecuencia directa de los referentes a funciones escalares (véase 4.2).

Teorema 7.16 *Sea $\mathbf{f} : \Omega \to F$ una función de clase $C^{m+1}(\Omega, F)$ definida en un abierto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, con valores en un espacio normado completo $(F, \| \|)$. Si el segmento $[\mathbf{a}, \mathbf{a}+\mathbf{h}]$ está contenido en Ω y $\mathbf{P}_m(\mathbf{x}-\mathbf{a})$ es el polinomio de Taylor de $\mathbf{f}$ en $\mathbf{a}$, de orden m, entonces para el término complementario $\mathbf{R}_m(\mathbf{x}-\mathbf{a}) = \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{P}_m(\mathbf{x}-\mathbf{a})$ vale la siguiente fórmula integral:*

$$\mathbf{R}_m(\mathbf{h}) = (m+1)\int_0^1 (1-t)^m \mathbf{r}_{m+1}(\mathbf{h}, t)dt$$

donde

$$\mathbf{r}_{m+1}(\mathbf{h}, t) = \sum_{|\mathbf{p}|=m+1} \frac{D^{\mathbf{p}}\mathbf{f}(\mathbf{a}+t\mathbf{h})}{\mathbf{p}!}\mathbf{h}^{\mathbf{p}} = \frac{1}{(m+1)!}\sum_{j_1,\cdots j_{m+1}=1}^{n} D_{j_1,\cdots j_{m+1}}\mathbf{f}(\mathbf{a}+t\mathbf{h})h_{j_1}\cdots h_{j_{m+1}}$$

DEM: La función $\mathbf{v}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{a}+t\mathbf{h})$ está definida y es de clase C^{m+1} en el abierto $\{t \in \mathbb{R} : \mathbf{a}+t\mathbf{h} \subset \Omega\} \supset [0,1]$, y según el lema 7.5,

$$\mathbf{v}^{(m+1)}(t) = \sum_{j_1,\cdots j_{m+1}=1}^{n} D_{j_1 j_2\cdots j_{m+1}}\mathbf{f}(\mathbf{a}+t\mathbf{h})h_{j_1}h_{j_2}\cdots h_{j_{m+1}} =$$

$$= (m+1)!\sum_{|\mathbf{p}|=m+1} \frac{D^{\mathbf{p}}\mathbf{f}(\mathbf{a}+t\mathbf{h})}{\mathbf{p}!}\mathbf{h}^{\mathbf{p}} = (m+1)!\mathbf{r}_{m+1}(\mathbf{h}, t)$$

Se comprueba fácilmente que

$$\mathbf{R}_m(\mathbf{h}) = \mathbf{v}(1) - \left[\mathbf{v}(0) + \mathbf{v}'(0) + \cdots + \frac{1}{m!}\mathbf{v}^{(m)}(0)\right]$$

y aplicando el teorema 4.16 a la función $\mathbf{v}(t)$ en el intervalo $[0,1]$, se obtiene

$$\mathbf{R}_m(\mathbf{h}) = \frac{1}{m!}\int_0^1 (1-t)^m \mathbf{v}^{m+1}(t)dt = (m+1)\int_0^1 (1-t)^m \mathbf{r}_{m+1}(\mathbf{h}, t)dt$$

■

NOTA: Usando el teorema 7.16 se puede dar otra demostración del teorema 7.14 bajo la hipótesis de que el espacio normado $(F, \| \ \|)$ es completo:
Aplicando la desigualdad triangular a la suma

$$\mathbf{r}_m(\mathbf{h}, t) = \frac{1}{(m+1)!} \sum_{j_1, \cdots j_{m+1}=1}^{n} D_{j_1, \cdots j_{m+1}} \mathbf{f}(\mathbf{a} + t\mathbf{h}) h_{j_1} \cdots h_{j_{m+1}}$$

se obtiene

$$\|\mathbf{r}_m(\mathbf{h}, t)\| \leq \frac{M}{(m+1)!} \sum_{j_1 \cdots j_{m+1}=1}^{n} |h_{j_1}||h_{j_2}| \cdots |h_{j_{m+1}}|$$

Teniendo en cuenta que

$$\sum_{j_1, j_2 \cdots j_{m+1}=1}^{n} |h_{j_1}||h_{j_2}| \cdots |h_{j_{m+1}}| = (|h_1| + |h_2| + \cdots + |h_n|)^{m+1} = \|\mathbf{h}\|_1^{m+1}$$

resulta

$$\|\mathbf{r}_m(\mathbf{h}, t)\| \leq \frac{M}{(m+1)!} \|\mathbf{h}\|_1^{m+1}$$

y utilizando la desigualdad D.10 a) se deduce

$$\|\mathbf{R}_m(\mathbf{h})\| \leq (m+1) \int_0^1 (1-t)^m \|\mathbf{r}(\mathbf{h}, t)\| \, dt \leq$$

$$\leq \frac{M}{(m+1)!} \|\mathbf{h}\|_1^{m+1} \int_0^1 (m+1)(1-t)^m dt = \frac{M}{(m+1)!} \|\mathbf{h}\|_1^{m+1}$$

■

7.5. Ejercicios resueltos

Ejercicio 7.17 *Demuestre que la función*

$$f(x, y) = \frac{\operatorname{sen} y - \operatorname{sen} x}{y - x} \quad si \ \ x \neq y; \quad f(x, x) = \cos x$$

es de clase $C^\infty(\mathbb{R}^2)$. Obtenga su desarrollo de Taylor en $(0,0)$ y compruebe que converge en todo punto (x, y) hacia el valor de la función $f(x, y)$. Utilícelo para demostrar que f presenta en $(0,0)$ un máximo relativo.

SOLUCIÓN

Con la sustitución $t = y - x$ se obtiene que para $t \neq 0$ el valor de la función se expresa en la forma

$$f(x, y) = \frac{\operatorname{sen}(x+t) - \operatorname{sen} x}{t} = \left(\frac{\cos t - 1}{t}\right) \operatorname{sen} x + \left(\frac{\operatorname{sen} t}{t}\right) \cos x$$

luego

$$f(x,y) = \alpha(y-x)\operatorname{sen} x + \beta(y-x)\cos x \tag{7.1}$$

donde las funciones $\alpha(t) = (\cos t - 1)/t$, $\beta(t) = (\operatorname{sen} t)/t$, se pueden suponer definidas en todo $\mathbb{R}$ mediante los desarrollos en serie de potencias

$$\alpha(t) = -\frac{1}{2!}t + \frac{1}{4!}t^3 - \cdots; \quad \beta(t) = 1 - \frac{1}{3!}t^2 + \frac{1}{5!}t^4 - \cdots$$

con lo cual la fórmula (7.1) sirve incluso para el caso $x = y$ haciendo intervenir los valores $\alpha(0) = 0$ y $\beta(0) = 1$.

Como las funciones α, β son de clase $C^\infty(\mathbb{R})$ con la fórmula 7.1 se pone de manifiesto que f es de clase $C^\infty(\mathbb{R}^2)$. Restando los desarrollos en serie de potencias

$$\operatorname{sen} x = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \cdots; \qquad \operatorname{sen} y = y - \frac{1}{3!}y^3 + \frac{1}{5!}y^5 - \cdots$$

que son válidos para todo $x \in \mathbb{R}$ y todo $y \in \mathbb{R}$, y utilizando la igualdad

$$y^n - x^n = (y-x)(y^{n-1} + xy^{n-2} + x^2y^{n-3} + \cdots + x^{n-2}y + x^{n-1})$$

se consigue la siguiente representación de la función f mediante un desarrollo en serie convergente en todo punto $(x,y) \in \mathbb{R}^2$:

$$f(x,y) = 1 - \frac{1}{3!}(x^2 + xy + y^2) + \frac{1}{5!}(x^4 + x^3y + x^2y^2 + xy^3 + y^4) - \cdots =$$

$$= 1 + A_2(x,y) + A_4(x,y) + \cdots + A_{2m}(x,y) + R_{2m}(x,y)$$

donde $A_{2k}(x,y)$ es un polinomio homogéneo de grado $2k$. Si $r = \|(x,y)\|_2$, se verifica

$$|A_{2k}(x,y)| \leq \frac{1}{(2k+1)!}(2k+1)r^{2k} = \frac{r^{2k}}{(2k)!}$$

luego

$$|R_{2m}(x,y)| = |A_{2m+2}(x,y) + A_{2m+4}(x,y) + \cdots| \leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{r^{2(m+k)}}{(2m+2k)!} = \varphi(r)$$

Como

$$\varphi(r) = r^{2m+1} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{r^{2k-1}}{(2m+2k)!} = o(r^{2m+1})$$

se sigue que $|R_{2m}(x,y)| = o(\|x,y\|)^{2m+1}$ y la proposición 7.12 permite asegurar que $1 + A_2(x,y) + A_4(x,y) + \cdots A_{2m}(x,y)$ es el polinomio de Taylor de orden $2m$ (incluso de orden $2m+1$) de la función f en $(0,0)$. En particular, el polinomio de Taylor de grado 2 es

$$1 - \frac{1}{2}(x^2 + xy + y^2)$$

Por consiguiente:

$$D_1 f(0,0) = D_2 f(0,0) = 0$$

$$D_{11}f(0,0) = D_{22}f(0,0) = -1/2; \quad D_{12}f(0,0) = D_{21}f(0,0) = -1/4$$

Con el criterio usual del Hessiano se obtiene que f presenta un máximo relativo en el punto $(0,0)$. ■

Ejercicio 7.18 *Si* $\mathbf{Q}(\mathbf{x})$ *es un polinomio de grado* m *con coeficientes reales (o más generalmente en un espacio normado* $(F, \| \ \|)$*) demuestre las afirmaciones:*

a) $|\mathbf{p}| > m \Rightarrow D^{\mathbf{p}}\mathbf{Q}(\mathbf{x}) = 0$ *para todo* $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$.

b) Para cada $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{Q}$ *coincide con su polinomio de Taylor en* $\mathbf{a}$*, de orden* m*:*

$$\mathbf{Q}(\mathbf{x}) = \sum_{|\mathbf{p}| \leq m} \frac{D^{\mathbf{p}}\mathbf{Q}(\mathbf{a})}{\mathbf{p}!}(\mathbf{x} - \mathbf{a})^{\mathbf{p}} \quad \textit{para todo} \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$$

SOLUCIÓN

a) Se demuestra fácilmente por inducción sobre m: El resultado es evidente para $m = 1$. Si se supone cierto para el valor $m-1$ y $\mathbf{Q}(\mathbf{x})$ es un polinomio de grado m, entonces $D_j\mathbf{Q}(\mathbf{x})$, $1 \leq j \leq n$, son polinomios de grado $\leq m-1$, y por la hipótesis de inducción, $D^{\mathbf{q}}D_j\mathbf{Q}(\mathbf{x}) = 0$ para todo $\mathbf{q}$ con $|\mathbf{q}| = m$ y todo $j \in \{1, 2 \cdots n\}$, luego $D^{\mathbf{p}}\mathbf{Q}(\mathbf{x}) = 0$ para todo $\mathbf{p}$ con $|\mathbf{p}| = m+1$.
b) Sea $\mathbf{P}_m(\mathbf{x} - \mathbf{a})$ el polinomio de Taylor de $\mathbf{Q}$ en $\mathbf{a}$, de grado $\leq m$, y $\mathbf{R}_m(\mathbf{x} - \mathbf{a}) = \mathbf{Q}(\mathbf{x}) - \mathbf{P}_m(\mathbf{x} - \mathbf{a})$ el término complementario correspondiente. En virtud de a) podemos aplicar el teorema 7.14 a la función $\mathbf{Q}$, con $M = 0$, y así se obtiene que el término complementario $\mathbf{R}_m$ es idénticamente nulo. ■

Ejercicio 7.19 *Sea* $\mathbf{f} : \Omega \to F$ *una función de clase* C^{m+1} *con todas sus derivadas parciales de orden* $m+1$ *idénticamente nulas. Si el abierto* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *es conexo demuestre que* f *es la restricción a* Ω *de un polinomio de grado* $\leq m$.

SOLUCIÓN

En lo que sigue $\mathbf{P}_{\mathbf{a}}(\mathbf{x}) = \mathbf{P}_m(\mathbf{x} - \mathbf{a})$ denotará al polinomio de Taylor de orden m de la función $\mathbf{f}$ en el punto $\mathbf{a} \in \Omega$. Aplicando el teorema 7.14 con $M = 0$ se obtiene que las funciones $\mathbf{f}$ y $\mathbf{P}_{\mathbf{a}}$ coinciden en cada bola $B(\mathbf{a}, r) \subset \Omega$. Fijado $\mathbf{b} \in \Omega$ el conjunto $\Omega_{\mathbf{b}} := \{\mathbf{a} \in \Omega : \mathbf{P}_{\mathbf{a}} = \mathbf{P}_{\mathbf{b}}\}$ no es vacío.
Demostraremos en primer lugar que $\Omega_{\mathbf{b}}$ es abierto: Dado $\mathbf{a} \in \Omega_{\mathbf{b}}$ existe $r > 0$ tal que $B(\mathbf{a}, r) \subset \Omega$. Fijado un punto $a' \in B(\mathbf{a}, r)$, como las funciones $\mathbf{f}$ y $\mathbf{P}_{\mathbf{a}}$ coinciden en la bola $B(\mathbf{a}, r)$ tienen el mismo polinomio de Taylor en $\mathbf{a}'$, luego $\mathbf{P}_{\mathbf{a}'} = \mathbf{P}_{\mathbf{a}}$ (ya que, según el ejercicio 7.18, el polinomio el polinomio de Taylor de $\mathbf{P}_{\mathbf{a}}$ en $\mathbf{a}'$ es $\mathbf{P}_{\mathbf{a}}$). Teniendo en cuenta que $\mathbf{P}_{\mathbf{a}} = \mathbf{P}_{\mathbf{b}}$ (porque $\mathbf{a} \in \Omega_{\mathbf{b}}$) se obtiene que $\mathbf{P}_{\mathbf{a}'} = \mathbf{P}_{\mathbf{b}}$, luego $\mathbf{a}' \in \Omega_{\mathbf{b}}$ y queda demostrado así que $B(\mathbf{a}, r) \subset \Omega_{\mathbf{b}}$, y con ello que $\Omega_{\mathbf{b}}$ es abierto.

Ahora veremos que $\Omega_{\mathbf{b}}$ es un conjunto cerrado relativo en espacio conexo Ω: Si $\mathbf{a} \in \Omega \cap \overline{\Omega_{\mathbf{b}}}$ existe una sucesión $\mathbf{a}_k \in \Omega_{\mathbf{b}}$ tal que $\mathbf{a} = \lim_k \mathbf{a}_k$. Elegimos $\rho > 0$ tal que $B(\mathbf{a}, 2\rho) \subset \Omega$, y también un término de la sucesión $\mathbf{a}_k \in B(\mathbf{a}, \rho)$. Como

$\mathbf{a} \in B(\mathbf{a}_k, \rho) \subset B(\mathbf{a}, 2\rho) \subset \Omega$, según lo que se indicó al principio las funciones $\mathbf{f}$ y $\mathbf{P}_{\mathbf{a}_k}$ coinciden en la bola $B(\mathbf{a}_k, \rho)$ por lo que tienen el mismo polinomio de Taylor en $\mathbf{a}$. Razonando como antes se obtiene $\mathbf{P}_\mathbf{a} = \mathbf{P}_{\mathbf{a}_k} = \mathbf{P}_\mathbf{b}$, luego $\mathbf{a} \in \Omega_\mathbf{b}$ y queda demostrado que $\Omega_\mathbf{b}$ es cerrado en la topología relativa de Ω.

Como $\Omega_\mathbf{b} \neq \emptyset$ es un subconjunto abierto y cerrado del espacio conexo Ω se concluye que $\Omega = \Omega_\mathbf{b}$. Esto significa que para todo $\mathbf{a} \in \Omega$ se cumple $\mathbf{P}_\mathbf{a} = \mathbf{P}_\mathbf{b}$, luego $\mathbf{f}(\mathbf{a}) = P_\mathbf{a}(\mathbf{a}) = P_\mathbf{b}(\mathbf{a})$, es decir, todos los polinomios $\mathbf{P}_\mathbf{a}$ coinciden con $\mathbf{P}_\mathbf{b}$ y $\mathbf{f} = \mathbf{P}_\mathbf{b}|_\Omega$. ■

7.6. Ejercicios propuestos

◇ **7.6.1** *Utilize la fórmula de Taylor para desarrollar* $x^3 + y^3 + xy$ *en potencias de* $(x-1)$ *y de* $(y-2)$.

◇ **7.6.2** *Calcule el polinomio de Taylor de grado* 2 *de la función*

$$F(x,y) = \int_0^{f(x,y)} e^{-t^2} dt$$

en el punto $(0,0)$, *donde* $f(x,y) = y + x^2 + 2y^2 + 2xy + \operatorname{sen}(x^4 + y^4)$

◇ **7.6.3** *Escriba los desarrollos de Taylor de orden* 3 *de las siguientes funciones, en el punto* $(0,0)$ *con el término complementario en forma integral.*

i) $\log(1 + x + y)$.

ii) $x \operatorname{sen} y + y \operatorname{sen} x$.

◇ **7.6.4** *Si* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *es abierto, una función* $f : \Omega \to \mathbb{R}$ *de clase* C^∞ *se dice que es analítica en* Ω *si para cada* $\mathbf{a} \in \Omega$ *existe una bola* $B(\mathbf{a}, r) \subset \Omega$ *tal que para cada* $\mathbf{x} \in B(\mathbf{a}, r)$ *se cumple*

$$f(\mathbf{x}) = \lim_m P_m(\mathbf{x} - \mathbf{a})$$

donde $P_m(\mathbf{x} - \mathbf{a})$ *es el polinomio de Taylor de* f *en* $\mathbf{a}$, *de grado* $\leq m$.

Si existe $M > 0$ *tal que* $|D^k_{j_1 j_2 \cdots j_k} f(\mathbf{x})| \leq M^k$ *para cada* $\mathbf{x} \in \Omega$, $k \in \mathbb{N}$ *y* $1 \leq j_1, \cdots j_k \leq n$, *demuestre que* f *es analítica en* Ω.

◇ **7.6.5** *Demuestre que las siguiente funciones son analíticas en los abiertos que se indican*

i) $x^3 + y^2 - xy^7$, *en* $\mathbb{R}^2$.

ii) $\log(1 + x + y)$, *en* $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x + y + 1 > 0\}$.

◇ **7.6.6** *Demuestre que las siguientes funciones son analíticas en los abiertos que se indican*

i) $\log(x + y)$, *en* $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x + y > 0\}$.

ii) $x \operatorname{sen} y + y \operatorname{sen} x$, *en* $\mathbb{R}^2$.

iii) xe^{x+y+z}, *en* $\mathbb{R}^3$.

iv) $f(ax + by)$ *en* $\mathbb{R}^2$, *siendo* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *analítica.*

v) $\operatorname{sen}(ax^2 + by)$ *en* $\mathbb{R}^2$.