

# Índice general

<b>Prólogo</b>	<b>I</b>
<b>1. Preliminares sobre funciones de varias variables</b>	<b>1</b>
1.1. Introducción . . . . .	1
1.2. Funciones de una variable . . . . .	2
1.3. Funciones de varias variables . . . . .	2
1.4. Coordenadas curvilíneas . . . . .	5
1.5. Ejercicios propuestos . . . . .	7
<b>2. Espacios métricos y espacios normados</b>	<b>9</b>
2.1. El espacio $\mathbb{R}^n$ . Espacios normados . . . . .	10
2.2. Sucesiones y conjuntos compactos . . . . .	17
2.3. Espacios completos . . . . .	21
2.4. Normas en $C[a, b]$ . . . . .	23
2.5. Ejercicios resueltos . . . . .	24
2.6. Ejercicios propuestos . . . . .	27
<b>3. Límites y continuidad</b>	<b>32</b>
3.1. Definiciones y resultados básicos . . . . .	33
3.2. Reglas para obtener el límite y la continuidad . . . . .	36
3.3. Funciones continuas en conjuntos compactos . . . . .	41
3.4. Espacios normados de dimensión finita . . . . .	42
3.5. Continuidad uniforme . . . . .	45
3.6. Convergencia uniforme . . . . .	50
3.7. Ejercicios resueltos . . . . .	53
3.8. Ejercicios propuestos . . . . .	57
<b>4. Funciones vectoriales de una variable</b>	<b>62</b>
4.1. Derivada de una función vectorial . . . . .	64
4.2. Desarrollo de Taylor . . . . .	70
4.3. Integral de una función vectorial . . . . .	72
4.4. Caminos rectificables . . . . .	75
4.5. Integral respecto al arco . . . . .	82
4.6. Ejercicios resueltos . . . . .	85
4.7. Ejercicios propuestos . . . . .	87

<b>5. Funciones diferenciables</b>	<b>91</b>
5.1. Derivada según un vector . . . . .	92
5.2. Aplicaciones diferenciables . . . . .	102
5.3. Las reglas del cálculo diferencial . . . . .	109
5.4. Gradiente . . . . .	116
5.5. Espacio tangente . . . . .	118
5.6. Ejercicios resueltos . . . . .	124
5.7. Ejercicios propuestos . . . . .	132
<b>6. Funciones dos veces diferenciables</b>	<b>139</b>
6.1. Funciones dos veces diferenciables. . . . .	140
6.2. Extremos relativos . . . . .	146
6.3. Funciones convexas . . . . .	150
6.4. Ejercicios resueltos . . . . .	154
6.5. Ejercicios propuestos . . . . .	160
<b>7. Desarrollo de Taylor</b>	<b>163</b>
7.1. Funciones diferenciables $m$ veces . . . . .	164
7.2. Desarrollo de Taylor . . . . .	168
7.3. Serie de Taylor de una función de clase $C^\infty$ . . . . .	173
7.4. Fórmula integral para el resto . . . . .	175
7.5. Ejercicios resueltos . . . . .	176
7.6. Ejercicios propuestos . . . . .	180
<b>8. Función inversa y función implícita</b>	<b>181</b>
8.1. Aplicaciones con inversa local . . . . .	182
8.2. Funciones implícitas . . . . .	189
8.3. Cálculo con funciones implícitas e inversas . . . . .	193
8.4. Cambio de variable en el cálculo diferencial . . . . .	196
8.5. Ejercicios resueltos . . . . .	199
8.6. Ejercicios propuestos . . . . .	204
<b>9. Extremos condicionados</b>	<b>208</b>
9.1. Subvariedades diferenciables . . . . .	209
9.2. Extremos condicionados . . . . .	214
9.3. Ejercicios resueltos . . . . .	221
9.4. Ejercicios propuestos . . . . .	234
<b>10. Integral de Riemann</b>	<b>238</b>
10.1. Funciones integrables Riemann . . . . .	238
10.2. Conjuntos medibles Jordan . . . . .	245
10.3. Caracterización de las funciones integrables . . . . .	256
10.4. Ejercicios resueltos . . . . .	261
10.5. Ejercicios propuestos . . . . .	265

<b>11. Técnicas de cálculo integral</b>	<b>267</b>
11.1. Integración iterada . . . . .	268
11.2. Utilización del cambio de variable . . . . .	274
11.3. Ejercicios resueltos . . . . .	282
11.4. Ejercicios propuestos . . . . .	292
<b>12. Integrales impropias. Integrales dependientes de un parámetro</b>	<b>298</b>
12.1. Integrales impropias . . . . .	298
12.2. Paso al límite bajo la integral . . . . .	301
12.3. Ejercicios resueltos . . . . .	307
12.4. Ejercicios propuestos . . . . .	312
<b>13. Integral curvilínea</b>	<b>314</b>
13.1. Formas diferenciales e integral curvilínea . . . . .	315
13.2. Formas diferenciales en el plano . . . . .	324
13.3. El teorema de Green . . . . .	332
13.4. Ejercicios resueltos . . . . .	340
13.5. Ejercicios propuestos . . . . .	344
<b>14. Integrales de superficie</b>	<b>348</b>
14.1. Preliminares geométricos . . . . .	349
14.2. Área de una superficie . . . . .	351
14.3. Integral respecto al elemento de área . . . . .	358
14.4. Flujo de un campo de vectores . . . . .	360
14.5. Integración sobre variedades paramétricas $k$ -dimensionales . . . . .	365
14.6. Ejercicios resueltos . . . . .	369
14.7. Ejercicios propuestos . . . . .	373
<b>A. Sucesiones y series de funciones</b>	<b>374</b>
A.1. Convergencia puntual y uniforme . . . . .	375
A.2. Continuidad, derivabilidad e integrabilidad del límite . . . . .	377
A.3. Series de funciones . . . . .	381
A.4. Ejercicios resueltos . . . . .	385
A.5. Ejercicios propuestos . . . . .	392
<b>B. Complementos al capítulo 2</b>	<b>397</b>
B.1. La recta real . . . . .	397
B.2. Completitud y compacidad . . . . .	399
B.3. Espacios de sucesiones . . . . .	400
B.4. Formas lineales y producto escalar . . . . .	402
B.5. Espacios complejos con producto interior . . . . .	403
<b>C. Complementos al capítulo 3</b>	<b>406</b>
C.1. Intercambio de límites . . . . .	406
C.2. Convergencia uniforme de series de funciones vectoriales . . . . .	411

<b>D. Integración de funciones vectoriales</b>	<b>414</b>
D.1. Integración de funciones regladas . . . . .	414
D.2. Definición general de la integral de Riemann . . . . .	417
<b>E. Complementos sobre diferenciabilidad</b>	<b>422</b>
E.1. Caracterización de las funciones de clase $C^1$ . . . . .	422
E.2. La definición general de diferencial segunda . . . . .	423
E.3. Teorema de Schwarz sobre la igualdad de las derivadas mixtas . . . .	425
<b>F. Funciones convexas</b>	<b>427</b>
F.1. Caracterización de las funciones convexas de una variable . . . . .	427
F.2. Continuidad de las funciones convexas de varias variables . . . . .	433
<b>G. Funciones analíticas</b>	<b>437</b>
G.1. Funciones analíticas . . . . .	437
<b>H. Dependencia funcional. Subvariedades diferenciables</b>	<b>443</b>
H.1. Dependencia e independencia funcional . . . . .	443
H.2. Parametrizaciones regulares . . . . .	446
H.3. Subvariedades orientables . . . . .	449
<b>I. Extremos y formas cuadráticas</b>	<b>452</b>
I.1. Extremos y formas cuadráticas . . . . .	452
<b>J. Cambio de variable en la integral de Riemann</b>	<b>457</b>
J.1. Preliminares . . . . .	457
J.2. La demostración del teorema de cambio de variable . . . . .	463
<b>K. Formas diferenciales</b>	<b>472</b>
K.1. Producto mixto y producto vectorial . . . . .	472
K.2. Formas multilineales alternadas . . . . .	478
K.3. Formas diferenciales . . . . .	484

# Prólogo

El material que se ofrece en este texto es fruto de una larga experiencia docente enseñando esta materia en la Facultad de Matemáticas de la Universidad de Murcia. Contiene, además de los contenidos básicos de la asignatura, otro material complementario que en alguna ocasión ha sido expuesto o entregado por escrito a los alumnos. Por esta razón, el temario desarrollado en estas *Lecciones* está adaptado y cubre lo que habitualmente se enseña en la Facultad de Matemáticas de esta Universidad, aunque excede lo que se puede enseñar durante un curso académico. Para solventar esta dificultad aquellos temas que se pueden considerar de carácter complementario o más avanzado, han sido incluidos en apéndices independientes al final del texto. Allí el estudiante interesado podrá ampliar y estudiar con mayor profundidad algunos de los temas propios de la asignatura.

A lo largo del texto se exponen con detalle ejemplos que ilustran y aclaran los conceptos teóricos nuevos. Cada capítulo termina con un repertorio de problemas resueltos donde se analizan comentan y enseñan diferentes estrategias para abordarlos, seguido de un amplio repertorio de problemas propuestos.

Por su enfoque, por el amplio repertorio de problemas resueltos, y por los temas complementarios incluidos, estas *Lecciones* puedan interesar no sólo a los estudiantes de Matemáticas que quieran profundizar en los asuntos propios del Análisis Matemático II, sino a profesores jóvenes que comiencen a enseñar de esta materia. Esperamos que también sean útiles a estudiantes de otras titulaciones, de carácter científico, que estudien, en universidades de habla hispana, el cálculo diferencial e integral para funciones de varias variables.

Los conocimientos previos asumidos al redactar estas *Lecciones* han sido:

- Cálculo Diferencial y Cálculo Integral para funciones reales de una variable real.
- Nociones básicas de Álgebra Lineal (aplicaciones lineales, matrices y determinantes) y de Geometría Euclídea.
- El vocabulario y la terminología usual de la Teoría de Conjuntos y de la Topología en el ámbito del espacio euclídeo  $\mathbb{R}^n$  o de los espacios métricos: Conjuntos abiertos, cerrados, compactos. Frontera, interior y adherencia de un conjunto (esencialmente, el capítulo 2 y la primera parte del capítulo 3 del libro de Apostol [2]).

NOTA: La versión completa en formato `.pdf` de estas *Lecciones* permite navegar a lo largo de todo el texto, y acudir directamente a las referencias y citas bibliográficas.