Recopilación de resultados sobre $\beta\mathbb{N}$

25 de octubre de 2011

1. Un modelo para $\beta\mathbb{N}$

Consideremos el conjunto de las medias sobre $\mathbb{N}$, $\mathcal{M} = \{\mu \in (l_\infty)^* : \mu \geq 0,\ \mu(\mathbf{1}) = 1\}$. Sabemos que este conjunto, convexo y débil* compacto, se identifica con el de las probabilidades finitamente aditivas $\mu : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \to [0,1]$. El conjunto de sus puntos extremales

$$\mathrm{Ext}(\mathcal{M}) = \{\mu \in \mathcal{M} : \mu(E) \in \{0,1\} \ \ \forall E \subset \mathbb{N}\}$$

con la topología de la convergencia puntual sobre conjuntos $E \subset \mathbb{N}$ (que coincide con la inducida por la topología débil* de $(l_\infty)^*$) es un modelo para $\beta\mathbb{N}$, la compactificación de Stone-Čech de $\mathbb{N}$: Cada $n \in \mathbb{N}$ se identifica con la probabilidad finitamente aditiva δ_n ($\delta_n(E) = 1$ si $n \in E$, y $\delta_n(E) = 0$ si $n \notin E$). Si cada $\mu \in \mathrm{Ext}(\mathcal{M})$ se identifica con el ultrafiltro $\mathcal{U}_\mu = \{U \subset \mathbb{N} : \mu(U) = 1\}$ se obtiene el modelo usual de $\beta\mathbb{N}$ como espacio de ultrafiltros sobre $\mathbb{N}$. La clausura de $A \subset \mathbb{N}$ en $\beta\mathbb{N}$ está formada por los ultrafiltros $\mathcal{U}$ a los que pertenece A, es decir

$$\overline{A}^\beta = \{\mu \in \beta\mathbb{N} : \mu(A) = 1\} = \{\mathcal{U} : A \in \mathcal{U}\}$$

Si A_1, A_2 son subconjuntos de $\mathbb{N}$, se verifica $\overline{A_1 \cap A_2}^\beta = \overline{A_1}^\beta \cap \overline{A_2}^\beta$ luego

$$A_1 \cap A_2 = \emptyset \Rightarrow \overline{A_1}^\beta \cap \overline{A_2}^\beta = \emptyset$$

Cada $\overline{A}^\beta$ es clopen (abierto y cerrado) en $\beta\mathbb{N}$ y la familia de abiertos $\{\overline{A}^\beta : A \subset \mathbb{N}\}$ es una base para la topología de $\beta\mathbb{N}$.

El subespacio $\beta\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}$ es compacto sin puntos aislados (algunas de sus propiedades se pueden ver en [4]). Dado $A \subset \mathbb{N}$ el conjunto $\hat{A} = \overline{A}^\beta \cap (\beta\mathbb{N} \setminus \mathbb{N})$ es vacío si y sólo si A es finito y $\hat{A} = \hat{B}$ si y sólo si la diferencia simétrica $A \Delta B$ es finita. Es fácil ver que $\hat{A}$ es clopen en $\beta\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}$, que todo clopen en $\beta\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}$ es de esta forma y que la familia de abiertos $\{\hat{A} : A \subset \mathbb{N}\}$ es una base para la topología de $\beta\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}$.

Cada $f \in l_\infty$ se extiende a una única función continua $\overline{f}$ sobre $\beta\mathbb{N}$, lo que permite identificar l_∞ con $C(\beta\mathbb{N})$. Entonces el teorema de Riesz permite representar cada $\mu \in \mathcal{M}$ como una probabilidad de Radon $\hat{\mu}$ sobre la σ-álgebra de Borel de $\beta\mathbb{N}$. Es fácil comprobar que para cada $A \subset \mathbb{N}$ se verifica $\mu(A) = \hat{\mu}(\overline{A}^\beta)$. La restricción de $\overline{f} : \beta\mathbb{N} \to \mathbb{R}$ a $\beta\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}$ la

denotaremos $\hat{f}$. Es claro que $\hat{f} = \hat{g} \;\Leftrightarrow f - g \in c_0$. Además, para $f \in l_\infty$, se cumple que a es punto de aglomeración de la sucesión acotada $f(n)$ (e.d, a es límite de una subsucesión convergente $f(n_j)$) si y sólo si a es el límite según un ultrafiltro $\mathcal{U}_\mu \in \beta\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}$ de la sucesión $f(n)$, es decir $a = \hat{f}(\mu) = \mu(f) = \text{lím}_{\mathcal{U}_\mu} f$.
Nota: En el modelo habitual de $\beta\mathbb{N}$ como espacio de ultrafiltros cada $p \in \beta\mathbb{N}$ se identifica con el ultrafiltro $\mathcal{U} = \{U \subset \mathbb{N} : p \in \overline{U}^\beta\}$, y cada ultrafiltro $\mathcal{U}$ con el único punto de la intersección $\bigcap\{\overline{U}^\beta : U \in \mathcal{U}\}$.

2. Algunos resultados de Rudin

Rudin [4] que describe $\beta\mathbb{N}$ como el espacio de los ultrafiltros sobre $\mathbb{N}$, proporciona demostraciones detalladas de los siguientes resultados

1. $\beta\mathbb{N}$ tiene 2^c elementos. La demostración de Rudin, bastante sencilla, se basa en la existencia de una familia de c subconjuntos independientes de $\mathbb{N}$.

2. Las permutaciones de $\mathbb{N}$ están en correspondencia biunívoca (en forma natural) con los homeomorfismos de $\beta\mathbb{N}$, luego $\beta\mathbb{N}$ tiene c homeomorfismos.

3. Si dos ultrafiltros libres α, β son isomorfos (como conjuntos parcialmente ordenados por inclusión) existe una permutación π de $\mathbb{N}$ tal que el homeomorfismo asociado $\hat{\pi} : \beta\mathbb{N} \to \beta\mathbb{N}$ cumple $\hat{\pi}(\alpha) = \beta$). Existen 2^c clases de ultrafiltros libres y cada clase tiene exactamente c elementos.
   Dados dos ultrafiltros distintos α, β, existe una permutación π de $\mathbb{N}$ tal que $\hat{\pi}(\alpha) = \alpha$ y $\hat{\pi}(\beta) \neq \beta$. (Se sigue de esto que el grupo de las permutaciones de $\mathbb{N}$ tiene 2^c subgrupos distintos, pero sólo tiene dos subgrupos normales no triviales).

4. En [5] Rudin demostró que en $\beta\mathbb{N}$ no hay sucesiones convergentes de puntos distintos entre sí y que cada compacto infinito $K \subset \beta\mathbb{N}$ contiene una copia de $\beta\mathbb{N}$ y por lo tanto tiene 2^c puntos.

5. En $\beta\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}$, que tiene 2^c puntos, hay exactamente c conjuntos clopen que forman una base de la topología, y dados dos de ellos $\hat{A}, \hat{B}$ no vacíos, existe un homeomorfismo h de $\beta\mathbb{N}$ que cumple $h(\hat{A}) = \hat{B}$.
   En $\beta\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}$, la intersección de una sucesión de abiertos, o es vacía, o contiene un abierto no vacío, es decir cada $\mathcal{G}_\delta$ no vacío en $\beta\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}$ tiene interior no vacío.

6. Un punto x de un espacio topológico X se dice que es un *p-punto* si $\{p\}$ es un P-sets, es decir, cada $\mathcal{G}_\delta$ que contiene a x es un entorno de x, lo que equivale a que toda función continua $f : X \to \mathbb{R}$ es constante en un entorno de x. Si todos los puntos de un compacto K son p-puntos, entonces K es finito. Cada punto aislado de X es un p-punto, y cada p-punto con una base numerable de entornos es aislado. Para un espacio compacto infinito es imposible que todos sus puntos sean p-puntos y es fácil ver que cada $\mu \in \beta\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}$ no es p-punto del espacio $\beta\mathbb{N}$ ([2]).

La noción de p-punto, en el contexto de $\beta\mathbb{N}\setminus\mathbb{N}$, fue considerada por Rudin [4] donde demostró, asumiendo (CH), que el espacio compacto $\beta\mathbb{N}\setminus\mathbb{N}$ tiene 2^c p-puntos y que el conjunto de tales puntos es denso en $\beta\mathbb{N}\setminus\mathbb{N}$. Como consecuencia de esto Rudin obtuvo que bajo (CH), el espacio $\beta\mathbb{N}\setminus\mathbb{N}$ no es homogéneo (un espacio topológico X es homogéneo si para cada par de puntos $p,q\in X$ hay un homeomorfismo $h:X\to X$ tal que $h(p)=q$) Así Rudin dio respuesta negativa a una pregunta planteada en 1955 referente a la homogeneidad $\beta X\setminus X$ cuando X era homogéneo.

Rudin [4] demostró, asumiendo (CH), que si p,q son p-puntos de $\beta\mathbb{N}\setminus\mathbb{N}$, hay un homeomorfismo $h:\beta\mathbb{N}\setminus\mathbb{N}\to\beta\mathbb{N}\setminus\mathbb{N}$ tal que $h(p)=q$, y como consecuencia en $\beta\mathbb{N}\setminus\mathbb{N}$ hay 2^c homeomorfismos. También demostró que $\beta\mathbb{N}\setminus\mathbb{N}$ es casi-homogéneo: Para cada $p\in\beta\mathbb{N}\setminus\mathbb{N}$ y cada abierto $V\subset\beta\mathbb{N}\setminus\mathbb{N}$ hay un homeomorfismo h de $\beta\mathbb{N}\setminus\mathbb{N}$ que verifica $h(p)\in V$.

7. Sea K compacto Hausdorff y $h:K\to K$ un homeomorfismo. Dada $f\in C(K)$ sea y $E(f)$ el conjunto de los $x\in K$ tales que es convergente la sucesión

$$s_n(f,x)=\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}f(h^k(x))$$

Es fácil ver que existe una probabilidad de Radon h-invariante μ, sobre la σ-álgebra de Borel $\mathcal{B}(K)$ (basta fijar $x_0\in K$ y tomar un punto de aglomeración μ en la topología débil* de la sucesión de probabilidades de Radon $\mu_n(f)=s_n(f,x_0)$). Aplicando el teorema ergódico de Birkhoff resulta $\mu(E(f))$ =1. Como consecuencia Rudin [5] obtiene que si K es un compacto metrizable, entonces para cada homeomorfismo $h:K\to K$ existe un conjunto no vacío $E\subset K$ tal que $s_n(f,x)$ converge para cada $f\in C(K)$ y cada $x\in E$.

La aplicación shift, $\sigma:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$, $\sigma(n)=n+1$, induce un homeomorfismo que seguimos denotando igual $\sigma:\beta\mathbb{N}\setminus\mathbb{N}\to\beta\mathbb{N}\setminus\mathbb{N}$. Jerison [3] había conjeturado que el resultado anterior también se cumplía para este homeomorfismo del compacto no metrizable $K=\beta\mathbb{N}\setminus\mathbb{N}$. Rudin [5] puso de manifiesto que la conjetura era falsa viendo que el homeomorfismo considerado no tiene órbitas finitas y demostrando que si α_k es una sucesión de puntos de $\beta\mathbb{N}$, distintos dos a dos, entonces existe $f\in C(\beta\mathbb{N})$ tal que la sucesión $s_n(f)=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}f(\alpha_k)$ diverge. Como corolario Rudin obtuvo que para cada ultrafiltro $\mathcal{U}\subset\mathcal{P}(\mathbb{N})$ hay un conjunto $E\in\mathcal{U}$ tal que $t(E)=\{k:k+E\in\mathcal{U}\}$ no tiene densidad ordinaria (Un conjunto $A\subset\mathbb{N}$ se dice que tiene densidad ordinaria $d(A)$ cuando existe el límite $\lim_n\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\chi_A(k)=d(A)$).

Gait y Koo [1] extendieron este resultado demostrando que si K es un F-espacio compacto, entonces para cada conjunto numerable $\{\alpha_n:n\in\mathbb{N}\}\subset K$ existe $f\in C(K)$ tal que la sucesión $s_n(f)=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}f(\alpha_k)$ no converge.

Referencias

[1] J. Gait and S. Koo, *Averages of functions and ergodic measures in f-spaces*, Math. Systems Theory **6** (1972), 23–35.

[2] Melvin Henriksen, *Multiplicative summability methods and the Stone-Cech compactification*, Math. Z. **71** (1959), 427–435. MR MR0108720 (21 #7434)

[3] M. Jerison, *The set of all generalized limits of bounded sequences*, Canad. J. Math. **9** (1957), 79–89.

[4] W. Rudin, *Homogeneity problems in the theory of Cech compactifications (and note of correction in p.633)*, Duke Math. J. **23** (1956), 409–419.

[5] ______, *Averages of continuous functions on compact spaces*, Duke Math. J. **25** (1958), 197–204.