Limites generalizados de Banach

14 de junio de 2012

En esta nota se recogen resultados básicos sobre los límites generalizados de Banach, el funcional sublineal de Banach, las sucesiones casi convergentes, y la densidad uniforme. También se consideran clases especiales de límites de Banach con propiedades adicionales que han sido consideradas en la literatura.

1. Preliminares sobre sumabilidad

Sea ω el espacio de las sucesiones de números reales y $c \subset \omega$ el subespacio de las sucesiones convergentes. Un operador lineal continuo $A : l_\infty \to l_\infty$ se dice que es matricial cuando hay una matriz infinita de números reales (a_{nk}) tal que para $\mathbf{x} = (x_k) \in l_\infty$ la serie $A_n(\mathbf{x}) = \sum_k a_{nk} x_k$ converge y define una sucesión acotada $A(\mathbf{x}) = (A_n(\mathbf{x}))$.

Si $A = (a_{nk})$ es una matriz infinita de números reales, una sucesión $\mathbf{x} = (x_k) \in \omega$ se dice que es A-*sumable* hacia $x \in \mathbb{R}$ cuando para todo $n \in \mathbb{N}$ la serie $A_n(\mathbf{x}) = \sum_k a_{nk} x_k$ es convergente y la sucesión $A(\mathbf{x}) = (A_n(\mathbf{x}))$ converge hacia x:

$$\lim_n A_n(\mathbf{x}) = \lim_n \sum_k a_{nk} x_k = x$$

Se designa por c_A el subespacio de ω formado por las sucesiones A-sumables, sobre el que está definido el funcional lineal $\text{A-}\lim_n x_n = \lim_n A_n(\mathbf{x})$. La matriz A se dice que es *regular* cuando transforma sucesiones convergentes en sucesiones convergentes al mismo límite, es decir $c \subset c_A$ y además el funcional $\text{A-}\lim$ extiende el límite ordinario. Un teorema clásico de Silverman-Toeplitz caracteriza las matrices regulares mediante las condiciones

i) $\sup_n \sum_k |a_{nk}| < +\infty$; ii) $\lim_k a_{nk} = 0$ para todo n; iii) $\lim_n \sum_k a_{nk} = 1$.

Un ejemplo de matriz regular no negativa lo proporciona la matriz de Cesàro $C = (c_{nk})$

$$c_{nk} = 1/n \ \text{ si } \ 1 \le k \le n; \quad c_{nk} = 0 \ \text{ si } \ k > n.$$

En este caso $\mathbf{x} \in \omega$ es C-sumable, o sumable Cesàro, hacia x si

$$\lim_n \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} = x$$

El espacio vectorial de las sucesiones sumables Cesàro es costumbre designarlo por $\sigma_1 \subset \omega$.

Una clase notable de matrices regulares no negativas es la formada por las asociadas a sucesiones lagunares: Una sucesión *lagunar* es una sucesión creciente $\theta = (n_k)_{k=0}^{\infty}$ en $\mathbb{N}$, con $n_0 = 0$, tal que $h_k = n_k - n_{k-1} \to \infty$. Se le asocia la matriz regular $T_\theta = (t_{nk})$ donde

$$t_{nk} = \frac{1}{h_k}\chi_{I_k}(n) \quad \text{con} \quad I_k = (n_{k-1}, \cdots n_k]$$

Abreviando la notación, el espacio de las sucesiones T_θ-sumables se designa c_θ.

2. Límites generalizados

El conjunto de las medias sobre $\mathbb{N}$, $\mathcal{M} = \{\mu \in (l_\infty)^* : \mu \geq 0,\ \mu(\mathbf{1}) = 1\}$, que es convexo y débil* compacto, se identifica en la forma habitual, con el conjunto de las probabilidades finitamente aditivas $\mu : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \to [0,1]$. El conjunto de sus puntos extremales

$$\mathrm{Ext}(\mathcal{M}) = \{\mu \in \mathcal{M} : \mu(E) \in \{0,1\} \ \ \forall E \subset \mathbb{N}\}$$

con la topología inducida por la topología débil* de $(l_\infty)^*$ es un modelo para $\beta\mathbb{N}$, la compactificación de Stone-Čech de $\mathbb{N}$: Cada $n \in \mathbb{N}$ se identifica con la probabilidad finitamente aditiva δ_n ($\delta_n(E) = 1$ si $n \in E$, y $\delta_n(E) = 0$ si $n \notin E$). Cada $\mu \in \mathrm{Ext}(\mathcal{M})$ se identifica con el ultrafiltro $\mathcal{U}_\mu = \{U \subset \mathbb{N} : \mu(U) = 1\}$ y así se obtiene el modelo usual de $\beta\mathbb{N}$ como espacio de ultrafiltros sobre $\mathbb{N}$.

Dado un filtro $\mathcal{V} \subset \mathcal{P}(\mathbb{N})$ que contiene al filtro de Frechet $\mathcal{F}$ (el de los conjuntos finitos) diremos $\mathbf{x} \in \omega$ converge hacia x según $\mathcal{V}$ cuando converge en el sentido usual: Para cada $\epsilon > 0$ el conjunto $\{n : |x_n - x| < \epsilon\}$ pertenece a $\mathcal{V}$. En este caso escribiremos $\mathrm{lím}_{\mathcal{V}}\, \mathbf{x} = x$. Usamos la notación $c(\mathcal{V})$ para el subespacio de ω formado por las sucesiones convergentes según $\mathcal{V}$. Al filtro $\mathcal{V} \subset \mathcal{P}(\mathbb{N})$ le asociamos la familia de medias:

$$\mathcal{V}^\bullet := \{\mu \in \mathcal{M} : \mu(V) = 1 \text{ para cada } V \in \mathcal{V}\}$$

y la subfamilia $\mathcal{V}^\circ \subset \mathcal{V}^\bullet$ formada por las medias $\{0,1\}$-valuadas de $\mathcal{V}^\bullet$, que se identifica con el conjunto de los ultrafiltros más finos que $\mathcal{V}$. Si μ es la medida finitamente aditiva $\{0,1\}$-valuada asociada a un ultrafiltro $\mathcal{U} \supset \mathcal{V}$ ($\mu(A) = 1$ si $A \in \mathcal{U}$, $\mu(A) = 0$ si $A \notin \mathcal{U}$), entonces $\mathcal{U}^\circ = \{\mu\}$. Por lo tanto, si $\mathcal{U}$ es un ultrafiltro más fino que $\mathcal{V}$ se verifica $\mathcal{V}^\circ \supset \mathcal{U}^\circ = \{\mu\}$ luego $\mathcal{V}^\circ \neq \emptyset$. Es fácil ver que $\mathcal{V}^\bullet$ y $\mathcal{V}^\circ$ son subconjuntos cerrados de $\mathcal{M}$. Es claro que $\mathcal{V}^\bullet$ es convexo y se puede demostrar que $\mathcal{V}^\circ = \mathrm{Ext}(\mathcal{V}^\bullet)$, luego $\mathcal{V}^\bullet = \overline{co}^*(\mathcal{V}^\circ)$. Obsérvese que para el filtro de Frechet $\mathcal{F}$ (el formado por los conjuntos cofinitos $F \subset \mathbb{N}$) se cumple que $\mathcal{F}^\circ = \beta\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}$ (luego $\mathcal{F}^\bullet = \overline{co}^*(\beta\mathbb{N} \setminus \mathbb{N})$).

El conjunto $\mathcal{V}^\circ \subset \mathcal{F}^\circ$ está formado por los puntos de aglomeración de la sucesión (n) según el filtro $\mathcal{V}$, es decir puntos de $\beta\mathbb{N}$ obtenidos como límite de esta sucesión según ultrafiltros más finos que $\mathcal{V}$. En particular $\mathcal{F}^\circ$ es el conjunto formado por los puntos de aglomeración de la sucesión (n) en el espacio compacto $\beta\mathbb{N}$.

Recordemos que para un filtro $\mathcal{V}$ se define

$$\overline{\mathrm{lím}}_{\mathcal{V}}(\mathbf{x}) = \inf_{V \in \mathcal{V}} \sup\{x_n : n \in V\}; \quad \underline{\mathrm{lím}}_{\mathcal{V}}(\mathbf{x}) = \sup_{V \in \mathcal{V}} \inf\{x_n : n \in V\}$$

Es claro que $\underline{\mathrm{lím}}_{\mathcal{V}}(\mathbf{x}) = -\overline{\mathrm{lím}}_{\mathcal{V}}(-\mathbf{x})$ y que $\underline{\mathrm{lím}}_{\mathcal{V}}(\mathbf{x}) = \overline{\mathrm{lím}}_{\mathcal{V}}(\mathbf{x}) = a$ si y sólo si $\mathbf{x}$ converge hacia a según $\mathcal{V}$.

Proposición 2.1 *Si* $\mathbf{x} \in l_\infty$ *se verifica* $\overline{\lim}_{\mathcal{V}}(\mathbf{x}) = \sup\{\mu(\mathbf{x}) : \mu \in \mathcal{V}^\bullet\}$

DEM: Sea $a = \overline{\lim}_{\mathcal{V}}(\mathbf{x}) = \inf_{V \in \mathcal{V}} S(V)$ donde $S(V) = \sup\{x_n : n \in V\}$. Para cada $\mu \in \mathcal{V}^\bullet$ y cada $V \in \mathcal{V}$ se verifica $\mu(\mathbf{x}) = \mu(\chi_V \mathbf{x}) \leq S(V)$ luego $\mu(\mathbf{x}) \leq a$ y por lo tanto $\sup\{\mu(\mathbf{x}) : \mu \in \mathcal{V}^\bullet\} \leq a$. Por otra parte, dado $\epsilon > 0$, para cada $V \in \mathcal{V}$ no es vacío el conjunto $E_V = \{n \in V : x_n > S(V) - \epsilon\}$. El conjunto $E = \cup\{E_V : V \in \mathcal{V}\}$ tiene intersección no vacía con cada $V \in \mathcal{V}$ luego hay un ultrafiltro $\mathcal{U} \supset \mathcal{V}$ con $E \in \mathcal{U}$. Como para todo $n \in E$ se cumple $x_n \geq a - \epsilon$, la media $\{0,1\}$-valuada ν asociada a este ultrafiltro es un elemento de $\mathcal{V}^\bullet$ que cumple $\nu(\mathbf{x}) = \nu(\chi_E \mathbf{x}) \geq a - \epsilon$ y queda demostrado que $\sup\{\mu(\mathbf{x}) : \mu \in \mathcal{V}^\bullet\} = a$. ■

Proposición 2.2 *Dado un filtro* $\mathcal{V} \supset \mathcal{F}$*, y* $\mathbf{x} \in l_\infty$*, son equivalentes*
i) $\mathbf{x}$ *converge hacia* α *según el filtro* $\mathcal{V}$.
ii) $\mu(\mathbf{x}) = \alpha$ *para todo* $\mu \in \mathcal{V}^\bullet$.

DEM: i) $\Rightarrow$ ii) es inmediato. Recíprocamente, si $\mu(\mathbf{x}) = \alpha$ para todo $\mu \in \mathcal{V}^\bullet$, en particular $\mu(\mathbf{x}) = \alpha$ para todo $\mu \in \mathcal{V}^\circ$, es decir, para todo ultrafiltro $\mathcal{U} \supset \mathcal{V}$ se cumple que $\lim_{\mathcal{U}} \mathbf{x} = \alpha$, luego $\mathbf{x}$ converge hacia α según el filtro $\mathcal{V}$.

También se puede razonar utilizando la proposición 2.1 teniendo en cuenta que $\mathbf{x}$ converge hacia α según el filtro $\mathcal{V}$ si y sólo si $\overline{\lim}_{\mathcal{V}}(\mathbf{x}) = \underline{\lim}_{\mathcal{V}}(\mathbf{x})$. ■

A las medias $\mu \in \mathcal{V}^\bullet$ las llamamos $\mathcal{V}$-*límites generalizados* porque son las que extienden el límite según $\mathcal{V}$. Según esta definición $\mathcal{V}^\circ$ es el conjunto de los $\mathcal{V}$-límites generalizados asociados a ultrafiltros más finos que $\mathcal{V}$. En lo sucesivo llamaremos *límites generalizados* a los $\mathcal{F}$-límites generalizados, donde $\mathcal{F}$ es el filtro de Frechet. Si $\mu \in \mathcal{F}^\bullet$ es un límite generalizado y $\mathbf{x} = (x_n)$ es una sucesión acotada, usaremos la notación $\mu\text{-}\lim_n x_n$ para denotar el valor $\mu(\mathbf{x})$.

Si una aplicación inyectiva $s : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ no tiene puntos periódicos se dice que es un *movimiento* de $\mathbb{N}$. Si s es un movimiento de $\mathbb{N}$, se llaman medias s-*invariantes* a los elementos del conjunto débil* cerrado convexo

$$\mathcal{M}_s = \{\mu \in \mathcal{M} : \mu(\mathbf{x}) = \mu(\mathbf{x} \circ s) \text{ para todo } \mathbf{x} \in l_\infty\}$$

La existencia de medias s-invariantes se puede demostrar de diversas maneras. Entre otras mediante la siguiente proposición [28].

Proposición 2.3 *Si* $s : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *es un movimiento de* $\mathbb{N}$*, para cada par* $m, n \in \mathbb{N}$ *se considera la media*

$$\mu_s(m,n)(f) = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(s^k(m)), \quad f \in l_\infty$$

Si L es un conjunto dirigido y $(\mu_s(m_j, n_j))_{j \in L}$ *es una red con* $\lim_j n_j = +\infty$ *entonces cada punto de aglomeración (débil*) de la red es una media s-invariante.*

Si $s : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ es un movimiento, es fácil ver que $\mathcal{M}_s \subset \mathcal{F}^\bullet$, es decir, cada media s-invariante es un límite generalizado. En lo que sigue $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ designa el movimiento

$\sigma(n) = n + 1$. A las medias σ-invariantes se les llama *límites generalizados de Banach* (brevemente, *límites de Banach*). Según la notación anterior $\mathcal{M}_\sigma$ designa el conjunto de los límites de Banach que cumple $\mathcal{M}_\sigma \subset \mathcal{F}^\bullet \setminus \mathcal{F}^\circ$, ya que la medida f.a. asociada a un límite generalizado de Banach no puede ser $\{0, 1\}$ valuada. Una forma lineal $\mu : l_\infty \to \mathbb{R}$ es un límite de Banach si y sólo si para todo $\mathbf{x} \in l_\infty$ es $\mu(\mathbf{x}) = \mu(\mathbf{x} \circ \sigma) \leq \sup \mathbf{x}$.

La existencia de límites de Banach ($\mathcal{M}_\sigma \neq \emptyset$) también se puede demostrar en la forma siguiente: Sea $C : l_\infty \to l_\infty$ la transformación de Cesàro. Si $\mathcal{U} \supset \mathcal{F}$ es un ultrafiltro más fino que el filtro de Frechet $\mathcal{F}$, es fácil ver que $\mu(\mathbf{x}) = \text{lím}_\mathcal{U} C(\mathbf{x})$ define un límite generalizado de Banach que verifica

$$\mu(\mathbf{x}) \leq \overline{\text{lím}}\ C(\mathbf{x}) \text{ para todo } \mathbf{x} \in l_\infty$$

Los límites de Banach así obtenidos extienden la sumabilidad Cesàro: Si $\mathbf{x} \in l_\infty$ y existe $\text{lím}\, C(\mathbf{x}) = a$ entonces $\mu(\mathbf{x}) = a$. Por ello los llamaremos límites de Banach-Cesàro.

3. Funcionales sublineales y límites de Banach

Si $\rho : l_\infty \to \mathbb{R}$ es un funcional sublineal que verifica

i) $\rho(\mathbf{x}) = x$ si $x_n = x$ para todo $n \in \mathbb{N}$.
ii) $\rho(\mathbf{x}) \leq \sup_n x_n$ para todo $\mathbf{x} \in l_\infty$.

con el teorema de Han-Banach, aplicado al subespacio de las sucesiones constantes, es fácil ver que $J = \{\mu \in (l_\infty)^* : \mu \leq \rho\}$ es una familia no vacía de medias, convexa y débil* cerrada. Recíprocamente cada familia convexa y débil* cerrada $J \subset \mathcal{M}$ lleva asociado el funcional sublineal $\rho_J(\mathbf{x}) = \sup\{\mu(x) : \mu \in J\}$ que verifica $J = \{\mu \in (l_\infty)^* : \mu \leq \rho_J\}$. Se suele decir que ρ_J es el *funcional sublineal fundamental* de la familia J. Según 2.1 el funcional sublineal asociado a la familia de medias $\mathcal{V}^\bullet$ es $\overline{\text{lím}}_\mathcal{V}(\mathbf{x}$.

Al funcional sublineal $w(\mathbf{x}) = \sup\{\mu(\mathbf{x}) : \mu \in \mathcal{M}_\sigma\}$, asociado a la familia de los límites de Banach lo llamaremos *funcional sublineal de Banach*. Como el conjunto $\mathcal{M}_\sigma$ es convexo y débil* cerrado se verifica $\mathcal{M}_\sigma = \{\mu \in (l_\infty)^* : \mu \leq w\}$.

Para el manejo del funcional sublineal de Banach es conviene usar la siguiente definición y algunos resultados de carácter elemental que proceden de [46].

Definición 3.1 *Un funcional sublineal $p : l_\infty \to \mathbb{R}$ genera límites de Banach si todo $\mu \in (l_\infty)^*$ que verifique $\mu \leq p$ es un límite generalizado de Banach. Un funcional sublineal $q : l_\infty \to \mathbb{R}$ domina a los límites de Banach si $\mu \leq q$ para todo límite de Banach μ.*

Proposición 3.2 *Si $q : l_\infty \to \mathbb{R}$ es un funcional sublineal, entonces:*
a) q genera límites de Banach si y sólo si $q \leq w$.
b) q domina a los límites de Banach si y sólo si $w \leq q$.
c) q genera y domina a los límites de Banach si y sólo si $w = q$.

Proposición 3.3 *Un funcional sublineal $p : l_\infty \to \mathbb{R}$ genera límites de Banach si y sólo si para todo $\mathbf{x} \in l_\infty$ se cumple $p(\mathbf{x}) \leq \sup \mathbf{x}$ y $p(\mathbf{x} \circ \sigma - \mathbf{x}) \leq 0$.*

Si p genera límites de Banach es fácil ver que $p(\mathbf{x}) \leq \overline{\lim}\, \mathbf{x}$ para todo $\mathbf{x} \in l_\infty$. El funcional sublineal $\overline{\lim}$ no genera límites de Banach pero domina a los límites de Banach. Jerison [28] ya había observado que el funcional sublineal $p_C(\mathbf{x}) = \overline{\lim}\, C(\mathbf{x})$ genera límites de Banach, pero no genera todos los límites de Banach. Sólo genera límites de Banach-Cesàro.

Simons [46] estudia cuando los funcionales sublineales

$$p_A(\mathbf{x}) = \overline{\lim}\, A(\mathbf{x}) = \overline{\lim}_n \sum_k a_{nk} x_k; \quad q_A(\mathbf{x}) = \overline{\lim}_n \sup_j \sum_k a_{nk} x_{k+j}$$

asociados a un operador matricial $A : l_\infty \to l_\infty$, generan o dominan a los límites de Banach. Entre otras cosas Simons extiende el resultado de Jerison citado anteriormente, demostrando que para un operador matricial $A : l_\infty \to l_\infty$, si p_A genera límites de Banach entonces p_A no domina a todos los límites de Banach (la demostraciónen [46] es indirecta, y puede ser interesante encontrar una demostración directa más simple). Para exponer los otros resultados de Simons se requieren unas definiciones previas:

Una matriz regular $A = (a_{nk})$ es *fuertemente regular* cuando $\lim_n \sum_k |a_{nk} - a_{n,k+1}| = 0$. En [9] y [46] se demuestra que una matriz regular $A = (a_{nk})$ es fuertemente regular si y sólo si $\lim A(\mathbf{x} \circ \sigma - \mathbf{x}) = 0$ para cada $\mathbf{x} \in l_\infty$. Una matriz regular $A = (a_{nk})$ se llama *casi-positiva* cuando $\lim_n \sum_k a_{nk}^- = 0$, lo que ocurre si y sólo si $\lim_n \sum_k |a_{nk}| = 1$.

Si $A = (a_{nk})$ es una matriz regular casi positiva el operador traspuesto A^* cumple $A^*(\mathcal{M}) \subset \mathcal{M}$, y por lo tanto $A^*(\mathcal{F}^\bullet) \subset \mathcal{F}^\bullet$. En este caso, en virtud de 2.1, el funcional sublineal asociado a la familia de medias $J = A^*(\mathcal{F}^\bullet)$ es $p_A(\mathbf{x}) = \overline{\lim}\, A(\mathbf{x})$, y en particular el funcional sublineal asociado a $C^*(\mathcal{F}^\bullet)$ es $p_C(\mathbf{x}) = \overline{\lim}\, C(\mathbf{x})$.

Obsérvese que $A^*(\mathcal{F}^\bullet)$ es una familia débil* cerrada y convexa, luego

$$\mu \in A^*(\mathcal{F}^\bullet) \Leftrightarrow \mu(\mathbf{x}) \leq \overline{\lim}\, A(\mathbf{x}) \text{ para todo } \mathbf{x} \in l_\infty.$$

Este sencillo resultado aparece en [39], donde Raimi llama factorizables a los límites generalizados del conjunto $A^*(\mathcal{F}^\bullet) = \{\mu \circ A : \mu \in \mathcal{F}^\bullet\}$. Según esto, la condición iii) del siguiente teorema significa que $A^*(\mathcal{F}^\bullet) \subset \mathcal{F}^\bullet$.

Teorema 3.4 *[46]. Para un operador matricial $A : l_\infty \to l_\infty$ son equivalentes*

i) *A es regular y casi-positiva.*

ii) *$q_A(\mathbf{x}) \leq \overline{\lim}\, \mathbf{x}$ para todo $\mathbf{x} \in l_\infty$.*

iii) *$p_A(\mathbf{x}) \leq \overline{\lim}\, \mathbf{x}$ para todo $\mathbf{x} \in l_\infty$.*

Dem: i) $\Leftrightarrow$ ii) es el clásico teorema del "core" de Knopp (véase [1]). En [32] Maddox vuelve a demostrar i) $\Leftrightarrow$ iii). La parte difícil iii) $\Rightarrow$ i) la demuestra Simons con un lema que según el "refere" de [12], ya lo había obtenido Agnew en [2]. ■

Teorema 3.5 *[46] Para un operador matricial $A : l_\infty \to l_\infty$, definido por la matriz (a_{nk}), se verifica: i) $\Rightarrow$ ii) $\Leftrightarrow$ iii):*

i) *q_A genera límites de Banach.*

ii) *q_A domina a los límites de Banach.*

iii) $\underline{\lim}_n \sum_k a_{nk} \leq 1 \leq \overline{\lim}_n \sum_k a_{nk}$

En virtud de la proposición 3.2 y del teorema 3.5 es interesante caracterizar cuando q_A genera límites de Banach porque entonces se cumple la igualdad $w = q_A$ que proporciona una fórmula explícita para el funcional sublineal de Banach w.

Teorema 3.6 [46] *Para un operador matricial $A : l_\infty \to l_\infty$, definido por la matriz infinita $A = (a_{nk})$, son equivalentes:*
i) q_A *genera límites de Banach. (e.d. $q_A \leq w$)*
ii) p_A *genera límites de Banach. (e.d. $p_A \leq w$)*
iii) A *es casi-positiva y fuertemente regular.*

Dem: En [46] ii) $\Rightarrow$ iii) se obtiene con el lema antes mencionado. iii) $\Rightarrow$ ii) lo vuelve a demostrar Das [10]. Devi [12] y Godfrey [25], parece que de modo independiente, demostraron otra vez iii) $\Leftrightarrow$ ii). Para ello Devi vuelve a usar el lema de Simons y el teorema del 'core' de Knopp [29]. Godfrey proporciona otra demostración de iii) $\Rightarrow$ ii) sin mencionar los resultados de Devi. ∎

Combinando los teoremas 3.5 y 3.6 se llega al siguiente resultado [46] .

Proposición 3.7 *Si $A = (a_{nk})$ es una matriz casi-positiva y fuertemente regular entonces $w = q_A$, es decir $w(\mathbf{x}) = \lim_n \sup_j \sum_k a_{nk} x_{k+j}$.*

En la siguiente proposición, que recoge resultados de diversos autores, se muestran otras fórmulas explícitas para el funcional sublineal de Banach w

Proposición 3.8 *Las siguientes son fórmulas para el funcional sublineal de Banach*

a) $w(\mathbf{x}) = \inf_{k,n_1,\cdots n_k} \overline{\lim}_j \dfrac{1}{k} \displaystyle\sum_{i=1}^{k} x_{j+n_i}.$

b) $w(\mathbf{x}) = \overline{\lim}_n \overline{\lim}_j \; \dfrac{1}{n} \displaystyle\sum_{k=1}^{n} x_{j+k}.$

c) $w(\mathbf{x}) = \lim_n \overline{\lim}_j \dfrac{1}{n} \displaystyle\sum_{k=1}^{n} x_{j+k}.$

d) $w(\mathbf{x}) = \lim_n \; \sup_j \; \dfrac{1}{n} \displaystyle\sum_{k=1}^{n} x_{j+k}.$

e) $w(\mathbf{x}) = \overline{\lim}_n \sup_j \dfrac{1}{n} \displaystyle\sum_{k=1}^{n} x_{j+k}.$

f) $w(\mathbf{x}) = \overline{\lim}_k \sup_i \dfrac{1}{h_k} \displaystyle\sum_{n_{k-1} < n \leq n_k} x_{n+i}$ *donde $\theta = (n_k)_{k=0}^\infty$ es una sucesión lagunar.*

g) $w(\mathbf{x}) = \inf\{\sup_n (x_n + z_n) : \mathbf{z} \in M_0\} = \inf\{\overline{\lim}_n (x_n + z_n) : \mathbf{z} \in M_0\}$
donde $M_0 = \{\mathbf{z} \in l_\infty : \sup_n |\sum_{j=1}^n z_j| < +\infty\} = \{\mathbf{x} \circ \sigma - \mathbf{x} : \mathbf{x} \in l_\infty\}.$

Dem: La fórmula a) es la utilizada por Banach. Las fórmulas b) y c) aparecen en el artículo de Jerison [28]. Las fórmulas d) y e) se deben a Sucheston [48], [49] . La fórmula f) se aparece en [11] . La primera fórmula en g) aparece en el artículo de Simons [46], y la segunda fórmula en g) resulta de una observación en la pág. 399 de [12].

Algunas de las fórmulas que figuran en 3.8 y otras que no aparecen aquí las demuestra Fremlin en [23] donde llama sucesión de Folner a una sucesión $I_m \subset \mathbb{N}$ de conjuntos finitos no vacíos tal que para todo $k \in \mathbb{N}$ se cumple:

$$\lim_m \frac{1}{|I_m|} |I_m \triangle (k + I_m)| = 0$$

y demuestra que

h) $w(\mathbf{x}) = \max \left\{ \overline{\lim}_m \frac{1}{|I_m|} \sum_{i \in I_m} x(i) : (I_m) \text{ es sucesión Folner} \right\}$

i) $w(\mathbf{x}) = \max \left\{ \underline{\lim}_m \frac{1}{|I_m|} \sum_{i \in I_m} x(i) : (I_m) \text{ es sucesión Folner} \right\}$

j) $w(\mathbf{x}) = \inf\{\|x * y\|_\infty : 0 \leq \mathbf{y}, \|\mathbf{y}\|_1 = 1\}$, si $0 \leq \mathbf{x} \in l_\infty$.

4. Sucesiones casi-convergentes y densidad uniforme

Una sucesión $\mathbf{x} \in l_\infty$ se dice que es *casi convergente* hacia x cuando todos todos los límites de Banach le asignan el valor x: $\mu(\mathbf{x}) = x$ para todo $\mu \in \mathcal{M}_\sigma$. El espacio de las sucesiones casi convergentes se suele denotar AC. Una vez que se ha conseguido una fórmula para el funcional sublineal w, se obtiene fácilmente una caracterización útil de las sucesiones casi convergentes. Basta escribir explícitamente, en términos de la fórmula, la condición $w(\mathbf{x}) = -w(-\mathbf{x}) = a$, que se puede escribir en la forma $w(\mathbf{x}-a)+w(-\mathbf{x}+a) = 0$. Esto queda patente en la demostración del siguiente teorema de Lorentz [31] donde se utiliza la fórmula 3.8 d).

Teorema 4.1 *Una condición necesaria y suficiente para que $\mathbf{x} \in l_\infty$ sea casi convergente hacia x es que se cumpla*

$$\lim_n \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} x_{j+k} = x \quad \textit{uniformemente en } j \in \mathbb{N}$$

DEM: ([49]) Basta demostrarlo cuando $x = 0$. Sabemos que $\mathbf{x}$ es casi convergente hacia 0 si y sólo si $w(\mathbf{x}) = -w(-\mathbf{x}) = 0$. Utilizando la fórmula $w(\mathbf{x}) = \lim_n \sup_j f_n(j)$, donde $f_n(j) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} x_{j+k}$, la condición $w(\mathbf{x}) = -w(-\mathbf{x}) = 0$ se escribe así:

$$\lim_n \sup_j f_n(j) = \lim_n \inf_j f_n(j) = 0 \Leftrightarrow \lim_n \sup_j |f_n(j)| = 0$$

■

Según una indicación en la pág. 169 de [31] si $\mathbf{x} \in \omega$ cumple la condición del teorema anterior entonces $\mathbf{x} \in l_\infty$ y por lo tanto es casi convergente hacia x.

Fremlin [23] obtiene que $\mathbf{x} \in l_\infty$ es casi convergente hacia x si y sólo si para toda sucesión de Folner (I_n) se verifica

$$\lim_m \frac{1}{|I_m|} \sum_{i \in I_m} \mathbf{x}(i) = x$$

Sea $\mathcal{A}$ el conjunto de todas las matrices positivas y fuertemente regulares. Duran [15] demostró que el espacio AC se puede caracterizar como la intersección

$$AC = \bigcap_{A\in\mathcal{A}} c_A^b$$

donde $c_A^b = c_A \cap l_\infty$ es el campo de convergencia acotada de la matriz A. También demostró que $\mathbf{x} \in l_\infty$ es casi-convergente hacia α si y sólo si A- $\lim \mathbf{x} = \alpha$ para cada $A \in \mathcal{A}$ Según [47] este resultado queda englobado en otros previos [37], [4] donde se consideraban clases especiales de matrices fuertemente regulares regulares. Véase también [7]. En [20] se caracterizaron las sucesiones casi convergentes mediante la intersección $AC = \bigcap_\theta c_\theta$ donde θ recorre todas, o una clase especial, de sucesiones lagunares.

La densidad uniforme, también llamada densidad de Banach, es la asociada a la casi convergencia. Si la función característica χ_E de $E \subset \mathbb{N}$ es casi convergente hacia α se dice que E tiene densidad uniforme α, y se escribe $u(E) = \alpha$. Designaremos por $\mathcal{D}_u$ la familia de los subconjuntos $E \subset \mathbb{N}$ que tienen densidad uniforme (el dominio de u).

En virtud del del teorema 4.1 la densidad uniforme u y su dominio $\mathcal{D}_u$ se pueden caracterizar de dos formas equivalentes:
i) Por una parte $E \in \mathcal{D}_u$ y $u(E) = \alpha$ si y sólo si $\mu(E) = \alpha$ para todo $\mu \in \mathcal{M}_\sigma$.
ii) Por otra parte, si se definen las densidades inferior y superior

$$u^-(E) = \underline{\lim}_n \inf_p f_n^p(E); \quad u^+(E) = \overline{\lim}_n \sup_p f_n^p(E) \text{ con } f_n^p(E) = \frac{E \cap [p+1, \cdots p+n]}{n}$$

se tiene $\mathcal{D}_u = \{E \subset \mathbb{N} : u^+(E) = u^-(E)\}$ y $u(E) = u^+(E) = u^-(E)$ para $E \in \mathcal{D}_u$.
En la literatura (p.e [38]) aparecen otras fórmulas para u^-, y u^+,

$$u^+(E) = \inf_n \ \overline{\lim}_p f_n^p(E) = \lim_n \ \overline{\lim}_p f_n^p(E) = \lim_n \sup_p f_n^p(E) = \inf_n \sup_p f_n^p(E)$$

$$u^-(E) = \sup_n \ \underline{\lim}_p f_n^p(E) = \lim_n \ \underline{\lim}_p f_n^p(E) = \lim_n \inf_p f_n^p(E) = \sup_n \inf_p f_n^p(E)$$

que corresponden a otras fórmulas para el funcional w consideradas en 3.8.
En [33] Nair formula la definición de la densidad superior de Banach en la forma siguiente: Si $s = (I_n)$ es una sucesión de intervalos $I_n \subset \mathbb{N}$ con $\lim_n \operatorname{long}(I_n) = +\infty$ entonces

$$u^+(A) = \sup_s u_s(A) \text{ donde } \ u_s(A) = \overline{\lim}_n \frac{|A \cap I_n|}{|I_n|}$$

En [23] Fremlin proporciona otras fórmulas para la densidad superior

$$\begin{aligned} u^+(E) &= \inf_{\delta>0} \sup \left\{ \textstyle\sum_{i\in E} x(i) : 0 \le \mathbf{x}, \|\mathbf{x}\|_1 = 1, \operatorname{Var}(\mathbf{x}) \le \delta \right\} \\ &= \lim_m \sup_{k\in\mathbb{N}} \frac{1}{m} \left| E \cap [mk, m(k+1) \right| \end{aligned}$$

(donde $\operatorname{Var}(\mathbf{x}) = \sum_i |x_{i+1} - x_i|$) y estudia las aplicaciones $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tales que f^{-1} conserva la densidad uniforme: $E \in \mathcal{D}_u \Rightarrow f^{-1}(E) \in \mathcal{D}_u$ y $u(f^{-1}(E)) = u(E)$.
Fremlin establece las siguientes propiedades de la densidad de Banach

d1) $u^+(E) = \inf\{u(A) : E \subset A \in \mathcal{D}_u\}$

d2) Si $E, F \subset \mathbb{N}$ y $E \cap F = \emptyset$ entonces existe $A \in \mathcal{D}_u$ que los separa ($E \subset A \subset \mathbb{N} \setminus F$).

d3) Si $E = \{n_1 < n_2 < n_3 < \cdots\} \subset \mathbb{N}$ es infinito y $M = \{n_i : i \in F\}$, se verifica $u^+(M) \leq u^+(E)u^+(F)$ y si alguno de los conjuntos E, F pertenece a $\mathcal{D}_u$ entonces se verifica la igualdad. Además, si E y F pertenecen a $\mathcal{D}_u$ entonces $M \in \mathcal{D}_u$ y $u(M) = u(E)u(F)$.

d4) Si $\alpha_n \in [0, 1]$ y $\sum_{n\geq 1} \alpha_n = 1$, existe una partición $\{E_n : n \in \mathbb{N}\}$ de $\mathbb{N}$ tal que, para cada $L \subset \mathbb{N}$ se cumple $\bigcup_{n\in L} E_n \in \mathcal{D}_u$ y $u(\bigcup_{n\in L} E_n) = \sum_{n\in L} \alpha_n$.

La densidad uniforme de Banach interviene en resultados de teoría ergódica y teoría de números [5], [33], [36], [35], [40], [41] Como ejemplo citamos el siguiente resultado que se puede ver en [26] y [23]: Si $u^+(E) > 0$ entonces E contiene progresiones aritméticas tan largas como se quiera (más aún, para cada $F \subset \mathbb{N}$ finito, existen $n, m \in \mathbb{N}$ tales que $m + nF \subset E$).

5. Clases especiales de límites de Banach

Desde hace tiempo, diversos autores han considerado clases especiales de límites de Banach [18], [8], [10], [16],[3]. Ya se ha mencionado la existencia de límites de Banach que extienden la sumabilidad Cesàro. La clase J_C de estos límites generalizados, que llamamos límites de Banach-Cesàro, verifica $C^*(\mathcal{F}^\bullet) \subset J_C \subset \mathcal{M}_\sigma$. Según los resultados de Raimi en [39] estas inclusiónes son estrictas. Para el funcional sublineal $w_C(\mathbf{x}) = \sup\{\mu(\mathbf{x}) : \mu \in J_C\}$ asociado a la familia J_C, Peres [35] obtuvo la siguientes fórmulas

$$w_C(\mathbf{x}) = \sup_{\epsilon>0} \overline{\text{lím}}_n \frac{1}{\epsilon n} \sum_{k=n}^{(1+\epsilon)n} x_k = \text{lím}_{\epsilon \to 0+} \overline{\text{lím}}_n \frac{1}{\epsilon n} \sum_{k=n}^{(1+\epsilon)n} x_k$$

$$w_C(\mathbf{x}) = \inf_{\mathbf{z}} \sup_n (x_n + z_n) = \text{mín}_{\mathbf{z}} \sup_n (x_n + z_n),$$
donde $\mathbf{z}$ recorre las sucesiones acotadas sumables Cesàro hacia 0.

Diversos autores han considerado otras clases de límites Banach con propiedades adicionales de invariancia. Un subconjunto notable de $C^*(\mathcal{F}^\bullet)$ es el de los límites generalizados C-invariantes: $[C] = \{\mu \in \mathcal{F}^\bullet : C^*(\mu) = \mu\}$. Para cada $p, q \in \mathcal{F}^\circ$ las medias $\mu_{pq}(\mathbf{x}) = p\text{-}\text{lím}_n\, \mathbf{q}\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n C^k(\mathbf{x})\right)$ son C-invariantes y $\{\mu_{pq} : p, q \in \mathcal{F}^\circ\}$ es un subconjunto w^*-denso de $[C]$ ([6]).

En [45] se considera una clase de operadores $H : l_\infty \to l_\infty$ (que contiene al operador de Cesàro C) para los que existen límites de Banach H-invariantes, y se dedica atención especial al caso $H = C$. Para un operador $H : l_\infty \to l_\infty$ de la clase considerada en este artículo se demuestra que el funcional sublineal $p(\mathbf{x}) = \sup\{\mu(\mathbf{x}) : \mu \in [H] \cap \mathcal{M}_\sigma\}$, asociado a la familia de los límites de Banach C-invariantes, viene dado por

$$p(\mathbf{x}) = \inf\{q(\mathbf{x} + \mathbf{z}) : \mathbf{z} \in M_0\} \text{ donde } M_0 = \{\mathbf{x} \circ \sigma - \mathbf{x} : \mathbf{x} \in l_\infty\}$$

y $q(\mathbf{x}) = \inf\{\inf_{A\in\mathcal{A}} \overline{\text{lím}}(A(\mathbf{x})\}$, siendo $\mathcal{A}$ la envoltura convexa de $\{H^m : m \in \mathbb{N}\}$.

En virtud de los resultados en [3] q es el funcional sublineal asociado a la familia de las medias H-invariantes, es decir $q(\mathbf{x}) = \sup\{\mu(\mathbf{x}) : \mu \in [H]\}$. Entonces, la fórmula anterior para el funcional sublineal p es análoga a la del funcional sublineal de Banach que aparece en el apartado g) de 3.7. La analogía se pone de manifiesto reemplazando $[H]$ por una de las familias $\mathcal{M}$, $\mathcal{F}^\bullet$, a las que están asociados, respectivamente, los funcionales sublineales $\sup \mathbf{x} = \sup\{\mu(\mathbf{x}) : \mu \in \mathcal{M}\}$, $\overline{\text{lím}}\ \mathbf{x} = \sup\{\mu(\mathbf{x}) : \mu \in \mathcal{F}^\bullet\}$. Cuando $H = C$, para el funcional sublineal $p(\mathbf{x}) = \sup\{\mu(\mathbf{x}) : \mu \in [C]\}$, asociado a la familia $[C] = [C] \cap \mathcal{M}_\sigma$, los resultados de [45] muestran que $p(\mathbf{x}) = \text{lím}_m\, \overline{\text{lím}}(C^m)$. Este resultado está relacionado con el que figura en [43] donde se considera una clase especial de límites de Banach (strong Banach limits). Hay que aclarar su relación con límites C-invariantes antes mencionados. Véase también [42].

Dixmier [13] utilizó límites generalizados de Banach invariantes bajo el semigrupo conmutativo $\mathcal{S}$ las dilataciones $V_q : l_\infty \to l_\infty$, $q \in \mathbb{N}$:

$$V_q(\mathbf{x}) = (\overbrace{x_1, \cdots x_1}^{q}, \overbrace{x_2, \cdots x_2}^{q} \cdots)$$

Si $[\mathcal{S}]$ es el conjunto de las medias $\mathcal{S}$ invariantes, en [14] se demuestra que $\emptyset \neq [\mathcal{S}] \cap [C]$. En particular, como $[\mathcal{S}] \cap [C] \subset \mathcal{M}_\sigma$ se verifica que $[\mathcal{S}] \cap \mathcal{M}_\sigma \neq \emptyset$, y es fácil demostrar que cada $\mu \in [\mathcal{S}] \cap \mathcal{M}_\sigma$ verifica

$$(*) \quad \mu(E) = q\mu(qE) \text{ para cada } E \subset \mathbb{N} \text{ y cada } q \in \mathbb{N}$$

(basta aplicar la proposición 4.3 de [14] a $\mathbf{x} = \chi_E$). A los límites de Banach que verifican (*) los llamaremos super-límites de Banach.
Problema:
Sea Γ el conjunto de los super-límites de Banach:
a) Estudiar si los super límites de Banach quedan caracterizados por la propiedad de ser invariantes respecto al semigrupo de las dilataciones, es decir estudiar la validez de la igualdad $[\mathcal{S}] = \Gamma$.
b) Obtener una fórmula concreta para el funcional sublineal asociado a la familia de los super límites de Banach $\rho(\mathbf{x}) = \sup\{\mu(\mathbf{x}) : \mu \in \Gamma\}$.
c) Caracterizar las sucesiones Γ-convergentes (sucesiones $\mathbf{x} \in l_\infty$ sobre las todos los super límites de Banach coinciden).

Seguidamente exponemos la prueba directa de la existencia de super-límites de Banach dada en [50]. Dado $p \in \mathbb{N}$ sea Γ_p el conjunto de los límites de Banach $\mu \in \mathcal{M}_\sigma$ que verifican $\mu(E) = p\mu(pE)$ para todo $E \subset \mathbb{N}$. Hay que demostrar que $\Gamma = \bigcap_{p\in\mathbb{N}} \Gamma_p$ no es vacío.

Para cada $q \in \mathbb{N}$ $q \geq 2$, sea $A_q : l_\infty \to l_\infty$ el operador definido por $A_q(\mathbf{x}) = \mathbf{y}$ donde

$$y_n = \frac{x_q + x_{q^2} + \cdots + x_{q^n}}{n}$$

El operador A_q transforma sucesiones convergentes en sucesiones convergentes al mismo límite luego, para cada $\mu \in \mathcal{F}^\bullet$ se cumple $[\text{lím}\, \mathbf{x} = x] \Rightarrow \mu(A_q(\mathbf{x})) = x$, lo que significa que $\mu \circ A_q = A_q^*(\mu) \in \mathcal{F}^\bullet$ para cada $\mu \in \mathcal{F}^\bullet$, es decir $A_q^*(\mathcal{F}^\bullet) \subset \mathcal{F}^\bullet$.
En lo que sigue $L_q : l_\infty \to l_\infty$ denota el operador definido por $L_q((x_n)) = (x_{nq})$.

Proposición 5.1 *Cada $\nu \in A_q^*(\mathcal{F}^\bullet)$ es un límite generalizado L_q invariante, es decir*

$$\nu\text{-}\lim_n x_n = \nu\text{-}\lim_n x_{qn} \quad \textit{para cada} \quad (x_n) \in l_\infty$$

DEM: A cada sucesión acotada $\mathbf{x} \in l_\infty$ le asociamos la sucesión $\mathbf{y} = A_q(L_q(\mathbf{x})) - A_q(\mathbf{x})$ que viene dada por

$$y_n = \frac{x_{q^2} + x_{q^3} + \cdots + x_{q^{n+1}}}{n} - \frac{x_q + x_{q^2} + \cdots + x_{q^n}}{n} = \frac{x_{q^{n+1}} - x_q}{n}$$

luego $\lim_n y_n = 0$. Entonces para cada $\mu \in \mathcal{F}^\bullet$ se cumple $\mu(A_q L_q(\mathbf{x})) = \mu(A_q(\mathbf{x}))$, es decir el límite generalizado $\nu = \mu \circ A_q = A_q^*(\mu) \subset \mathcal{F}^\bullet$ cumple $\nu \circ L_q = \nu$ (e.d es un punto fijo de L_q^*) y por lo tanto tiene la propiedad requerida. ■

En lo sucesivo denotaremos por $[L_q] \subset \mathcal{F}^\bullet$ el subconjunto no vacío formado por las medias L_q invariantes (los puntos fijos de $L_q^* : \mathcal{F}^\bullet \to \mathcal{F}^\bullet$). Con esta notación, la proposición 5.1 afirma que $A_q^*(\mathcal{F}^\bullet) \subset [L_q]$.

Proposición 5.2 *Sea $q \in \mathbb{N}$, $q \geq 2$ y $C : l_\infty \to l_\infty$ el operador de Cesáro. Con las notaciones anteriores, cada $\mu \in C^*([L_q])$ es un límite generalizado de Banach que verifica*

$$q\mu(qE) = \mu(E) \quad \textit{para cada} \quad E \subset \mathbb{N}$$

DEM: Como $C^*(\mathcal{F}^\bullet) \subset \mathcal{M}_\sigma$, la condición $[L_q] \subset \mathcal{F}^\bullet$ garantiza que cada $\mu \in C^*([L_q])$ es un límite de Banach. Sea $\mu = \nu \circ C = C^*(\nu)$ donde $\nu \in [L_q]$.

Si $S_n = \{1, 2, \cdots n\}$ y $|E \cap S_n|$ denota el cardinal de $E \cap S_n$, es claro que

$$C(\chi_E)_n = \frac{|A \cap S_n|}{n} = q\frac{|qE \cap S_{nq}|}{nq}$$

y teniendo en cuenta la propiedad característica de ν, establecida en la proposición 5.1,

$$\mu(E) = \nu\text{-}\lim_n C(\chi_E)_n = \nu\text{-}\lim_n \frac{|E \cap S_n|}{n} =$$

$$= q\left(\nu\text{-}\lim_n \frac{|qE \cap S_{nq}|}{nq}\right) = q\left(\nu\text{-}\lim_n \frac{|qE \cap S_n|}{n}\right) = q\mu(qE)$$

■

Teorema 5.3 *Existe un límite generalizado de Banach $\mu \in \mathcal{M}_\sigma$ que verifica*

$$q\mu(qE) = \mu(E) \textit{ para cada } E \subset \mathbb{N} \textit{ y cada } q \in \mathbb{N}$$

DEM: Sea Γ_q la familia de los límites de Banach con la propiedad

$$q\mu(qE) = \mu(E) \quad \text{para cada} \quad E \subset \mathbb{N}$$

Según la proposición 5.2 esta familia no es vacía, y basta demostrar que no es vacía la intersección $\Gamma = \cap_{q\in\mathbb{N}}\Gamma_q$. Veamos en primer lugar que si $p, q \in \mathbb{N}$ y $p \neq q$ entonces $\Gamma_p \cap \Gamma_q \neq \emptyset$: Efectivamente, si $\mu \in \Gamma_p$ y $\lambda \in \mathcal{F}^\bullet$ es un límite generalizado es fácil ver que

$$\nu(E) = \lambda\text{-}\lim_n \frac{\mu(E) + q\mu(qE) + \cdots + q^n\mu(q^nE)}{n}$$

define un límite de Banach que pertenece a $\Gamma_p \cap \Gamma_q$.

Sea (q_m) la sucesión creciente de los números primos. Razonando por inducción se demuestra que para cada $m \in \mathbb{N}$ existe un límite de Banach $\lambda_m \in \Gamma_{q_1} \cap \Gamma_{q_2} \cap \cdots \cap \Gamma_{q_m}$.

Si $\lambda \in \mathcal{F}^\bullet$ es un límite generalizado y para cada $E \subset \mathbb{N}$ definimos $\nu(E) = \lambda\text{-}\lim_m \lambda_m(E)$ obtenemos un límite de Banach $\nu \in \cap_{m\in\mathbb{N}}\Gamma_{q_m}$. Usando la relación $\Gamma_p \cap \Gamma_q \subset \Gamma_{pq}$ y la descomposición de un número natural en factores primos se concluye que $\nu \in \cap_{q\in\mathbb{N}}\Gamma_q$. ■

NOTA: Z. Frolik [24] y M. E. Rudin [17] demostraron que si $\mu : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \to \{0,1\}$ es una medida finitamente aditiva $\{0,1\}$-valuada y $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ verifica $\mu f^{-1} = \mu$ entonces $\mu(\{n \in \mathbb{N} : f(n) = n\}) = 1$. En contraste con este resultado Jech y Prikry [27] demostraron la existencia de un límite generalizado de Banach $\mu \in \mathcal{M}_\sigma$ y una función $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, con $\mu f^{-1} = \mu$ tales que si $f|_A$ es inyectiva sobre $A \subset \mathbb{N}$ entonces $\mu(A) \leq 1/2$. La demostración de este resultado usa la existencia de un límite generalizado de Banach $\mu \in \mathcal{M}_\sigma$ que cumple $2\mu(2E) = \mu(E)$ para cada $E \subset \mathbb{N}$.

6. Notas

a) En [16] Duran consideró las medias invariantes respecto a un semigrupo "ergódico" $\mathcal{G}$ formado por matrices positivas y regulares, y demostró que no es vacío el conjunto de las medias $\mathcal{G}$-invariantes, que en lo sucesivo denotaremos $[\mathcal{G}]$. Son ergódicos los semigrupos conmutativos y más generalmente los "amenables" [**?**].

   Si A_α es un sistema ergódico para $\mathcal{G}$ entonces el funcional sublineal asociado a la familia $[\mathcal{G}]$ de las medias $\mathcal{G}$-invariantes viene dado por

$$w_{\mathcal{G}}(x) = \overline{\lim_\alpha}\ \overline{\lim} A_\alpha(x) = \lim_\alpha\ \overline{\lim} A_\alpha(x)$$

   y usando esta fórmula extendió a situaciones más generales el teorema 4.1.

   Los resultados de Duran fueron extendidos en [3], que trata sobre el siguiente asunto: Dada una familia no vacía de medias J, de la que se conoce una fórmula explícita para su funcional sublineal $\rho_J(\mathbf{x}) = \sup\{\mu(\mathbf{x}) : \mu \in J\}$, y un semigrupo $\mathcal{G}$ de operadores $G : l_\infty \to l_\infty$ se obtienen condiciones suficientes para que $K = J \cap [\mathcal{G}]$ no sea vacío y se puedan calcular, en términos de ρ_J, fórmulas para el funcional sublineal $\rho_K(\mathbf{x}) = \sup\{\mu(\mathbf{x}) : \mu \in K\}$.

b) Dado un movimiento s de $\mathbb{N}$, Nillsen [34] obtuvo la siguiente fórmula para el funcional sublineal $w_s(\mathbf{x}) = \sup\{\mu(\mathbf{x}) : \mu \in \mathcal{M}_s\}$ asociado a la familia de las medias s-invariantes

$$w_s(\mathbf{x}) = \overline{\lim_n}\ \overline{\lim_m}\ \mu_s(m,n)(\mathbf{x}), \quad \text{donde} \quad \mu_s(m,n)(\mathbf{x}) = \sum_{k=0}^{n-1} \mathbf{x}(s^k(m))$$

Este resultado también se puede obtener como corolario de los resultados que se acaban de citar en a).

c) El conjunto de los puntos extremales de $\mathcal{M}_\sigma$ lo estudia Nillsen en [34] donde demostró que para cada $f \in l_\infty$ existe una red $\lambda_j \in \text{Ext}(\mathcal{M}_\sigma)$ tal que todos sus puntos de aglomeración no son extremales y para todo j se cumple $\lambda_j(f) = w(f)(= \sup\{\mu(f) : \mu \in \mathcal{M}_\sigma\}$. Este resultado implica que $\text{Ext}(\mathcal{M}_\sigma)$ no es débil* compacto. En [21] Fremlin y Talagrand también estudiaron otras propiedades del conjunto de los puntos extremales de $\mathcal{M}_\sigma$.

d) Sea $r_n(t) = \text{sign}(\text{sen}(2^n\pi t)$ la sucesión de Rademacher. En [44] se estudian propiedades de la función $f_\mu(t) = \mu(r_n(t))$ donde μ es un límite de Banach. Entre otras cosas se demuestra que si μ es un límite de Banach Cesàro, o si f_μ es medible entonces $f_\mu(t) = 0$ para casi todo $t \in [0,1]$. También se demuestra que $\|\mu-\nu\|_{l_\infty^*} = \|f_\mu - \mathbf{f}_\nu\|_\infty$ y que $d(\mathcal{M}_\sigma, l_\infty^*) = 2$. Los resultados de Fremlin y Talagrand en [21] implican la existencia de $\mu \in \text{Ext}(\mathcal{M}_\sigma)$ tal que f_μ no es medible (lo que mejora un clásico resultado de Sierpinski que afirma la existencia de un elemento $\varphi \in (l_\infty)^*$ tal que f_φ no es medible.

e) Fremlin [22] considera *Medial limits*: Límites generalizados $\theta \in \mathcal{F}^\bullet$ tales que para todo espacio de probabilidad (Ω, Σ, μ) y toda sucesión uniformemente acotada de funciones medibles $f_n : \Omega \to \mathbb{R}$, la función $f(\omega) = \text{lím}_n f_n(\omega)$ es medible y

$$\int_\Omega f(\omega) d\mu(\omega) = \theta\text{-}\lim_n \int_\Omega f_n(\omega) d\mu(\omega)$$

Estos límites generalizados habían sido considerados por Meyer en Séminaire de Probabilités 7, 1973, 198-204, y por Normann en Math. Scand. 38 (1976) 167-176. Estos autores y Fremlin demuestran su existencia bajo la hipótesis $\mathbf{p} = \mathbf{c}$. Este tipo de límites han sido usados en modelos de Economía matemática [30].

f) En [19], en relación con la casi convergencia y los límites de Banach se consideran la noción de subsucesión esenciales de una sucesión acotada (una subsucesión convergente maximal en el sentido de que cualquier subsucesión con el mismo límite está extraída de ella desde un término en adelante). A lo largo del artículo no se tiene en cuenta la posibilidad de que el conjunto de las subsucesiones esenciales puede ser vacío. El artículo contiene resultados triviales enmascarados, como el teorema 1, cuyo enunciado en términos de subsucesiones esenciales no es otra cosa que un resultado trivial sobre la densidad de Banach: Si $E, F \subset \mathbb{N}$ y $E \triangle F$ es finito entonces $u^+(E) = u^+(F)$, $u^-(E) = u^-(F)$. También se demuestran resultados sencillos, como el Teorema 3: Si $\{E_j : 1 \le j \le n\} \subset \mathcal{D}_u$ es una partición de $\mathbb{N}$ y $\mathbf{x} \in l_\infty$ es una sucesión tal que la subsucesión $\mathbf{x}|_{E_j}$ converge hacia a_j entonces $\mathbf{x}$ es casi convergente hacia $\sum_{j=1}^n u(E_j)a_j$. También se considera un resultado análogo más general referente a sucesiones $\mathbf{x} \in l_\infty$ con una cantidad numerable $S(\mathbf{x})$ de puntos de acumulación tales que $S'(\mathbf{x}) = \{p\}$ es un sólo punto.

Referencias

[1] R. P. Agnew, *On cores of bounded divergent complex sequences and of their transforms by square matrices*, Revista Ci., Lima **47** (1945), 87–103. MR MR0012339 (7,12d)

[2] ———, *Abel transforms and partial sums of Tauberian series*, Ann. of Math. (2) **50** (1949), 110–117. MR MR0027351 (10,291i)

[3] F. Balibrea and G. Vera, *On the sublinear functional associated to a family of invariant means*, Manuscripta Math. **55** (1986), no. 1, 101–109. MR MR828414 (87j:43001)

[4] H. T. Bell, *Order summability and almost convergence*, Proc. Amer. Math. Soc. **38** (1973), 548–552. MR MR0310489 (46 #9587)

[5] V. Bergelson, *Sets of recurrence of* $\mathbf{Z}^m$*-actions and properties of sets of differences in* $\mathbf{Z}^m$, J. London Math. Soc. (2) **31** (1985), no. 2, 295–304. MR MR809951 (87a:28025)

[6] M. Blümlinger, *Lévy group action and invariant measures on* $\beta\mathbf{N}$, Trans. Amer. Math. Soc. **348** (1996), no. 12, 5087–5111. MR MR1390970 (97d:54063)

[7] D. Butković, H. Kraljević, and N. Sarapa, *On the almost convergence*, Functional analysis, II (Dubrovnik, 1985), Lecture Notes in Math., vol. 1242, Springer, Berlin, 1987, pp. 396–417. MR MR906275 (88j:40007)

[8] R. G. Cooke, *Generalisations ob Banach-Hausdorff limits*, Proc. Amer. Math. Soc. **4** (1953), 419–417.

[9] ———, *Infinite matrices and sequence spaces*, Dover Publications Inc., New York, 1965. MR MR0193472 (33 #1692)

[10] G. Das, *Banach and other limits*, J. London Math. Soc. (2) **7** (1974), 501–507. MR MR0336148 (49 #924)

[11] G. Das and S. K. Mishra, *Banach limits and lacunary strong almost convergence*, J. Orissa Math. Soc. **2** (1983), no. 2, 61–70. MR MR836862 (87m:40002)

[12] S. L. Devi, *Banach limits and infinite matrices*, J. London Math. Soc. **12** (1976), 397–401.

[13] J. Dixmier, *Existence de traces non normales*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A-B **262** (1966), A1107–A1108. MR 0196508 (33 #4695)

[14] P. G. Dodds, B. de Pagter, A. A. Sedaev, E. M. Semenov, and F. A. Sukochev, *Singular symmetric functionals and Banach limits with additional invariance properties*, Izv. Ross. Akad. Nauk Ser. Mat. **67** (2003), no. 6, 111–136. MR 2032092 (2005a:46061)

[15] J. P. Duran, *Strongly regular matrices, almost-convergence, and Banach limits*, Duke Math. J. **39** (1972), 497–502. MR MR0310591 (46 #9689)

[16] ———, *Almost convergence, summability and ergodicity*, Canad. J. Math. **26** (1974), 372–387. MR MR0340886 (49 #5636)

[17] Rudin M. E., *Partials orders on the types in*, Trans. Amer. Math. Soc. **155** (1971), 353–362.

[18] W. F. Eberlein, *Banach-Hausdotrff limits*, Proc. Amer. Math. Soc. **1** (1950), 662–665. MR MR0038009 (12,341c)

[19] B. Q. Feng and J. L. Li, *Some estimations of Banach limits*, J. Math. Anal. Appl. **323** (2006), no. 1, 481–496. MR 2262220 (2008b:46033)

[20] A. R. Freedman, J. J Sember, and Raphael, *Some Cesâ,ro-type summability spaces*, Proc. London Math. Soc. **37** (1978), 508–520.

[21] D. H. Fremlin and M. Talagrand, *A decomposition theorem for additive set-funcions, with applications to pettis integrals and ergodic means*, Math. Z. **168** (1979), 117–142.

[22] D.H. Fremlin, *Medial limits (version 30.12.02)*, http://www.essex.ac.uk/maths/people/fremlin/preprints.htm (2002), 1–5.

[23] ———, *Well-distributed sequences and Banach density (version 28.3.11)*, http://www.essex.ac.uk/maths/people/fremlin/preprints.htm (2011), 1–40.

[24] Z. Frolik, *Fixed points of maps of* $\beta\mathbb{N}$, Bull. Amer. Math. Soc. **74** (1968), 187–191.

[25] L. I. Godfrey, *A class of regular matrices*, Proc. Amer. Math. Soc. **60** (1976), 211–214. MR MR0430589 (55 #3594)

[26] N. Hindman, *On Density, Translates, and Pairwise Sums of Integers*, J.Combin. Theory Ser.A **33** (1982), 147–157.

[27] T. Jech and K. Prikry, *On proyections of finitely additive measures*, Proc. Amer. Math. Soc. **74** (1979), 161–165.

[28] M. Jerison, *The set of all generalized limits of bounded sequences*, Canad. J. Math. **9** (1957), 79–89.

[29] K. Knopp, *Zur theorie der limitierungsverfahren (erste mitteilung)*, Math. Zeit. **31** (1930), 115–127.

[30] L. Lauwers, *Intertemporal objective functions: strong Pareto versus anonymity*, Math. Social Sci. **35** (1998), no. 1, 37–55. MR 1609016 (98j:90012)

[31] G. G. Lorentz, *A contribution to the theory of divergent sequences*, Acta Mathematics **80** (1948), 167–190.

[32] I. J. Maddox, *Some analogues of Knopp's core theorem*, Internat. J. Math. Math. Sci. **2** (1979), no. 4, 605–614. MR MR549529 (81m:40012)

[33] R.Ñair, *On uniformly distributed sequences of integers and Poincaré recurrence. II*, Indag. Math. (N.S.) **9** (1998), no. 3, 405–415. MR MR1692161 (2000h:11079)

[34] R.Ñillsen, *Nets of extreme Banach limits*, Proc. Amer. Math. Soc. **55** (1976), 347–352.

[35] Y. Peres, *Applications of Banach limits to the study of sets of integers*, Israel J. of Math. **62** (1988), 17–31.

[36] ______, *A combinatorial application of the maximal ergodic theorem*, Bull. London Math. Soc. **20** (1988), no. 3, 248–252. MR MR931186 (89e:28033)

[37] G. M. Petersen, *'Almost convergence' and uniformly distributed sequences*, Quart. J. Math. Oxford Ser. (2) **7** (1956), 188–191. MR MR0095812 (20 #2313a)

[38] R. A. Raimi, *Convergence, density, and τ-density of bounded sequences*, Proc. Amer. Math. Soc. **14** (1963), 708–712.

[39] ______, *Factotrization of summability preserving generalized limits*, J. London Math. Soc. **22** (1980), 398–402.

[40] J. Renling, *Applications of nonstandard analysis in additive numer theory*, Bulletin of Symbolic Logic **6** (2000), 331–341.

[41] ______, *Nonstandard Metods for Uper Banach density*, Journsl of Number Theory **91** (2001), 20–38.

[42] P. Schatte, *On H_∞-summability and the uniform distribution of sequences*, Math. Nachr. **113** (1983), 237–243. MR MR725491 (85f:11057)

[43] ______, *On uniform limitability and Banach limits*, Z. Anal. Anwendungen **9** (1990), no. 4, 319–326. MR MR1119533 (92j:40005)

[44] E. M. Semenov and F. A. Sukochev, *Characteristic functions of Banach limits*, Sibirsk. Mat. Zh. **51** (2010), no. 4, 904–910. MR 2732307 (2012a:46028)

[45] ______, *Invariant Banach limits and applications*, J. Funct. Anal. **259** (2010), no. 6, 1517–1541. MR 2659770 (2011m:46109)

[46] S. Simons, *Banach limits, infinite matrices and sublinear functionals*, J. Math. Anal. Appl. **26** (1969), 640–655.

[47] K. Spreng, *The set of almost convergent sequences as intersections of summability fields*, Arch. Math. (Basel) **55** (1990), no. 4, 366–373. MR MR1076063 (92b:40010)

[48] L. Sucheston, *On the existence of finite invariant measures*, Math. Zeitschr **86** (1964), 327–336.

[49] ______, *Banach limits*, Amer. Math. Monthly **74** (1967), 308–311. MR 0225145 (37 #740)

[50] G. Vera, *On a general notion of summability*, Rev. Real Acad. Ci. Exact. Fís. Natur. Madrid **70** (1976), no. 2, 297–335. MR 0422942 (54 #10926)