Sumabilidad, densidades y filtros

14 de junio de 2012

En estas notas se explota la dualidad entre familias de medias y filtros con la que se consigue un enfoque unificado a diversos resultados sobre sumabilidad, densidades, medias y filtros. En el ámbito de las sucesiones acotadas, para ciertos métodos de sumabilidad las sucesiones fuertemente sumables coinciden con las convergentes según el filtro asociado al método, y en situaciones concretas bastante generales estas sucesiones son los multiplicadores del correspondiente espacio de sucesiones sumables. Seguimos usando la notación y terminología sobre sumabilidad y límites generalizados introducida en [49]. .

1. Preliminares sobre sumabilidad

Sea ω el espacio de las sucesiones de números reales y $c \subset \omega$ el subespacio de las sucesiones convergentes. En lo que sigue si $\mathbf{x} = (x_n) \in \omega$, entonces $|\mathbf{x}|$ designa la sucesión $(|x_n|)$. La siguiente definición en [22] ha sido considerada en [6], [7] y [11].

Definición 1.1 *Un R-método de sumabilidad es un funcional lineal $S : c_S \to \mathbb{R}$, cuyo dominio c_S es un subespacio de ω, que verifica:*
i) S es regular, es decir, $c \subset c_S$ y $S(\mathbf{x}) = \lim_n x_n$ para cada $\mathbf{x} = (x_n) \in c$.
ii) Si $|\mathbf{x}| \in c_S$ y $S(|\mathbf{x}|) = 0$ entonces $S(\mathbf{xy}) = 0$ para cada $\mathbf{y} \in l_\infty$.
Si $\mathbf{x} \in c_S$ se dice que $\mathbf{x}$ es S-sumable hacia $S(\mathbf{x})$. Cuando la sucesión $|\mathbf{x} - x| = (|x_n - x|)$ es S-sumable hacia 0 se dice que $\mathbf{x} \in \omega$ es fuertemente S-sumable hacia x.

Se usa la notación $|c_S|$ para el espacio vectorial de las sucesiones fuertemente S-sumables y $|c_S|_0$ para el subespacio de las fuertemente sumables hacia 0. La condición ii) de 1.1 significa que $|c_S|_0$ es un subespacio sólido, es decir $|c_S|_0\, l_\infty = |c_S|_0$.
Según [22], para un R-método de sumabilidad S se verifica: $c \subset |c_S| \subset c_S$, y las inclusiones son consistentes, lo que significa que
i) Si $\mathbf{x} \in c$ converge hacia x entonces $\mathbf{x}$ es fuertemente S-sumable hacia x.
ii) Si $\mathbf{x} \in |c_S|$ es fuertemente S-sumable hacia x entonces $\mathbf{x}$ es S-sumable hacia x.
Dado un R-método de sumabilidad $S : c_S \to \mathbb{R}$, se denota por $d_S : \mathcal{D}_S \to [0, 1]$, la densidad asociada $d_S(E) = S(\chi_E)$, definida sobre $\mathcal{D}_S = \{E \subset \mathbb{N} : \chi_E \in c_S\}$, con la que se define el filtro $\mathcal{F}_S = \{E \in \mathcal{D}_S : d_S(E) = 1\}$.

Métodos matriciales
Si $A = (a_{nk})$ es una matriz infinita de números reales, una sucesión $\mathbf{x} = (x_k) \in \omega$ se dice

que es A-*sumable* hacia $x \in \mathbb{R}$ cuando para todo $n \in \mathbb{N}$ la serie $\sum_k a_{nk} x_k$ converge y la sucesión $A(\mathbf{x}) = (A_n(\mathbf{x}))$, definida por $A_n(\mathbf{x}) = \sum_k a_{nk} x_k$, converge hacia x:

$$\lim_n A_n(\mathbf{x}) = \lim_n \sum_k a_{nk} x_k = x$$

Se designa por c_A el subespacio de ω formado por las sucesiones A-sumables, sobre el que está definido el funcional lineal $\text{A-}\lim_n x_n = \lim_n A_n(\mathbf{x})$. La matriz A se dice que es *regular* cuando transforma sucesiones convergentes en sucesiones convergentes al mismo límite, es decir $c \subset c_A$ y además el funcional A-lím extiende el límite ordinario. Un teorema clásico de Silverman-Toeplitz caracteriza las matrices regulares mediante las condiciones

$$\text{i)}\ \sup_n \sum_k |a_{nk}| < +\infty; \quad \text{ii)}\ \lim_k a_{nk} = 0 \text{ para todo } n; \quad \text{iii)}\ \lim_n \sum_k a_{nk} = 1$$

En lo sucesivo, salvo mención expresa de lo contrario, consideraremos siempre matrices regulares no negativas. En estas condiciones se dice que $\mathbf{x} \in \omega$ es *fuertemente A-sumable* hacia x cuando la sucesión $(|x_n - x|)$ es A-sumable hacia 0, es decir

$$\lim_n \sum_k a_{nk} |x_k - x| = 0$$

Toda sucesión fuertemente A-sumable hacia x es A-sumable hacia x. El subespacio de c_A formado por las sucesiones fuertemente A-sumables se denota $|c_A|$.

El espacio c_A dotado del funcional lineal $A\text{-}\lim \mathbf{x}$ es un R-método de sumabilidad matricial. Los subespacios $|c_A|$, $c_A \cap l_\infty$, y $|c_A| \cap l_\infty$, dotados del funcional lineal $A\text{-}\lim \mathbf{x}$ también son R-métodos de sumabilidad.

A una matriz regular no negativa $A = (a_{nk})$ se le asocian las llamadas densidades inferior y superior, definidas por $d_A^-(E) = \underline{\lim}\ A(\chi_E)$, $d_A^+(E) = \overline{\lim}\ A(\chi_E)$ y la familia

$$\mathcal{D}_A = \{E \subset \mathbb{N} : d_A^-(E) = d_A^+(E)\}$$

donde está definida la densidad $d_A(E) = d_A^-(E) = d_A^+(E)$ (véase [1], [22]). Tienen densidad d_A los conjuntos $E \subset \mathbb{N}$ cuya función característica es A-sumable, es decir, los conjuntos $E \subset \mathbb{N}$ para los que existe el límite

$$d_A(E) = \lim A(\chi_E) = \lim_n \sum_{k \in E} a_{nk}$$

El filtro asociado, $\mathcal{F}_A = \{E \in \mathcal{D}_A : d_A(E) = 1\}$, es más fino que el filtro de Frechet $\mathcal{F}$. En [1], pág. 578, se muestra que $\mathcal{D}_A$ no es un álgebra de conjuntos. Existen conjuntos $A, B \in \mathcal{D}_A$ tales que $A \cup B \notin \mathcal{D}_A$, $A \cap B \notin \mathcal{D}_A$, por lo que la densidad $d_A : \mathcal{D}_A \to [0,1]$ no es una medida finitamente aditiva.

Un ejemplo notable de matriz regular no negativa lo proporciona la matriz de Cesàro $C = (c_{nk})$ donde $c_{nk} = 1/n$ si $1 \leq k \leq n$ y $c_{nk} = 0$ si $k > n$. En este caso $\mathbf{x} \in \omega$ es C-sumable, o sumable Cesàro, hacia x si

$$\lim_n \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} = x$$

El espacio vectorial de las sucesiones sumables (resp. fuertemente sumables) Cesàro es costumbre designarlo por $\sigma_1 \subset \omega$ (resp. $|\sigma_1| \subset \sigma_1$). La *densidad ordinaria* (también llamada densidad natural o asintótica) es la asociada a la matriz de Cesàro C. Las correspondientes *densidad inferior* y *densidad superior* de $E \subset \mathbb{N}$, designadas más brevemente $d^-(E)$, $d^+(E)$, vienen dadas por las fórmulas

$$d^-(E) = \underline{\text{lím}}\ C(\chi_E) = \underline{\text{lím}}_n f_n(E), \quad d^+(E) = \overline{\text{lím}}\ C(\chi_E) = \overline{\text{lím}}_n f_n(E)$$

donde

$$f_n(E) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \chi_E(k) = \frac{|E \cap [1, 2, \cdots n]|}{n}$$

Utilizaremos la notación $\mathcal{D} = \{E \subset \mathbb{N} : d^-(E) = d^+(E)\}$ para la familia de los conjuntos $E \subset \mathbb{N}$ con densidad natural, lo que significa que existe el límite

$$d(E) = \text{lím}\, C(\chi_E) = \text{lím}_n f_n(E)$$

En particular, si C es la matriz de Cesaro, el filtro $\mathcal{F}_C$ es el asociado a la densidad usual $d = d_C$, por lo que también lo designaremos $\mathcal{F}_d$.

Una clase notable de matrices regulares no negativas es la formada por las matrices asociadas a sucesiones lagunares: Una sucesión *lagunar* es una sucesión creciente $\theta = (n_k)_{k=0}^{\infty}$ en $\mathbb{N}$, con $n_0 = 0$, tal que $h_k = n_k - n_{k-1} \to \infty$. Se le asocia la matriz regular $T_\theta = (t_{nk})$ definida por

$$t_{nk} = \frac{1}{h_k}\chi_{I_k}(n) \quad \text{donde} \quad I_k = (n_{k-1}, \cdots n_k]$$

Se abrevia la notación: El espacio de las sucesiones T_θ-sumables se designa c_θ, y la densidad y el filtro asociados a la matriz T_θ se designan d_θ y $\mathcal{F}_\theta$ respectivamente. Diversos autores [23], [31], [30], han considerado el subespacio de las sucesiones fuertemente T_θ-sumables (brevemente, fuertemente θ-sumables) que, de acuerdo con las notaciones anteriores, se designa $|c_\theta|$ (también se usa la notación N_θ en la literatura habitual sobre el asunto). Está formado por las sucesiones $\mathbf{x} \in \omega$ tales que, para algún $x \in \mathbb{R}$, se cumple

$$\text{lím}_k \frac{1}{h_k}\sum_{n \in I_k} |x_n - x| = 0$$

Métodos no matriciales
A un filtro $\mathcal{V} \subset \mathcal{P}(\mathbb{N})$ más fino que el de Frechet $\mathcal{F}$ se le asocian dos nociones de convergencia que extienden la convergencia ordinaria

Definición 1.2 *Diremos que* $\mathbf{x} \in \omega$ *converge hacia* x *según* $\mathcal{V}$ *cuando converge en el sentido usual: Para cada* $\epsilon > 0$ *el conjunto* $\{n : |x_n - x| < \epsilon\}$ *pertenece a* $\mathcal{V}$. *En este caso escribiremos* $\text{lím}_{\mathcal{V}}\, \mathbf{x} = x$. *Diremos que* $\mathbf{x} \in \omega$ *converge hacia* x *a través de conjuntos de* $\mathcal{V}$ *cuando existe* $V \in \mathcal{V}$ *tal que* $\text{lím}_{n \in V} x_n = x$. *En este caso escribiremos* $\text{lím}^{\mathcal{V}}\, \mathbf{x} = x$.

Usaremos la notación $c(\mathcal{V})$ (resp. $c_\star(\mathcal{V})$) para el subespacio de ω formado por las sucesiones convergentes según $\mathcal{V}$ (resp. a través de conjuntos de $\mathcal{V}$). Es claro que $c \subset c_\star(\mathcal{V}) \subset c(\mathcal{V})$, y que las inclusiones son consistentes (es decir, la noción de convergencia en $c(\mathcal{V})$ es una extensión de las nociones de convergencia asociadas a los otros dos subespacios). Es fácil comprobar [6] que $c(\mathcal{V}) = \overline{c_\star(\mathcal{V})}$ (clausura uniforme de $c_\star(\mathcal{V})$ en el espacio ω). Efectivamente, dado $\mathbf{x} \in c(\mathcal{V})$, si $l = \text{lím}_{\mathcal{V}} \mathbf{x}$ cada $V_n = \{j : |x(j) - l| \leq 1/n\}$ es un conjunto del filtro $\mathcal{V}$ y la sucesión $\mathbf{y}_n = l + (1 - \chi_{V_n})(\mathbf{x} - l)$ está en $c_\star(\mathcal{V})$ (porque vale l sobre el conjunto $V_n \in \mathcal{V}$) y es claro que para todo $i \in \mathbb{N}$ se cumple $|\mathbf{y}_n(i) - \mathbf{x}(i)| \leq 1/n$ (basta considerar los casos $i \in V_n$, $i \notin V_n$), luego $c(\mathcal{V}) \subset \overline{c_\star(\mathcal{V})}$. Recíprocamente, es fácil ver que cada $\mathbf{x} \in \overline{c_\star(\mathcal{V})}$ converge según $\mathcal{V}$, es decir $\overline{c_\star(\mathcal{V})} \subset c(\mathcal{V})$.

El espacio $c(\mathcal{V})$ dotado de la noción de límite según $\mathcal{V}$ es un R-método de sumabilidad para el cual las sucesiones sumables coinciden con las fuertemente sumables. En particular, para un ultrafiltro $\mathcal{U}$ más fino que el filtro de Frechet, el espacio l_∞ dotado del límite según $\mathcal{U}$, que siempre existe, es el ejemplo típico de un R-método de sumabilidad no matricial.

Veremos más adelante que existen filtros notables para los que $c_\star(\mathcal{V}) \subsetneq c(\mathcal{V})$ y otros para los que $c_\star(\mathcal{V}) = c(\mathcal{V})$, es decir, filtros para los que $c_\star(\mathcal{V})$ es cerrado en ω para la topología de la convergencia uniforme. Para los filtros asociados a un R-método de sumabilidad S en [22] Freedman y Sember demostraron que $c_\star(\mathcal{F}_S) \cap l_\infty \subset |c_S| \subset c(\mathcal{F}_S)$ de donde se sigue que si $c_\star(\mathcal{F}_S) = c(\mathcal{F}_S)$ entonces $c(\mathcal{F}_S) \cap l_\infty = c_\star(\mathcal{F}_S) \cap l_\infty = |c_S| \cap l_\infty$.

2. Familias de medias y filtros

El conjunto de las medias sobre $\mathbb{N}$, $\mathcal{M} = \{\mu \in (l_\infty)^* : \mu \geq 0,\ \mu(\mathbf{1}) = 1\}$, que es convexo y débil* compacto, se identifica en la forma habitual, con el conjunto de las probabilidades finitamente aditivas $\mu : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \to [0, 1]$. El conjunto de sus puntos extremales

$$\text{Ext}(\mathcal{M}) = \{\mu \in \mathcal{M} : \mu(E) \in \{0, 1\} \ \ \forall E \subset \mathbb{N}\}$$

con la topología de inducida por la topología débil* de $(l_\infty)^*$ es un modelo para $\beta\mathbb{N}$, la compactificación de Stone-Čech de $\mathbb{N}$: Cada $n \in \mathbb{N}$ se identifica con la probabilidad finitamente aditiva δ_n ($\delta_n(E) = 1$ si $n \in E$, y $\delta_n(E) = 0$ si $n \notin E$). Cada $\mu \in \text{Ext}(\mathcal{M})$ se identifica con el ultrafiltro $\mathcal{U}_\mu = \{U \subset \mathbb{N} : \mu(U) = 1\}$. Así se obtiene el modelo usual de $\beta\mathbb{N}$ donde cada $p \in \beta\mathbb{N}$ se identifica con el ultrafiltro $\mathcal{U} = \{U \subset \mathbb{N} : p \in \overline{U}^\beta\}$, y cada ultrafiltro $\mathcal{U}$ con el único punto de la intersección $\bigcap\{\overline{U}^\beta : U \in \mathcal{U}\}$.

A cada filtro $\mathcal{V} \subset \mathcal{P}(\mathbb{N})$ más fino que el filtro de Frechet $\mathcal{F}$ (el de los conjuntos cofinitos) le asociamos la familia de medias:

$$\mathcal{V}^\bullet := \{\mu \in \mathcal{M} : \mu(V) = 1 \text{ para cada } V \in \mathcal{V}\}$$

y la subfamilia $\mathcal{V}^\circ \subset \mathcal{V}^\bullet$ formada por las medias $\{0, 1\}$-valuadas de $\mathcal{V}^\bullet$, que se identifica con el conjunto de los ultrafiltros más finos que $\mathcal{V}$. Si μ es la medida finitamente aditiva $\{0, 1\}$-valuada asociada a un ultrafiltro $\mathcal{U} \supset \mathcal{V}$ ($\mu(A) = 1$ si $A \in \mathcal{U}$, $\mu(A) = 0$ si $A \notin \mathcal{U}$), entonces $\mathcal{U}^\circ = \{\mu\}$. Por lo tanto, si $\mathcal{U}$ es un ultrafiltro más fino que $\mathcal{V}$ se verifica $\mathcal{V}^\circ \supset \mathcal{U}^\circ = \{\mu\}$ luego $\mathcal{V}^\circ \neq \emptyset$. Es fácil ver que $\mathcal{V}^\bullet$ y $\mathcal{V}^\circ$ son subconjuntos cerrados de $\mathcal{M}$. Es claro que $\mathcal{V}^\bullet$ es convexo y se puede demostrar que $\mathcal{V}^\circ = \text{Ext}(\mathcal{V}^\bullet)$, luego $\mathcal{V}^\bullet = \overline{co}^*(\mathcal{V}^\circ)$.

Obsérvese que para el filtro de Frechet $\mathcal{F}$ (el formado por los conjuntos cofinitos $F \subset \mathbb{N}$) se cumple que $\mathcal{F}^\circ = \beta\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}$ (luego $\mathcal{F}^\bullet = \overline{co}^*(\beta\mathbb{N} \setminus \mathbb{N})$). Además, $\mathcal{F}^\circ$ es el conjunto formado por los puntos de aglomeración de la sucesión (n) en el espacio compacto $\beta\mathbb{N}$. Análogamente, para un filtro más fino $\mathcal{V} \supset \mathcal{F}$ el conjunto $\mathcal{V}^\circ \subset \mathcal{F}^\circ$ está formado por los puntos de aglomeración de la sucesión (n) según el filtro $\mathcal{V}$, es decir puntos de $\beta\mathbb{N}$ obtenidos como límite de esta sucesión según ultrafiltros más finos que $\mathcal{V}$.

Hay una dualidad entre familias de medias y filtros que conviene considerar: A cada familia no vacía $J \subset \mathcal{M}$, le asociamos el filtro $J^\bullet = \{E \subset \mathbb{N} : \mu(E) = 1 \text{ para cada } \mu \in J\}$. En particular, si $J = \{\mu\}$, donde μ es $\{0,1\}$-valorada, entonces $\{\mu\}^\bullet$ es el ultrafiltro asociado $\mathcal{U}_\mu = \{E \subset \mathbb{N} : \mu(E) = 1\}$ que también podemos designar más brevemente $\mu^\bullet$.

Al filtro $J^\bullet$ le podemos asociar las familias de medias $J^{\bullet\circ} \subset J^{\bullet\bullet}$. Es inmediato que $J^{\bullet\bullet} \supset J$ y que $J_1 \subset J_2 \subset \mathcal{M} \Rightarrow J_2^\bullet \subset J_1^\bullet$. En general no se puede asegurar la igualdad $J = J^{\bullet\bullet}$: Si $J = \mathcal{F}^\circ$, en virtud de la siguiente proposición $\mathcal{F}^\circ \neq \mathcal{F}^\bullet = (\mathcal{F}^{\circ\bullet})^\bullet = (\mathcal{F}^\circ)^{\bullet\bullet}$.

Proposición 2.1 *Para un filtro $\mathcal{V} \subset \mathcal{P}(\mathbb{N})$ se cumple $\mathcal{V} = \mathcal{V}^{\bullet\bullet} = \mathcal{V}^{\circ\bullet}$.*

DEM: Teniendo en cuenta que $\mathcal{V}^\circ \subset \mathcal{V}^\bullet$ se obtiene que $\mathcal{V}^{\bullet\bullet} \subset \mathcal{V}^{\circ\bullet}$. Como la inclusión $\mathcal{V} \subset \mathcal{V}^{\bullet\bullet}$ es inmediata basta demostrar que $\mathcal{V}^{\circ\bullet} \subset \mathcal{V}$. Si $F \in \mathcal{V}^{\circ\bullet}$ entonces $\mu(F) = 1$, para cada $\mu \in \mathcal{V}^\circ$, lo que significa que F pertenece a todos los ultrafiltros más finos que $\mathcal{V}$ y por lo tanto $F \in \mathcal{V}$ (si suponemos que $F \notin \mathcal{V}$ entonces para cada $V \in \mathcal{V}$ es $V \cap F^c \neq \emptyset$, y considerando un ultrafiltro que contenga a la base de filtro $\mathcal{B} = \{V \cap F^c : V \in \mathcal{V}\}$ se obtendría un elemento $\mu \in \mathcal{V}^\circ$ que cumpliría $\mu(F^c) = 1$). ■

En virtud de 2.1, si $J \subset \mathcal{V}^\bullet$ se verifica $\mathcal{V} = \mathcal{V}^{\bullet\bullet} \subset J^\bullet$. En particular si $J \subset \mathcal{F}^\bullet$ entonces $J^\bullet$ es un filtro más fino que el filtro de Frechet.

Para sucesiones acotadas las medias $\mu \in \mathcal{V}^\bullet$ extienden el límite según $\mathcal{V}$, y por ello les llamamos $\mathcal{V}$-*límites generalizados*. En lo sucesivo llamaremos *límites generalizados* a los $\mathcal{F}$-límites generalizados, donde $\mathcal{F}$ es el filtro de Frechet. Si $\mu \in \mathcal{F}^\bullet$ es un límite generalizado y $\mathbf{x} = (x_n)$ es una sucesión acotada, a veces usaremos la notación $\mu\text{-}\lim_n x_n$ para denotar el valor $\mu(\mathbf{x})$. En [49] se puede ver una breve demostración del siguiente resultado.

Proposición 2.2 *Dado un filtro $\mathcal{V} \supset \mathcal{F}$, y $\mathbf{x} \in l_\infty$, son equivalentes*
i) $\mathbf{x}$ *converge hacia α según el filtro $\mathcal{V}$.*
ii) $\mu(\mathbf{x}) = \alpha$ *para todo $\mu \in \mathcal{V}^\bullet$.*

La proposición 2.2 es otra versión del resultado central de [25], con el siguiente matiz: En [25], no se utiliza la noción usual de convergencia según un filtro. Sólo se usa lo que aquí hemos llamado convergencia a través de conjuntos del filtro, y en lugar de i) interviene la condición equivalente $\mathbf{x} \in \overline{c_\star(\mathcal{V})}$. Además, en [25] no se habla de filtros y en su lugar intervienen las que allí se llaman clases nulas (las formadas por los complementos de los conjuntos de un filtro que contiene al filtro de Frechet).

Definición 2.3 *Dada una familia no vacía de medias $J \subset \mathcal{M}$ diremos que $\mathbf{x} \in l_\infty$ es J-convergente hacia $x \in \mathbb{R}$ cuando $\mu(\mathbf{x}) = x$ para cada $\mu \in J$, y diremos que $\mathbf{x} \in l_\infty$, y que es fuertemente J-convergente hacia $x \in \mathbb{R}$ cuando la sucesión $|\mathbf{x} - x| = (|x_n - x|)$ es J-convergente hacia 0, es decir $\mu(|\mathbf{x} - x|) = 0$ para cada $\mu \in J$.*

Toda sucesión $\mathbf{x} \in l_\infty$ fuertemente J-convergente hacia x es J-convergente hacia x. Por otra parte, es fácil ver que $0 \leq \mathbf{x} \leq 1$ es J-convergente hacia 0 (resp. 1) si y sólo si es fuertemente J-convergente hacia 0, (resp. 1). En particular, dado $E \subset \mathbb{N}$, la sucesión χ_E es J-convergente hacia 1 si y sólo si es fuertemente J-convergente hacia 1.

Funcionales sublineales y familias de medias. Si $\rho : l_\infty \to \mathbb{R}$ es un funcional sublineal que verifica i) $\rho(\mathbf{x}) = x$ si $x_n = x$ para todo $n \in \mathbb{N}$; ii) $\rho(\mathbf{x}) \leq \sup_n x_n$ para todo $\mathbf{x} \in l_\infty$. con el teorema de Han-Banach, aplicado al subespacio de las sucesiones constantes, se obtiene que $J = \{\mu \in (l_\infty)^* : \mu \leq \rho\}$ es una familia no vacía de medias, convexa y débil* cerrada. Recíprocamente a una familia $J \subset \mathcal{M}$ con estas propiedades se le asocia el funcional sublineal $\rho_J(\mathbf{x}) = \sup\{\mu(x) : \mu \in J\}$ que verifica $J = \{\mu \in (l_\infty)^* : \mu \leq \rho_J\}$.

Dada una familia de medias J, un problema central de la teoría es el del calcular (es decir, obtener una fórmula explícita) para el funcional sublineal asociado ya que esto permitirá obtener caracterizaciones útiles de las sucesiones J-convergentes, ya que $\mathbf{x} \in l_\infty$ es J-convergente hacia a si y sólo si $\inf\{\mu(\mathbf{x}) : \mu \in J\} = \sup\{\mu(\mathbf{x}) : \mu \in J\} = a$ es decir, si y sólo si $-\rho_J(-\mathbf{x}) = \rho_J(\mathbf{x}) = a$. Por ello, cuando obtengamos fórmula explícita para ρ_J, habremos conseguido una caracterización útil de las sucesiones J-convergentes.

Un primer ejemplo trivial lo proporciona $J = \mathcal{M}$ cuyo funcional sublineal asociado es $\rho_{\mathcal{M}}(\mathbf{x}) = \sup_n x_n$. Es obvio que las sucesiones $\mathcal{M}$-convergentes son las constantes.

Otro ejemplo algo más interesante lo proporciona la familia $\mathcal{V}^\bullet$. Según la proposición 2.1 en [49] el funcional sublineal asociado a $\mathcal{V}^\bullet$ es $\overline{\lim}_{\mathcal{V}}(\mathbf{x}) := \inf_{V \in \mathcal{V}} \sup\{x(n) : n \in V\}$, es decir $\sup\{\mu(\mathbf{x}) : \mu \in \mathcal{V}^\bullet\} = \overline{\lim}_{\mathcal{V}}(\mathbf{x})$. En virtud de 2.2 las sucesiones $\mathcal{V}^\bullet$-convergentes son las acotadas que convergen según $\mathcal{V}$. En particular, el funcional sublineal asociado a $\mathcal{F}^\bullet$ es $\overline{\lim}\, \mathbf{x}$ y las sucesiones $\mathcal{F}^\bullet$-convergentes son las convergentes en sentido usual.

Densidad asociada a una familia de medias. La mayor parte de las nociones de densidad que aparecen la literatura son versiones particulares de la siguiente definición general dada en términos de una familia no vacía de medias $J \subset \mathcal{M}$. Se comienza definiendo las densidades superior e inferior de $E \subset \mathbb{N}$:

$$\delta_J^+(E) := \sup\{\mu(E) : \mu \in J\} = \rho_J(\chi_E); \quad \delta_J^-(E) := \inf\{\mu(E) : \mu \in J\} = -\rho_J(-\chi_E)$$

y la familia $\mathcal{D}(J) = \{E \subset \mathbb{N} : \delta_J^+(E) = \delta_J^-(E)\}$ formada por los conjuntos $E \subset \mathbb{N}$ tales que χ_E es J-convergente. Para $E \in \mathcal{D}(J)$ se define la densidad $\delta_J(E) = \delta_J^+(E) = \delta_J^-(E)$. Obsérvese que $E \in \mathcal{D}(J)$, con $\delta_J(E) = \alpha$, significa que $\mu(E) = \alpha$ para cada $\mu \in J$. Cuando $E \in \mathcal{D}(J)$ se suele decir que existe la densidad $\delta_J(E)$.

La densidad δ_J lleva asociado el filtro $\mathcal{F}_J = \{E \in \mathcal{D}_J : \delta_J(E) = 1\} = J^\bullet$. Por otra parte, la densidad asociada a un filtro $\mathcal{V}$ de partes de $\mathbb{N}$, es la densidad $\delta = \delta_J$ asociada a la familia de medias $J = \mathcal{V}^\bullet$. En este caso, según la prop. 2.1 en [49], las densidades inferior y superior son $\delta^-(E) = \underline{\lim}_{\mathcal{V}}\, \chi_E$, $\delta^+(E) = \overline{\lim}_{\mathcal{V}}\, \chi_E)$. Esta densidad es $\{0,1\}$-valuada y los conjuntos del filtro son los que tienen densidad $\delta(E) = 1$. La densidad asociada al filtro de Frechet $\mathcal{F}$ es la trivial: Sólo tienen densidad los conjuntos finitos ($= 0$) y los confinitos ($= 1$). Obsérvese que para la familia $J = \mathcal{V}^\bullet$ la proposición 2.1 confirma que el filtro definido por δ_J es $J^\bullet = \mathcal{V}^{\bullet\bullet} = \mathcal{V}$.

Familias saturadas de medias
Para una familia de medias $J \subset \mathcal{M}$, definimos su envoltura saturada $\widehat{J} = \overline{span(J)}^* \cap \mathcal{M}$, donde la clausura se toma en la topología débil* de $(l_\infty)^*$. Si $J = \widehat{J}$ diremos que la familia J es saturada. Es fácil ver que $\mathbf{x} \in l_\infty$ es J-convergente (hacia x) si y sólo si es $\widehat{J}$-convergente (hacia x). El interés de la noción de familia saturada se pone de manifiesto con esta observación, combinada con la siguiente proposición y los ejemplos que siguen.

Proposición 2.4 *Dadas dos familias de medias no vacías $J_1, J_2 \subset \mathcal{M}$, son equivalentes*
a) Cada $\mathbf{x} \in l_\infty$ que es J_1-convergente hacia x es J_2-convergente hacia x.
b) $J_2 \subset \widehat{J}_1$.
Por lo tanto, cuando J_1 es saturada, la condición b) se puede reemplazar por $J_2 \subset J_1$.

DEM: Si $\mathbf{x}$ es J_1 -convergente hacia x también es $\widehat{J}_1$ convergente hacia x luego b) $\Rightarrow$ a). Recíprocamente, si se cumple a) y $\mu \in J_2$ entonces cada $\mathbf{x} \in l_\infty$ que se anule sobre J_1 también se anula sobre μ luego $\mu \in \overline{span(J_1)}^*$, y así $\mu \in \widehat{J}_1$. ■

Sea $\mathcal{V} \subset \mathcal{P}(\mathbb{N})$ un filtro, $\mathcal{M}_s$ el conjunto de las medias invariantes respecto a un movimiento s de $\mathbb{N}$, $[\mathcal{G}]$ el conjunto de las medias $\mathcal{G}$-invariantes respecto a un semigrupo $\mathcal{G}$ de operadores regulares $A : l_\infty \to l_\infty$ y J_C el conjunto de los límites generalizados de Banach que extienden la sumabilidad Cesàro (véase [49]). Es fácil ver que las familias $\mathcal{V}^\bullet$, $\mathcal{M}_s$, $[\mathcal{G}]$, J_C son saturadas.

Caracterización de la J-sumabilidad fuerte.
Si $\rho_J(\mathbf{x}) = \sup\{\mu(\mathbf{x}) : \mu \in J\}$ es el funcional sublineal asociado a $J \subset \mathcal{M}$, consideramos la familia $J_1 = \{\mu \in \mathcal{M} : \mu(\mathbf{x}) \leq \rho_J(|\mathbf{x}|)$ para todo $\mathbf{x} \in l_\infty\}$.

Proposición 2.5 *Se verifica $J \subset J_1 \subset J^{\bullet\bullet}$.*

DEM: La primera inclusión es obvia. Si $\mu \in J_1$ entonces para cada $V \in J^\bullet$ se cumple $0 \leq \mu(V^c) \leq \rho(\chi_{V^c}) = \sup_{\nu \in J}(V^c) = 0$, luego $\mu \in J^{\bullet\bullet}$. ■

Teorema 2.6 *Sea $\emptyset \neq J \subset \mathcal{M}$ y J_1 la familia que interviene en 2.5. Para $\mathbf{x} \in l_\infty$ son equivalentes:*
i) $\mathbf{x}$ converge hacia x según el filtro $J^\bullet$.
ii) $\mu(\mathbf{x}) = x$ para todo $\mu \in J^{\bullet\bullet}$, (es decir, $\mathbf{x}$ es $J^{\bullet\bullet}$-convergente hacia x).
iii) $\mu(\mathbf{x}) = x$ para todo $\mu \in J_1$, (es decir, $\mathbf{x}$ es J_1-convergente hacia x).
iv) $\mathbf{x}$ es fuertemente J-convergente hacia x.

DEM: i) $\Leftrightarrow$ ii) en virtud de 2.2. ii) $\Rightarrow$ iii) en virtud de la proposición 2.5.
iii) $\Rightarrow$ iv): Se supone que $\mu(\mathbf{x} - x) = 0$ para todo $\mu \in J_1$. Por el teorema de Hahn-Banach aplicado con el funcional sublineal $\rho_J(|\cdot|)$, podemos asegurar que existe $\mu_0 \in J_1$ tal que $\mu_0(\mathbf{x} - x) = \rho_J(|\mathbf{x} - x|)$, luego $\rho_J(|\mathbf{x} - x|) = 0$, lo que significa que se cumple iv).
iv) $\Rightarrow$ i): Si se cumple iv), para cada $\mu \in J$ es $\mu(|\mathbf{x} - x|) = 0$. Esto implica que para cada $\epsilon > 0$ el conjunto $H_\epsilon = \{n : |\mathbf{x}(n) - x| \geq \epsilon\}$ cumple $\mu(H_\epsilon) = 0$, es decir su complemento $V_\epsilon = \{n : |\mathbf{x}(n) - x| < \epsilon\}$ verifica $\mu(V_\epsilon) = 1$. Como esto es cierto para cada $\mu \in J$ resulta que V_ϵ es un conjunto del filtro $J^\bullet$, y por lo tanto se cumple i). ■

En virtud de 2.1, $\mathcal{V}^\bullet = \mathcal{V}^{\bullet\bullet\bullet}$, y con 2.6, se obtiene que las sucesiones $\mathcal{V}^\bullet$-convergentes coinciden con las fuertemente $\mathcal{V}^\bullet$-convergentes. Este resultado es obvio ya que la convergencia según $\mathcal{V}$ coincide con la convergencia fuerte según este filtro.

Sumabilidad fuerte hacia el límite superior. Dada una familia vacía de medias no vacía J, en lo que sigue a veces utilizaremos la notación más familiar $\mathcal{F}_J$ para designar al filtro $J^\bullet$. Recordemos que el límite superior de $\mathbf{x} \in l_\infty$ según este filtro viene dado por $\overline{\text{lím}}_{\mathcal{F}_J}\mathbf{x} = \sup\{\mu(\mathbf{x}) : \mu \in \mathcal{F}_J^\bullet\} = \sup\{\mu(\mathbf{x}) : \mu \in J^{\bullet\bullet}\}$.

Teorema 2.7 *Sea $J \subset \mathcal{M}$ una familia no vacía de medias y $\mathcal{F}_J = J^\bullet$. Si $\mathbf{x} \in l_\infty$ es J-convergente hacia $\beta = \overline{\text{lím}}_{\mathcal{F}_J}\mathbf{x}$, entonces $\mathbf{x}$ converge hacia β según el filtro $\mathcal{F}_J$, y por lo tanto es fuertemente J-convergente hacia β.*

DEM: Razonamos por reducción al absurdo suponiendo que $\alpha := \underline{\text{lím}}_{\mathcal{F}_J}\mathbf{x} < \beta$. Entonces elegimos $c \in (\alpha, \beta)$, y para cada $\epsilon > 0$ consideramos los conjuntos

$$A = \{n : x_n < c\}, \quad B = \{n : c \leq x_n \leq \beta + \epsilon\}, \quad C = \{n : x_n > \beta + \epsilon\}$$

Existe $\nu \in J$ con $\nu(A) = \delta > 0$ (en caso contrario $F = \mathbb{N} \setminus A \in \mathcal{F}_J$, y para cada $\mu \in J^{\bullet\bullet}$ se cumpliría $\mu(F) = 1$ luego $\mu(\mathbf{x}) = \mu(\chi_F\mathbf{x}) \geq c > \alpha$, y se llegaría a la contradicción $\alpha = \inf\{\mu(\mathbf{x}) : \mu \in J^{\bullet\bullet}\} \geq c$). Por otra parte, en virtud de la definición de β, para todo $\mu \in J$ se cumple $\mu(C) = 0$. En particular sería $\nu(C) = 0$ luego $\nu(B) = 1 - \delta$. Entonces, teniendo en cuenta que $\mathbf{x} = \chi_A\mathbf{x} + \chi_B\mathbf{x} + \chi_C\mathbf{x}$ se obtiene

$$\nu(\mathbf{x}) = \nu(\chi_A\mathbf{x}) + \nu(\chi_B\mathbf{x}) \leq c\nu(A) + (\beta + \epsilon)\nu(B) =$$

$$= c\delta + (\beta + \epsilon)(1 - \delta) = (c - \beta)\delta + \beta + \epsilon - \epsilon\delta$$

Como esta desigualdad es cierta para todo $\epsilon > 0$ se concluye que $\nu(\mathbf{x}) \leq \beta + (c - \beta)\delta < \beta$, lo que contradice la hipótesis $J\text{-}\,\text{lím}\,\mathbf{x} = \beta$ ■

3. Ejemplos y aplicaciones

Los siguientes ejemplos muestran que, en el contexto de las sucesiones acotadas, diversas nociones clásicas de sumabilidad y sumabilidad fuerte, son casos particulares de la definición 2.3. Después de estos ejemplos, el sencillo resultado que se ha visto en 2.6 pondrá de manifiesto que, para sucesiones acotadas, tanto la casi convergencia fuerte como la sumabilidad fuerte respecto a una matriz regular no negativa A quedan caracterizadas mediante las nociones de convergencia según los filtros asociados a los correspondientes métodos de sumabilidad.

1. Si $A : l_\infty \to l_\infty$ es un operador definido por una matriz regular no negativa y $J = A^*(\mathcal{F}^\bullet)$ (donde $\mathcal{F}$ es el filtro de Frechet) entonces $\mathbf{x} \in l_\infty$ es J-convergente hacia x si y sólo si $\mathbf{x}$ es A-sumable hacia x y es fuertemente J-convergente hacia x si y sólo si es fuertemente A-sumable hacia x lo que, en virtud de 2.6, ocurre si y

sólo si $\mathbf{x}$ converge hacia x según el filtro $J^{\bullet}$ donde $J = A^*(\mathcal{F}^{\bullet})$. Para esta familia de medias el funcional sublineal asociado es $\rho_J(\mathbf{x}) = \overline{\text{lím}} A(\mathbf{x})$ y la densidad asociada es la densidad d_A, es decir $d_A = \delta_{A^*(\mathcal{F}^{\bullet})}$, y el filtro $\mathcal{F}_A$ asociado a la densidad d_A coincide con $J^{\bullet} = A^*(\mathcal{F}^{\bullet})^{\bullet}$.

Freedman y Sember [22] establecieron que $\mathbf{x} \in l_\infty$ es fuertemente A-sumable si y sólo si converge a través de conjuntos del filtro $\mathcal{F}_A$. Posteriormente Connor [9] observó que $\mathbf{x} \in l_\infty$ es fuertemente A-sumable si y sólo si converge según el filtro $\mathcal{F}_A$. Al mismo tiempo, Chun y Freedman [6], demostraron (usando el lenguaje de los ideales) que para cualquier filtro $\mathcal{V}$ se verifica $c(\mathcal{V}) = \overline{c_*(\mathcal{V})}$ y como consecuencia obtuvieron que para un R-método de sumabilidad S, una sucesión $\mathbf{x} \in l_\infty$ es fuertemente S-sumable si y sólo es convergente según el filtro $\mathcal{F}_S$, por lo que quedó demostrado que $\mathbf{x} \in l_\infty$ es fuertemente A-sumable si y sólo si converge según el filtro $\mathcal{F}_A$. Por otra parte, Fridy y Orhan [30] demostraron directamente, en el caso particular de la matriz T_θ asociada a una sucesión lagunar θ, que $\mathbf{x} \in l_\infty$ es fuertemente θ-sumable si y sólo si converge según el filtro $\mathcal{F}_\theta = \{E \in \mathcal{D}_\theta : d_\theta(E) = 1\}$.

2. Considerando la familia de medias $J = C^*(\mathcal{F}^{\bullet})$, se tiene que $\mathbf{x} \in l_\infty$ es J-convergente (resp. fuertemente J-convergente) hacia x si y sólo si $\mathbf{x}$ sumable (resp. es fuertemente sumable) Cesàro hacia x, y las sucesiones acotadas fuertemente sumables Cesàro son las convergentes según el filtro $\mathcal{F}_d = J^{\bullet}$. La familia de medias $C^*(\mathcal{F}^{\bullet})$ no es saturada porque según un resultado de Raimi ([45]), la inclusión $C^*(\mathcal{F}^{\bullet}) \subset J_C$ es estricta, y teniendo en cuenta que J_C es saturada se sigue que $C^*(\mathcal{F}^{\bullet})$ no es saturada. Puesto que las sucesiones J_C-convergentes coinciden con las $C^*(\mathcal{F}^{\bullet})$-convergentes, en virtud de la proposición 2.4 podemos afirmar que J_C es la envoltura saturada de $C^*(\mathcal{F}^{\bullet})$.

   Parece que desde hace tiempo se sabía que para el filtro $\mathcal{F}_d$ son equivalentes las dos nociones de convergencia, es decir $c(\mathcal{F}_d) = c_\star(\mathcal{F}_d)$. Fridy [27] demostró esta equivalencia que se puede expresar diciendo que $c_\star(\mathcal{F}_d)$ es cerrado en ω para la topología de la convergencia uniforme. En [41] Miller dio una demostración directa de un resultado algo más general relativo a filtros $\mathcal{F}_A$ asociados matrices regulares no negativas A de una clase particular que incluye a la matriz de Cèsaro.

3. Si $\mathbf{x} \in \omega$ es fuertemente C-sumable entonces $\mathbf{x}_n = O(n)$. Sin embargo, las sucesiones convergentes según el filtro $\mathcal{F}_d$, y en particular las convergentes a través de conjuntos de $\mathcal{F}_d$, no satisfacen una condición de este tipo. Lo mismo se puede decir para las sucesiones fuertemente A-sumables. Se sigue de esto que para sucesiones no acotadas no subsiste la equivalencia entre la sumabilidad de Cesàro fuerte y la convergencia según el correspondiente filtro $\mathcal{F}_d$, es decir $|\sigma_1| \subsetneq c(\mathcal{F}_d)$. En [30] también se muestra que $|c_\theta| \subsetneq c(\mathcal{F}_\theta)$ para cualquier sucesión lagunar θ.

4. Si A es una matriz regular no negativa y $J = A^*(\mathcal{F}^{\bullet})$, como $\mathcal{F}_A = J^{\bullet}$, aplicando 2.7 se obtiene que si $\mathbf{x} \in l_\infty$ es A-sumable hacia $x = \overline{\text{lím}}_{\mathcal{F}_A} \mathbf{x} = \sup\{\mu(\mathbf{x}) : \mu \in J^{\bullet\bullet}\}$ entonces $\mathbf{x}$ converge hacia x según el filtro $\mathcal{F}_A$ y por lo tanto es fuertemente A-sumable hacia x. Se sigue que si $\mathbf{x} \in l_\infty$ es A-sumable hacia $x = \overline{\text{lím}}_{\mathcal{F}}(\mathbf{x})$ entonces converge hacia x según el filtro $\mathcal{F}_A$. (Por la hipótesis, para todo $\mu \in J = A^*(\mathcal{F}^{\bullet})$ es $x = \mu(\mathbf{x})$, y teniendo en cuenta que $\mu(\mathbf{x}) \le \sup\{\nu(\mathbf{x}) : \nu \in J^{\bullet\bullet}\} = \overline{\text{lím}}_{\mathcal{F}_A}(\mathbf{x}) \le \overline{\text{lím}}_{\mathcal{F}}(\mathbf{x}) = x$, se obtiene que $x = \overline{\text{lím}}_{\mathcal{F}_A}(\mathbf{x})$).

Los antecedentes de 2.7 son los siguientes resultados particulares: Buck [2] observó que si una sucesión de números reales es sumable Cesàro hacia su límite superior entonces converge según el filtro $\mathcal{F}_d$ hacia este límite superior, y análogamente para el límite inferior. Fridy y Orhan [30] extendieron el resultado para T_θ-sumabilidad y el filtro $\mathcal{F}_\theta$, donde θ es una sucesión lagunar: Si la sucesión real $\mathbf{x}$ es T_θ-sumable hacia su límite superior (resp. inferior) y este es finito, entonces $\mathbf{x}$ converge según el filtro $\mathcal{F}_\theta$ hacia este valor.

Para sucesiones acotadas Fridy y Orhan [32] obtuvieron un resultado análogo al de Buck pero considerando el límite superior según el filtro $\mathcal{F}_d$: Sea $\mathbf{x}$ una sucesión acotada superiormente (resp. inferiormente) sumable Cesàro hacia $x = \overline{\text{lím}}_{\mathcal{F}_d}\mathbf{x}$ (resp. $x = \underline{\text{lím}}_{\mathcal{F}_d}\mathbf{x}$). Entonces $\mathbf{x}$ converge hacia x según $\mathcal{F}_d$, y la conclusión es falsa sin hipótesis de acotación (no exigida en el resultado de Buck). En [42] se obtuvo un resultado (teor. 3.3) que también es caso particular de 2.7.

5. Cuando $J = \mathcal{M}_\sigma$ es la familia de los límites de Banach, las sucesiones $\mathcal{M}_\sigma$-convergentes son las casi convergentes introducidas por Lorentz [38] que las caracterizó demostrando que $\mathbf{x} \in l_\infty$ es casi convergente hacia x si y sólo si

$$\text{lím}_n \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_{j+k} = x \quad \text{uniformemente en } j \in \mathbb{N}$$

El funcional sublineal asociado a $\mathcal{M}_\sigma$ es el funcional sublineal de Banach que denotaremos w. En [49] se muestran diversas fórmulas para w. Una de ellas es

$$w(\mathbf{x}) = \overline{\text{lím}}_n \sup_j \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_{j+k}$$

Se dice que la sucesión $\mathbf{x} \in l_\infty$ es fuertemente casi convergente hacia x cuando la sucesión $|\mathbf{x} - x| = (|x_n - x|)$ es casi convergente hacia 0. Las sucesiones fuertemente casi convergentes fueron introducidas de modo independiente en [39] y [23]. El espacio AC de las sucesiones casi convergentes y el subespacio $|AC|$ de las fuertemente casi convergentes $|AC|$, con las nociones de convergencia asociadas, son ejemplos de R-métodos de sumabilidad no matriciales.

En [16] Das y Patel demostraron que si $\theta = (n_k)$ es una sucesión lagunar entonces $\mathbf{x}$ es fuertemente casi-convergente hacia x si y sólo si

$$\text{lím}_k \frac{1}{h_k}\sum_{n_{k-1}<n\leq n_k} |x_{n+p} - x] = 0 \text{ uniformemente en } p$$

Esto es consecuencia de la igualdad $p_\theta = w$ que se había obtenido en [15] .

En [23] el espacio de las sucesiones casi convergentes y el de las fuertemente casi convergentes fueron caracterizados en términos de sumabilidad lagunar fuerte:

$$AC = \cap_\theta c_\theta^b = \cap_\theta c_\theta, \quad |AC| = \cap_\theta |c_\theta^b| = \cap_\theta |c_\theta|$$

donde θ recorre las sucesiones lagunares y $|c_\theta^b| = |c_\theta| \cap l_\infty$. Como $c(\mathcal{F}_\theta) \cap l_\infty = |c_\theta^b|$, la caracterización de $|AC|$ se puede expresar también, en términos de los filtros $\mathcal{F}_\theta$, en la forma que fue obtenida posteriormente en [30]: $|AC| = (\cap_\theta c(\mathcal{F}_\theta)) \cap l_\infty$. Esta caracterización sigue siendo válida considerando sólo sucesiones lagunares θ que verifican $\text{lím}_r\, q_r = 1$.

La *densidad uniforme*, también llamada densidad de Banach, es la asociada a la casi convergencia. Si la función característica χ_E de $E \subset \mathbb{N}$ es casi convergente hacia α se dice que E tiene densidad uniforme α, y se escribe $u(E) = \alpha$. De acuerdo con los convenios de notación que hemos adoptado $\mathcal{D}_u$ designa la familia de los subconjuntos $E \subset \mathbb{N}$ que tienen densidad uniforme (el dominio de u). En virtud del clásico teorema de Lorentz [38] la densidad uniforme u y su dominio $\mathcal{D}_u$ se pueden caracterizar de dos formas equivalentes:
i) Por una parte $E \in \mathcal{D}_u$ y $u(E) = \alpha$ si y sólo si $\mu(E) = \alpha$ para todo $\mu \in \mathcal{M}_\sigma$.
ii) Por otra parte, si se definen las densidades inferior y superior

$$u^-(E) = \underline{\text{lím}}_n \inf_p f_n^p(E); \;\; u^+(E) = \overline{\text{lím}}_n \sup_p f_n^p(E) \text{ con } f_n^p(E) = \frac{E \cap [p+1, \cdots p+n]}{n}$$

se tiene $\mathcal{D}_u = \{E \subset \mathbb{N} : u^+(E) = u^-(E)\}$ y $u(E) = u^+(E) = u^-(E)$ para $E \in \mathcal{D}_u$. En el articulo de Fremlin [26] se pueden ver algunas propiedades y aplicaciones de la densidad uniforme.

Con la densidad uniforme se define el filtro

$$\mathcal{F}_u = \{E \in \mathcal{D}_u : u(E) = 1\} = \{E \subset \mathbb{N} : \mu(E) = 1 \text{ para todo } \; \mu \in \mathcal{M}_\sigma\}$$

que interviene en la caracterización de las sucesiones fuertemente casi convergentes y en la de los multiplicadores del espacio AC que se considera más adelante.

La segunda parte del artículo [21] contiene un repertorio de ejemplos relativos a las desigualdades $u^-(E) = d^-(E) \leq d^+(E) \leq u^+(E)$. Se muestran ejemplos para cada una de las siguientes relaciones de desigualdad $0 = u^-(E) < u^+(E) = 1$, $0 = u^-(E) < d^-(E) = 1/3 < 2/3 = d^+(E) < u^+(E) = 1$, $0 = u^-(E) < d^-(E) = 1/2 = d^+(E) < u^+(E) = 1$, $0 = u^-(E) < d(E) = u^+(E) = 1$, $0 = u^-(E) = d(E) < u^+(E) = 1$.

4. Multiplicadores y sumabilidad fuerte

Si A es una matriz regular sea $M_A = \{\mathbf{x} \in l_\infty : \mathbf{xy} \in c_A \cap l_\infty \text{ para cada } \mathbf{y} \in c_A \cap l_\infty\}$ el subespacio cerrado de $c_A \cap l_\infty$, (subálgebra) formado pr sus multiplicadores. Hill y Sledd [35] obtuvieron el siguiente resultado

Teorema 4.1 *Si A es regular entonces A-lím es multiplicativo sobre M_A:*

$$A\text{-lím}(\mathbf{xy}) = (A\text{-lím}\,\mathbf{x})(A\text{-lím}\,\mathbf{y}) \;\; \textit{para cada} \;\; \mathbf{x}, \mathbf{y} \in M_A.$$

DEM: Véase el teorema 3.1 de [35]. La demostración no es trivial ya que utiliza el teorema de consistencia de Brundo, y de Mazur-Orlicz. ■

Además de este resultado Hill y Sledd [35] demostraron el siguiente teorema,

Teorema 4.2 *Si A es una matriz regular no negativa y $\mathbf{x} \in l_\infty$, son equivalentes:*
i) $\mathbf{x}$ *converge (hacia x) a través de conjuntos del filtro $\mathcal{F}_A$.*
ii) $\mathbf{x}$ *es fuertemente A-sumable (hacia x).*
iii) $\mathbf{x} \in M_A$ *($\mathbf{x}$ es multiplicador de $c_A \cap l_\infty$).*
Si $\mathbf{x} \in M_A$ entonces A-$\lim \mathbf{x} \in [\underline{\lim}_n x_n, \overline{\lim}_n x_n]$.

La equivalencia i) $\Leftrightarrow$ ii) que era bien conocida para la matriz de Cèsaro ([33], p. 38). la demostraron Freedman y Sember [22] (utilizando que d_A tiene la propiedad (APO)) y la volvieron a demostrar Fridy [27] y Miller [41], para el filtro $\mathcal{F}_A$ y en particular para el filtro $\mathcal{F}_\theta$ asociado a una sucesión lagunar θ.

Freedman y Sember [22] caracterizaron, mediante la propiedad (APO) (considerada en la siguiente sección) los filtros $\mathcal{V}$ tales que $c_\star(\mathcal{V})$ es cerrado para la topología de la convergencia uniforme pero sin mencionar la noción de convergencia según un filtro. Si sus resultados se interpretan en términos de esta noción, llevan implícito el resultado que afirma que para cualquier matriz regular no negativa A se cumple $c(\mathcal{F}_A) = c_\star(\mathcal{F}_A)$, por lo que al teorema anterior se le puede añadir la condición equivalente
i)* $\mathbf{x}$ *converge (hacia x) según el filtro $\mathcal{F}_A$.*
Obsérvese que la equivalencia entre i^*) y 4.2 *ii*) es un caso particular de 2.6.

Connor y Kline [13] atribuyeron a Connor [10] este resultado, al hacerlo explícito demostrando que $\mathbf{x}$ es fuertemente A-sumable (hacia x) si y sólo si $\mathbf{x}$ converge (hacia x) según el filtro $\mathcal{F}_A$.

Si AC denota el espacio de las sucesiones casi convergentes, se dice que $\mathbf{x} \in l_\infty$ es un multiplicador de AC cuando $\mathbf{xy} \in AC$ para todo $\mathbf{y} \in AC$. Los multiplicadores del espacio de las sucesiones casi convergentes forman un subconjunto que no contiene a las sucesiones casi periódicas. Como la densidad uniforme de Banach es la asociada a la casi-convergencia de Lorentz es natural plantearse si para el filtro $\mathcal{F}_u$ sigue valiendo un resultado análogo al teorema 4.2. Chou [4] caracterizó los multiplicadores del espacio de las sucesiones casi convergentes usando la convergencia según el filtro $\mathcal{F}_u$, pero sin mencionar las sucesiones fuertemente casi convergentes. El siguiente teorema, que reúne los resultados de Chou [4] y los obtenidos anteriormente por Raimi [44], proporciona una caracterización de las sucesiones fuertemente casi convergentes obtenida mucho antes de que fuesen introducidas explícitamente por Maddox [39]. Parece que Maddox ignoraba estos resultados.

Teorema 4.3 *Si $\mathbf{x} \in l_\infty$ entonces i) $\Rightarrow$ ii) $\Leftrightarrow$ iii) $\Leftrightarrow$ iv) y el recíproco ii) $\Rightarrow$ i) es falso.*
i) $\mathbf{x}$ *es convergente (hacia x) a través de conjuntos del filtro $\mathcal{F}_u$.*
ii) $\mathbf{x}$ *es convergente (hacia x) según el filtro $\mathcal{F}_u$.*
iii) $\mathbf{x}$ *es fuertemente casi convergente (hacia x).*
iv) $\mathbf{x}$ *es un multiplicador de AC.*

DEM: i) $\Rightarrow$ ii) $\Leftrightarrow$ iii) y ii) $\not\Rightarrow$ i) se debe a Raimi que obtuvo una sucesión $0 < \mathbf{x} \in l_\infty$ convergente hacia 0 según el filtro $\mathcal{F}_u$, que no converge a través de conjuntos de este filtro.

Otro ejemplo similar lo dio Chou en la [4] donde llama τ-convergentes a las sucesiones acotadas que son convergentes según $\mathcal{F}_u$.

Chou demostró ii) $\Leftrightarrow$ iv). También demostró que las sucesiones acotadas convergentes según el filtro $\mathcal{F}_u$, coinciden con las que tienen una extensión a $\beta\mathbb{N}$ que es constante sobre $(\mathcal{F}_u)^\circ$, es decir, con las que aquí llamamos $\mathcal{F}^\circ$-convergentes.
Nota: Raimi también consideró una condición algo menos exigente que la convergencia a través de conjuntos de $\mathcal{F}_u$:
(*) Para cada $\epsilon > 0$ *existe* $E \subset \mathbb{N}$ *con* $u^-(E) > 1 - \epsilon$, *tal que* $\lim_{n\in E} x_n = x$
y demostró que esta condición sigue siendo estrictamente más fuerte que la convergencia según $\mathcal{F}_u$. Obtuvo una partición numerable $\{N_k : k \in \mathbb{N}\}$ de $\mathbb{N}$ con la siguiente propiedad: Si $M \subset \mathbb{N}$ y $M \cap N_k$ es finito para todo $k \in \mathbb{N}$ entonces $u^-(M) = 0$. Entonces la función $f(n) = 1/k$ si $n \in N_k$, converge según el filtro $\mathcal{F}_u$ pero no cumple (*).

Por otra parte, una aplicación directa de 2.6 conduce a la siguiente caracterización de las sucesiones acotadas fuertemente casi convergentes

Teorema 4.4 *Sea* w *el funcional sublineal de Banach y* $\mathbf{x} \in l_\infty$. *Son equivalentes:*
i) $\mathbf{x}$ *es fuertemente casi convergente hacia* x.
ii) $\mu(\mathbf{x}) = x$ *para todo* $\mu \in \mathcal{M}_\sigma^{\bullet\bullet}$.
iii) $\mu(\mathbf{x}) = x$ *para todo* $\mu \in \mathcal{M}_\sigma$ *tal que* $\mu(\mathbf{y}) \leq w(|\mathbf{y}|)$ *para todo* $\mathbf{y} \in l_\infty$.
iv) $\mathbf{x}$ *es convergente hacia* x *según el filtro* $\mathcal{F}_u = \mathcal{M}_\sigma^\bullet$.

Merece la pena comentar la historia de los resultados incluidos en 4.4: Ya hemos mencionado que Raimi [44], si usar la terminología de casi convergencia fuerte, había demostrado un resultado para sucesiones $0 \leq \mathbf{z} \in l_\infty$, que aplicado a las sucesiones de la forma $\mathbf{z} = |\mathbf{x} - x|$ dice que, para sucesiones acotadas, la convergencia según el filtro $\mathcal{F}_u$ es equivalente a la casi convergencia fuerte, por lo que *i)* $\Leftrightarrow$ *iv)*, se la debemos atribuir a Raimi.

Maddox [39] demostró que i) $\Rightarrow$ iii). Luego, Das y Mishra [14] demostraron el recíproco, pero en estos primeros resultados aún no se reconocía que iii) era equivalente a la convergencia según el filtro $\mathcal{F}_u$.

Por otra parte, Freedman y Sember [22] caracterizaron las sucesiones fuertemente casi convergentes como las sucesiones acotadas de $\overline{c(\mathcal{F}_u)}$. Posterior mente Freedman [25], caracterizó las sucesiones acotadas de $\overline{c_*(\mathcal{F}_u)}$ como las que aquí llamamos $(\mathcal{F}_u)^\bullet$-convergentes. Puesto que $\overline{c_*(\mathcal{V})} = c(\mathcal{V})$, la equivalencia i) $\Leftrightarrow$ ii) $\Leftrightarrow$ iv) se sigue de estos resultados.

Duran [18] caracterizó los multiplicadores de AC como la intersección de los multiplicadores de c_A cuando A recorre la familia $\mathcal{A}$ de las matrices ¿positivas? fuertemente regulares. Esto significa que $\mathbf{x} \in l_\infty$ es fuertemente casi convergente hacia x si y sólo si es fuertemente A-sumable hacia x para cada $A \in \mathcal{A}$. En otros términos: Existe el límite según el filtro $\mathcal{F}_u$, $\lim_{\mathcal{F}_u} \mathbf{x} = x$ si y sólo si para cada $A \in \mathcal{A}$ existe el límite $\lim_{\mathcal{F}_A} \mathbf{x} = x$. Duran [18] también caracterizó los multiplicadores de AC como las sucesiones casi convergentes $\mathbf{x} \in l_\infty$ tales que $|\mathbf{x} \circ \sigma - x|$ es casi convergente hacia 0.
Nota La caracterización de los multiplicadores obtenida por Chou se puede extender a situaciones más generales ([5],[19]).

5. La propiedad (APO)

A la vista de lo que ocurre con los filtros $\mathcal{F}_u$ y $\mathcal{F}_A$, es natural preguntarse ¿cuando las sucesiones convergentes según un filtro $\mathcal{V}$ coinciden con las convergentes a través de conjuntos de $\mathcal{V}$?. Es decir, ¿cuando se verifica la igualdad $c(\mathcal{V}) = c_\star(\mathcal{V})$?, o de modo equivalente ¿cuando $c_\star(\mathcal{V})$ es cerrado para la topología de la convergencia uniforme?. Veremos en esta sección que esto ocurre si y sólo si el filtro $\mathcal{V}$ tiene la propiedad (APO) que se define en 5.3.

Es fácil ver que una densidad δ nunca es σ-aditiva. Sin embargo algunas densidades cumplen la siguiente propiedad donde la relación $A \sim B$ significa que la diferencia simétrica $A\Delta B$ es finita.

Definición 5.1 *Una densidad δ verifica la propiedad (AP) si para cada sucesión disjunta A_n en su dominio $\mathcal{D}_\delta$ existe otra sucesión $B_n \sim A_n$ cuya unión $B = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n$ está en $\mathcal{D}_\delta$ y verifica $\delta(B) = \sum_{n=1}^\infty \delta(B_n) = \sum_{n=1}^\infty \delta(A_n)$.*

Esta propiedad ya había sido estudiada en otro contexto por Buck [2] y Freedman [24]. Buck [1] había demostrado que la densidad natural d tiene la propiedad (AP) usando una formulación equivalente:

Teorema 5.2 *Sea $\mathcal{D} \subset \mathcal{P}(\mathbb{N})$ la familia de los conjuntos con densidad ordinaria. Si $A_n \in \mathcal{D}$ es una sucesión decreciente, entonces existe $A \in \mathcal{D}$ tal que para cada $n \in \mathbb{N}$ $A \setminus A_n$ es finito y $d(A) = \lim_n d(A_n)$.*

Freedman y Sember [22] afirmaron, sin demostración, que la densidad d_A asociada a una matriz regular no negativa A tiene la propiedad (AP), y demostraron que tiene una propiedad más débil que la (AP), llamada (APO), que se formula de modo similar, considerando sólo sucesiones A_n tales que $\delta(A_n) = 0$. Es fácil ver que la propiedad (APO) es equivalente a la que resulta eliminando el requerimiento de que la sucesión A_n sea disjunta (véase [22]).

Definición 5.3 *Un filtro $\mathcal{V}$ de partes de $\mathbb{N}$ se dice que verifica la propiedad (APO) si la densidad $\{0,1\}$-valuada asociada al filtro tiene la propiedad (APO), es decir, para cada sucesión $A_n \in \mathcal{V}$ existe otra sucesión $B_n \sim A_n$ cuya intersección $B = \cap_{n\in\mathbb{N}} B_n$ está en $\mathcal{V}$.*

Freedman y Sember [22] demostraron que la densidad uniforme no tiene la propiedad (APO), y que la densidad δ tiene la propiedad (APO) si y sólo si $c_\star(\mathcal{F}_\delta)$ (resp. $c_\star(\mathcal{F}_\delta) \cap l_\infty$) es cerrado en ω (resp. en l_∞) para la topología de la convergencia uniforme (esto lo vuelve a demostrar Connor en [10]). Freedman y Sember [22] También demostraron i) $\Leftrightarrow$ ii) en el siguiente resultado, que completó Connor [11] con otras equivalencias

Teorema 5.4 *Para un filtro $\mathcal{V} \supset \mathcal{F}$ de partes de $\mathbb{N}$ son equivalentes*

i) El filtro $\mathcal{V}$ tiene la propiedad (APO).

ii) $c_\star(\mathcal{V})$ es cerrado en ω para la topología de la convergencia uniforme ($\Leftrightarrow$ $c_\star(\mathcal{V}) \cap l_\infty$ es cerrado en l_∞).

iii) Las sucesiones convergentes según $\mathcal{V}$ coinciden con las convergentes a través de conjuntos de $\mathcal{V}$, es decir $c_\star(\mathcal{V}) = c(\mathcal{V})$.

6. Notas

1. *Antecedentes:* Para sucesiones de números reales la convergencia según el filtro $\mathcal{F}_d$ ya aparece en el libro de Zigmund [**?**] con el nombre de "almost convergence", donde ya se establece su relación con la sumabilidad fuerte.

   La sumabilidad Cesàro fuerte fue considerada por Hardy y Littlewood [34] al mejorar un teorema de Fejer:
   Si $f \in L^2[0, 2\pi]$ y para algún $s \in \mathbb{R}$ se verifica $\int_0^\delta (f(t+u) + f(t-u) - 2s)^2 du = o(\delta)$ entonces la sucesión de sumas parciales de la serie de Fourier, $S_n(t)$, cumple

   $$\lim_n \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} (S_k(t) - s)^2 = 0$$

   (Szász [48] dio otra demostración de este resultado). La sumabilidad fuerte de Cesàro también interviene en Teoría Ergódica en resultados relativos a transformaciones débilmente mezcladoras (véase pág.38 de [33] , págs. 40-41 de [50] , pág 95-97 de [37]).

2. *Convergencia estadística* Schoenberg [36] demostró que toda sucesión acotada convergente según el filtro $\mathcal{F}_d$ es sumable Cesàro hacia su límite. Fast [20] ya había iniciado el estudio sistemático de la convergencia de sucesiones según el filtro $\mathcal{F}_d$. Desde entonces esta noción de convergencia recibe el nombre de convergencia estadística y ha sido considerada por diversos autores: ([20],[36],[47], [27], [8], [9], [10], [29], [11], [28], [13], [30], [46],[31], [41]. Parece que [12] es un buen 'survey' sobre este tema. Para una matriz regular no negativa A también han sido consideradas las dos nociones de convergencia asociadas al filtro $\mathcal{F}_A$ [2], [44],[33],[35], [22], [25], [10], [11], [**?**],[30]. De estos artículos, en los seis primeros sólo interviene las sucesiones convergentes a través de los conjuntos del filtro $\mathcal{F}_A$ a las que se les suele llamar 'nearly'-convergentes según la densidad d_A, o convergentes en densidad d_A. En los más recientes de estos artículos a las sucesiones convergentes según el filtro $\mathcal{F}_A$ se les llama A-estadísticamente convergentes. En particular, para el filtro $\mathcal{F}_\theta$ asociado a una sucesión lagunar θ, a las sucesiones convergentes según el filtro $\mathcal{F}_\theta$, en [30] y [31] se les llama S_θ-convergentes.

   En [10] se formulan las definiciones anteriores de modo enmascarado, sin mencionar la noción de filtro, considerando en su lugar medidas finitamente aditivas $\{0, 1\}$-valuadas. y en [11], prop. 3, Connor se entretiene en demostrar un resultado básico bien conocido: $\mathbf{x} \in \omega$ converge según un filtro si y sólo si cumple la condición de Cauchy para el filtro.

3. Para una matriz regular $A = (a_{nk})$, Cesco [3] consideró sucesiones de números complejos fuertemente A-sumables hacia x, de orden p y demostró que si $(x_n), (y_n)$ son fuertemente A-sumables hacia x, y resp. y una de las sucesiones es acotada entonces $(x_n y_n)$ es fuertemente A-sumable hacia xy. Cesco también demostró que existe una sucesión divergente fuertemente A-sumable si y sólo si existe un conjunto infinito $H \subset \mathbb{N}$ con $d_A(H) = 0$.

4. Connor [8] consideró las sucesiones fuertemente sumables Cesàro de orden $p > 0$: Sucesiones (x_n) tales que para algún $x \in \mathbb{R}$, la sucesión $|x_n - x|^p$ es sumable Cesàro hacia 0, y demostró que toda sucesión fuertemente p-sumable Cesàro es convergente según el filtro $\mathcal{F}_d$, y que el recíproco es cierto para sucesiones acotadas (y todo $p > 0$). Este resultado es una consecuencia trivial de lo que se sabía para el caso $p = 1$ y de la siguiente observación elemental: *Para cualquier filtro* $\mathcal{V} \supset \mathcal{F}$ *son equivalentes:* $\text{lím}_{\mathcal{V}} |\mathbf{y}| = 0 \Leftrightarrow \text{lím}_{\mathcal{V}} |\mathbf{y}|^p = 0$. En efecto: $\mathbf{x}$ fuertemente sumable Cesàro de orden $p > 0$ hacia $x \Leftrightarrow |\mathbf{x} - x|^p$ fuertemente sumable Cesàro hacia 0 $\Rightarrow \text{lím}_{\mathcal{F}_d} |\mathbf{x} - x|^p = 0$ $\Leftrightarrow \text{lím}_{\mathcal{F}_d} |\mathbf{x} - x| = 0$.

   Recíprocamente, si $\mathbf{x}$ es acotada $|\mathbf{x} - x|^p$ también lo es, luego $\text{lím}_{\mathcal{F}_d} |\mathbf{x} - x| = 0 \Leftrightarrow$ $\text{lím}_{\mathcal{F}_d} |\mathbf{x} - x|^p = 0 \Leftrightarrow |\mathbf{x} - x|^p$ es fuertemente sumable Cesàro hacia 0 $\Leftrightarrow \mathbf{x}$ es fuertemente sumables Cesàro de orden $p > 0$ hacia x.

5. Maddox [40] introdujo las sucesiones fuertemente sumables Cesàro respecto a un módulo (función creciente $f : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$, continua en 0, que cumple $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ y $f(x+y) \leq f(x) + f(y)$). Connor [8], [9], extendió la definición al caso de una matriz regular no negativa: $\mathbf{x} \in \omega$ es *fuertemente A-sumable hacia x, respecto al módulo f*, si

$$\text{lím}_n \sum_k a_{nk} f(|x_k - x|) = 0$$

   Connor [9] demostró i) $\Rightarrow$ ii) $\Rightarrow$ iii) y que iii) $\Rightarrow$ ii) cuando $\mathbf{x}$ es acotada:
   i) $\mathbf{x}$ es fuertemente A-sumable hacia x.
   ii) $\mathbf{x}$ es fuertemente A-sumable hacia x respecto al módulo f.
   iii) $\mathbf{x}$ es convergente hacia x según el filtro $\mathcal{F}_A$.
   También demostró que ii) implica que $\mathbf{x}$ posee una subsucesión convergente hacia x.

   Este resultado también es una consecuencia directa de lo que se sabía para el caso $p = 1$ y de una observación análoga a la que se hizo antes:
   Si f es un módulo, para cualquier filtro $\mathcal{V} \supset \mathcal{F}$ *se verifica* $\text{lím}_{\mathcal{V}} |\mathbf{y}| = 0 \Leftrightarrow \text{lím}_{\mathcal{V}} f(|\mathbf{y}|) = 0$.
   La implicación $\Rightarrow$ se sigue de la continuidad de f en 0. El recíproco $\Leftarrow$ se obtiene fácilmente razonando por reducción al absurdo: Si la afirmación $\text{lím}_{\mathcal{V}} |\mathbf{y}| = 0$ es falsa, existirá $\epsilon > 0$ tal que $E = \{n : |y_n| < \epsilon\} \notin \mathcal{V}$ luego E^c tiene intersección no vacía con cada $V \in \mathcal{V}$. de modo que para cada $V \in \mathcal{V}$ existe $n(V) \in E \cap V$ Como $|y_{n(V)}| \geq \epsilon$, en virtud de las propiedades de f, para todo $V \in \mathcal{V}$ se cumple $0 < f(\epsilon) \leq f(|y_{n(V)}|)$, luego no se verifica la hipótesis $\text{lím}_{\mathcal{V}} f(|\mathbf{y}|) = 0$.

   Reemplazando el módulo f por una función de Orlicz Φ Demirci [17] obtuvo resultados análogos que no parecen nada significativos: Para sucesiones acotadas son equivalentes la A-sumabilidad fuerte, la A-sumabilidad fuerte respecto a Φ y la convergencia según el filtro $\mathcal{F}_A$. Phelivan [43] también consideró las sucesiones fuertemente casi convergentes con respecto a una función de Orlicz y demostró que toda sucesión de este tipo es uniformemente d-convergente y que el recíproco es cierto para sucesiones acotadas (se dice que (x_n) es uniformemente d-convergente hacia 0 cuando, para cada $\epsilon > 0$ se cumple

$$\lim_n \frac{1}{n} \max_k |\{1 \leq i \leq n : |x_{i+k}| \geq \epsilon\}| = 0$$

6. Si $A : l_\infty \to l_\infty$ es un operador definido por una matriz regular no negativa se dice que $\mathbf{x} \in l_\infty$ es "almost-sumable" hacia x cuando $A(\mathbf{x})$ es casi convergente hacia $\mathbf{x}$ ([?] . Esto significa que $\mathbf{x} \in l_\infty$ es J-convergente hacia x para la familia $J = A^*(\mathcal{M}_\sigma)$.

Referencias

[1] R. C. Buck, *The measure theoretic approach to density*, Amer. J. Math. **68** (1946), 560–580. MR MR0018196 (8,255f)

[2] ______, *Generalized asymptotic density*, Amer. J. Math. **75** (1953), 335–346. MR MR0054000 (14,854f)

[3] R. P. Cesco, *On strong summability*, Univ. Nac. La Plata. Publ. Fac. Ci. Fisicomat. **1948** (1948), no. 195, Vol. 4, num. 2. Serie Segunda, 17, Revista, 170–178. MR MR0027348 (10,291f)

[4] C. Chou, *The multipliers of the space of almost convergent sequences*, Illinois J. Math. **16** (1972), 687–694. MR MR0315365 (47 #3914)

[5] C. Chou and J. P. Duran, *Multipliers for the space of almost-convergent functions on a semigroup*, Proc. Amer. Math. Soc. **39** (1973), 125–128. MR MR0315356 (47 #3905)

[6] C. S. Chun and A. R. Freedman, *A bounded consistency theorem for strong summabilities*, Internat. J. Math. & Math. Sci. **12** (1989), 39–46.

[7] C. S. Chunng and A. R. Freedman, *Theorems and examples for R-type summability methods*, J. Korean Math. Soc. **25** (1988), 315–324.

[8] J. Connor, *The statistical and strong p-Cesàro convergence of sequences*, Analysis **8** (1988), no. 1-2, 47–63. MR MR954458 (89k:40013)

[9] ______, *On strong matrix summability with respect to a modulus and statistical convergence*, Canad. Math. Bull. **32** (1989), no. 2, 194–198. MR MR1006746 (90i:40008)

[10] ______, *Two valued measures and summability*, Analysis **10** (1990), no. 4, 373–385. MR MR1085803 (91j:40001)

[11] ______, *R-type summability methods, Cauchy criteria, P-sets and statistical convergence*, Proc. Amer. Math. Soc. **115** (1992), no. 2, 319–327. MR MR1095221 (92i:40005)

[12] ———, *A topological and functional analytic approach to statistical convergence*, Analysis of divergence (Orono, ME, 1997), Appl. Numer. Harmon. Anal., Birkhäuser Boston, Boston, MA, 1999, pp. 403–413. MR MR1734462 (2001d:40001)

[13] J. Connor and J. Kline, *On statistical limit points and the consistency of statistical convergence*, J. Math. Anal. Appl. **197** (1996), no. 2, 392–399. MR MR1372186 (96m:40001)

[14] G. Das and S. K. Mishra, *A note on a theorem of Maddox on strong almost convergence*, Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. **89** (1981), no. 3, 393–396. MR MR602293 (82d:40009)

[15] ———, *Banach limits and lacunary strong almost convergence*, J. Orissa Math. Soc. **2** (1983), no. 2, 61–70. MR MR836862 (87m:40002)

[16] G. Das and B. K. Patel, *Lacunary distribution of sequences*, Indian J. Pure Appl. Math. **20** (1989), no. 1, 64–74. MR MR977401 (90d:40009)

[17] K. Demirci, *Strong A-summability and A-statistical convergence*, Indian J. Pure Appl. Math. **27** (1996), no. 6, 589–593. MR MR1390882 (97i:40001)

[18] J. P. Duran, *Infinite matrices and almost-convergence*, Math. Z. **128** (1972), 75–83. MR MR0340881 (49 #5631)

[19] ———, *Almost convergence, summability and ergodicity*, Canad. J. Math. **26** (1974), 372–387. MR MR0340886 (49 #5636)

[20] H. Fast, *Sur la convergence statistique*, Colloquium Math. **2** (1951), 241–244 (1952). MR MR0048548 (14,29c)

[21] B. Q. Feng and J. L. Li, *Some estimations of Banach limits*, J. Math. Anal. Appl. **323** (2006), no. 1, 481–496. MR 2262220 (2008b:46033)

[22] A. R. Freedman and J. J. Sember, *Densities and summability*, Pacific J. Math. **95** (1981), no. 2, 293–305. MR MR632187 (82m:10081)

[23] A. R. Freedman, J. J Sember, and Raphael, *Some Cesâ,ro-type summability spaces*, Proc. London Math. Soc. **37** (1978), 508–520.

[24] A.R. Freedman, *On the additivity theorem for n-dimensional asymtotic density*, Pacific J. Math. **49** (1973), 357–363.

[25] ———, *Generalized Limits and sequence spaces*, Bull. London Math. Soc. **13** (1981), 224–228.

[26] D.H. Fremlin, *Well-distributed sequences and Banach density (version 28.3.11)*, http://www.essex.ac.uk/maths/people/fremlin/preprints.htm (2011), 1–40.

[27] J. A. Fridy, *On statistical convergence*, Analysis **5** (1985), no. 4, 301–313. MR MR816582 (87b:40001)

[28] ———, *Statistical limit points*, Proc. Amer. Math. Soc. **118** (1993), no. 4, 1187–1192. MR MR1181163 (94e:40008)

[29] J. A. Fridy and H. I. Miller, *A matrix characterization of statistical convergence*, Analysis **11** (1991), no. 1, 59–66. MR MR1113068 (92e:40001)

[30] J. A. Fridy and C. Orhan, *Lacunary statistical convergence*, Pacific J. Math. **160** (1993), no. 1, 43–51. MR MR1227502 (94j:40014)

[31] ———, *Lacunary statistical summability*, J. Math. Anal. Appl. **173** (1993), no. 2, 497–504. MR MR1209334 (95f:40004)

[32] ———, *Statistical limit superior and limit inferior*, Proc. Amer. Math. Soc. **125** (1997), no. 12, 3625–3631. MR MR1416085 (98c:40003)

[33] P.R. Halmos, *Lectures on ergodic theory*, Chelsea, New York, 1956.

[34] G. H. Hardy and J.E. Littlewood, *Sur la serie de fourier d+une function a carré sommable*, C.R.Acad. Sci. París **156** (1913), 1307–1309.

[35] J.D. Hill and W.T. Sleed, *Approximation in bounded summability fields*, Canad. J. Math. **20** (1968), 410–415.

[36] Schoenberg I. J., *The integrability of certains functions and related summability methods*, Amer. Math. Montly **66** (1959), 361–375.

[37] U. Krengel, *Ergodic theorems*, De Gruyter Studies in Mathematics.

[38] G. G. Lorentz, *A contribution to the theory of divergent sequences*, Acta Mathematics **80** (1948), 167–190.

[39] I. J. Maddox, *A new type of convergence*, Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. **83** (1978), no. 1, 61–64. MR MR0493034 (58 #12075)

[40] ———, *Sequence spaces defined by a modulus*, Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. **100** (1986), no. 1, 161–166. MR MR838663 (87h:46024)

[41] H. I. Miller, *A measure theoretical subsequence characterization of statistical convergence*, Trans Amer. Math. Soc. **347** (1995), 1811–1819.

[42] M. Mursaleen and Osama H. H. Edely, *Generalized statistical convergence*, Infotrm. Sci (2004), no. 162, 287–294.

[43] S. Pehlivan, *On strong almost convergence and uniform statistical convergence*, Acta Comment. Univ. Tartu. Math. (1998), no. 2, 19–22. MR MR1714732 (2000h:40010)

[44] R. A. Raimi, *Convergence, density, and τ-density of bounded sequences*, Proc. Amer. Math. Soc. **14** (1963), 708–712.

[45] ———, *Factotrization of summability preserving generalized limits*, J. London Math. Soc. **22** (1980), 398–402.

[46] D. Rath and B.C. Tripathy, *On statistical convergent and statistical Cauchy sequences*, Indian J. Pure Appl. Math. **25** (1994), 381–386.

[47] T. Salát, *On statistically convergent sequences of reals numbers (en ruso)*, Math. Slovaca **30** (1980), 139–150.

[48] O. Szász, *On strong summability of fourier series*, Trans. Amer. Math. Soc. **48** (1940), 117–125.

[49] G. Vera, *Límites generalizados de Banach*, http://webs.um.es/gvb (2012).

[50] P. Walters, *Ergodic theory - introductory lectures*, Lecture Notes in Math, no. 458, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg; New Yorx, 1975.