Apellidos…………………………………. Nombre……………………

Se valorará PRIORITARIAMENTE el planteamiento, su expresión verbal y matemática del mismo y el análisis de los resultados.

(2 puntos)
1.- ¿Porqué en Física nos aparecen tantas ecuaciones diferenciales? Haz algún comentario pertinente
Solución:

El objetivo de la Física es describir la naturaleza de un modo que podamos predecir su comportamiento y modificarlo, en una gran mayoría de los fenómenos de la naturaleza aparecen variaciones, por ejemplo definimos velocidad como la variación del espacio por unidad de tiempo, el modo de expresar la variación en matemáticas es mediante la derivada que se define:

$$\frac{d\ y(x)}{d\ x} = \lim_{\nabla x \to 0} \frac{\nabla y}{\nabla x} \qquad \text{donde} \qquad \nabla y = y\,(x + \nabla x) - y\,(x)$$

una ley importante en la que utilizamos las derivadas, y por lo tanto tendremos una ecuación diferencial es la ecuación fundamental del movimiento:

$$\vec{F} = m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$$

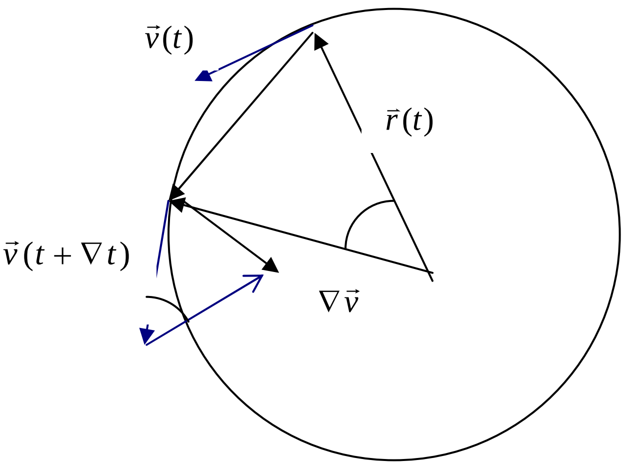
(2 puntos)
1.- ¿Puede haber aceleración sin que haya variación del módulo de la velocidad? Explícalo con un ejemplo.
Solución:
La aceleración la definimos como la variación del vector velocidad respecto al tiempo:

$$\vec{a} = \frac{d\ \vec{v}(t)}{d\ t}$$

puede ser que el vector velocidad varíe en dirección pero no en módulo, por ejemplo en el caso de un movimiento circular en el que no se modifique el módulo de la velocidad

En el dibujo se representa el vector velocidad en dos instantes de tiempo, para obtener la velocidad calculamos la variación del vector velocidad $\nabla\ \vec{v}$

$$\nabla\ \vec{v} = \vec{v}\ (t + \nabla\ t\ ) - \vec{v}\ (t)$$

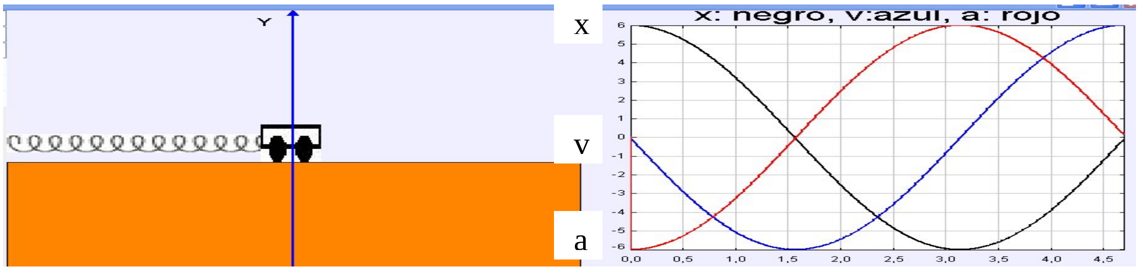


observamos que podemos obtener el valor del módulo de este vector por consideraciones trigonométricas, dado que los dos triángulos que se muestran en la figura son semejantes podemos escribir:

$$\frac{|\Delta \mathbf{v}|}{|\mathbf{v}|} = \frac{|\Delta \mathbf{r}|}{|\mathbf{r}|} \qquad \textit{dividiendo ambos miembros por } \Delta t \qquad \frac{|\Delta \mathbf{v}|}{\Delta t} = \frac{|\Delta \mathbf{r}|}{\Delta t}\ \frac{|\mathbf{v}|}{r}$$

El primer miembro de la igualdad es el módulo de la variación del vector velocidad dividido por el intervalo de tiempo en el que se ha producido dicha variación, es decir, es la aceleración, $a_c = v^2/r$
(3 puntos)

3.- Un carrito se encuentra sujeto a un muelle de constante *k* como se muestra en la figura, en un momento dado, *t = 0,* se deja libre, a partir de ese instante se ha representado el desplazamiento en negro, la velocidad en azul y la aceleración en rojo.



a) ¿Cuales fueron las condiciones iniciales? Posición y velocidad en *t = 0*. Comenta tu contestación.
b) Cuales serán las expresiones matemáticas para las tres curvas? Comenta tu contestación.
c) ¿En qué situación se encuentra el carrito en el momento mostrado en la figura? Comenta tu contestación.

Solución
a) El desplazamiento comienza en +6 y va disminuyendo hasta el valor -6, para t = 0 el muelle se encontraba en su máximo desplazamiento por lo tanto la fuerza sobre el carrito esra máxima y en sentido negativo como se aprecia por el valor de la aceleración en este punto inicial, la velocidad era cero.

b) Las tres curvas son funciones armónicas que podremos representar por funciones seno o coseno, en el instante inicial t es cero por lo que para representar el desplazamiento necesitamos una función matemática que sea máxima para argumento cero, esta puede ser el coseno:

$x = A \cos(\omega t)$

La velocidad comienza en cero y su valor es negativo hasta alcanzar un mínimo, la función que nos representará bien esta curva será:

$v = -B \,\mathrm{sen}(\omega t)$

por último la aceleración es una función armónica que comienza con un valor mínimo negativo, una función matemática que nos describe bien este comportamiento sería

$a = -C \cos(\omega t)$

partiendo de la expresión para el desplazamiento llegaríamos a similares expresiones para la velocidad y la aceleración aplicando las definiciones:

$$v = \frac{d\, x(t)}{d\, t} = -A\,\omega\, sen(\omega * t)$$

$$a = \frac{d\, v(t)}{d\, t} = -A\,\omega^2 \cos(\omega * t)$$

c) En el momento representado en la figura el carrito se encuentra en la posición de equilibrio, no hay fuerza sobre el, como la posición es cero, viene de valores negativos, es decir viene de la parte izquierda, el muelle está estirándose.

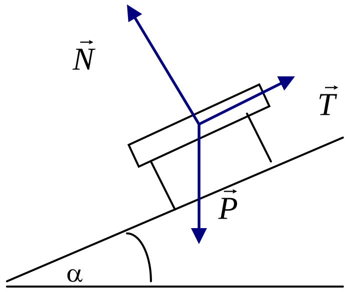
(3 puntos)

4.- Para cargar un piano, cuya masa es *m*., en la caja de un camión, se utiliza un plano que forma un ángulo α con la horizontal. El piano es izado por medio de una cuerda deslizando por el plano. En un instante de descanso, el piano está parado en una posición intermedia.

a) dibujar el diagrama de fuerzas aplicadas sobre el piano en este momento
b) calcular la tensión de la cuerda.

Aplicación numérica: m = 300 kg; m; α = 45º

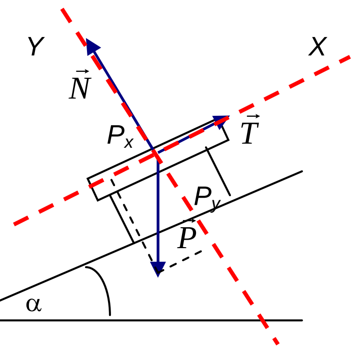
Solución:



a) Sobre el piano actúan tres fuerzas, el peso, la reacción del plano inclinado que llamaremos normal, y la tensión de la cuerda. Elegimos un punto que consideramos el centro de gravedad del piano como punto de aplicación de las fuerzas.

b) Para calcular la tensión de la cuerda tenemos en cuenta el dato que nos dan, el piano se encuentra en reposo, eso significa que la resultante de las tres fuerzas debe ser cero:

$$\vec{P} + \vec{N} + \vec{T} = 0$$



Para operar en esta ecuación, lo más sencillo en este caso es establecer unos ejes de coordenadas que tomamos arbitrariamente dado que la expresión vectorial se cumple para cualquiera de ellos tomaremos el que nos de unas ecuaciones más sencillas, tomamos el eje X paralelo al plano inclinado y el eje Y perpendicular al mismo, escribimos ahora las igualdades de las componentes X y de las componentes Y de la ecuación vectorial:

Componentes X $P_x + N_x + T_x \rightarrow - m\, g\, sen(\alpha) + 0 + T = 0$

Dado que las componentes las obtenemos trazando la perpendicular desde el extremo del vector a los ejes respectivos. En el triángulo rectángulo que forman el vector peso y sus componentes la componente x es un cateto que será igual a la hipotenusa por el seno del ángulo opuesto al cateto, su signo será negativo ya que por convenio elegimos signo negativo para las componentes hacia la izquierda, la componente x de la normal es cero y la correspondiente a la tensión coincide con el módulo del vector tensión. Análogamente podemos escribir:

Componentes Y $P_y + N_y + T_y \rightarrow - m\, g\, cos(\alpha) + N + 0 = 0$

De la primera ecuación obtenemos T:

$$T = m\, g\, sen\,(\alpha) = 300 \text{ kg} * 9.8 \text{ m/s}^2 * \text{sen } (45º) = 2\,078 \text{ N}$$