II - MOVIMIENTO: TAREAS - resueltas

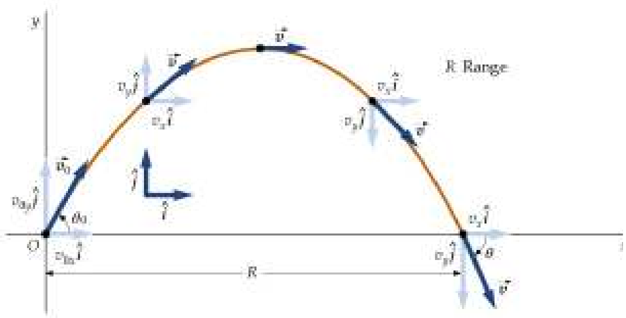
Movimiento en dos dimensiones en la superficie de la tierra.

II.1 – En los campeonatos mundiales de lanzamiento de huesos de olivas de 2005 celebrados en Cieza, Juanjo Rebolledo realizó su mejor lanzamiento posible con un alcance horizontal de 16.5 m, determina la velocidad del hueso en el punto más alto de su trayectoria.

Solución:

El hueso estará sometido durante todo el movimiento a la fuerza de la Tierra y por tanto tendrá la aceleración de la gravedad, $\vec{g}$, que sólo tiene componente según el eje vertical que identificamos como eje y.

El movimiento según el eje X será un movimiento con velocidad constante ya que no hay aceleración en este eje, y el movimiento según el eje Y será un movimiento uniformemente acelerado:



En la imagen se muestra el vector velocidad y sus componentes.

Las expresiones de la cinemática que relacionan los parámetros que intervienen en el movimiento, velocidad, desplazamiento, aceleración, tiempo, aplicadas a este caso nos dan:

$x = v_0 \cos(\theta_0)* t$

$y = v_0 \operatorname{sen}(\theta_0)* t - g * t^2/2$

$v_y = v_0 \operatorname{sen}(\theta_0) - g * t$

si no tenemos en cuenta rozamientos, en el punto de máxima altura la componente y de la velocidad, v_y , es cero y el tiempo en ese momento, que llamaremos $t_{1/2}$, es la mitad del tiempo total.

$$0 = v_0 \operatorname{sen}(\theta_0) - g * t_{1/2}$$

el alcance lo podemos escribir:

$$x = v_0 \cos(\theta_0)*2*t_{1/2} = v_0 \cos(\theta_0)*2* v_0 \operatorname{sen}(\theta_0) / g = v_0^2 \operatorname{sen}(2\,\theta_0) / g$$

Desconocemos el módulo de la velocidad inicial y el ángulo de inclinación, si conociésemos el ángulo que formaba el vector velocidad en el momento del lanzamiento podríamos conocer el módulo de la velocidad con que el hueso salió. Para que el alcance sea máximo el ángulo inicial debe ser $\theta_0 = 45º$

$v_0^2 = x_{max} *g/ \operatorname{sen}(2*\theta_0) = 16.5\ m*9.8\ ms^{-2} = 161.7\ m^2\ s^{-2}$

$v_0 = 12.7\ m/s = 12.7\ Km/1000\ *3600/h = 12.7 * 3.6\ Km/h = 45.7\ Km/h$

La velocidad en el instante intermedio será la componente x de la velocidad que no varía en toda la trayectoria:

$$V_x = v_0 \cos(\theta_0) = 45.7 * \cos(45º) = 45.7 / \sqrt{2} = 32.3\ km/h$$

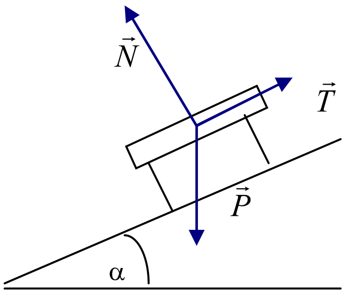
Movimiento en un plano inclinado. ***F*** *= m* ***a***

II.2 - Para cargar un piano, cuya masa es 220 kg, en la caja de un camión que está a 1,20 m del suelo, se utiliza un plano inclinado de 30º de inclinación. El piano es izado por medio de una cuerda deslizando por el plano. En un instante de descanso, el piano está parado en una posición intermedia,

a) Dibujar el diagrama de fuerzas aplicadas sobre el piano en este momento y calcular la tensión de la cuerda.
b) Si se rompiera la cuerda en la parte superior del plano, calcular el tiempo que tardaría en llegar al suelo y la velocidad en el momento de llegar, suponiendo que el piano deslizara sin rozamiento.

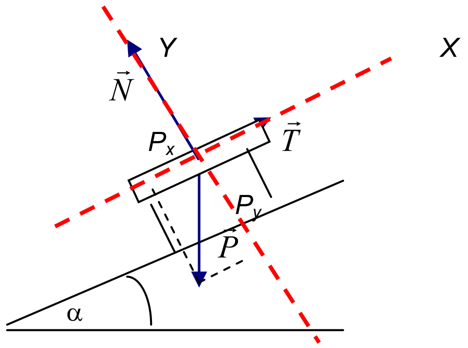
Solución:

a) Sobre el piano actúan tres fuerzas, el peso, la reacción del plano inclinado que llamaremos normal, y la tensión de la cuerda. Elegimos un punto que consideramos el centro de gravedad del piano como punto de aplicación de las fuerzas.



Para calcular la tensión de la cuerda tenemos en cuenta el dato que nos dan, el piano se encuentra en reposo, eso significa que la resultante de las tres fuerzas debe ser cero:

$$\vec{P}+\vec{N}+\vec{T}=0$$



Para operar en esta ecuación, lo más sencillo en este caso es establecer unos ejes de coordenadas que tomamos arbitrariamente dado que la expresión vectorial se cumple para cualquiera de ellos tomaremos el que nos de unas ecuaciones más sencillas, tomamos el eje X paralelo al plano inclinado y el eje Y perpendicular al mismo, escribimos ahora las igualdades de las componentes X y de las componentes Y de la ecuación vectorial:

Componentes X $P_x + N_x + T_x$ → $- m\, g\, sen(\alpha) + 0 + T = 0$

Dado que las componentes las obtenemos trazando la perpendicular desde el extremo del vector a los ejes respectivos. En el triángulo rectángulo que forman el vector peso y sus componentes la componente x es un cateto que será igual a la hipotenusa por el seno del ángulo opuesto al cateto, su signo será negativo ya que por convenio elegimos signo negativo para las componentes hacia la izquierda, la componente x de la normal es cero y la correspondiente a la tensión coincide con el módulo del vector tensión. Análogamente podemos escribir:

Componentes Y $P_y + N_y + T_y$ → $- m\, g\, cos(\alpha) + N + 0 = 0$

De la primera ecuación obtenemos T:

$$T = m\, g\, sen\,(\alpha) = 220\ kg * 9.8\ m/s^2 * sen\,(45º) = 1\ 524\ N$$

b) Si se rompe la cuerda la fuerza neta que actuaría sobre el piano sería la componente X del peso que coincide con el valor de la tensión calculada en el apartado anterior lo que producirá una aceleración constante a = 1 524 N /

Movimiento circular.

II.3 – La rueda de un coche gira con una velocidad angular de 600 rpm, el radio de dicha rueda es de 55 cm. ¿A qué velocidad circula el coche?

$$2 \times \pi \times 55 \times 60 = 207\ 345.1 \text{ cm/minuto} = 2.07 \text{ km/minuto} = 124 \text{ km/h}$$

Fuerza centrípeta.

II.4 – Un coche viaja a 90 km/h por una curva de radio 120 m. ¿Cuál es el valor mínimo del coeficiente de rozamiento estático entre los neumáticos y la carretera para evitar que el coche derrape?

Solución:

El valor mínimo del coeficiente de rozamiento se corresponderá con aquel que hace que la fuerza de rozamiento sea igual a la centrípeta.

$$m\, g\, \mu = m\, v^2 /R \quad \Rightarrow \quad \mu = (90/3.6)^2 */(120*9.8) = 0.53$$

II.5 – Demostrar que la velocidad máxima v a que un coche puede recorrer una curva de radio r sin derrapar es

$$v = (\mu\, r\, g)^{1/2}$$

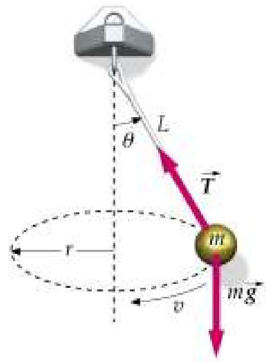
donde μ es el coeficiente de rozamiento estático entre los neumáticos y la carretera.

Solución:

$$m\, g\, \mu = m\, v^2 /r \quad \Rightarrow \quad v = (\mu\, r\, g)^{1/2}$$

II.6 – Una masa sujeta por una cuerda de longitud L gira siguiendo una circunferencia de radio r como se muestra en la figura, obtener una expresión para la velocidad v.

Aplicación numérica: L = 1 m; θ = 30º



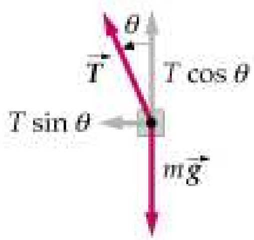
Solución:

Los pasos a seguir para abordar el problema son los siguientes:

1) Identificación del problema:

Se trata de un movimiento circular y por lo tanto acelerado.

2) Teoría Física aplicable:



La teoría que nos permite abordar las situaciones de movimientos acelerados es la dinámica newtoniana cuya expresión fundamental es $\sum \vec{F} = m\,\vec{a}$, la resultante de las fuerzas que actúan sobre un cuerpo de masa m es igual a la masa de dicho cuerpo por la aceleración que le comunica, esta expresión es vectorial, lo cual indica que es equivalente a escribir tres igualdades:

componentes x del primer miembro = componentes x del segundo miembro
componentes y del primer miembro = componentes y del segundo miembro
componentes z del primer miembro = componentes z del segundo miembro

3) Aplicación de la teoría a nuestro caso:

Las fuerzas que actúan son el peso y la tensión de la cuerda

$$\vec{P} + \vec{T} = m\,\vec{a}$$

4) Resolución del problema matemático.

Nuestro problema físico queda así planteado, ahora tenemos un problema matemático, como se indicó previamente, escribiremos una igualdad por cada componente, para ello necesitamos unos ejes de coordenadas, tenemos absoluta libertad para elegirlos por lo que elegiremos aquellos que nos produzcan unas ecuaciones más sencillas, elegimos el eje X horizontal y el eje Y vertical.

Componentes eje X: $T\ sen\ \theta = m\ v^2 / r$

Componentes eje Y: $T\ cos\ \theta = m\ g \rightarrow T = m\ g / cos\ \theta$

Sustituimos el valor de T en la primera ecuación $m\ g\ tg\ \theta = m\ v^2 / r$

Y despejamos la velocidad: $v = (g\ r\ tg\ \theta)^{1/2} = (g\ L\ sen\ \theta\ tg\ \theta)^{1/2}$

5) Interpretación de los resultados:

La velocidad de giro depende de la longitud de la cuerda y el ángulo que forme esta con la vertical además de la aceleración de la gravedad.

6) Aplicación numérica:

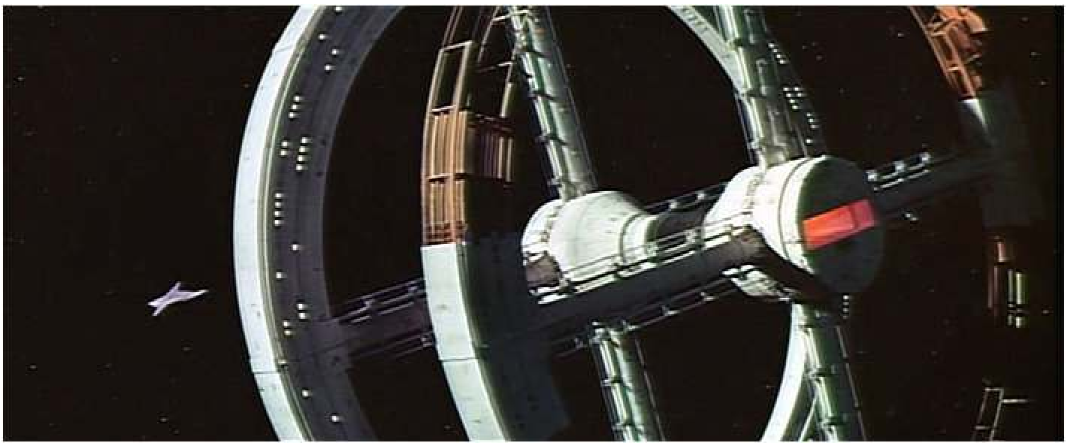
$$v = (9.8\ m/s^2 1\ m\ sen(30º)\ tg(30º))^{1/2} = 2.83\ m/s$$

Equivalencia sistema acelerado – campo gravitatorio

II.7 – Una centrifugadora de 0.20 m de diámetro gira a 5000 rpm

a) ¿Cuál es la velocidad de un punto del borde exterior de la centrifugadora?
b) ¿Cuál es la aceleración centrípeta del punto en cuestión?
c) ¿Cuantos *g* representa la aceleración del anterior apartado?

II.8 – En la película "Odiesea en el espacio 2001" se recrean las condiciones de gravedad de la Tierra en la Estación Espacial construyéndola en forma de rueda que gira, si el diámetro de la rueda es de 300 m, qué velocidad angular debe llevar para conseguir una "gravedad" similar a la de la superficie de la Tierra. Dibujar un esquema con alguno de los habitantes de dicha Estación Espacial que muestre cómo se encontrarían en su interior.



Caída hacia la Tierra

II.9 – Nos subimos a un monte, supongamos que eliminamos la atmósfera para evitar rozamientos, lanzamos una piedra horizontalmente con tal velocidad que la curvatura de caída de la piedra coincide con la curvatura de la Tierra, sabiendo que estamos a 6400 km del centro de la tierra ¿cuándo sería conveniente agacharse?

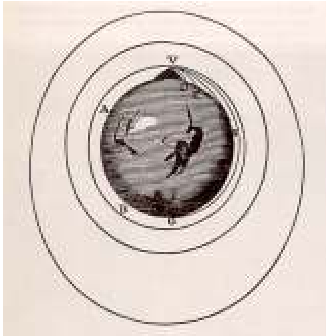


Imagen tomada del PSSC

$$mg = m\, v^2 / R_T$$

$$v = (9.8 * 3.6*3600 * 6400)^{1/2} = 812851200^{1/2} = 28510 \text{ km/h}$$

$$t = 2*3.1416*6400/28510 = 1.41 \text{ h}$$

II.10 – La Luna recorre una órbita aproximadamente circular de 3.8×10^8 m de radio alrededor de la Tierra, completando una revolución cada 27.3 días, cuánto vale

a) la velocidad orbital
b) la aceleración de caida hacia la Tierra
c) comparar esta aceleración con la de caida en la superficie de la Tierra.

Solución:

a) La velocidad se define como el espacio recorrido dividido por el tiempo que tarda en recorrerlo, en el caso de la Luna en 27.3 días recorre una circunferencia cuya longitud es $2*\pi*R_L$,si expresamos la longitud en kilómetros y el tiempo en horas la velocidad valdrá:

$$v = 2*3.1416*3.8*10^5 /(27.3*24) = 3644 \text{ km/h}$$

b) Decimos que la Luna "cae" hacia la Tierra porque si esta no estuviese, y por lo tanto no existirían fuerzas sobre la Luna, la Luna continuaría en un camino rectilíneo.

$$a = v^2 /R = 3644^2 / 3.8*10^5 = 34.9 \text{ km/h}^2 = 34.9 * 1000/3600^2 = 0.0027 \text{ m/s}^2$$

c) La aceleración de caída libre en la superficie de la Tierra vale $g = 9.8$ m/s^2 la relación entre ambas aceleraciones será:

$$9.8/0.0027 = 3629.6$$

La aceleración con que la Luna "cae" hacia la Tierra es unas 3 630 veces inferior que la acleración de caída en la superficie de la Tierra, esto tiene que ver con cómo varía con la distancia la fuerza con que la Tierra atrae a los cuerpos.

Relación de los cuadrados del radio de la órbita de la luna y el radio de la tierra:

$$(380\,000 / 6\,400)^2 = 3525.4$$

Es una relación similar a la de las aceleraciones, la fuerza con que la Tierra atrae a los cuerpos es inversamente proporcional al cuadrado de la distancia de esos cuerpos al centro de la Tierra.

II.11 – Teniendo en cuenta los resultados del problema anterior ¿Cómo varía la aceleración de caída hacia la tierra con la distancia al centro de la misma?

Solución:

Multiplicamos la aceleración de caída por el cuadrado del radio en cada caso, de la Luna:

$$34.9 * (3.8*10^5)^2 = 5.0*10^{12}$$

En la tierra $9.8 * 3.6*3600 = 127\,008 \text{ km/h}^2$

$$127\,008 * 6400^2 = 5.2 *10^{12}$$

Las aceleraciones de caída son inversamente proporcionales al cuadrado de las disancias al centro de la Tierra.

Muelle

II.12 – Una bola de masa 10 Kg se deja sobre un muelle de longitud 1 m y constante 2 N/m

a) ¿cuál será la posición de equilibrio?

b) ¿cuál será la compresión máxima?

c) ¿cuál será la frecuencia del movimiento?