PRÁCTICA 0

CONCEPTOS BÁSICOS DE MEDIDA Y ANÁLISIS DE ERRORES

Objetivos

Adquirir una serie de conocimientos básicos sobre la medida de cantidades físicas y la evaluación de su incertidumbre, atendiendo a los siguientes aspectos:

- Determinación de errores absolutos y relativos, y su propagación en medidas indirectas
- Expresión correcta de los resultados de las medidas
- Tratamiento estadístico de errores aleatorios
- Representación gráfica de los resultados experimentales de acuerdo a las normas establecidas
- Utilización del método de mínimos cuadrados para ajustar una recta los datos experimentales cuando la relación entre las variables es de tipo lineal

Introducción

Una *magnitud física* es una propiedad de un cuerpo, un fenómeno o una sustancia que se puede medir. Tal es el caso de la longitud, el tiempo, la resistencia eléctrica, etc. Denominamos *cantidad física* al valor de cierta magnitud física de un objeto específico, por ejemplo, el diámetro de una moneda.

La *medida* es el proceso de determinar el valor de una cantidad física experimentalmente; para ello necesitamos un *instrumento de medida* y un *procedimiento*. El resultado de la medida se expresa mediante un *valor numérico* y una *unidad de medida*.

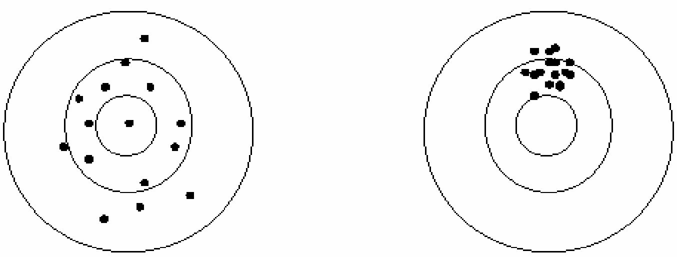
Por ejemplo, para medir el diámetro de una moneda (cantidad física) podemos utilizar una regla dividida en milímetros (instrumento) cuya escala compararemos con la longitud a medir (procedimiento). El resultado de la medida será cierto número (valor numérico) de milímetros (unidad de longitud).

Fuentes de error

La experiencia demuestra que ninguna magnitud física puede medirse con absoluta certeza. En ciencias e ingeniería, la incertidumbre en la determinación del resultado de una medida se denomina ***error***. Las fuentes de error tienen orígenes diversos:

Errores ligados al instrumento de medida: Llamamos *precisión* de un aparato de medida a la variación mínima de la magnitud que puede detectar. Por ejemplo, para una regla dividida en milímetros, la precisión sería de 1mm. Debido al instrumento de medida, debemos considerar dos fuentes de incertidumbre: el *error de apreciación* que puede ser mayor o menor que la precisión del aparato, dependiendo de la habilidad del observador, y el *error de exactitud* ligado a la calidad de la calibración del mismo con relación a patrones fiables.

En la figura se muestra de forma esquemática los conceptos de precisión y exactitud. El centro de la diana representa la posición del "verdadero valor" de una medida, y los puntos los resultados de dos estimaciones de la medida. Casos: a) Medida poco precisa pero exacta. b) Medida muy precisa pero poco exacta



a) b)

<u>En relación con su tratamiento</u>, los diversos tipos de errores suelen clasificarse en dos grandes categorías:

Errores accidentales: Son aquellos que se producen al azar y pueden cometerse con igual probabilidad tanto por exceso como por defecto. Por su propia naturaleza, pueden reducirse considerablemente realizando medidas repetidas y aplicando métodos estadísticos.

Errores sistemáticos: En contraposición con los accidentales, son aquellos que siempre afectan al resultado de la medida en un mismo sentido. Para detectar y corregir estos errores, es necesario realizar un análisis crítico y cuidadoso de los instrumentos y procedimientos empleados.

Error absoluto y error relativo

En consecuencia, estas limitaciones impiden que podamos determinar con certeza el valor de una magnitud, *m*. Sólo podemos establecer un rango de valores dentro del cual puede estar contenido, con cierta probabilidad, el valor buscado:

$$\bar{m} - \Delta m \leq m \leq \bar{m} + \Delta m$$

donde <u>$\bar{m}$ es la mejor estimación de la cantidad física medida</u> y Δm **la *incertidumbre* o *error absoluto*** estimado de dicha medida.

La incertidumbre o ***error relativo*** nos informa de la importancia del error absoluto en relación con el valor medido:

$$\boxed{\varepsilon_r = \frac{\Delta m}{\bar{m}}}$$

se suele expresar en tanto por ciento y es más descriptiva de la calidad de la medida que el error absoluto.

Por ejemplo, un error de 1cm en la medida de 1m, supone un error relativo del 1%; el mismo error absoluto en la medida de 10m es de menor importancia, como se refleja en que el error relativo es ahora del 0.1%.

En conclusión, el <u>resultado de la medida de una magnitud *m* se expresa de la forma</u>

$$\boxed{m = \bar{m} \pm \Delta m}$$

Cifras significativas

El número de dígitos de $\bar{m}$ y Δm debe ser coherente con la incertidumbre estimada, es lo que se conoce como ***cifras significativas***. Si medimos el periodo de oscilación de un péndulo, sería absurdo expresar la incertidumbre de la medida de la forma

$$\Delta t = 0.03478 \text{ s}$$

No tiene sentido considerar cienmilésimas de segundo si ya existe incertidumbre en las centésimas. Como regla general:

Las incertidumbres o errores se expresan con <u>una sola cifra significativa</u>, salvo que esta sea la unidad, en cuyo caso se admite la utilización de dos cifras significativas.

La cantidad se redondea aumentándola en una unidad si la cifra suprimida es igual o mayor que cinco.

Una vez estimado adecuadamente el error, en el ejemplo propuesto sería Δt = 0.03s, debemos considerar las cifras significativas del valor de la medida. Sería absurdo expresar la medida del periodo de oscilación del citado péndulo de la forma

$$2.3641 \pm 0.03 \text{ s}$$

La incertidumbre de 0.03 significa que el digito 6 de la medida puede valer entre 3 y 9. Por tanto, los siguientes dígitos, 4 y 1, son no significativos y deben redondearse. La expresión correcta del resultado del ejemplo sería

$$2.36 \pm 0.03\ s$$

La regla general establece que:

La última cifra significativa del resultado de una medida debe ser del mismo orden de magnitud (misma posición decimal) que la incertidumbre o error.

En el ejemplo hemos expresado el resultado de la medida con tres cifras significativas, de las cuales, el primer dígito (2) es el más significativo, y el último (6) el menos, ya que es el más afectado por el error.

Finalmente recordemos que el error de una medida tiene las mismas dimensiones que la propia medida. Por tanto, resulta más simple y más claro expresarlos en las mismas unidades, escritas una sola vez, a continuación de la medida y su error. Por la misma razón, si una medida es tan grande o tan pequeña que resulta conveniente utilizar la notación científica (el uso de la forma $5 \cdot 10^{-4}$ en lugar de 0.0005), el error también debe expresarse en la misma forma. Por ejemplo:

$$\textit{voltaje medido} = 5.36\ mV \pm 2 \cdot 10^{-5}\ V$$

es mucho más fácil de entender y leer de la forma

$$\textit{voltaje medido} = (5.36 \pm 0.02) \cdot 10^{-3}\ V, \textit{ o bien } (5.36 \pm 0.02)\ mV$$

Veamos algunos ejemplos:

Números incorrectos	Números correctos
585842 ± 2118	$586000 \pm 2000 = (586 \pm 2) \cdot 10^{3}$
0.35 ± 2	0 ± 2
$(6.99 \pm 0.57) \cdot 10^{-6}$	$(7.0 \pm 0.6) \cdot 10^{-6}$
0.001722 ± 0.000312	$0.0017 \pm 0.0003 = (1.7 \pm 0.3) \cdot 10^{-3}$
$(8.5673 \pm 0.157) \cdot 10^{-4}$	$(8.57 \pm 0.16) \cdot 10^{-4}$
23.5 ± 0.0042	$23.500 \pm 0.004 = (23500 \pm 4)\ 10^{-3}$

Tratamiento estadístico de los errores accidentales

Supongamos que necesitamos medir cierta cantidad x. Previamente debemos identificar y minimizar en lo posible los errores sistemáticos mediante un adecuado conocimiento de los fundamentos teóricos y de la instrumentación a utilizar. De esta forma, los errores restantes serán de tipo aleatorio y podemos detectarlos repitiendo la medida varias veces.

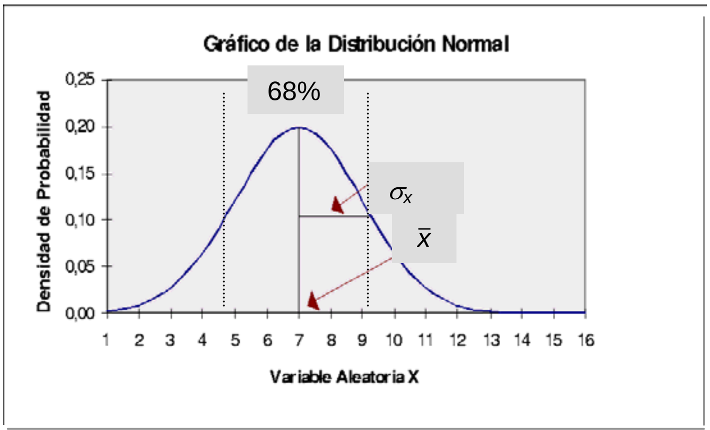
Sea N el número de medidas de la misma cantidad x, con resultados $x_1, x_2, \ldots, x_i, \ldots, x_N$. Se demuestra que bajo condiciones habituales, la mejor estimación o valor más probable de x viene dado por la ***media*** de estos valores:

$$\boxed{\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{N} x_i}{N}}$$

Puesto que $\bar{x}$ es nuestra mejor estimación de la cantidad x, la diferencia $x_i - \bar{x}$, llamada *desviación* de x_i, nos informa de cuanto difiere la medida x_i de $\bar{x}$. Si las desviaciones son pequeñas, nuestras medidas están muy próximas y presumiblemente son muy precisas. La incertidumbre media de las medidas individuales $x_1, x_2, \ldots, x_i, \ldots, x_N$, se obtiene calculando el promedio de las desviaciones denominada ***desviación estándar o desviación cuadrática media***

$$\sigma_x = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N}(x_i - \overline{x})^2}{N-1}}$$

y <u>es una medida de la dispersión de los datos alrededor de la media</u>. Si las medidas se realizan adecuadamente, los resultados estarán distribuidos alrededor del valor medio según una curva denominada normal o gaussiana. Se demuestra que aproximadamente el 68% de las medidas se encuentran dentro de rango de valores $\overline{x} \pm \sigma_x$



Se demuestra que el <u>error estadístico asociado a la *media*</u> en el proceso de medir la magnitud N veces, viene dada por

$$\sigma_{\overline{x}} = \frac{\sigma_x}{\sqrt{N}}$$

y se denominada ***desviación estándar de la media o error cuadrático medio***. De modo que la respuesta final al valor de *x* es

$$\text{valor de } x = \overline{x} \pm \sigma_{\overline{x}}$$

En cuanto al número óptimo de medidas, es evidente que el error de la media disminuye al aumentar N. Sin embargo, desde el punto de vista físico, sólo tiene sentido que éste disminuya hasta hacerse igual o del orden del error de apreciación de las medidas. Si resultara menor, se debe tomar como error este último. Evidentemente, si medimos con una regla dividida en milímetros, sería absurdo llegar a apreciar micrómetros a base de aumentar el número de medidas.

Medidas indirectas: propagación de errores

En muchas ocasiones, las magnitudes físicas no se miden directamente mediante un instrumento de medida, sino que se calculan, mediante expresiones matemáticas, a partir de otras magnitudes medidas directamente. Por ejemplo, la superficie de una moneda puede determinarse indirectamente a partir de su diámetro, medido directamente con una regla, y la expresión matemática para la superficie de un círculo.

Conocidas las incertidumbres de las magnitudes medidas directamente, se trata de determinar cómo se propagan estas incertidumbres a través de los cálculos matemáticos para producir el error del resultado final. Siguiendo con el ejemplo anterior de la moneda, si el error en la medida del diámetro es de 1mm, ¿cuál será error resultante para la superficie calculada de la moneda?

Sea la magnitud indirecta $q = q(x, y, ..., w)$ una función de varias cantidades medidas directamente, $x, y, ..., w$, con incertidumbres estimadas $\Delta x, \Delta y, ..., \Delta w$. La incertidumbre con que viene afectado el valor calculado q, se determina mediante alguno de los métodos siguientes:

- Método general: Consiste en hacer un desarrollo en derivadas parciales, tomando como variable dependiente la magnitud desconocida *q* y como variables independientes el resto de las magnitudes que aparecen en la expresión, *x, y, ..., w*.

$$dq = \frac{\partial q}{\partial x}dx + \frac{\partial q}{\partial y}dy + ... + \frac{\partial q}{\partial w}dw$$

A continuación asimilamos los diferenciales a los errores absolutos de cada magnitud, $dq=\Delta q$, $dx=\Delta x$, $dy=\Delta y$, ..., $dw=\Delta w$, y, para evitar evaluar el error por defecto, sustituimos las derivadas parciales por sus valores absolutos, quedando finalmente:

$$\boxed{\Delta q = \left|\frac{\partial q}{\partial x}\right|\Delta x + \left|\frac{\partial q}{\partial y}\right|\Delta y + ... + \left|\frac{\partial q}{\partial w}\right|\Delta w}$$

Ejemplo: Sea $q = 5xy+(x+y+z)^2$

$$dq = [5y + 2(x+y+z)]\, dx + [5x + 2(x+y+z)]\, dy + 2(x+y+z)\, dz$$

por tanto

$$\Delta q =[5y + 2(x+y+z)]\, \Delta x + [5x + 2(x+y+z)]\, \Delta y + 2(x+y+z)\, \Delta z$$

Este método suele ser complejo, por lo que no resulta práctico, siendo aconsejable usar el que se indica a continuación.

- Método de la derivada logarítmica

a) Fórmula monomia: Si $q = q(x, y, ..., w)$ es una función con un solo término, se aplican logaritmos neperianos a ambos miembros de la igualdad y luego se diferencian. Como en el método anterior, asimilamos los diferenciales a los errores absolutos de las magnitudes y transformamos todos los signos en positivos para evitar evaluar el error por defecto.

Ejemplo: Sea $q = x^2/yz$

$$\ln q = 2\ln x - \ln y - \ln z$$

Diferenciando obtenemos

$$\frac{dq}{q} = 2\frac{dx}{x} - \frac{dy}{y} - \frac{dz}{z}$$

por tanto

$$\frac{\Delta q}{q} = 2\frac{\Delta x}{x} + \frac{\Delta y}{y} + \frac{\Delta z}{z}$$

El error absoluto de la magnitud indirecta será pues

$$\Delta q = q\left(2\frac{\Delta x}{x} + \frac{\Delta y}{y} + \frac{\Delta z}{z}\right)$$

b) Fórmula polinómica: Si $q = q(x, y, ..., w)$ es una función con varios términos q_1, q_2, ..., q_n, se calcula el error absoluto de cada monomio por el método anterior y se suma de todos ellos

$$\Delta q = \Delta q_1 + \Delta q_2 + ... + \Delta q_n$$

Ejemplo: Sea $q = 5xy + x^2/yz$. Llamamos $q_1 = 5xy$ y $q_2 = x^2/yz$

$$\begin{cases} \ln q_1 = \ln 5 + \ln x + \ln y \Rightarrow \dfrac{\Delta q_1}{q_1} = \dfrac{\Delta x}{x} + \dfrac{\Delta y}{y} \\ \\ \ln q_2 = 2\ln x - \ln y - \ln z \Rightarrow \dfrac{\Delta q_2}{q_2} = 2\dfrac{\Delta x}{x} + \dfrac{\Delta y}{y} + \dfrac{\Delta z}{z} \end{cases}$$

finalmente

$$\Delta q = \Delta q_1 + \Delta q_2 = q_1\left(\frac{\Delta x}{x} + \frac{\Delta y}{y}\right) + q_2\left(2\frac{\Delta x}{x} + \frac{\Delta y}{y} + \frac{\Delta z}{z}\right)$$

Representaciones gráficas

Un aspecto fundamental en la realización de un experimento es la presentación y análisis de los resultados. A tal fin, resulta de especial utilidad la representación gráfica de los datos experimentales, ya que concentra la información obtenida para su apreciación y análisis, y revela la relación funcional entre las magnitudes.

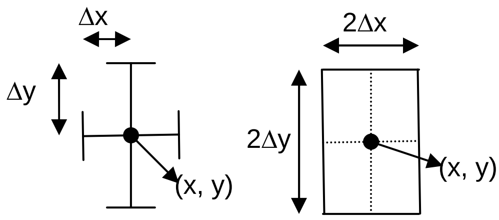
Para alcanzar los objetivos anteriores, la información debe presentarse de manera clara y explícita. A continuación daremos una serie de normas para realizar adecuadamente la representación gráfica de los resultados experimentales:

1. Debe utilizarse preferentemente papel milimetrado, sobre el que se dibujarán dos líneas perpendiculares correspondientes a los ejes coordenados. En la representación figurará de forma explícita un título o pie de figura que informe del fenómeno representado.

2. La variable independiente se representará en el eje de abscisas (horizontal) y la variable dependiente en el eje de ordenadas (vertical). Junto a los ejes debe figurar el nombre o abreviatura de la variable representada y la unidad en que está medida.

3. Las escalas sobre los ejes han de escogerse de forma que permitan una lectura rápida y sencilla (por ejemplo, 1mm se hará corresponder con 1, 10, 100,..., 2 o 5 unidades de la magnitud representada). Para ello se observarán los valores máximos y mínimos de las magnitudes, ya que las escalas deben abarcar todo el intervalo de medidas. No es imprescindible que el cero de la escala coincida con el origen de coordenadas. Sobre las escalas solo deben aparecer números correspondientes a múltiplos enteros de la unidad considerada, y nunca los valores de las medidas realizadas.

4. Los valores medidos se representan sobre el papel milimetrado mediante puntos correspondientes a sus dos coordenadas. La incertidumbre de los mismos se representa por una barra de error que abarca desde x-Δx hasta x+Δx y desde y-Δy hasta y+Δy, o un rectángulo de error centrado en el punto experimental de lados 2Δx y 2Δy. En el caso de que Δx y/o Δy sean despreciables con la escala utilizada, se omitirá su representación.

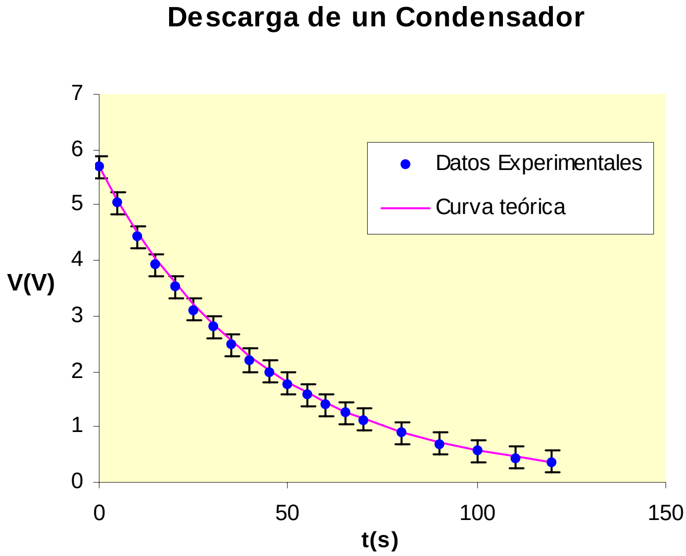


Barras y rectángulos de error

5. Las gráficas han de ser líneas continuas rectas o curvas, nunca quebradas (salvo casos particulares). Han de pasar por el área limitada por las barras de error, aunque para ello dejen de pasar por los puntos experimentales, que pueden quedar a uno u otro lado de la curva. Si al hacer esta operación alguno de los datos queda fuera de la curva, esto nos informa de que dicha medida es excesivamente errónea por cualquier motivo accidental, y debe repetirse.

6. Si en la misma gráfica se representan varias series de datos experimentales y una o más curvas, debe indicarse el significado de los diferentes símbolos en una caja o leyenda superpuesta en la gráfica.

A continuación se muestra un ejemplo de representación gráfica correspondiente a los datos experimentales (t, V) y la curva teórica de la descarga de un condensador. Sólo se han representado las barras de error de la variable V porque la incertidumbre en la medida del tiempo es despreciable con la escala utilizada.



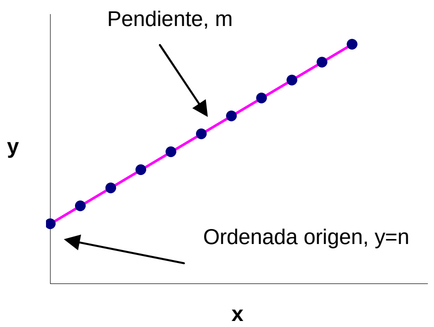
Ajuste de una recta por mínimos cuadrados

En numerosos fenómenos físicos, dos magnitudes <u>x e y están relacionadas de forma lineal</u>

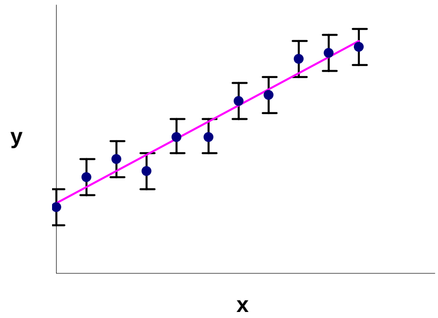
$$\boxed{y = mx + n}$$

lo que significa que la representación gráfica de una variable frente a la otra es una línea recta cuya pendiente es m, e intercepta al eje y en $y = n$. Si realizamos N medidas diferentes de x: $x_1, ..., x_N$ y las correspondientes de y: $y_1, ..., y_N$, si dichas medidas no presentaran errores, cada uno de los puntos (x_i, y_i) estaría situado exactamente sobre la recta $y = mx + n$, como se muestra en la figura a).

En la práctica, es inevitable la existencia de errores en las medidas y, a lo sumo, podemos aspirar a que los puntos (x_i, y_i) queden razonablemente próximos a la recta teniendo en cuenta sus incertidumbres, como se muestra en la figura b).



a)



b)

Cálculo de los parámetros m y n

Dado un conjunto de pares de medidas (x_i, y_i), como los descritos anteriormente, el objetivo es encontrar la recta que mejor se ajusta a dichas medidas. En definitiva, se trata de obtener la pendiente, *m*, y la ordenada en el origen, *n*, de la recta de regresión, de forma que, para cada x_i, la diferencia entre los valores experimentales, y_i, y los proporcionados por la ecuación de dicha recta, $\hat{y}_i = mx_i + n$,

$$\varepsilon_i = y_i - \hat{y}_i = y_i - n - mx_i \tag{1}$$

cumpla las condiciones:

$$\begin{cases} \sum_1^N \varepsilon_i = 0 \\ \sum_1^N \varepsilon_i^2 = \text{mínimo} \end{cases}$$

Este método se denomina ***regresión lineal*** o ***ajuste de una recta por mínimos cuadrados***.

De la ecuación (1) se obtiene

$$y_i = n + mx_i + \varepsilon_i$$

por tanto,

$$\sum_1^N y_i = \sum_1^N (n + mx_i + \varepsilon_i) = Nn + m\sum_1^N x_i + \sum_1^N \varepsilon_i$$

Teniendo en cuenta la primera condición y dividiendo por N, resulta

$$\bar{y} = n + m\bar{x}$$

donde $\bar{y}$ y $\bar{x}$ son los valores medios. Por tanto, la ordenada en el origen de la recta de regresión es:

$$n = \bar{y} - m\bar{x}$$

y sustituyendo en la ecuación (1), se obtiene

$$(y_i - \bar{y}) = m(x_i - \bar{x}) + \varepsilon_i$$

Teniendo en cuenta la segunda condición

$$\sum_1^N \varepsilon_i^2 = \sum_1^N \left[(y_i - \bar{y}) - m(x_i - \bar{x})\right]^2 = \text{mínimo}$$

para que se cumpla esta ecuación, la primera derivada respecto a *m* debe ser cero:

$$\sum_1^N \left[(y_i - \bar{y}) - m(x_i - \bar{x})\right]\left[-(x_i - \bar{x})\right] = 0$$

De donde resultan las siguientes expresiones para la **pendiente *m*** y la **ordenada en el origen *n***:

$$\boxed{m = \frac{N\sum_1^N x_i y_i - \sum_1^N x_i \sum_1^N y_i}{\Delta}} \qquad \boxed{n = \frac{\sum_1^N x_i^2 \sum_1^N y_i - \sum_1^N x_i \sum_1^N x_i y_i}{\Delta}}$$

siendo

$$\boxed{\Delta = N\sum_1^N x_i^2 - \left(\sum_1^N x_i\right)^2}$$

Se demuestra que los **errores absolutos de la pendiente y la ordenada en el origen** son los siguientes:

$$\boxed{\Delta m = \sigma_y \sqrt{\frac{N}{\Delta}}} \qquad \boxed{\Delta n = \sigma_y \sqrt{\frac{\sum_1^N x_i^2}{\Delta}}}$$

siendo

$$\boxed{\sigma_y = \sqrt{\frac{1}{N-2}\sum_1^N (y_i - n - mx_i)^2}}$$

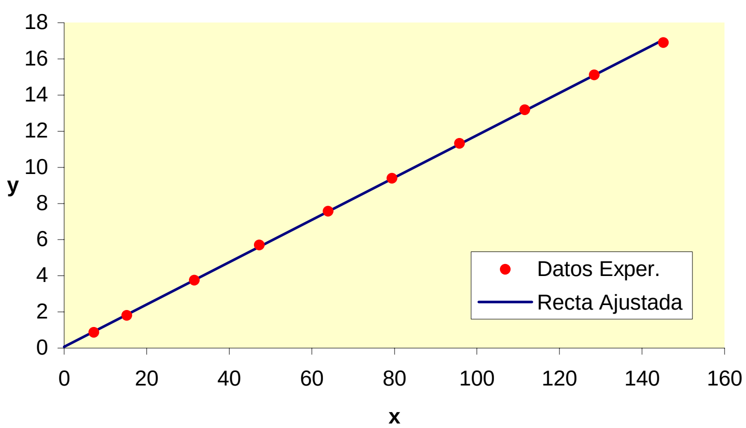
La bondad o calidad del ajuste se mide mediante el **coeficiente de correlación o regresión,** ρ

$$\boxed{\rho = \frac{\sum_1^N (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum_1^N (x_i - \bar{x})^2 \sum_1^N (y_i - \bar{y})^2}}}$$

ρ es un número entre –1 y +1 (el signo queda determinado por la pendiente de la recta). Si $|\rho| \approx 1$, significa que las variables *x* e *y* están linealmente relacionadas y los puntos experimentales se encuentran muy próximos a la recta ajustada. Si ρ está próximo a 0, significa que la relación entre las variables no es de tipo lineal.

A continuación se muestra un ejemplo de ajuste de una recta a los pares de datos experimentales (*x, y*) de la tabla, por el método de mínimos cuadrados. La ecuación de la recta ajustada es $y = 116.9 \cdot x + 0.08$ y el coeficiente de regresión vale 0.99983, lo que significa que los datos experimentales sustentan que la relación entre las variables *x* e *y* es lineal.

x	y
7,2	0,86
15,2	1,8
31,6	3,75
47,3	5,7
64	7,58
79,4	9,4
95,8	11,33
111,6	13,19
128,4	15,12
145,2	16,9



Ejecución y resultados

Para la realización de esta práctica se utilizará una **regla de 1mm de precisión**. Convenimos en tomar el error de apreciación de nuestras medidas igual a la precisión del aparato de medida

1. Mida con la regla el diámetro de una moneda de 1 euro (una sola medida), evalúe el error cometido y exprese los resultados con sus unidades:

$$\boxed{d \pm \Delta d = \qquad\qquad\qquad}$$

Calcule el error relativo de esta medida y expréselo en tanto por ciento:

$$\boxed{\frac{\Delta d}{d} = \qquad\qquad = \qquad\qquad \%}$$

2. Determine ahora, indirectamente, la superficie de dicha moneda: Escriba la fórmula teórica de la superficie en función del diámetro, realice los cálculos y anote el resultado con sus unidades

$S = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

3. Realice detalladamente el cálculo teórico del error de esta medida indirecta mediante el método de la derivada logarítmica expuesto en la introducción teórica:

$$\boxed{\frac{\Delta S}{S} = \qquad\qquad \Rightarrow \Delta S = \qquad\qquad}$$

4. Calcule numéricamente, mediante la fórmula obtenida en el apartado anterior, el error cometido en la medida de la superficie de la moneda

$\Delta S = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

Exprese, a continuación, dicha medida y su error, correctamente, con las cifras significativas y las unidades adecuadas.

$$\boxed{S \pm \Delta S = \qquad\qquad\qquad}$$

Calcule el error relativo de esta medida en tanto por ciento

$$\boxed{\frac{\Delta S}{S} = \qquad\qquad = \qquad\qquad \%}$$

5. Mida con la regla los lados de un billete de 5 euros y los lados de la banderita de la Comunidad Europea que figura en el mismo. Evalúe el error de dichas medidas y exprese los resultados con sus unidades:

Billete	$a \pm \Delta a =$	$c \pm \Delta c =$

Bandera	$b \pm \Delta b =$	$d \pm \Delta d =$

6. Determine indirectamente la superficie comprendida entre los límites del billete y los límites de la bandera: Escriba la fórmula teórica en función de los lados *a, b, c* y *d*, realice los cálculos y anote el resultado con sus unidades

S = ...

7. Realice detalladamente el <u>cálculo teórico</u> del error de esta medida indirecta, teniendo en cuenta que se trata de una fórmula polinómica:

$\Delta S =$

8. <u>Calcule numéricamente</u>, mediante la expresión teórica anterior, el error cometido en la medida de la superficie

$\Delta S =$ ....

Exprese, a continuación, la medida de la superficie y su error correctamente, con las cifras significativas y las unidades adecuadas.

$S \pm \Delta S =$

Calcule el error relativo de esta medida en tanto por ciento

$\frac{\Delta S}{S} = \qquad = \qquad \%$

Bibliografía

- Taylor, J.R., *An Introduction to Error Análisis*, University Science Books, 1997
- Gil, S., Rodríguez, E., *Física Recreativa*, Prentice Hall, 2001
- Bevington, P.R., Robinson, D.K., *Data Reduction and Error Analysis for the Physical Sciences*, McGraw-Hill, 1992
- Rabinovich, S.G., *Measurement Errors and Uncertainties*, Springer-Verlag, 2000

HOJAS RESUMEN DE LOS RESULTADOS DE LA PRÁCTICA

Fotocopie y entregue en la fecha establecida. Calificación máxima: 9.5 puntos

Nombre del alumno:

1. (P=1)

$d \pm \Delta d =$

$\frac{\Delta d}{d} = \qquad = \qquad \%$

2. (P=0.5)

$S =$ ....

3. (P=2)

$\frac{\Delta S}{S} = \qquad \Rightarrow \Delta S =$

4. (P=1)

$\Delta S =$ ....

$S \pm \Delta S =$

$\frac{\Delta S}{S} = \qquad = \qquad \%$

5. (P=1)

Billete	$a \pm \Delta a =$	$c \pm \Delta c =$
Bandera	$b \pm \Delta b =$	$d \pm \Delta d =$

6. (P=1)

S = ...

7. (P=2)

$\Delta S =$

8. (P=1)

$\Delta S =$ ....

$S \pm \Delta S =$

$\frac{\Delta S}{S} = \qquad = \qquad \%$