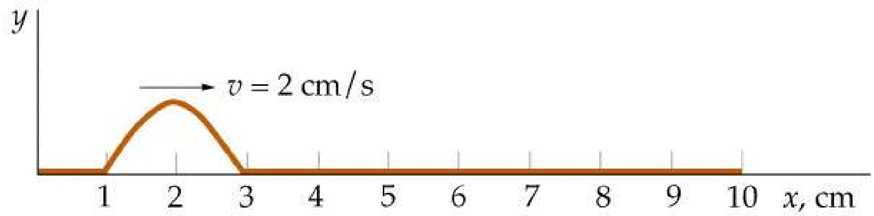
VII – ONDAS

Algunas tareas resueltas

Pulso en una cuerda tensa

VII. 2.- El pulso de onda en la cuerda, mostrado en la figura para t = 0, se mueve hacia la derecha. En este instante particular



a) ¿Qué segmentos de la cuerda se están moviendo hacia arriba?
b) ¿Cuáles se están moviendo hacia abajo
c) ¿Existe algún segmento de la cuerda que se encuentre en el pulso y se encuentre en este instante con velocidad cero?
d) Realizar un esquema de las fuerzas que actuan sobre los segmentos de la cuerda que se encuentran en el pulso.

Velocidad de propagación

VII.2 – Un gusano está a 2.5 cm del extremo se la cuerda de un tendedero cuando la chica que está tendiendo su traje de baño lo ve. La chica da un golpe a la cuerda de modo que por esta se propaga un pulso de 3 cm de altura. Si el gusano se mueve a 2.54 cm/s ¿llegará al extremo de la cuerda antes que le alcance el pulso? La cuerda tiene 25 m de longitud, una masa de 0.25 kg, se mantiene tensa gracias a un peso de 10 kg que cuelga en uno de sus extremos y la chica cuelga su traje a 5 m del extremo de la cuerda opuesto a la posición del gusano.

Sol.: Si, el pulso tarda 0.202 s en alcanzar el extremo de la cuerda y el gusano tarda 0.984 s.

Solución:

La velocidad de propagación del pulso depende de la tensión de la cuerda y de la densidad de la misma:

$$v = \sqrt{\frac{T}{\mu}} = \sqrt{\frac{m_p\ g}{m_c/L}} = \sqrt{\frac{10\ kg\ 9.8\ m\ s^{-2}}{0.25\ kg/\ 25\ m}} = 99\ ms^{-1}$$

El tiempo que tardará el pulso en alcanzar el extremo opuesto será:

$$t = 20\ m/\ 99\ m\ s^{-1} = 0.202\ s$$

El tiempo que tarda el gusano en alcanzar el extremo de la cuerda será:

$$t = 2.5\ cm/\ 2.54\ cm\ s^{-1} = 0.984\ s$$

Desplazamiento en onda sinusoidal

VII. 3 - Una onda sinusoidal tiene una amplitud $A = 0.5\ cm$ y una longitud de onda λ = *30 cm*, en el instante $t = 0$ ¿Cuál es su desplazamiento en $x = 6\ cm$?

Solución: 0.475 cm

Solución:

La ecuación de la onda para t = 0 vendrá dada por la expresión:

$$y = A \text{ sen } 2\pi (x / \lambda) = (0.5\ cm) \text{ sen } (360^\circ * 6\ cm/30\ cm) = 0.5\ cm * \text{sen } 72^\circ = 0.475\ cm$$

Onda armónica en una cuerda tensa

VII. 4 – La función de onda de una onda armónica que se mueve sobre una cuerda es $y(x, t) = (0.03\ m) \text{ sen}(2.2\ m^{-1}\ x - 3.5\ s^{-1}\ t)$

a) ¿Puede representar esta ecuación una onda?

b) Determinar la longitud de onda, la frecuencia y el período de esta onda.

c) ¿En qué dirección se propaga esta onda y cuál es su velocidad de propagación?

d) Si la densidad de la cuerda es de 0.01 kg/m ¿Cuál es la tensión a la que se encuentra?

e) ¿Cuál es el desplazamiento máximo de cualquier segmento de la cuerda?

f) ¿Cuál es la velocidad máxima de cualquier segmento de la cuerda?

Solución:

a) Cualquier ecuación matemática que represente una onda debe depender del espacio y del tiempo en la forma:

$$y = f(x \pm vt)$$

y la ecuación que se presenta en este problema es de este tipo por lo que formalmente sí puede representar una onda.

b) La expresión para una onda armónica podemos representarla como:

$$y = A \text{ sen } 2\pi \left(\frac{x}{\lambda} - \frac{t}{T} \right)$$

Comparando con la expresión de nuestro problema podemos realizar las siguientes identificaciones:

$2\pi / \lambda = 2.2\ m^{-1} \longrightarrow \lambda = 2 * 3.1416/2.2\ m = 2.86\ m$

$2\pi / T = 3.5\ s^{-1} \longrightarrow T = 2 * 3.1416/3.5\ s = 1.8\ s$

la frecuencia la obtenemos como el inverso del período:

$$f = 1/T = 1/1.8\ s = 0.55\ Hz$$

c) La velocidad de propagación será $v = \lambda / T = 3.5 / 2.2\ m\ s^{-1} = 1.59\ m\ s^{-1}$

Hemos utilizado los valores de los cuales obtuvimos la longitud de onda y el período para no acumular redondeos de cálculo.

d) Existe una relación entre la velocidad de propagación, la densidad de la cuerda y la tensión de la misma, es relativamente fácil de recordar pues a mayor tensión mayor velocidad de propagación y a mayor densidad menor velocidad de propagación.

$v = \sqrt{\dfrac{T}{\mu}} \longrightarrow$ *T = v^2 μ = (1.59 m s^{-1})^2 0.01 kg / m = 0.025 kg m s^{-2} = 0.025 N*

Cuidado con la T, la hemos utilizado para el período también, aquí nos representa la tensión en la cuerda.

e) El desplazamiento máximo es la amplitud, 0.03 m

f) La velocidad de los trozos de la cuerda en su desplazamiento vertical será la derivada del desplazamiento respecto al tiempo que es diferente a la velocidad de propagación de la onda:

$$v_{elemento\ cuerda} = \frac{\partial y}{\partial t} = 0.03\, m * (-3.5\, s^{-1}) \cos(2.2\, m^{-1} x - 3.5\, s^{-1} t)$$

La velocidad máxima se corresponderá con el valor máximo del coseno que es uno: 0.105 m s^{-1}

Energía en ondas armónicas en una cuerda tensa

VII. 5 – Una señal armónica de frecuencia *f1 Hz*, se desplaza por una cuerda con una amplitud *A1* transportando una energía media *E1*

a) ¿Qué frecuencia debería tener la señal para transportar el doble de energía manteniendo la misma amplitud?

b) Con esta nueva frecuencia ¿qué amplitud debería tener la señal para que con esta nueva frecuencia transporte la misma energía media *E1*?

Aplicación numérica: f1 = 1000 Hz, A1 = 0.1 cm

Solución:

a) La energía media que transporta una onda armónica es proporcional a los cuadrados de la frecuencia y de la amplitud. La condición del primer apartado es que:

*E2 = 2*E1* $\quad$ *(f2*A2)^2 = 2*(f1*A1)^2*

Como las amplitudes permanecen constantes la frecuencia deberá ser f1 √2

f2 = 1000 Hz √2 = 1 414 Hz

b) Si llamamos A a la amplitud que debe tener la señal, en este segundo caso se debe cumplir que la energía media sea igual a la de la señal inicial:

*(f2*A)^2 = (f1*A1)^2* $\quad$ *f1 √2 *A = f1*A1* $\quad$ *A = A1/ √2 = 0.1 cm/√2 = 0.07 cm*