# Avances recientes en Teoría de la Fiabilidad usando signaturas

Jorge Navarro[1, 2], Universidad de Murcia, Spain

[1] Supported by Ministerio de Ciencia y Tecnologia, MTM2006-12834

[2] Basado en Navarro, Samaniego, Balakrishnan, and Bhattacharya (2008, Naval Res. Logist. **55**, 313-327)

# Sistemas coherentes y estadísticos ordenados

- $X_1, X_2, \ldots, X_n$ variables aleatorias positivas.
- $X_1, X_2, \ldots, X_n$ IID.
- $X_1, X_2, \ldots, X_n$ intercambiables (EXC), i.e., para toda permutación $\sigma$

$$(X_1, X_2, \ldots, X_n) =_{ST} (X_{\sigma(1)}, X_{\sigma(2)}, \ldots, X_{\sigma(n)}).$$

- $\overline{F}(t) = \Pr(X_i > t)$ fiabilidad (supervivencia).
- $X_{1:n}, X_{2:n}, \ldots, X_{n:n}$ estadísticos ordenados.
- $X_{k:n}$ tiempo de vida del sistema $k$-out-of-$n$:$F$.
- $T = \phi(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ tiempo de vida del sistema coherente.
- $T = \max_{1 \le j \le r} X_{P_j}$; $P_j$ caminos minimales, $X_P = \min_{i \in P} X_i$.
- $T = X_{i:n}$ con probabilidad $s_i = \Pr(T = X_{i:n})$.

# Sistemas coherentes y estadísticos ordenados

- $X_1, X_2, \dots, X_n$ variables aleatorias positivas.
- $X_1, X_2, \dots, X_n$ IID.
- $X_1, X_2, \dots, X_n$ intercambiables (EXC), i.e., para toda permutación $\sigma$

$$(X_1, X_2, \dots, X_n) =_{ST} (X_{\sigma(1)}, X_{\sigma(2)}, \dots, X_{\sigma(n)}).$$

- $\overline{F}(t) = \Pr(X_i > t)$ fiabilidad (supervivencia).
- $X_{1:n}, X_{2:n}, \dots, X_{n:n}$ estadísticos ordenados.
- $X_{k:n}$ tiempo de vida del sistema $k$-out-of-$n$:$F$.
- $T = \phi(X_1, X_2, \dots, X_n)$ tiempo de vida del sistema coherente.
- $T = \max_{1 \le j \le r} X_{P_j}$; $P_j$ caminos minimales, $X_P = \min_{i \in P} X_i$.
- $T = X_{i:n}$ con probabilidad $s_i = \Pr(T = X_{i:n})$.

# Sistemas coherentes y estadísticos ordenados

- $X_1, X_2, \ldots, X_n$ variables aleatorias positivas.
- $X_1, X_2, \ldots, X_n$ IID.
- $X_1, X_2, \ldots, X_n$ intercambiables (EXC), i.e., para toda permutación $\sigma$

$$(X_1, X_2, \ldots, X_n) =_{ST} (X_{\sigma(1)}, X_{\sigma(2)}, \ldots, X_{\sigma(n)}).$$

- $\overline{F}(t) = \Pr(X_i > t)$ fiabilidad (supervivencia).
- $X_{1:n}, X_{2:n}, \ldots, X_{n:n}$ estadísticos ordenados.
- $X_{k:n}$ tiempo de vida del sistema $k$-out-of-$n$:$F$.
- $T = \phi(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ tiempo de vida del sistema coherente.
- $T = \max_{1 \le j \le r} X_{P_j}$; $P_j$ caminos minimales, $X_P = \min_{i \in P} X_i$.
- $T = X_{i:n}$ con probabilidad $s_i = \Pr(T = X_{i:n})$.

# Sistemas coherentes y estadísticos ordenados

- $X_1, X_2, \ldots, X_n$ variables aleatorias positivas.
- $X_1, X_2, \ldots, X_n$ IID.
- $X_1, X_2, \ldots, X_n$ intercambiables (EXC), i.e., para toda permutación $\sigma$

$$(X_1, X_2, \ldots, X_n) =_{ST} (X_{\sigma(1)}, X_{\sigma(2)}, \ldots, X_{\sigma(n)}).$$

- $\overline{F}(t) = \Pr(X_i > t)$ fiabilidad (supervivencia).
- $X_{1:n}, X_{2:n}, \ldots, X_{n:n}$ estadísticos ordenados.
- $X_{k:n}$ tiempo de vida del sistema $k$-out-of-$n$:$F$.
- $T = \phi(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ tiempo de vida del sistema coherente.
- $T = \max_{1 \leq j \leq r} X_{P_j}$; $P_j$ caminos minimales, $X_P = \min_{i \in P} X_i$.
- $T = X_{i:n}$ con probabilidad $s_i = \Pr(T = X_{i:n})$.

# Sistemas coherentes y estadísticos ordenados

- $X_1, X_2, \ldots, X_n$ variables aleatorias positivas.
- $X_1, X_2, \ldots, X_n$ IID.
- $X_1, X_2, \ldots, X_n$ intercambiables (EXC), i.e., para toda permutación $\sigma$

$$(X_1, X_2, \ldots, X_n) =_{ST} (X_{\sigma(1)}, X_{\sigma(2)}, \ldots, X_{\sigma(n)}).$$

- $\overline{F}(t) = \Pr(X_i > t)$ fiabilidad (supervivencia).
- $X_{1:n}, X_{2:n}, \ldots, X_{n:n}$ estadísticos ordenados.
- $X_{k:n}$ tiempo de vida del sistema $k$-out-of-$n$:$F$.
- $T = \phi(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ tiempo de vida del sistema coherente.
- $T = \max_{1 \le j \le r} X_{P_j}$; $P_j$ caminos minimales, $X_P = \min_{i \in P} X_i$.
- $T = X_{i:n}$ con probabilidad $s_i = \Pr(T = X_{i:n})$.

# Sistemas coherentes y estadísticos ordenados

- $X_1, X_2, \dots, X_n$ variables aleatorias positivas.
- $X_1, X_2, \dots, X_n$ IID.
- $X_1, X_2, \dots, X_n$ intercambiables (EXC), i.e., para toda permutación $\sigma$

$$(X_1, X_2, \dots, X_n) =_{ST} (X_{\sigma(1)}, X_{\sigma(2)}, \dots, X_{\sigma(n)}).$$

- $\overline{F}(t) = \Pr(X_i > t)$ fiabilidad (supervivencia).
- $X_{1:n}, X_{2:n}, \dots, X_{n:n}$ estadísticos ordenados.
- $X_{k:n}$ tiempo de vida del sistema $k$-out-of-$n$:$F$.
- $T = \phi(X_1, X_2, \dots, X_n)$ tiempo de vida del sistema coherente.
- $T = \max_{1 \le j \le r} X_{P_j}$; $P_j$ caminos minimales, $X_P = \min_{i \in P} X_i$.
- $T = X_{i:n}$ con probabilidad $s_i = \Pr(T = X_{i:n})$.

# Sistemas coherentes y estadísticos ordenados

- $X_1, X_2, \ldots, X_n$ variables aleatorias positivas.
- $X_1, X_2, \ldots, X_n$ IID.
- $X_1, X_2, \ldots, X_n$ intercambiables (EXC), i.e., para toda permutación $\sigma$

$$(X_1, X_2, \ldots, X_n) =_{ST} (X_{\sigma(1)}, X_{\sigma(2)}, \ldots, X_{\sigma(n)}).$$

- $\overline{F}(t) = \Pr(X_i > t)$ fiabilidad (supervivencia).
- $X_{1:n}, X_{2:n}, \ldots, X_{n:n}$ estadísticos ordenados.
- $X_{k:n}$ tiempo de vida del sistema $k$-out-of-$n$:$F$.
- $T = \phi(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ tiempo de vida del sistema coherente.
- $T = \max_{1 \le j \le r} X_{P_j}$; $P_j$ caminos minimales, $X_P = \min_{i \in P} X_i$.
- $T = X_{i:n}$ con probabilidad $s_i = \Pr(T = X_{i:n})$.

# Sistemas coherentes y estadísticos ordenados

- $X_1, X_2, \dots, X_n$ variables aleatorias positivas.
- $X_1, X_2, \dots, X_n$ IID.
- $X_1, X_2, \dots, X_n$ intercambiables (EXC), i.e., para toda permutación $\sigma$

$$(X_1, X_2, \dots, X_n) =_{ST} (X_{\sigma(1)}, X_{\sigma(2)}, \dots, X_{\sigma(n)}).$$

- $\overline{F}(t) = \Pr(X_i > t)$ fiabilidad (supervivencia).
- $X_{1:n}, X_{2:n}, \dots, X_{n:n}$ estadísticos ordenados.
- $X_{k:n}$ tiempo de vida del sistema $k$-out-of-$n$:$F$.
- $T = \phi(X_1, X_2, \dots, X_n)$ tiempo de vida del sistema coherente.
- $T = \max_{1 \le j \le r} X_{P_j}$; $P_j$ caminos minimales, $X_P = \min_{i \in P} X_i$.
- $T = X_{i:n}$ con probabilidad $s_i = \Pr(T = X_{i:n})$.

# Sistemas coherentes y estadísticos ordenados

- $X_1, X_2, \ldots, X_n$ variables aleatorias positivas.
- $X_1, X_2, \ldots, X_n$ IID.
- $X_1, X_2, \ldots, X_n$ intercambiables (EXC), i.e., para toda permutación $\sigma$

$$(X_1, X_2, \ldots, X_n) =_{ST} (X_{\sigma(1)}, X_{\sigma(2)}, \ldots, X_{\sigma(n)}).$$

- $\overline{F}(t) = \Pr(X_i > t)$ fiabilidad (supervivencia).
- $X_{1:n}, X_{2:n}, \ldots, X_{n:n}$ estadísticos ordenados.
- $X_{k:n}$ tiempo de vida del sistema $k$-out-of-$n$:$F$.
- $T = \phi(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ tiempo de vida del sistema coherente.
- $T = \max_{1 \le j \le r} X_{P_j}$; $P_j$ caminos minimales, $X_P = \min_{i \in P} X_i$.
- $T = X_{i:n}$ con probabilidad $s_i = \Pr(T = X_{i:n})$.

# Representaciones como mixturas

- Samaniego (1985), IID y $F$ continuous, entonces

$$\overline{F}_T = \sum_{i=1}^{n} s_i \overline{F}_{i:n}. \tag{1.1}$$

- $\mathbf{s} = (s_1, s_2, \ldots, s_n)$ signatura de $T$, $s_i = \Pr(T = X_{i:n})$.
- $s_i$ no depende de $F$ y

$$s_i = \frac{1}{n!} \sum_{\sigma} 1(\sigma \in A_i)$$

$A_i = \{\sigma : \phi(x_1, \ldots, x_n) = x_{i:n}, \text{ cuando } x_{\sigma(1)} < \ldots < x_{\sigma(n)}\}$.

- Navarro y Rychlik (2007), (1.1) vale para vectores EXC con distribución conjunta absolutamente continua.
- (1.1) no se cumple si $F$ no es continua (e.g. distribuciones Bernoulli IID).

# Representaciones como mixturas

- Samaniego (1985), IID y $F$ continuous, entonces
$$\overline{F}_T = \sum_{i=1}^{n} s_i \overline{F}_{i:n}. \quad (1.1)$$
- $\mathbf{s} = (s_1, s_2, \ldots, s_n)$ signatura de $T$, $s_i = \Pr(T = X_{i:n})$.
- $s_i$ no depende de $F$ y
$$s_i = \frac{1}{n!} \sum_{\sigma} 1(\sigma \in A_i)$$
$A_i = \{\sigma : \phi(x_1, \ldots, x_n) = x_{i:n},$ cuando $x_{\sigma(1)} < \ldots < x_{\sigma(n)}\}$.
- Navarro y Rychlik (2007), (1.1) vale para vectores EXC con distribución conjunta absolutamente continua.
- (1.1) no se cumple si $F$ no es continua (e.g. distribuciones Bernoulli IID).

# Representaciones como mixturas

- Samaniego (1985), IID y $F$ continuous, entonces

$$\overline{F}_T = \sum_{i=1}^{n} s_i \overline{F}_{i:n}. \tag{1.1}$$

- $\mathbf{s} = (s_1, s_2, \dots, s_n)$ signatura de $T$, $s_i = \Pr(T = X_{i:n})$.
- $s_i$ no depende de $F$ y

$$s_i = \frac{1}{n!} \sum_{\sigma} 1(\sigma \in A_i)$$

$A_i = \{\sigma : \phi(x_1, \dots, x_n) = x_{i:n},$ cuando $x_{\sigma(1)} < ... < x_{\sigma(n)}\}$.

- Navarro y Rychlik (2007), (1.1) vale para vectores EXC con distribución conjunta absolutamente continua.
- (1.1) no se cumple si $F$ no es continua (e.g. distribuciones Bernoulli IID).

# Representaciones como mixturas

- Samaniego (1985), IID y $F$ continuous, entonces

$$\overline{F}_T = \sum_{i=1}^{n} s_i \overline{F}_{i:n}. \tag{1.1}$$

- $\mathbf{s} = (s_1, s_2, \ldots, s_n)$ signatura de $T$, $s_i = \Pr(T = X_{i:n})$.
- $s_i$ no depende de $F$ y

$$s_i = \frac{1}{n!} \sum_{\sigma} 1(\sigma \in A_i)$$

$A_i = \{\sigma : \phi(x_1, \ldots, x_n) = x_{i:n},$ cuando $x_{\sigma(1)} < \ldots < x_{\sigma(n)}\}$.

- Navarro y Rychlik (2007), (1.1) vale para vectores EXC con distribución conjunta absolutamente continua.
- (1.1) no se cumple si $F$ no es continua (e.g. distribuciones Bernoulli IID).

# Representaciones como mixturas

- Samaniego (1985), IID y $F$ continuous, entonces

$$\overline{F}_T = \sum_{i=1}^{n} s_i \overline{F}_{i:n}. \tag{1.1}$$

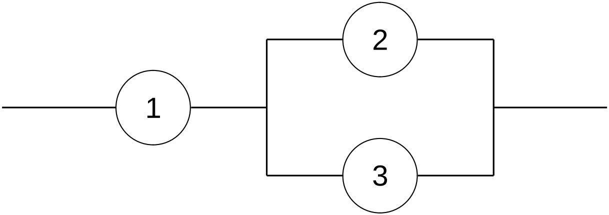
- $\mathbf{s} = (s_1, s_2, \ldots, s_n)$ signatura de $T$, $s_i = \Pr(T = X_{i:n})$.
- $s_i$ no depende de $F$ y

$$s_i = \frac{1}{n!} \sum_{\sigma} 1(\sigma \in A_i)$$

$A_i = \{\sigma : \phi(x_1, \ldots, x_n) = x_{i:n},$ cuando $x_{\sigma(1)} < \ldots < x_{\sigma(n)}\}$.

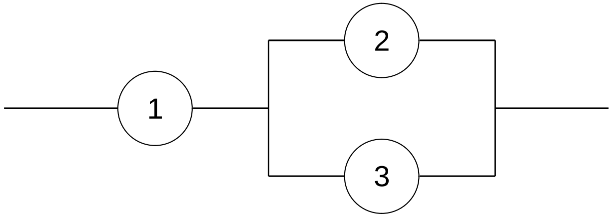
- Navarro y Rychlik (2007), (1.1) vale para vectores EXC con distribución conjunta absolutamente continua.
- (1.1) no se cumple si $F$ no es continua (e.g. distribuciones Bernoulli IID).

# Ejemplo



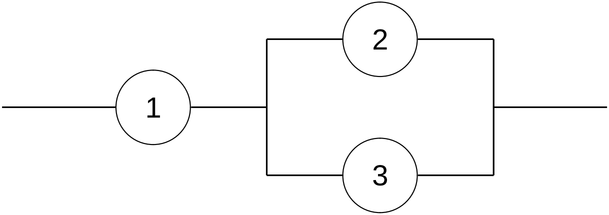

Sistema coherente con $T = \min(X_1, \max(X_2, X_3))$.

# Ejemplo



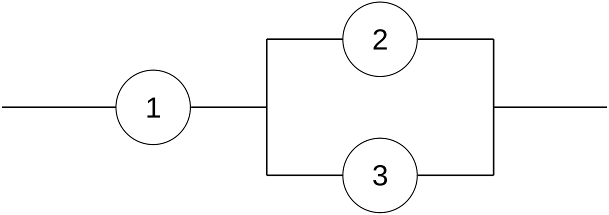

Sistema coherente con $T = \min(X_1, \max(X_2, X_3))$.
$3! = 6$ permutaciones.

# Ejemplo



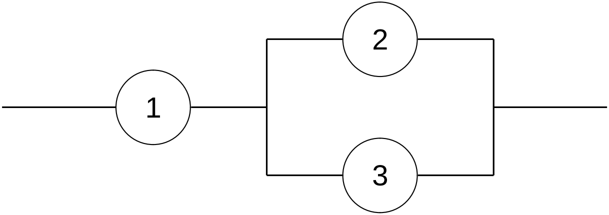

Sistema coherente con $T = \min(X_1, \max(X_2, X_3))$.
$X_1 < X_2 < X_3 \Rightarrow T = X_1 = X_{1:3}$

# Ejemplo



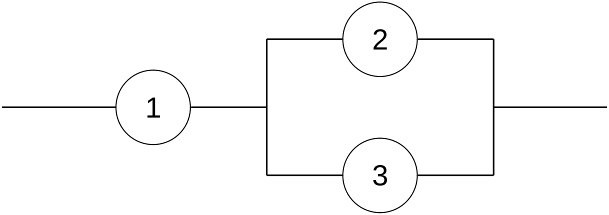

Sistema coherente con $T = \min(X_1, \max(X_2, X_3))$.
$X_1 < X_3 < X_2 \Rightarrow T = X_1 = X_{1:3}$

# Ejemplo



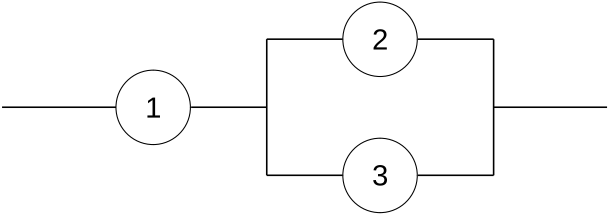

Sistema coherente con $T = \min(X_1, \max(X_2, X_3))$.
$X_2 < X_1 < X_3 \Rightarrow T = X_1 = X_{2:3}$

# Ejemplo



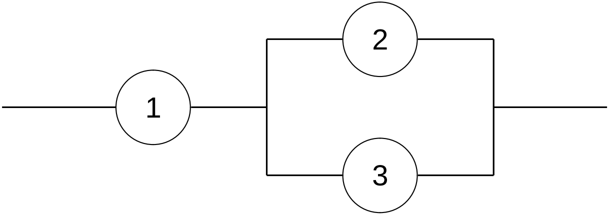

Sistema coherente con $T = \min(X_1, \max(X_2, X_3))$.
$X_2 < X_3 < X_1 \Rightarrow T = X_3 = X_{2:3}$

# Ejemplo



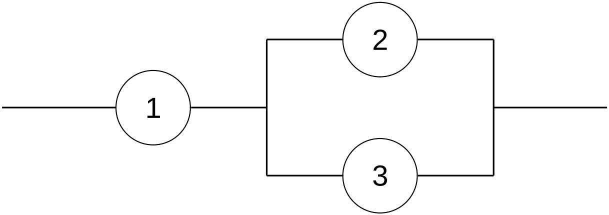

Sistema coherente con $T = \min(X_1, \max(X_2, X_3))$.
$X_3 < X_1 < X_2 \Rightarrow T = X_1 = X_{2:3}$

# Ejemplo



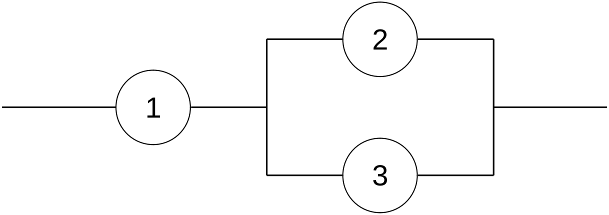

Sistema coherente con $T = \min(X_1, \max(X_2, X_3))$.
$X_3 < X_2 < X_1 \Rightarrow T = X_2 = X_{2:3}$

## Ejemplo




Sistema coherente con $T = \min(X_1, \max(X_2, X_3))$.
IID $F$ cont.: $\mathbf{s} = (2/6, 4/6, 0) = (1/3, 2/3, 0)$.

# Ejemplo




Sistema coherente con $T = \min(X_1, \max(X_2, X_3))$.
IID $F$ cont.: $\overline{F}_T(t) = \frac{1}{3}\overline{F}_{1:3}(t) + \frac{2}{3}\overline{F}_{2:3}(t)$.

# Representaciones como mixturas

- Navarro et al. (2007), si $T$ tiene componentes EXC, entonces

$$\overline{F}_T = \sum_{i=1}^{n} a_i \overline{F}_{1:i}. \tag{1.2}$$

- $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ es al signatura minimal de $T$ ($a_i$ no depende de $F$ pero puede ser negativo).
- Hay una representación similar basada en los sitemas en paralelo.
- En particular, para los OS:

$$\overline{F}_{i:n} = \sum_{j=n-i+1}^{n} (-1)^{j+i-n-1} \binom{j-1}{n-i} \binom{n}{j} \overline{F}_{1:j}. \tag{1.3}$$

# Representaciones como mixturas

- Navarro et al. (2007), si $T$ tiene componentes EXC, entonces

$$\overline{F}_T = \sum_{i=1}^{n} a_i \overline{F}_{1:i}. \tag{1.2}$$

- $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ es al signatura minimal de $T$ ($a_i$ no depende de $F$ pero puede ser negativo).
- Hay una representación similar basada en los sitemas en paralelo.
- En particular, para los OS:

$$\overline{F}_{i:n} = \sum_{j=n-i+1}^{n} (-1)^{j+i-n-1} \binom{j-1}{n-i} \binom{n}{j} \overline{F}_{1:j}. \tag{1.3}$$

# Representaciones como mixturas

- Navarro et al. (2007), si $T$ tiene componentes EXC, entonces
$$\overline{F}_T = \sum_{i=1}^{n} a_i \overline{F}_{1:i}. \qquad (1.2)$$
- $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ es al signatura minimal de $T$ ($a_i$ no depende de $F$ pero puede ser negativo).
- Hay una representación similar basada en los sitemas en paralelo.
- En particular, para los OS:
$$\overline{F}_{i:n} = \sum_{j=n-i+1}^{n} (-1)^{j+i-n-1} \binom{j-1}{n-i} \binom{n}{j} \overline{F}_{1:j}. \qquad (1.3)$$

# Representaciones como mixturas

- Navarro et al. (2007), si $T$ tiene componentes EXC, entonces
$$\overline{F}_T = \sum_{i=1}^{n} a_i \overline{F}_{1:i}. \tag{1.2}$$
- $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ es al signatura minimal de $T$ ($a_i$ no depende de $F$ pero puede ser negativo).
- Hay una representación similar basada en los sitemas en paralelo.
- En particular, para los OS:
$$\overline{F}_{i:n} = \sum_{j=n-i+1}^{n} (-1)^{j+i-n-1} \binom{j-1}{n-i} \binom{n}{j} \overline{F}_{1:j}. \tag{1.3}$$

# Representaciones como mixturas-caso general

- Recordemos que $T = \max_{1 \leq j \leq r} X_{P_j}$
- Luego: $\overline{F}_t(t) = P(T > t) = P(\cup_{j=1}^{r} \{X_{P_j} > t\})$
- Usando la fórmula para la probabilidad de una unión, tenemos

$$\overline{F}_T = \sum_{j=1}^{r} \overline{F}_{P_j} - \sum_{i<j} \overline{F}_{P_i \cup P_j} + \ldots \pm \overline{F}_{1:n}.$$

# Representaciones como mixturas-caso general

- Recordemos que $T = \max_{1 \leq j \leq r} X_{P_j}$
- Luego: $\overline{F}_t(t) = P(T > t) = P(\cup_{j=1}^{r}\{X_{P_j} > t\})$
- Usando la fórmula para la probabilidad de una unión, tenemos

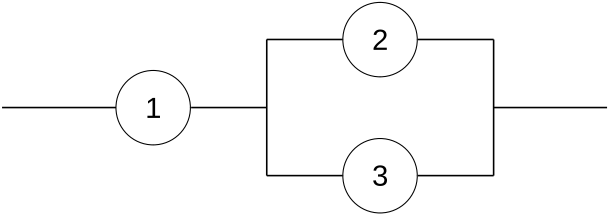
$$\overline{F}_T = \sum_{j=1}^{r} \overline{F}_{P_j} - \sum_{i<j} \overline{F}_{P_i \cup P_j} + \ldots \pm \overline{F}_{1:n}.$$

# Representaciones como mixturas-caso general

- Recordemos que $T = \max_{1 \le j \le r} X_{P_j}$
- Luego: $\overline{F}_t(t) = P(T > t) = P(\cup_{j=1}^{r} \{X_{P_j} > t\})$
- Usando la fórmula para la probabilidad de una unión, tenemos

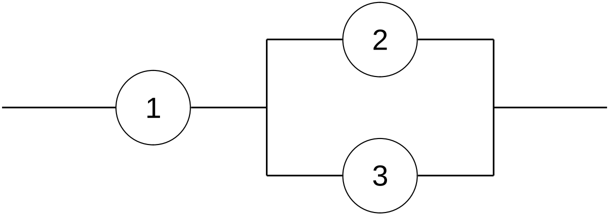
$$\overline{F}_T = \sum_{j=1}^{r} \overline{F}_{P_j} - \sum_{i<j} \overline{F}_{P_i \cup P_j} + \ldots \pm \overline{F}_{1:n}.$$

# Ejemplo



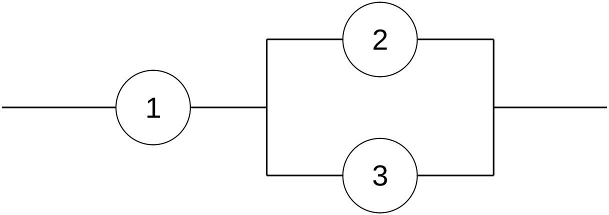

Sistema coherente con tiempo de vida $T = \min(X_1, \max(X_2, X_3))$.

# Ejemplo



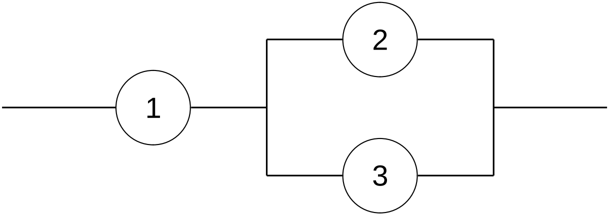

Caminos minimales $P_1 = \{1, 2\}$ and $P_1 = \{1, 3\}$.

# Ejemplo



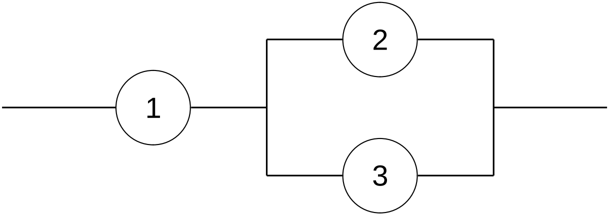

$$\overline{F}_T(t) = \overline{F}_{\{1,2\}}(t) + \overline{F}_{\{1,3\}}(t) - \overline{F}_{\{1,2,3\}}(t).$$

# Ejemplo




EXC: $\overline{F}_T(t) = 2\overline{F}_{1:2}(t) - \overline{F}_{1:3}(t)$.

# Ejemplo




IID: $\overline{F}_T(t) = 2\overline{F}^2(t) - \overline{F}^3(t)$.

# Ordenes estocásticos

- $X \leq_{ST} Y \Leftrightarrow \overline{F}_X(t) \leq \overline{F}_Y(t)$ orden estocástico.
- $X \leq_{HR} Y \Leftrightarrow h_X(t) \geq h_Y(t)$, orden razón de fallo.
- $X \leq_{HR} Y \Leftrightarrow (X - t | X > t) \leq_{ST} (Y - t | Y > t)$ para todo $t$.
- $X \leq_{MRL} Y \Leftrightarrow m_X(t) \leq m_Y(t)$, vida media residual.
- $X \leq_{LR} Y \Leftrightarrow f_Y(t)/f_X(t)$ es no decreciente, orden razón de verosimilitudes.
- $X \leq_{LR} Y \Leftrightarrow (X | s < X < t) \leq_{ST} (Y | s < Y < t)$ para $s < t$.

# Ordenes estocásticos

- $X \leq_{ST} Y \Leftrightarrow \overline{F}_X(t) \leq \overline{F}_Y(t)$ orden estocástico.
- $X \leq_{HR} Y \Leftrightarrow h_X(t) \geq h_Y(t)$, orden razón de fallo.
- $X \leq_{HR} Y \Leftrightarrow (X - t|X > t) \leq_{ST} (Y - t|Y > t)$ para todo $t$.
- $X \leq_{MRL} Y \Leftrightarrow m_X(t) \leq m_Y(t)$, vida media residual.
- $X \leq_{LR} Y \Leftrightarrow f_Y(t)/f_X(t)$ es no decreciente, orden razón de verosimilitudes.
- $X \leq_{LR} Y \Leftrightarrow (X|s < X < t) \leq_{ST} (Y|s < Y < t)$ para $s < t$.

# Ordenes estocásticos

- $X \leq_{ST} Y \Leftrightarrow \overline{F}_X(t) \leq \overline{F}_Y(t)$ orden estocástico.
- $X \leq_{HR} Y \Leftrightarrow h_X(t) \geq h_Y(t)$, orden razón de fallo.
- $X \leq_{HR} Y \Leftrightarrow (X - t|X > t) \leq_{ST} (Y - t|Y > t)$ para todo $t$.
- $X \leq_{MRL} Y \Leftrightarrow m_X(t) \leq m_Y(t)$, vida media residual.
- $X \leq_{LR} Y \Leftrightarrow f_Y(t)/f_X(t)$ es no decreciente, orden razón de verosimilitudes.
- $X \leq_{LR} Y \Leftrightarrow (X|s < X < t) \leq_{ST} (Y|s < Y < t)$ para $s < t$.

# Ordenes estocásticos

- $X \leq_{ST} Y \Leftrightarrow \overline{F}_X(t) \leq \overline{F}_Y(t)$ orden estocástico.
- $X \leq_{HR} Y \Leftrightarrow h_X(t) \geq h_Y(t)$, orden razón de fallo.
- $X \leq_{HR} Y \Leftrightarrow (X - t|X > t) \leq_{ST} (Y - t|Y > t)$ para todo $t$.
- $X \leq_{MRL} Y \Leftrightarrow m_X(t) \leq m_Y(t)$, vida media residual.
- $X \leq_{LR} Y \Leftrightarrow f_Y(t)/f_X(t)$ es no decreciente, orden razón de verosimilitudes.
- $X \leq_{LR} Y \Leftrightarrow (X|s < X < t) \leq_{ST} (Y|s < Y < t)$ para $s < t$.

# Ordenes estocásticos

- $X \leq_{ST} Y \Leftrightarrow \overline{F}_X(t) \leq \overline{F}_Y(t)$ orden estocástico.
- $X \leq_{HR} Y \Leftrightarrow h_X(t) \geq h_Y(t)$, orden razón de fallo.
- $X \leq_{HR} Y \Leftrightarrow (X - t|X > t) \leq_{ST} (Y - t|Y > t)$ para todo $t$.
- $X \leq_{MRL} Y \Leftrightarrow m_X(t) \leq m_Y(t)$, vida media residual.
- $X \leq_{LR} Y \Leftrightarrow f_Y(t)/f_X(t)$ es no decreciente, orden razón de verosimilitudes.
- $X \leq_{LR} Y \Leftrightarrow (X|s < X < t) \leq_{ST} (Y|s < Y < t)$ para $s < t$.

# Ordenes estocásticos

- $X \leq_{ST} Y \Leftrightarrow \overline{F}_X(t) \leq \overline{F}_Y(t)$ orden estocástico.
- $X \leq_{HR} Y \Leftrightarrow h_X(t) \geq h_Y(t)$, orden razón de fallo.
- $X \leq_{HR} Y \Leftrightarrow (X - t|X > t) \leq_{ST} (Y - t|Y > t)$ para todo $t$.
- $X \leq_{MRL} Y \Leftrightarrow m_X(t) \leq m_Y(t)$, vida media residual.
- $X \leq_{LR} Y \Leftrightarrow f_Y(t)/f_X(t)$ es no decreciente, orden razón de verosimilitudes.
- $X \leq_{LR} Y \Leftrightarrow (X|s < X < t) \leq_{ST} (Y|s < Y < t)$ para $s < t$.

# Relaciones entre órdenes

$$
\begin{array}{ccccc}
E(X_{s,t}) \leq E(Y_{s,t}) & \Rightarrow & E(X_t) \leq E(Y_t) & \Rightarrow & E(X) \leq E(Y) \\
\Updownarrow & & \Updownarrow & & \Updownarrow \\
X \leq_{DTM} Y & \Rightarrow & X \leq_{MRL} Y & \Rightarrow & X \leq_{M} Y \\
\Uparrow & & \Uparrow & & \Uparrow \\
X \leq_{LR} Y & \Rightarrow & X \leq_{HR} Y & \Rightarrow & X \leq_{ST} Y \\
\Updownarrow & & \Updownarrow & & \Updownarrow \\
X_{s,t} \leq_{ST} Y_{s,t} & \Rightarrow & X_t \leq_{ST} Y_t & \Rightarrow & \overline{F}_X \leq \overline{F}_Y
\end{array}
$$

donde $Z_t = (Z - t|Z > t)$ y $Z_{s,t} = (Z|s < Z < t)$ (ver Navarro, Belzunce and Ruiz 1997, PEIS).

# Comparaciones usando signaturas

**Theorem (Kochar, Mukerjee and Samaniego (1999))**

*Sean $\mathbf{s}_1$ y $\mathbf{s}_2$ las signaturas de dos sistemas coherentes de orden n,ambos basados en componentes IID con distribución continua común $F$. Sean $T_1$ y $T_2$ sus tiempos de vidas.*
*(a) Si $\mathbf{s}_1 \leq_{ST} \mathbf{s}_2$, entonces $T_1 \leq_{ST} T_2$.*
*(b) Si $\mathbf{s}_1 \leq_{HR} \mathbf{s}_2$, entonces $T_1 \leq_{HR} T_2$.*
*(c) Si $F$ es absolutamente continua y $\mathbf{s}_1 \leq_{LR} \mathbf{s}_2$, entonces $T_1 \leq_{LR} T_2$.*

# Sistemas mezclados

- Un **sistema mezclado** de orden $n$ es una mixtura de sistemas coherentes de orden $n$ (Boland and Samaniego 2004).
- El sistema mezclado obtenido de sistemas con $n$ componentes con signaturas $\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2, \dots, \mathbf{s}_k$ de acuerdo con la distribución de mezcla $\mathbf{p} = (p_1, p_2, \dots, p_k)$ tendrá signatura $\sum_{i=1}^{k} p_i \mathbf{s}_i$.
- De (1.1), cualquier vector en el simplex $\{s \in [0,1]^n : \sum_{i=1}^{n} s_i = 1\}$ determina un sistema mezclado y viceversa.
- Los teoremas de representación y preservación de órdenes se pueden aplicar a los sistemas mezclados.

# Sistemas mezclados

- Un **sistema mezclado** de orden $n$ es una mixtura de sistemas coherentes de orden $n$ (Boland and Samaniego 2004).
- El sistema mezclado obtenido de sistemas con $n$ componentes con signaturas $\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2, \dots, \mathbf{s}_k$ de acuerdo con la distribución de mezcla $\mathbf{p} = (p_1, p_2, \dots, p_k)$ tendrá signatura $\sum_{i=1}^{k} p_i \mathbf{s}_i$.
- De (1.1), cualquier vector en el simplex $\{s \in [0,1]^n : \sum_{i=1}^{n} s_i = 1\}$ determina un sistema mezclado y viceversa.
- Los teoremas de representación y preservación de órdenes se pueden aplicar a los sistemas mezclados.

# Sistemas mezclados

- Un **sistema mezclado** de orden $n$ es una mixtura de sistemas coherentes de orden $n$ (Boland and Samaniego 2004).
- El sistema mezclado obtenido de sistemas con $n$ componentes con signaturas $\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2, \dots, \mathbf{s}_k$ de acuerdo con la distribución de mezcla $\mathbf{p} = (p_1, p_2, \dots, p_k)$ tendrá signatura $\sum_{i=1}^{k} p_i \mathbf{s}_i$.
- De (1.1), cualquier vector en el simplex $\{s \in [0,1]^n : \sum_{i=1}^{n} s_i = 1\}$ determina un sistema mezclado y viceversa.
- Los teoremas de representación y preservación de órdenes se pueden aplicar a los sistemas mezclados.

# Sistemas mezclados

- Un **sistema mezclado** de orden $n$ es una mixtura de sistemas coherentes de orden $n$ (Boland and Samaniego 2004).
- El sistema mezclado obtenido de sistemas con $n$ componentes con signaturas $\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2, \ldots, \mathbf{s}_k$ de acuerdo con la distribución de mezcla $\mathbf{p} = (p_1, p_2, \ldots, p_k)$ tendrá signatura $\sum_{i=1}^{k} p_i \mathbf{s}_i$.
- De (1.1), cualquier vector en el simplex $\{s \in [0,1]^n : \sum_{i=1}^{n} s_i = 1\}$ determina un sistema mezclado y viceversa.
- Los teoremas de representación y preservación de órdenes se pueden aplicar a los sistemas mezclados.

# Resultados nuevos

- Extensiones de las representaciones como mixturas en dos sentidos:
- Representaciones para distribuciones no absolutamente continuas.
- Representaciones de $T = \phi(X_1, X_2, \ldots, X_k)$ en función de $X_{1:n}, \ldots, X_{n:n}$ para $n > k$.
- Comparaciones de sistemas de diferente orden.

# Resultados nuevos

- Extensiones de las representaciones como mixturas en dos sentidos:
- Representaciones para distribuciones no absolutamente continuas.
- Representaciones de $T = \phi(X_1, X_2, \ldots, X_k)$ en función de $X_{1:n}, \ldots, X_{n:n}$ para $n > k$.
- Comparaciones de sistemas de diferente orden.

# Resultados nuevos

- Extensiones de las representaciones como mixturas en dos sentidos:
- Representaciones para distribuciones no absolutamente continuas.
- Representaciones de $T = \phi(X_1, X_2, \dots, X_k)$ en función de $X_{1:n}, \dots, X_{n:n}$ para $n > k$.
- Comparaciones de sistemas de diferente orden.

# Resultados nuevos

- Extensiones de las representaciones como mixturas en dos sentidos:
- Representaciones para distribuciones no absolutamente continuas.
- Representaciones de $T = \phi(X_1, X_2, \dots, X_k)$ en función de $X_{1:n}, \dots, X_{n:n}$ para $n > k$.
- Comparaciones de sistemas de diferente orden.

# Caso $n = 2$

- Hay 2 sistemas coherentes: $X_{1:2}$ and $X_{2:2}$.
- $\overline{F}_1 + \overline{F}_2 = \overline{F}_{1:2} + \overline{F}_{2:2}$.
- IID o EXC: $2\overline{F}_1 = \overline{F}_{1:2} + \overline{F}_{2:2}$.
- Luego $\overline{F}_{2:2} = 2\overline{F}_{1:1} - \overline{F}_{1:2}$.
- Los caminos minimales de $X_{2:2}$ son $P_1 = \{1\}$ y $P_2 = \{2\}$.
- Caso general: $\overline{F}_{2:2} = \overline{F}_1 + \overline{F}_2 - \overline{F}_{1:2}$

# Caso $n = 2$

- Hay 2 sistemas coherentes: $X_{1:2}$ and $X_{2:2}$.
- $\overline{F}_1 + \overline{F}_2 = \overline{F}_{1:2} + \overline{F}_{2:2}$.
- IID o EXC: $2\overline{F}_1 = \overline{F}_{1:2} + \overline{F}_{2:2}$.
- Luego $\overline{F}_{2:2} = 2\overline{F}_{1:1} - \overline{F}_{1:2}$.
- Los caminos minimales de $X_{2:2}$ son $P_1 = \{1\}$ y $P_2 = \{2\}$.
- Caso general: $\overline{F}_{2:2} = \overline{F}_1 + \overline{F}_2 - \overline{F}_{1:2}$

# Caso $n = 2$

- Hay 2 sistemas coherentes: $X_{1:2}$ and $X_{2:2}$.
- $\overline{F}_1 + \overline{F}_2 = \overline{F}_{1:2} + \overline{F}_{2:2}$.
- IID o EXC: $2\overline{F}_1 = \overline{F}_{1:2} + \overline{F}_{2:2}$.
- Luego $\overline{F}_{2:2} = 2\overline{F}_{1:1} - \overline{F}_{1:2}$.
- Los caminos minimales de $X_{2:2}$ son $P_1 = \{1\}$ y $P_2 = \{2\}$.
- Caso general: $\overline{F}_{2:2} = \overline{F}_1 + \overline{F}_2 - \overline{F}_{1:2}$

# Caso $n = 2$

- Hay 2 sistemas coherentes: $X_{1:2}$ and $X_{2:2}$.
- $\overline{F}_1 + \overline{F}_2 = \overline{F}_{1:2} + \overline{F}_{2:2}$.
- IID o EXC: $2\overline{F}_1 = \overline{F}_{1:2} + \overline{F}_{2:2}$.
- Luego $\overline{F}_{2:2} = 2\overline{F}_{1:1} - \overline{F}_{1:2}$.
- Los caminos minimales de $X_{2:2}$ son $P_1 = \{1\}$ y $P_2 = \{2\}$.
- Caso general: $\overline{F}_{2:2} = \overline{F}_1 + \overline{F}_2 - \overline{F}_{1:2}$

# Caso $n = 2$

- Hay 2 sistemas coherentes: $X_{1:2}$ and $X_{2:2}$.
- $\overline{F}_1 + \overline{F}_2 = \overline{F}_{1:2} + \overline{F}_{2:2}$.
- IID o EXC: $2\overline{F}_1 = \overline{F}_{1:2} + \overline{F}_{2:2}$.
- Luego $\overline{F}_{2:2} = 2\overline{F}_{1:1} - \overline{F}_{1:2}$.
- Los caminos minimales de $X_{2:2}$ son $P_1 = \{1\}$ y $P_2 = \{2\}$.
- Caso general: $\overline{F}_{2:2} = \overline{F}_1 + \overline{F}_2 - \overline{F}_{1:2}$

## Caso $n = 2$

- Hay 2 sistemas coherentes: $X_{1:2}$ and $X_{2:2}$.
- $\overline{F}_1 + \overline{F}_2 = \overline{F}_{1:2} + \overline{F}_{2:2}$.
- IID o EXC: $2\overline{F}_1 = \overline{F}_{1:2} + \overline{F}_{2:2}$.
- Luego $\overline{F}_{2:2} = 2\overline{F}_{1:1} - \overline{F}_{1:2}$.
- Los caminos minimales de $X_{2:2}$ son $P_1 = \{1\}$ y $P_2 = \{2\}$.
- Caso general: $\overline{F}_{2:2} = \overline{F}_1 + \overline{F}_2 - \overline{F}_{1:2}$

# Caso $n = 3$

- Hay 5 sistemas coherentes: $X_{1:3}$, $X_{2:3}$, $X_{3:3}$, $T = \min(X_1, \max(X_2, X_3))$ y $T^D = \max(X_1, \min(X_2, X_3))$.
- $\overline{F}_{1:3} = \overline{F}_{1:3}$.
- Los caminos minimales de $X_{2:3}$ son $\{1,2\}$, $\{1,3\}$ y $\{2,3\}$.
- Luego $\overline{F}_{2:3} = \overline{F}_{\{1,2\}} + \overline{F}_{\{1,3\}} + \overline{F}_{\{2,3\}} - 2\overline{F}_{1:3}$.
- IID o EXC: $\overline{F}_{2:3} = 3\overline{F}_{1:2} - 2\overline{F}_{1:3}$
- La signatura minimal de $X_{2:3}$ es $(0, 3, -2)$.
- Para $X_{3:3}$: $\overline{F}_{3:3} = 3\overline{F}_{1:1} - 3\overline{F}_{2:3} + \overline{F}_{1:3}$.
- La signatura minimal de $X_{3:3}$ es $(3, -3, 1)$.

# Caso $n = 3$

- Hay 5 sistemas coherentes: $X_{1:3}$, $X_{2:3}$,$X_{3:3}$, $T = \min(X_1, \max(X_2, X_3))$ y $T^D = \max(X_1, \min(X_2, X_3))$.
- $\overline{F}_{1:3} = \overline{F}_{1:3}$.
- Los caminos minimales de $X_{2:3}$ son $\{1,2\}$, $\{1,3\}$ y $\{2,3\}$.
- Luego $\overline{F}_{2:3} = \overline{F}_{\{1,2\}} + \overline{F}_{\{1,3\}} + \overline{F}_{\{2,3\}} - 2\overline{F}_{1:3}$.
- IID o EXC: $\overline{F}_{2:3} = 3\overline{F}_{1:2} - 2\overline{F}_{1:3}$
- La signatura minimal de $X_{2:3}$ es $(0, 3, -2)$.
- Para $X_{3:3}$: $\overline{F}_{3:3} = 3\overline{F}_{1:1} - 3\overline{F}_{2:3} + \overline{F}_{1:3}$.
- La signatura minimal de $X_{3:3}$ es $(3, -3, 1)$.

# Caso $n = 3$

- Hay 5 sistemas coherentes: $X_{1:3}$, $X_{2:3}$,$X_{3:3}$, $T = \min(X_1, \max(X_2, X_3))$ y $T^D = \max(X_1, \min(X_2, X_3))$.
- $\overline{F}_{1:3} = \overline{F}_{1:3}$.
- Los caminos minimales de $X_{2:3}$ son $\{1,2\}$, $\{1,3\}$ y $\{2,3\}$.
- Luego $\overline{F}_{2:3} = \overline{F}_{\{1,2\}} + \overline{F}_{\{1,3\}} + \overline{F}_{\{2,3\}} - 2\overline{F}_{1:3}$.
- IID o EXC: $\overline{F}_{2:3} = 3\overline{F}_{1:2} - 2\overline{F}_{1:3}$
- La signatura minimal de $X_{2:3}$ es $(0, 3, -2)$.
- Para $X_{3:3}$: $\overline{F}_{3:3} = 3\overline{F}_{1:1} - 3\overline{F}_{2:3} + \overline{F}_{1:3}$.
- La signatura minimal de $X_{3:3}$ es $(3, -3, 1)$.

# Caso $n = 3$

- Hay 5 sistemas coherentes: $X_{1:3}$, $X_{2:3}$,$X_{3:3}$, $T = \min(X_1, \max(X_2, X_3))$ y $T^D = \max(X_1, \min(X_2, X_3))$.
- $\overline{F}_{1:3} = \overline{F}_{1:3}$.
- Los caminos minimales de $X_{2:3}$ son $\{1,2\}$, $\{1,3\}$ y $\{2,3\}$.
- Luego $\overline{F}_{2:3} = \overline{F}_{\{1,2\}} + \overline{F}_{\{1,3\}} + \overline{F}_{\{2,3\}} - 2\overline{F}_{1:3}$.
- IID o EXC: $\overline{F}_{2:3} = 3\overline{F}_{1:2} - 2\overline{F}_{1:3}$
- La signatura minimal de $X_{2:3}$ es $(0, 3, -2)$.
- Para $X_{3:3}$: $\overline{F}_{3:3} = 3\overline{F}_{1:1} - 3\overline{F}_{2:3} + \overline{F}_{1:3}$.
- La signatura minimal de $X_{3:3}$ es $(3, -3, 1)$.

# Caso $n = 3$

- Hay 5 sistemas coherentes: $X_{1:3}$, $X_{2:3}$,$X_{3:3}$, $T = \min(X_1, \max(X_2, X_3))$ y $T^D = \max(X_1, \min(X_2, X_3))$.
- $\overline{F}_{1:3} = \overline{F}_{1:3}$.
- Los caminos minimales de $X_{2:3}$ son $\{1,2\}$, $\{1,3\}$ y $\{2,3\}$.
- Luego $\overline{F}_{2:3} = \overline{F}_{\{1,2\}} + \overline{F}_{\{1,3\}} + \overline{F}_{\{2,3\}} - 2\overline{F}_{1:3}$.
- IID o EXC: $\overline{F}_{2:3} = 3\overline{F}_{1:2} - 2\overline{F}_{1:3}$
- La signatura minimal de $X_{2:3}$ es $(0, 3, -2)$.
- Para $X_{3:3}$: $\overline{F}_{3:3} = 3\overline{F}_{1:1} - 3\overline{F}_{2:3} + \overline{F}_{1:3}$.
- La signatura minimal de $X_{3:3}$ es $(3, -3, 1)$.

# Caso $n = 3$

- Hay 5 sistemas coherentes: $X_{1:3}$, $X_{2:3}$,$X_{3:3}$, $T = \min(X_1, \max(X_2, X_3))$ y $T^D = \max(X_1, \min(X_2, X_3))$.
- $\overline{F}_{1:3} = \overline{F}_{1:3}$.
- Los caminos minimales de $X_{2:3}$ son $\{1, 2\}$, $\{1, 3\}$ y $\{2, 3\}$.
- Luego $\overline{F}_{2:3} = \overline{F}_{\{1,2\}} + \overline{F}_{\{1,3\}} + \overline{F}_{\{2,3\}} - 2\overline{F}_{1:3}$.
- IID o EXC: $\overline{F}_{2:3} = 3\overline{F}_{1:2} - 2\overline{F}_{1:3}$
- La signatura minimal de $X_{2:3}$ es $(0, 3, -2)$.
- Para $X_{3:3}$: $\overline{F}_{3:3} = 3\overline{F}_{1:1} - 3\overline{F}_{2:3} + \overline{F}_{1:3}$.
- La signatura minimal de $X_{3:3}$ es $(3, -3, 1)$.

# Caso $n = 3$

- Hay 5 sistemas coherentes: $X_{1:3}$, $X_{2:3}$,$X_{3:3}$, $T = \min(X_1, \max(X_2, X_3))$ y $T^D = \max(X_1, \min(X_2, X_3))$.
- $\overline{F}_{1:3} = \overline{F}_{1:3}$.
- Los caminos minimales de $X_{2:3}$ son $\{1, 2\}$, $\{1, 3\}$ y $\{2, 3\}$.
- Luego $\overline{F}_{2:3} = \overline{F}_{\{1,2\}} + \overline{F}_{\{1,3\}} + \overline{F}_{\{2,3\}} - 2\overline{F}_{1:3}$.
- IID o EXC: $\overline{F}_{2:3} = 3\overline{F}_{1:2} - 2\overline{F}_{1:3}$
- La signatura minimal de $X_{2:3}$ es $(0, 3, -2)$.
- Para $X_{3:3}$: $\overline{F}_{3:3} = 3\overline{F}_{1:1} - 3\overline{F}_{2:3} + \overline{F}_{1:3}$.
- La signatura minimal de $X_{3:3}$ es $(3, -3, 1)$.

# Caso $n = 3$

- Hay 5 sistemas coherentes: $X_{1:3}$, $X_{2:3}$,$X_{3:3}$, $T = \min(X_1, \max(X_2, X_3))$ y $T^D = \max(X_1, \min(X_2, X_3))$.
- $\overline{F}_{1:3} = \overline{F}_{1:3}$.
- Los caminos minimales de $X_{2:3}$ son $\{1, 2\}$, $\{1, 3\}$ y $\{2, 3\}$.
- Luego $\overline{F}_{2:3} = \overline{F}_{\{1,2\}} + \overline{F}_{\{1,3\}} + \overline{F}_{\{2,3\}} - 2\overline{F}_{1:3}$.
- IID o EXC: $\overline{F}_{2:3} = 3\overline{F}_{1:2} - 2\overline{F}_{1:3}$
- La signatura minimal de $X_{2:3}$ es $(0, 3, -2)$.
- Para $X_{3:3}$: $\overline{F}_{3:3} = 3\overline{F}_{1:1} - 3\overline{F}_{2:3} + \overline{F}_{1:3}$.
- La signatura minimal de $X_{3:3}$ es $(3, -3, 1)$.

# Caso $n = 3$

- Los caminos minimales de $T = \min(X_1, \max(X_2, X_3))$ son $\{1, 2\}$ y $\{1, 3\}$.
- Luego: $\overline{F}_T = \overline{F}_{\{1,2\}} + \overline{F}_{\{1,3\}} - \overline{F}_{1:3}$.
- IID o EXC: $\overline{F}_T = 2\overline{F}_{1:2} - \overline{F}_{1:3}$.
- La signatura minimal de $T$ es $(0, 2, -1)$.
- Recordemos que $\overline{F}_{2:3} = 3\overline{F}_{1:2} - 2\overline{F}_{1:3}$.
- Luego: $\overline{F}_{1:2} = \frac{2}{3}\overline{F}_{1:3} + \frac{1}{3}\overline{F}_{2:3}$ (Regla del triángulo).
- Luego: $\overline{F}_T = \frac{1}{3}\overline{F}_{1:3} + \frac{2}{3}\overline{F}_{2:3}$
- $(1/3, 2/3, 0)$ es la signatura de $T$ en el caso abs. cont. IID o EXC.
- Sin embargo, $P(T = X_{1:3})$ no es necesariamente igual a $1/3$.

# Caso $n = 3$

- Los caminos minimales de $T = \min(X_1, \max(X_2, X_3))$ son $\{1, 2\}$ y $\{1, 3\}$.
- Luego: $\overline{F}_T = \overline{F}_{\{1,2\}} + \overline{F}_{\{1,3\}} - \overline{F}_{1:3}$.
- IID o EXC: $\overline{F}_T = 2\overline{F}_{1:2} - \overline{F}_{1:3}$.
- La signatura minimal de $T$ es $(0, 2, -1)$.
- Recordemos que $\overline{F}_{2:3} = 3\overline{F}_{1:2} - 2\overline{F}_{1:3}$.
- Luego: $\overline{F}_{1:2} = \frac{2}{3}\overline{F}_{1:3} + \frac{1}{3}\overline{F}_{2:3}$ (Regla del triángulo).
- Luego: $\overline{F}_T = \frac{1}{3}\overline{F}_{1:3} + \frac{2}{3}\overline{F}_{2:3}$
- $(1/3, 2/3, 0)$ es la signatura de $T$ en el caso abs. cont. IID o EXC.
- Sin embargo, $P(T = X_{1:3})$ no es necesariamente igual a $1/3$.

# Caso $n = 3$

- Los caminos minimales de $T = \min(X_1, \max(X_2, X_3))$ son $\{1, 2\}$ y $\{1, 3\}$.
- Luego: $\overline{F}_T = \overline{F}_{\{1,2\}} + \overline{F}_{\{1,3\}} - \overline{F}_{1:3}$.
- IID o EXC: $\overline{F}_T = 2\overline{F}_{1:2} - \overline{F}_{1:3}$.
- La signatura minimal de $T$ es $(0, 2, -1)$.
- Recordemos que $\overline{F}_{2:3} = 3\overline{F}_{1:2} - 2\overline{F}_{1:3}$.
- Luego: $\overline{F}_{1:2} = \frac{2}{3}\overline{F}_{1:3} + \frac{1}{3}\overline{F}_{2:3}$ (Regla del triángulo).
- Luego: $\overline{F}_T = \frac{1}{3}\overline{F}_{1:3} + \frac{2}{3}\overline{F}_{2:3}$
- $(1/3, 2/3, 0)$ es la signatura de $T$ en el caso abs. cont. IID o EXC.
- Sin embargo, $P(T = X_{1:3})$ no es necesariamente igual a $1/3$.

# Caso $n = 3$

- Los caminos minimales de $T = \min(X_1, \max(X_2, X_3))$ son $\{1,2\}$ y $\{1,3\}$.
- Luego: $\overline{F}_T = \overline{F}_{\{1,2\}} + \overline{F}_{\{1,3\}} - \overline{F}_{1:3}$.
- IID o EXC: $\overline{F}_T = 2\overline{F}_{1:2} - \overline{F}_{1:3}$.
- La signatura minimal de $T$ es $(0, 2, -1)$.
- Recordemos que $\overline{F}_{2:3} = 3\overline{F}_{1:2} - 2\overline{F}_{1:3}$.
- Luego: $\overline{F}_{1:2} = \frac{2}{3}\overline{F}_{1:3} + \frac{1}{3}\overline{F}_{2:3}$ (Regla del triángulo).
- Luego: $\overline{F}_T = \frac{1}{3}\overline{F}_{1:3} + \frac{2}{3}\overline{F}_{2:3}$
- $(1/3, 2/3, 0)$ es la signatura de $T$ en el caso abs. cont. IID o EXC.
- Sin embargo, $P(T = X_{1:3})$ no es necesariamente igual a $1/3$.

# Caso $n = 3$

- Los caminos minimales de $T = \min(X_1, \max(X_2, X_3))$ son $\{1, 2\}$ y $\{1, 3\}$.
- Luego: $\overline{F}_T = \overline{F}_{\{1,2\}} + \overline{F}_{\{1,3\}} - \overline{F}_{1:3}$.
- IID o EXC: $\overline{F}_T = 2\overline{F}_{1:2} - \overline{F}_{1:3}$.
- La signatura minimal de $T$ es $(0, 2, -1)$.
- Recordemos que $\overline{F}_{2:3} = 3\overline{F}_{1:2} - 2\overline{F}_{1:3}$.
- Luego: $\overline{F}_{1:2} = \frac{2}{3}\overline{F}_{1:3} + \frac{1}{3}\overline{F}_{2:3}$ (Regla del triángulo).
- Luego: $\overline{F}_T = \frac{1}{3}\overline{F}_{1:3} + \frac{2}{3}\overline{F}_{2:3}$
- $(1/3, 2/3, 0)$ es la signatura de $T$ en el caso abs. cont. IID o EXC.
- Sin embargo, $P(T = X_{1:3})$ no es necesariamente igual a $1/3$.

# Caso $n = 3$

- Los caminos minimales de $T = \min(X_1, \max(X_2, X_3))$ son $\{1,2\}$ y $\{1,3\}$.
- Luego: $\overline{F}_T = \overline{F}_{\{1,2\}} + \overline{F}_{\{1,3\}} - \overline{F}_{1:3}$.
- IID o EXC: $\overline{F}_T = 2\overline{F}_{1:2} - \overline{F}_{1:3}$.
- La signatura minimal de $T$ es $(0, 2, -1)$.
- Recordemos que $\overline{F}_{2:3} = 3\overline{F}_{1:2} - 2\overline{F}_{1:3}$.
- Luego: $\overline{F}_{1:2} = \frac{2}{3}\overline{F}_{1:3} + \frac{1}{3}\overline{F}_{2:3}$ (Regla del triángulo).
- Luego: $\overline{F}_T = \frac{1}{3}\overline{F}_{1:3} + \frac{2}{3}\overline{F}_{2:3}$
- $(1/3, 2/3, 0)$ es la signatura de $T$ en el caso abs. cont. IID o EXC.
- Sin embargo, $P(T = X_{1:3})$ no es necesariamente igual a $1/3$.

# Caso $n = 3$

- Los caminos minimales de $T = \min(X_1, \max(X_2, X_3))$ son $\{1,2\}$ y $\{1,3\}$.
- Luego: $\overline{F}_T = \overline{F}_{\{1,2\}} + \overline{F}_{\{1,3\}} - \overline{F}_{1:3}$.
- IID o EXC: $\overline{F}_T = 2\overline{F}_{1:2} - \overline{F}_{1:3}$.
- La signatura minimal de $T$ es $(0, 2, -1)$.
- Recordemos que $\overline{F}_{2:3} = 3\overline{F}_{1:2} - 2\overline{F}_{1:3}$.
- Luego: $\overline{F}_{1:2} = \frac{2}{3}\overline{F}_{1:3} + \frac{1}{3}\overline{F}_{2:3}$ (Regla del triángulo).
- Luego: $\overline{F}_T = \frac{1}{3}\overline{F}_{1:3} + \frac{2}{3}\overline{F}_{2:3}$
- $(1/3, 2/3, 0)$ es la signatura de $T$ en el caso abs. cont. IID o EXC.
- Sin embargo, $P(T = X_{1:3})$ no es necesariamente igual a $1/3$.

# Caso $n = 3$

- Los caminos minimales de $T = \min(X_1, \max(X_2, X_3))$ son $\{1, 2\}$ y $\{1, 3\}$.
- Luego: $\overline{F}_T = \overline{F}_{\{1,2\}} + \overline{F}_{\{1,3\}} - \overline{F}_{1:3}$.
- IID o EXC: $\overline{F}_T = 2\overline{F}_{1:2} - \overline{F}_{1:3}$.
- La signatura minimal de $T$ es $(0, 2, -1)$.
- Recordemos que $\overline{F}_{2:3} = 3\overline{F}_{1:2} - 2\overline{F}_{1:3}$.
- Luego: $\overline{F}_{1:2} = \frac{2}{3}\overline{F}_{1:3} + \frac{1}{3}\overline{F}_{2:3}$ (Regla del triángulo).
- Luego: $\overline{F}_T = \frac{1}{3}\overline{F}_{1:3} + \frac{2}{3}\overline{F}_{2:3}$
- $(1/3, 2/3, 0)$ es la signatura de $T$ en el caso abs. cont. IID o EXC.
- Sin embargo, $P(T = X_{1:3})$ no es necesariamente igual a $1/3$.

# Caso $n = 3$

- Los caminos minimales de $T = \min(X_1, \max(X_2, X_3))$ son $\{1,2\}$ y $\{1,3\}$.
- Luego: $\overline{F}_T = \overline{F}_{\{1,2\}} + \overline{F}_{\{1,3\}} - \overline{F}_{1:3}$.
- IID o EXC: $\overline{F}_T = 2\overline{F}_{1:2} - \overline{F}_{1:3}$.
- La signatura minimal de $T$ es $(0, 2, -1)$.
- Recordemos que $\overline{F}_{2:3} = 3\overline{F}_{1:2} - 2\overline{F}_{1:3}$.
- Luego: $\overline{F}_{1:2} = \frac{2}{3}\overline{F}_{1:3} + \frac{1}{3}\overline{F}_{2:3}$ (Regla del triángulo).
- Luego: $\overline{F}_T = \frac{1}{3}\overline{F}_{1:3} + \frac{2}{3}\overline{F}_{2:3}$
- $(1/3, 2/3, 0)$ es la signatura de $T$ en el caso abs. cont. IID o EXC.
- Sin embargo, $P(T = X_{1:3})$ no es necesariamente igual a $1/3$.

# Resultado principal-EXC

**Theorem**

*Si $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ es EXC y $T = \phi(X_1, X_2, \ldots, X_n)$, entonces*

$$\overline{F}_T = \sum_{i=1}^{n} s_i \overline{F}_{i:n}, \tag{2.1}$$

*donde $(s_1, s_2, \ldots, s_n)$ es la signatura de $T$ en el caso IID con distribución continua.*

Nótese que $s_i \neq P(T = X_{i:n})$ pero que

$$s_i = \frac{1}{n!} \sum_{\sigma} 1(\sigma \in A_i)$$

$A_i = \{\sigma : \phi(x_1, \ldots, x_n) = x_{i:n},$ donde $x_{\sigma(1)} < \ldots < x_{\sigma(1)}\}$.

# Resultado principal-EXC-Demostración

- De (1.3): $(\overline{F}_{1:n},\dots,\overline{F}_{n:n})' = A_n(\overline{F}_{1:1},\dots,\overline{F}_{1:n})'$
- $A_n$ es una matriz triangular sin ceros en la diagonal.
- Luego $|A_n| \neq 0$ y $A_n^{-1}$ existe.
- De (1.2): $\overline{F}_T$ se puede escribir como una combinación lineal de $\overline{F}_{1:i}$, $i = 1, 2, \dots, n$.
- Luego: $\overline{F}_T$ se puede escribir como una combinación lineal de $\overline{F}_{i:n}$, $i = 1, 2, \dots, n$.
- Los coeficientes no dependen de $F$. Luego serán los mismos que en el caso IID con distribución continua.

# Resultado principal-EXC-Demostración

- De (1.3): $(\overline{F}_{1:n}, \ldots, \overline{F}_{n:n})' = A_n(\overline{F}_{1:1}, \ldots, \overline{F}_{1:n})'$
- $A_n$ es una matriz triangular sin ceros en la diagonal.
- Luego $|A_n| \neq 0$ y $A_n^{-1}$ existe.
- De (1.2): $\overline{F}_T$ se puede escribir como una combinación lineal de $\overline{F}_{1:i}$, $i = 1, 2, \ldots, n$.
- Luego: $\overline{F}_T$ se puede escribir como una combinación lineal de $\overline{F}_{i:n}$, $i = 1, 2, \ldots, n$.
- Los coeficientes no dependen de $F$. Luego serán los mismos que en el caso IID con distribución continua.

# Resultado principal-EXC-Demostración

- De (1.3): $(\overline{F}_{1:n}, \dots, \overline{F}_{n:n})' = A_n(\overline{F}_{1:1}, \dots, \overline{F}_{1:n})'$
- $A_n$ es una matriz triangular sin ceros en la diagonal.
- Luego $|A_n| \neq 0$ y $A_n^{-1}$ existe.
- De (1.2): $\overline{F}_T$ se puede escribir como una combinación lineal de $\overline{F}_{1:i}$, $i = 1, 2, \dots, n$.
- Luego: $\overline{F}_T$ se puede escribir como una combinación lineal de $\overline{F}_{i:n}$, $i = 1, 2, \dots, n$.
- Los coeficientes no dependen de $F$. Luego serán los mismos que en el caso IID con distribución continua.

# Resultado principal-EXC-Demostración

- De (1.3): $(\overline{F}_{1:n},\dots,\overline{F}_{n:n})' = A_n(\overline{F}_{1:1},\dots,\overline{F}_{1:n})'$
- $A_n$ es una matriz triangular sin ceros en la diagonal.
- Luego $|A_n| \neq 0$ y $A_n^{-1}$ existe.
- De (1.2): $\overline{F}_T$ se puede escribir como una combinación lineal de $\overline{F}_{1:i}$, $i = 1,2,\dots,n$.
- Luego: $\overline{F}_T$ se puede escribir como una combinación lineal de $\overline{F}_{i:n}$, $i = 1,2,\dots,n$.
- Los coeficientes no dependen de $F$. Luego serán los mismos que en el caso IID con distribución continua.

# Resultado principal-EXC-Demostración

- De (1.3): $(\overline{F}_{1:n}, \ldots, \overline{F}_{n:n})' = A_n(\overline{F}_{1:1}, \ldots, \overline{F}_{1:n})'$
- $A_n$ es una matriz triangular sin ceros en la diagonal.
- Luego $|A_n| \neq 0$ y $A_n^{-1}$ existe.
- De (1.2): $\overline{F}_T$ se puede escribir como una combinación lineal de $\overline{F}_{1:i}$, $i = 1, 2, \ldots, n$.
- Luego: $\overline{F}_T$ se puede escribir como una combinación lineal de $\overline{F}_{i:n}$, $i = 1, 2, \ldots, n$.
- Los coeficientes no dependen de $F$. Luego serán los mismos que en el caso IID con distribución continua.

# Resultado principal-EXC-Demostración

- De (1.3): $(\overline{F}_{1:n},\dots,\overline{F}_{n:n})' = A_n(\overline{F}_{1:1},\dots,\overline{F}_{1:n})'$
- $A_n$ es una matriz triangular sin ceros en la diagonal.
- Luego $|A_n| \neq 0$ y $A_n^{-1}$ existe.
- De (1.2): $\overline{F}_T$ se puede escribir como una combinación lineal de $\overline{F}_{1:i}$, $i = 1, 2, \dots, n$.
- Luego: $\overline{F}_T$ se puede escribir como una combinación lineal de $\overline{F}_{i:n}$, $i = 1, 2, \dots, n$.
- Los coeficientes no dependen de $F$. Luego serán los mismos que en el caso IID con distribución continua.

# Representaciones de sistemas de diferente orden

- Recordemos que en el caso IID: $2\overline{F}_{1:1} = \overline{F}_{1:2} + \overline{F}_{2:2}$.
- Luego: $\overline{F}_{1:1} = \frac{1}{2}\overline{F}_{1:2} + \frac{1}{2}\overline{F}_{2:2}$.
- En general, como $\overline{F}_1 + \ldots + \overline{F}_n = \overline{F}_{1:n} + \ldots + \overline{F}_{n:n}$, entonces

$$\overline{F}_{1:1} = \frac{1}{n}\overline{F}_{1:n} + \ldots + \frac{1}{n}\overline{F}_{n:n}. \tag{3.1}$$

- Recordemos que $\overline{F}_{1:2} = \frac{2}{3}\overline{F}_{1:3} + \frac{1}{3}\overline{F}_{2:3}$ (Regla del Triángulo).
- Análogamente, $\overline{F}_{2:2} = \frac{1}{3}\overline{F}_{2:3} + \frac{2}{3}\overline{F}_{3:3}$.

# Representaciones de sistemas de diferente orden

- Recordemos que en el caso IID: $2\overline{F}_{1:1} = \overline{F}_{1:2} + \overline{F}_{2:2}$.
- Luego: $\overline{F}_{1:1} = \frac{1}{2}\overline{F}_{1:2} + \frac{1}{2}\overline{F}_{2:2}$.
- En general, como $\overline{F}_1 + \ldots + \overline{F}_n = \overline{F}_{1:n} + \ldots + \overline{F}_{n:n}$, entonces

$$\overline{F}_{1:1} = \frac{1}{n}\overline{F}_{1:n} + \ldots + \frac{1}{n}\overline{F}_{n:n}. \tag{3.1}$$

- Recordemos que $\overline{F}_{1:2} = \frac{2}{3}\overline{F}_{1:3} + \frac{1}{3}\overline{F}_{2:3}$ (Regla del Triángulo).
- Análogamente, $\overline{F}_{2:2} = \frac{1}{3}\overline{F}_{2:3} + \frac{2}{3}\overline{F}_{3:3}$.

# Representaciones de sistemas de diferente orden

- Recordemos que en el caso IID: $2\overline{F}_{1:1} = \overline{F}_{1:2} + \overline{F}_{2:2}$.
- Luego: $\overline{F}_{1:1} = \frac{1}{2}\overline{F}_{1:2} + \frac{1}{2}\overline{F}_{2:2}$.
- En general, como $\overline{F}_1 + \ldots + \overline{F}_n = \overline{F}_{1:n} + \ldots + \overline{F}_{n:n}$, entonces
$$\overline{F}_{1:1} = \frac{1}{n}\overline{F}_{1:n} + \ldots + \frac{1}{n}\overline{F}_{n:n}. \tag{3.1}$$
- Recordemos que $\overline{F}_{1:2} = \frac{2}{3}\overline{F}_{1:3} + \frac{1}{3}\overline{F}_{2:3}$ (Regla del Triángulo).
- Análogamente, $\overline{F}_{2:2} = \frac{1}{3}\overline{F}_{2:3} + \frac{2}{3}\overline{F}_{3:3}$.

# Representaciones de sistemas de diferente orden

- Recordemos que en el caso IID: $2\overline{F}_{1:1} = \overline{F}_{1:2} + \overline{F}_{2:2}$.
- Luego: $\overline{F}_{1:1} = \frac{1}{2}\overline{F}_{1:2} + \frac{1}{2}\overline{F}_{2:2}$.
- En general, como $\overline{F}_1 + \ldots + \overline{F}_n = \overline{F}_{1:n} + \ldots + \overline{F}_{n:n}$, entonces
$$\overline{F}_{1:1} = \frac{1}{n}\overline{F}_{1:n} + \ldots + \frac{1}{n}\overline{F}_{n:n}. \tag{3.1}$$
- Recordemos que $\overline{F}_{1:2} = \frac{2}{3}\overline{F}_{1:3} + \frac{1}{3}\overline{F}_{2:3}$ (Regla del Triángulo).
- Análogamente, $\overline{F}_{2:2} = \frac{1}{3}\overline{F}_{2:3} + \frac{2}{3}\overline{F}_{3:3}$.

# Representaciones de sistemas de diferente orden

- Recordemos que en el caso IID: $2\overline{F}_{1:1} = \overline{F}_{1:2} + \overline{F}_{2:2}$.
- Luego: $\overline{F}_{1:1} = \frac{1}{2}\overline{F}_{1:2} + \frac{1}{2}\overline{F}_{2:2}$.
- En general, como $\overline{F}_1 + \ldots + \overline{F}_n = \overline{F}_{1:n} + \ldots + \overline{F}_{n:n}$, entonces
$$\overline{F}_{1:1} = \frac{1}{n}\overline{F}_{1:n} + \ldots + \frac{1}{n}\overline{F}_{n:n}. \tag{3.1}$$
- Recordemos que $\overline{F}_{1:2} = \frac{2}{3}\overline{F}_{1:3} + \frac{1}{3}\overline{F}_{2:3}$ (Regla del Triángulo).
- Análogamente, $\overline{F}_{2:2} = \frac{1}{3}\overline{F}_{2:3} + \frac{2}{3}\overline{F}_{3:3}$.

# Representaciones de orden *n*

**Theorem**

*Si* $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ *es EXC y* $T = \phi(X_1, X_2, \ldots, X_k)$ *(*$k < n$*), entonces*

$$\overline{F}_T = \sum_{i=1}^{n} s_i(n)\overline{F}_{i:n} \tag{3.2}$$

*donde el vector* $\mathbf{s}(n) = (s_1(n), s_2(n), \ldots, s_n(n))$ *no depende de* $F$*.* $\mathbf{s}(n)$ *es la signatura de orden n de* $T$*.*

# Representaciones de orden $n$-Demostración

- Recordemos que $(\overline{F}_{1:n},\ldots,\overline{F}_{n:n})' = A_n(\overline{F}_{1:1},\ldots,\overline{F}_{1:n})'$
- $A_n$ es una matriz triangular sin ceros en la diagonal.
- Luego $|A_n| \neq 0$ y $A_n^{-1}$ existe.
- De (1.2): $\overline{F}_T$ se puede escribir como combinación lineal de $\overline{F}_{1:i}$, $i = 1, 2, \ldots, k$.
- Luego: $\overline{F}_T$ se puede escribir como combinación lineal de $\overline{F}_{1:i}$, $i = 1, 2, \ldots, n$.
- Luego: $\overline{F}_T$ se puede escribir como combinación lineal de $\overline{F}_{i:n}$, $i = 1, 2, \ldots, n$.
- Los coeficientes no dependen de $F$.

# Representaciones de orden $n$-Demostración

- Recordemos que $(\overline{F}_{1:n},\ldots,\overline{F}_{n:n})' = A_n(\overline{F}_{1:1},\ldots,\overline{F}_{1:n})'$
- $A_n$ es una matriz triangular sin ceros en la diagonal.
- Luego $|A_n| \neq 0$ y $A_n^{-1}$ existe.
- De (1.2): $\overline{F}_T$ se puede escribir como combinación lineal de $\overline{F}_{1:i}$, $i = 1, 2, \ldots, k$.
- Luego: $\overline{F}_T$ se puede escribir como combinación lineal de $\overline{F}_{1:i}$, $i = 1, 2, \ldots, n$.
- Luego: $\overline{F}_T$ se puede escribir como combinación lineal de $\overline{F}_{i:n}$, $i = 1, 2, \ldots, n$.
- Los coeficientes no dependen de $F$.

# Representaciones de orden $n$-Demostración

- Recordemos que $(\overline{F}_{1:n}, \ldots, \overline{F}_{n:n})' = A_n(\overline{F}_{1:1}, \ldots, \overline{F}_{1:n})'$
- $A_n$ es una matriz triangular sin ceros en la diagonal.
- Luego $|A_n| \neq 0$ y $A_n^{-1}$ existe.
- De (1.2): $\overline{F}_T$ se puede escribir como combinación lineal de $\overline{F}_{1:i}$, $i = 1, 2, \ldots, k$.
- Luego: $\overline{F}_T$ se puede escribir como combinación lineal de $\overline{F}_{1:i}$, $i = 1, 2, \ldots, n$.
- Luego: $\overline{F}_T$ se puede escribir como combinación lineal de $\overline{F}_{i:n}$, $i = 1, 2, \ldots, n$.
- Los coeficientes no dependen de $F$.

# Representaciones de orden $n$-Demostración

- Recordemos que $(\overline{F}_{1:n},\dots,\overline{F}_{n:n})' = A_n(\overline{F}_{1:1},\dots,\overline{F}_{1:n})'$
- $A_n$ es una matriz triangular sin ceros en la diagonal.
- Luego $|A_n| \neq 0$ y $A_n^{-1}$ existe.
- De (1.2): $\overline{F}_T$ se puede escribir como combinación lineal de $\overline{F}_{1:i}$, $i = 1, 2, \dots, k$.
- Luego: $\overline{F}_T$ se puede escribir como combinación lineal de $\overline{F}_{1:i}$, $i = 1, 2, \dots, n$.
- Luego: $\overline{F}_T$ se puede escribir como combinación lineal de $\overline{F}_{i:n}$, $i = 1, 2, \dots, n$.
- Los coeficientes no dependen de $F$.

# Representaciones de orden $n$-Demostración

- Recordemos que $(\overline{F}_{1:n},\dots,\overline{F}_{n:n})' = A_n(\overline{F}_{1:1},\dots,\overline{F}_{1:n})'$
- $A_n$ es una matriz triangular sin ceros en la diagonal.
- Luego $|A_n| \neq 0$ y $A_n^{-1}$ existe.
- De (1.2): $\overline{F}_T$ se puede escribir como combinación lineal de $\overline{F}_{1:i}$, $i = 1, 2, \dots, k$.
- Luego: $\overline{F}_T$ se puede escribir como combinación lineal de $\overline{F}_{1:i}$, $i = 1, 2, \dots, n$.
- Luego: $\overline{F}_T$ se puede escribir como combinación lineal de $\overline{F}_{i:n}$, $i = 1, 2, \dots, n$.
- Los coeficientes no dependen de $F$.

# Representaciones de orden $n$-Demostración

- Recordemos que $(\overline{F}_{1:n}, \dots, \overline{F}_{n:n})' = A_n(\overline{F}_{1:1}, \dots, \overline{F}_{1:n})'$
- $A_n$ es una matriz triangular sin ceros en la diagonal.
- Luego $|A_n| \neq 0$ y $A_n^{-1}$ existe.
- De (1.2): $\overline{F}_T$ se puede escribir como combinación lineal de $\overline{F}_{1:i}$, $i = 1, 2, \dots, k$.
- Luego: $\overline{F}_T$ se puede escribir como combinación lineal de $\overline{F}_{1:i}$, $i = 1, 2, \dots, n$.
- Luego: $\overline{F}_T$ se puede escribir como combinación lineal de $\overline{F}_{i:n}$, $i = 1, 2, \dots, n$.
- Los coeficientes no dependen de $F$.

# Representaciones de orden $n$-Demostración

- Recordemos que $(\overline{F}_{1:n},\ldots,\overline{F}_{n:n})' = A_n(\overline{F}_{1:1},\ldots,\overline{F}_{1:n})'$
- $A_n$ es una matriz triangular sin ceros en la diagonal.
- Luego $|A_n| \neq 0$ y $A_n^{-1}$ existe.
- De (1.2): $\overline{F}_T$ se puede escribir como combinación lineal de $\overline{F}_{1:i}$, $i = 1, 2, \ldots, k$.
- Luego: $\overline{F}_T$ se puede escribir como combinación lineal de $\overline{F}_{1:i}$, $i = 1, 2, \ldots, n$.
- Luego: $\overline{F}_T$ se puede escribir como combinación lineal de $\overline{F}_{i:n}$, $i = 1, 2, \ldots, n$.
- Los coeficientes no dependen de $F$.

# Relaciones entre signaturas.

- Si $\mathbf{s}(n) = (s_1, s_2, \ldots, s_n)$ es la signatura de orden $n$ de $T$, entonces $T$ es igual en ley al sistema mezclado con $(n+1)$ componentes con signatura

$$\mathbf{s}(n+1) = \left( \frac{ns_1}{n+1}, \frac{s_1 + (n-1)s_2}{n+1}, \frac{2s_2 + (n-2)s_3}{n+1}, \ldots, \frac{ns_n}{n+1} \right) \tag{3.3}$$

- Aplicando repetidas veces (3.3) se obtiene una fórmula general para $\mathbf{s}(m)$ en función de $\mathbf{s}(n)$ $(n < m)$.
- El teorema de preservación de órdenes se puede aplicar ahora a esos sistemas mezclados para comparar sistemas de diferente orden en el caso EXC.

# Relaciones entre signaturas.

- Si $\mathbf{s}(n) = (s_1, s_2, \ldots, s_n)$ es la signatura de orden $n$ de $T$, entonces $T$ es igual en ley al sistema mezclado con $(n+1)$ componentes con signatura

$$\mathbf{s}(n+1) = \left( \frac{ns_1}{n+1}, \frac{s_1 + (n-1)s_2}{n+1}, \frac{2s_2 + (n-2)s_3}{n+1}, \ldots, \frac{ns_n}{n+1} \right) \tag{3.3}$$

- Aplicando repetidas veces (3.3) se obtiene una fórmula general para $\mathbf{s}(m)$ en función de $\mathbf{s}(n)$ $(n < m)$.
- El teorema de preservación de órdenes se puede aplicar ahora a esos sistemas mezclados para comparar sistemas de diferente orden en el caso EXC.

# Relaciones entre signaturas.

- Si $\mathbf{s}(n) = (s_1, s_2, \dots, s_n)$ es la signatura de orden $n$ de $T$, entonces $T$ es igual en ley al sistema mezclado con $(n+1)$ componentes con signatura

$$\mathbf{s}(n+1) = \left(\frac{ns_1}{n+1}, \frac{s_1 + (n-1)s_2}{n+1}, \frac{2s_2 + (n-2)s_3}{n+1}, \dots, \frac{ns_n}{n+1}\right) \tag{3.3}$$

- Aplicando repetidas veces (3.3) se obtiene una fórmula general para $\mathbf{s}(m)$ en función de $\mathbf{s}(n)$ ($n < m$).
- El teorema de preservación de órdenes se puede aplicar ahora a esos sistemas mezclados para comparar sistemas de diferente orden en el caso EXC.

Table: Signaturas de orden 4 de los sistemas con 1-4 componentes

| | $T = \Phi(X_1, X_2, X_3, X_4)$ | $\mathbf{s}(4)$ |
|---|---|---|
| 1 | $X_{1:1} = X_1$ | $(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4})$ |
| 2 | $X_{1:2} = \min(X_1, X_2)$ (2-serie) | $(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{6}, 0)$ |
| 3 | $X_{2:2} = \max(X_1, X_2)$ (2-paralelo) | $(0, \frac{1}{6}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2})$ |
| 4 | $X_{1:3} = \min(X_1, X_2, X_3)$ (3-serie) | $(\frac{3}{4}, \frac{1}{4}, 0, 0)$ |
| 5 | $\min(X_2, \max(X_1, X_3))$ | $(\frac{1}{4}, \frac{5}{12}, \frac{1}{3}, 0)$ |
| 6 | $X_{2:3}$ (2-out-of-3) | $(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0)$ |
| 7 | $\max(X_2, \min(X_1, X_3))$ | $(0, \frac{1}{3}, \frac{5}{12}, \frac{1}{4})$ |
| 8 | $X_{3:3} = \max(X_1, X_2, X_3)$ (3-paralelo) | $(0, 0, \frac{1}{4}, \frac{3}{4})$ |

Table: Signaturas de orden 4 de los sistemas con 1-4 componentes

| | $T = \Phi(X_1, X_2, X_3, X_4)$ | $\mathbf{s}(4)$ |
|---|---|---|
| 9 | $X_{1:4} = \min(X_1, X_2, X_3, X_4)$ (4-serie) | $(1, 0, 0, 0)$ |
| 10 | $\max(\min(X_1, X_2, X_3), \min(X_2, X_3, X_4))$ | $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0, 0)$ |
| 11 | $\min(X_{2:3}, X_4)$ | $(\frac{1}{4}, \frac{3}{4}, 0, 0)$ |
| 12 | $\min(X_1, \max(X_2, X_3), \max(X_3, X_4))$ | $(\frac{1}{4}, \frac{7}{12}, \frac{1}{6}, 0)$ |
| 13 | $\min(X_1, \max(X_2, X_3, X_4))$ | $(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, 0)$ |
| 14 | $X_{2:4}$ (2-out-of-4) | $(0, 1, 0, 0)$ |
| 15 | $\max(\min(X_1, X_2), \min_{i=1,3,4}(X_i), \min_{i=2,3,4}(X_i))$ | $(0, \frac{5}{6}, \frac{1}{6}, 0)$ |
| 16 | $\max(\min(X_1, X_2), \min(X_3, X_4))$ | $(0, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}, 0)$ |
| 17 | $\max(\min(X_1, X_2), \min(X_1, X_3), \min(X_2, X_3, X_4))$ | $(0, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}, 0)$ |
| 18 | $\max(\min(X_1, X_2), \min(X_2, X_3), \min(X_3, X_4))$ | $(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0)$ |

Table: Signaturas de orden 4 de los sistemas con 1-4 componentes

| | $T = \Phi(X_1, X_2, X_3, X_4)$ | $\mathbf{s}(4)$ |
|---|---|---|
| 19 | $\min(\max(X_1, X_2), \max(X_2, X_3), \max(X_3, X_4))$ | $(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0)$ |
| 20 | $\min(\max(X_1, X_2), \max(X_1, X_3), \max(X_2, X_3, X_4))$ | $(0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 0)$ |
| 21 | $\min(\max(X_1, X_2), \max(X_3, X_4))$ | $(0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 0)$ |
| 22 | $\min(\max(X_1, X_2), \max_{i=1,3,4}(X_i), \max_{i=2,3,4}(X_i))$ | $(0, \frac{1}{6}, \frac{5}{6}, 0)$ |
| 23 | $X_{3:4}$ (3-out-of-4) | $(0, 0, 1, 0)$ |
| 24 | $\max(X_1, \min(X_2, X_3, X_4))$ | $(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4})$ |
| 25 | $\max(X_1, \min(X_2, X_3), \min(X_3, X_4))$ | $(0, \frac{1}{6}, \frac{7}{12}, \frac{1}{4})$ |
| 26 | $\max(X_{2:3}, X_4)$ | $(0, 0, \frac{3}{4}, \frac{1}{4})$ |
| 27 | $\min(\max(X_1, X_2, X_3), \max(X_2, X_3, X_4))$ | $(0, 0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ |
| 28 | $X_{4:4} = \max(X_1, X_2, X_3, X_4)$ (paralelo) | $(0, 0, 0, 1)$ |

# Hipótesis

- En el caso general se cumple:

$$X_{1:n} \leq_{ST} X_{2:n} \leq_{ST} \dots \leq_{ST} X_{n:n} \tag{4.1}$$

- Sin embargo las relaciones similares para el orden HR:

$$X_{1:n} \leq_{HR} X_{2:n} \leq_{HR} \dots \leq_{HR} X_{n:n}, \tag{4.2}$$

- el orden MRL:

$$X_{1:n} \leq_{MRL} X_{2:n} \leq_{MRL} \dots \leq_{MRL} X_{n:n}, \tag{4.3}$$

- y el orden LR:

$$X_{1:n} \leq_{LR} X_{2:n} \leq_{LR} \dots \leq_{LR} X_{n:n}, \tag{4.4}$$

  no son necesariamente ciertas incluso en el caso EXC; ver Navarro and Shaked (JAP 2006), Navarro and Hernandez (Metrika 2008) and Navarro (JSPI 2008).

# Hipótesis

- En el caso general se cumple:

$$X_{1:n} \leq_{ST} X_{2:n} \leq_{ST} \dots \leq_{ST} X_{n:n} \quad (4.1)$$

- Sin embargo las relaciones similares para el orden HR:

$$X_{1:n} \leq_{HR} X_{2:n} \leq_{HR} \dots \leq_{HR} X_{n:n}, \quad (4.2)$$

- el orden MRL:

$$X_{1:n} \leq_{MRL} X_{2:n} \leq_{MRL} \dots \leq_{MRL} X_{n:n}, \quad (4.3)$$

- y el orden LR:

$$X_{1:n} \leq_{LR} X_{2:n} \leq_{LR} \dots \leq_{LR} X_{n:n}, \quad (4.4)$$

no son necesariamente ciertas incluso en el caso EXC; ver Navarro and Shaked (JAP 2006), Navarro and Hernandez (Metrika 2008) and Navarro (JSPI 2008).

# Hipótesis

- En el caso general se cumple:

$$X_{1:n} \leq_{ST} X_{2:n} \leq_{ST} \cdots \leq_{ST} X_{n:n} \tag{4.1}$$

- Sin embargo las relaciones similares para el orden HR:

$$X_{1:n} \leq_{HR} X_{2:n} \leq_{HR} \cdots \leq_{HR} X_{n:n}, \tag{4.2}$$

- el orden MRL:

$$X_{1:n} \leq_{MRL} X_{2:n} \leq_{MRL} \cdots \leq_{MRL} X_{n:n}, \tag{4.3}$$

- y el orden LR:

$$X_{1:n} \leq_{LR} X_{2:n} \leq_{LR} \cdots \leq_{LR} X_{n:n}, \tag{4.4}$$

no son necesariamente ciertas incluso en el caso EXC; ver Navarro and Shaked (JAP 2006), Navarro and Hernandez (Metrika 2008) and Navarro (JSPI 2008).

# Hipótesis

- En el caso general se cumple:

$$X_{1:n} \leq_{ST} X_{2:n} \leq_{ST} \cdots \leq_{ST} X_{n:n} \tag{4.1}$$

- Sin embargo las relaciones similares para el orden HR:

$$X_{1:n} \leq_{HR} X_{2:n} \leq_{HR} \cdots \leq_{HR} X_{n:n}, \tag{4.2}$$

- el orden MRL:

$$X_{1:n} \leq_{MRL} X_{2:n} \leq_{MRL} \cdots \leq_{MRL} X_{n:n}, \tag{4.3}$$

- y el orden LR:

$$X_{1:n} \leq_{LR} X_{2:n} \leq_{LR} \cdots \leq_{LR} X_{n:n}, \tag{4.4}$$

no son necesariamente ciertas incluso en el caso EXC; ver Navarro and Shaked (JAP 2006), Navarro and Hernandez (Metrika 2008) and Navarro (JSPI 2008).

# Comparaciones estocásticas usando signaturas

## Theorem

*Sean $\mathbf{s}_1(n)$ y $\mathbf{s}_2(n)$ las signaturas de orden n de dos sistemas coherentes (o mezclados) de órdenes $n_1$ y $n_2$, ambos basados en componentes con tiempos de vida IID o EXC con la misma distribución conjunta. Sean $T_1$ y $T_2$ sus tiempos de vida.*

*(a) Si $\mathbf{s}_1(n) \leq_{ST} \mathbf{s}_2(n)$, entonces $T_1 \leq_{ST} T_2$.*

*(b) Si $\mathbf{s}_1(n) \leq_{HR} \mathbf{s}_2(n)$ y (4.2) se cumple, entonces $T_1 \leq_{HR} T_2$.*

*(c) Si $\mathbf{s}_1(n) \leq_{HR} \mathbf{s}_2(n)$ y (4.3) se cumple, entonces $T_1 \leq_{MRL} T_2$.*

*(d) Si $\mathbf{s}_1(n) \leq_{LR} \mathbf{s}_2(n)$ y (4.4) se cumple, entonces $T_1 \leq_{LR} T_2$.*

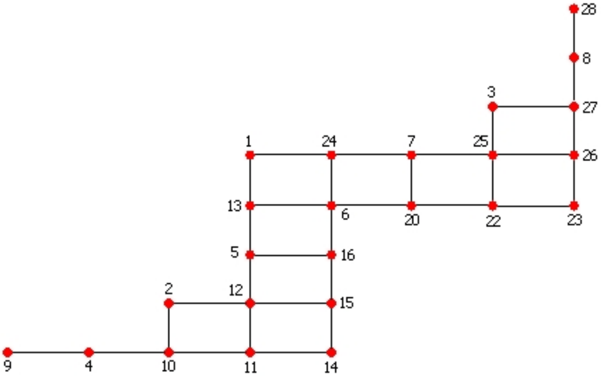



Figure: Comparaciones basadas en el orden ST.

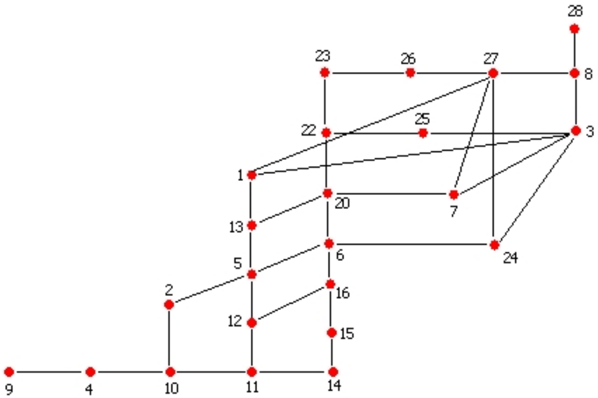



Figure: Comparaciones basadas en el orden HR.

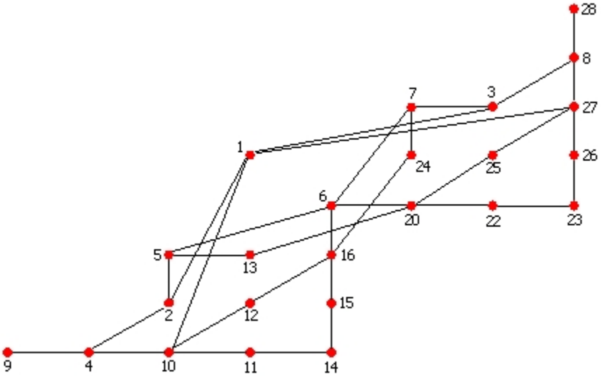



Figure: Comparaciones basadas en el orden LR.

# Conclusiones

- Las representaciones basadas en mixturas de estadísticos ordenados son una buena herramienta para estudiar los sistemas coherentes.
- Las nuevas representaciones permiten manejar en el caso EXC general sistemas de diferentes órdenes.
- En algunos de estos resultados tenemos que suponer que los estadísticos ordenados están ordenados HR, MRL o LR.

# Conclusiones

- Las representaciones basadas en mixturas de estadísticos ordenados son una buena herramienta para estudiar los sistemas coherentes.
- Las nuevas representaciones permiten manejar en el caso EXC general sistemas de diferentes órdenes.
- En algunos de estos resultados tenemos que suponer que los estadísticos ordenados están ordenados HR, MRL o LR.

# Conclusiones

- Las representaciones basadas en mixturas de estadísticos ordenados son una buena herramienta para estudiar los sistemas coherentes.
- Las nuevas representaciones permiten manejar en el caso EXC general sistemas de diferentes órdenes.
- En algunos de estos resultados tenemos que suponer que los estadísticos ordenados están ordenados HR, MRL o LR.

# Cuestiones abiertas

- Condiciones para $X_{i:n} \leq_{HR,MRL,LR} X_{i+1:n}$.
- Condiciones para $X_{1:i} \geq_{HR,MRL,LR} X_{1:i+1}$ (ya hemos obtenido algunas).
- Condiciones para $X_{i:i} \leq_{HR,MRL,LR} X_{i+1:i+1}$.
- Representaciones en el caso no simétrico (INID o caso general).
- Resultados de órdenes para mixturas generalizadas.
- En Navarro y Rubio (2009) hemos obtenido las expresiones y signaturas de los 180 y 16145 sistemas coherentes de 5 y 6 componentes, respectivamente.

# Cuestiones abiertas

- Condiciones para $X_{i:n} \leq_{HR,MRL,LR} X_{i+1:n}$.
- Condiciones para $X_{1:i} \geq_{HR,MRL,LR} X_{1:i+1}$ (ya hemos obtenido algunas).
- Condiciones para $X_{i:i} \leq_{HR,MRL,LR} X_{i+1:i+1}$.
- Representaciones en el caso no simétrico (INID o caso general).
- Resultados de órdenes para mixturas generalizadas.
- En Navarro y Rubio (2009) hemos obtenido las expresiones y signaturas de los 180 y 16145 sistemas coherentes de 5 y 6 componentes, respectivamente.

# Cuestiones abiertas

- Condiciones para $X_{i:n} \leq_{HR,MRL,LR} X_{i+1:n}$.
- Condiciones para $X_{1:i} \geq_{HR,MRL,LR} X_{1:i+1}$ (ya hemos obtenido algunas).
- Condiciones para $X_{i:i} \leq_{HR,MRL,LR} X_{i+1:i+1}$.
- Representaciones en el caso no simétrico (INID o caso general).
- Resultados de órdenes para mixturas generalizadas.
- En Navarro y Rubio (2009) hemos obtenido las expresiones y signaturas de los 180 y 16145 sistemas coherentes de 5 y 6 componentes, respectivamente.

# Cuestiones abiertas

- Condiciones para $X_{i:n} \leq_{HR,MRL,LR} X_{i+1:n}$.
- Condiciones para $X_{1:i} \geq_{HR,MRL,LR} X_{1:i+1}$ (ya hemos obtenido algunas).
- Condiciones para $X_{i:i} \leq_{HR,MRL,LR} X_{i+1:i+1}$.
- Representaciones en el caso no simétrico (INID o caso general).
- Resultados de órdenes para mixturas generalizadas.
- En Navarro y Rubio (2009) hemos obtenido las expresiones y signaturas de los 180 y 16145 sistemas coherentes de 5 y 6 componentes, respectivamente.

# Cuestiones abiertas

- Condiciones para $X_{i:n} \leq_{HR,MRL,LR} X_{i+1:n}$.
- Condiciones para $X_{1:i} \geq_{HR,MRL,LR} X_{1:i+1}$ (ya hemos obtenido algunas).
- Condiciones para $X_{i:i} \leq_{HR,MRL,LR} X_{i+1:i+1}$.
- Representaciones en el caso no simétrico (INID o caso general).
- Resultados de órdenes para mixturas generalizadas.
- En Navarro y Rubio (2009) hemos obtenido las expresiones y signaturas de los 180 y 16145 sistemas coherentes de 5 y 6 componentes, respectivamente.

# Cuestiones abiertas

- Condiciones para $X_{i:n} \leq_{HR,MRL,LR} X_{i+1:n}$.
- Condiciones para $X_{1:i} \geq_{HR,MRL,LR} X_{1:i+1}$ (ya hemos obtenido algunas).
- Condiciones para $X_{i:i} \leq_{HR,MRL,LR} X_{i+1:i+1}$.
- Representaciones en el caso no simétrico (INID o caso general).
- Resultados de órdenes para mixturas generalizadas.
- En Navarro y Rubio (2009) hemos obtenido las expresiones y signaturas de los 180 y 16145 sistemas coherentes de 5 y 6 componentes, respectivamente.

# Algunas de nuestras referencias

- Navarro, J. and Shaked, M. (2006). Hazard Rate Ordering of Order Statistics and Systems. J. Appl. Probab. 43, 391-408.
- Navarro, J. and Rychlik, T. (2007). Reliability and expectation bounds for coherent systems with exchangeable components. J. Multivariate Anal. 98, 102-113.
- Navarro, J., Ruiz, J.M. and Sandoval, C.J. (2007). Properties of Coherent Systems with Dependent Components. Comm. Stat.-Theory & Methods 36, 1-17.
- Navarro, J., Rychlik, T. and Shaked, M. (2007). Are the Order Statistics Ordered? A Survey of Recent Results. Comm. Stat.-Theory & Methods 36, 1273-1290.

- Navarro, J. and Hernandez, P.J. (2008). Negative mixtures, order statistics and systems. In: *Advances in Mathematical and Statistical Modelling.* Series: Statistics for Industry and Technology. Arnold, B.C.; Balakrishnan, N.; Sarabia, J.M.; Minguez, R. (Eds.) 2008, Birkhauser.
- Navarro, J. and Hernandez, P.J. (2008). Mean residual life functions of finite mixtures and systems, Metrika 277-298.
- Navarro, J. (2008). Likelihood ratio ordering of order statistics, mixtures and systems, J. Stat. Plann. Inference 138 (5), 1242-1257.
- Navarro, J., Samaniego, F., Balakrishnan, N. and Bhattacharya, D. (2008). On the Application and Extension of System Signatures in Engineering Reliability, Naval Research Logistics 55, 313-327.

Navarro, J., Balakrishnan, N. and Samaniego, F.J. (2008). Mixture representations of residual lifetimes of used systems, Journal of Applied Probability 45 (4), 1097-1112.

Navarro, J. and Rubio, R. (2009). Computations of signatures of coherent systems with 5 components, Submitted.

Navarro, J., Spizzichino, F. and Balakrishnan, N. (2009). Applications of average and projected systems to the study of coherent systems, Submitted.