La signatura de un sistema coherente

Jorge L. Navarro Camacho
Departamento de Estadística e Investigación Operativa
Universidad de Murcia

Índice

Conceptos básicos

¿Qué es una signatura?

¿Qué es una signatura?

- Según el DRAE (Diccionario de la Real Academia de la Lengua), la palabra **signatura** tiene cuatro acepciones:

¿Qué es una signatura?

- Según el DRAE (Diccionario de la Real Academia de la Lengua), la palabra **signatura** tiene cuatro acepciones:
- 1. f. Marca o nota puesta en una cosa para distinguirla de otras.

¿Qué es una signatura?

- Según el DRAE (Diccionario de la Real Academia de la Lengua), la palabra **signatura** tiene cuatro acepciones:
- 1. f. Marca o nota puesta en una cosa para distinguirla de otras.
- 2. f. Señal de números y letras que se pone a un libro o a un documento para indicar su colocación dentro de una biblioteca o un archivo.

¿Qué es una signatura?

- Según el DRAE (Diccionario de la Real Academia de la Lengua), la palabra **signatura** tiene cuatro acepciones:
- 1. f. Marca o nota puesta en una cosa para distinguirla de otras.
- 2. f. Señal de números y letras que se pone a un libro o a un documento para indicar su colocación dentro de una biblioteca o un archivo.
- 3. f. Tribunal de la corte pontificia compuesto de varios prelados, en el cual se determinan diversos negocios de gracia o de justicia.

¿Qué es una signatura?

- Según el DRAE (Diccionario de la Real Academia de la Lengua), la palabra **signatura** tiene cuatro acepciones:
- 1. f. Marca o nota puesta en una cosa para distinguirla de otras.
- 2. f. Señal de números y letras que se pone a un libro o a un documento para indicar su colocación dentro de una biblioteca o un archivo.
- 3. f. Tribunal de la corte pontificia compuesto de varios prelados, en el cual se determinan diversos negocios de gracia o de justicia.
- 4. f. Impr. Señal que con las letras del alfabeto o con números se ponía antes al pie de las primeras planas de los pliegos o cuadernos, y hoy solo al pie de la primera de cada uno de estos, para gobierno del encuadernador.

Definición

- ¿Qué es un sistema?

Definición

- ¿Qué es un sistema?
- ¿Qué es un sistema coherente?

Definición

- ¿Qué es un sistema?
- ¿Qué es un sistema coherente?
- Formalmente, un sistema (binario con componentes binarias) es una función booleana

$$\phi : \{0,1\} \times \cdots \times \{0,1\} \to \{0,1\}$$

que a cada vector $(x_1, \ldots, x_n)$ de ceros y unos le asocia un valor $\phi(x_1, \ldots, x_n)$ cero o uno.

Definición

- ¿Qué es un sistema?
- ¿Qué es un sistema coherente?
- Formalmente, un sistema (binario con componentes binarias) es una función booleana

$$\phi : \{0,1\} \times \cdots \times \{0,1\} \to \{0,1\}$$

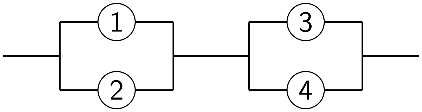
que a cada vector $(x_1, \ldots, x_n)$ de ceros y unos le asocia un valor $\phi(x_1, \ldots, x_n)$ cero o uno.

- Aquí x_i representa el estado de la componente *i*ésima (uno si funciona, cero si no) y $\phi(x_1, \ldots, x_n)$ el estado del sistema (que depende del estado de las componentes).

Figura: Avíon Airbus A340 que puede volar siempre que al menos funcione un motor en cada ala.

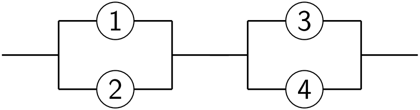
Sistema de motores del avión

- El esquema de este sistema es



Sistema de motores del avión

- El esquema de este sistema es

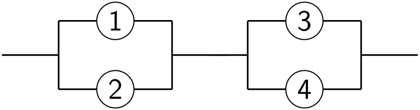


- Su función de estructura es

$$\phi(x_1, x_2, x_3, x_4) = \text{mín}(\text{máx}(x_1, x_2), \text{máx}(x_3, x_4))$$

Sistema de motores del avión

- El esquema de este sistema es



- Su función de estructura es

$$\phi(x_1, x_2, x_3, x_4) = \min(\max(x_1, x_2), \max(x_3, x_4))$$

- Por ejemplo,

$$\phi(0,0,1,1) = \min(\max(0,0), \max(1,1)) = \min(0,1) = 0$$

y

$$\phi(1,0,0,1) = \min(\max(1,0), \max(0,1)) = \min(1,1) = 1.$$

Sistema coherente

- ¿Qué propiedades debe verificar un sistema ϕ para ser un sistema coherente?

Sistema coherente

- ¿Qué propiedades debe verificar un sistema ϕ para ser un sistema coherente?
- (i) $\phi(0,\dots,0)=0$.

Sistema coherente

- ¿Qué propiedades debe verificar un sistema ϕ para ser un sistema coherente?
- (i) $\phi(0, \ldots, 0) = 0$.
- (ii) $\phi(1, \ldots, 1) = 1$.

Sistema coherente

- ¿Qué propiedades debe verificar un sistema ϕ para ser un sistema coherente?
- (i) $\phi(0,\dots,0)=0$.
- (ii) $\phi(1,\dots,1)=1$.
- (iii) ϕ es creciente, es decir,

$$\phi(x_1,\dots,x_n)\le\phi(y_1,\dots,y_n) \text{ si } x_1\le y_1,\dots,x_n\le y_n.$$

Así, el estado del sistema no puede empeorar al mejorar una (o varias) componentes.

Sistema coherente

- ¿Qué propiedades debe verificar un sistema ϕ para ser un sistema coherente?
- (i) $\phi(0,\dots,0)=0$.
- (ii) $\phi(1,\dots,1)=1$.
- (iii) ϕ es creciente, es decir,

$$\phi(x_1,\dots,x_n)\le\phi(y_1,\dots,y_n) \text{ si } x_1\le y_1,\dots,x_n\le y_n.$$

  Así, el estado del sistema no puede empeorar al mejorar una (o varias) componentes.
- Si se cumplen esas propiedades ϕ es un **sistema semicoherente**.

Sistema coherente

- Con la definición anterior $\phi(x_1, x_2) = x_1$ sería un sistema semicoherente.

Sistema coherente

- Con la definición anterior $\phi(x_1, x_2) = x_1$ sería un sistema semicoherente.
- Este sistema tiene una componente irrelevante (no influye en el comportamiento del sistema). Para evitar esto se añade la propiedad:

Sistema coherente

- Con la definición anterior $\phi(x_1, x_2) = x_1$ sería un sistema semicoherente.
- Este sistema tiene una componente irrelevante (no influye en el comportamiento del sistema). Para evitar esto se añade la propiedad:
- (iv) ϕ no tiene componentes irrelevantes;

Sistema coherente

- Con la definición anterior $\phi(x_1, x_2) = x_1$ sería un sistema semicoherente.
- Este sistema tiene una componente irrelevante (no influye en el comportamiento del sistema). Para evitar esto se añade la propiedad:
- (iv) ϕ no tiene componentes irrelevantes;
- (v) ϕ es estrictamente creciente en cada variable en al menos un punto, es decir, para cada i se verifica

$$\phi(x_1, \dots, x_n) < \phi(y_1, \dots, y_n) \text{ para } x_1 = y_1, \dots, x_i < y_i, \dots, x_n = y_n.$$

Sistema coherente

- Con la definición anterior $\phi(x_1, x_2) = x_1$ sería un sistema semicoherente.
- Este sistema tiene una componente irrelevante (no influye en el comportamiento del sistema). Para evitar esto se añade la propiedad:
- (iv) ϕ no tiene componentes irrelevantes;
- (v) ϕ es estrictamente creciente en cada variable en al menos un punto, es decir, para cada i se verifica

$$\phi(x_1, \ldots, x_n) < \phi(y_1, \ldots, y_n) \text{ para } x_1 = y_1, \ldots, x_i < y_i, \ldots, x_n = y_n.$$

- En este caso ϕ es un **sistema coherente**.

Sistema coherente

- Con la definición anterior $\phi(x_1, x_2) = x_1$ sería un sistema semicoherente.
- Este sistema tiene una componente irrelevante (no influye en el comportamiento del sistema). Para evitar esto se añade la propiedad:
- (iv) ϕ no tiene componentes irrelevantes;
- (v) ϕ es estrictamente creciente en cada variable en al menos un punto, es decir, para cada i se verifica

$$\phi(x_1, \ldots, x_n) < \phi(y_1, \ldots, y_n) \text{ para } x_1 = y_1, \ldots, x_i < y_i, \ldots, x_n = y_n.$$

- En este caso ϕ es un **sistema coherente**.
- Basta con que se cumplan (iii) y (v).

Tiempo de vida del sistema

- Queremos estudiar el tiempo de vida T del sistema.

Tiempo de vida del sistema

- Queremos estudiar el tiempo de vida T del sistema.
- Esto es lo que en Probabilidad y Estadística llamamos **variable aleatoria** (v.a.) ya su funcionamiento depende del azar.

Tiempo de vida del sistema

- Queremos estudiar el tiempo de vida T del sistema.
- Esto es lo que en Probabilidad y Estadística llamamos **variable aleatoria** (v.a.) ya su funcionamiento depende del azar.
- Estas variables aleatorias se estudian mediante su **función de distribución** $F(x) = \Pr(T \leq x)$.

Tiempo de vida del sistema

- Queremos estudiar el tiempo de vida T del sistema.
- Esto es lo que en Probabilidad y Estadística llamamos **variable aleatoria** (v.a.) ya su funcionamiento depende del azar.
- Estas variables aleatorias se estudian mediante su **función de distribución** $F(x) = \Pr(T \leq x)$.
- En este contexto se prefiere utilizar la **función de fiabilidad** (o **supervivencia**) $\bar{F}(x) = \Pr(T > x)$.

Tiempo de vida del sistema

- Queremos estudiar el tiempo de vida T del sistema.
- Esto es lo que en Probabilidad y Estadística llamamos **variable aleatoria** (v.a.) ya su funcionamiento depende del azar.
- Estas variables aleatorias se estudian mediante su **función de distribución** $F(x) = \Pr(T \leq x)$.
- En este contexto se prefiere utilizar la **función de fiabilidad** (o **supervivencia**) $\bar{F}(x) = \Pr(T > x)$.
- Obviamente $\bar{F}(x) = 1 - F(x)$.

Tiempos de vida de las componentes

- Lo mismo ocurre con los tiempos de vida de las componentes representados por las v.a. $X_1, \ldots, X_n$.

Tiempos de vida de las componentes

- Lo mismo ocurre con los tiempos de vida de las componentes representados por las v.a. $X_1, \ldots, X_n$.
- Sus funciones de fiabilidad son $\bar{F}_i(x) = \Pr(X_i > x)$ para $i = 1, \ldots, n$.

Tiempos de vida de las componentes

- Lo mismo ocurre con los tiempos de vida de las componentes representados por las v.a. $X_1, \dots, X_n$.
- Sus funciones de fiabilidad son $\bar{F}_i(x) = \Pr(X_i > x)$ para $i = 1, \dots, n$.
- Las componentes son **idénticamente distribuidas** (ID) si $\bar{F}_1 = \dots = \bar{F}_n$.

Tiempos de vida de las componentes

- Lo mismo ocurre con los tiempos de vida de las componentes representados por las v.a. $X_1, \dots, X_n$.
- Sus funciones de fiabilidad son $\bar{F}_i(x) = \Pr(X_i > x)$ para $i = 1, \dots, n$.
- Las componentes son **idénticamente distribuidas** (ID) si $\bar{F}_1 = \cdots = \bar{F}_n$.
- La componentes son **independientes** (I) si el valor de X_i no "afecta" a las otras componentes.

Tiempos de vida de las componentes

- Lo mismo ocurre con los tiempos de vida de las componentes representados por las v.a. $X_1, \ldots, X_n$.
- Sus funciones de fiabilidad son $\bar{F}_i(x) = \Pr(X_i > x)$ para $i = 1, \ldots, n$.
- Las componentes son **idénticamente distribuidas** (ID) si $\bar{F}_1 = \cdots = \bar{F}_n$.
- La componentes son **independientes** (I) si el valor de X_i no "afecta" a las otras componentes.
- Se puede demostrar que la función ϕ se puede extender a los números reales $\phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ de forma que

$$T = \phi(X_1, \ldots, X_n).$$

Estadísticos ordenados

- ¿Qué son los estadísticos ordenados?

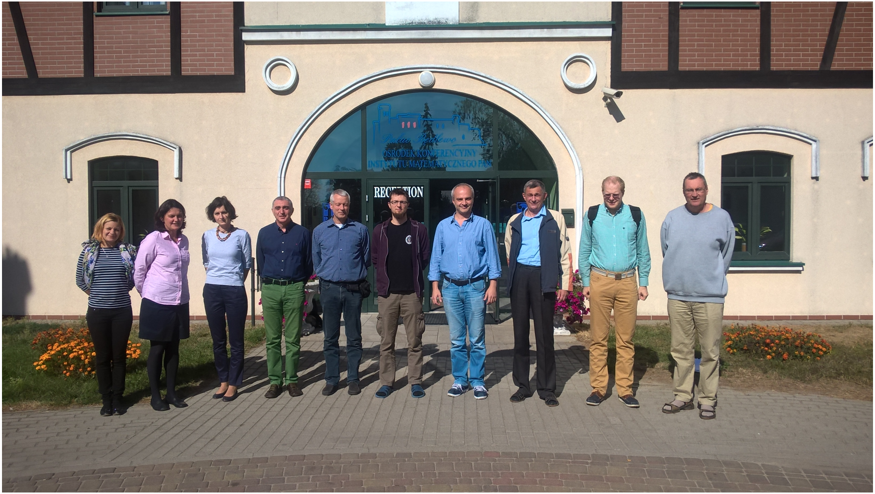


Figura: ¿Estadísticos ordenados? (Bedlewo, Polonia, 2005).

Estadísticos ordenados

- Si $X_1, \ldots, X_n$ es una muestra (son v.a. IID), se llaman **estadísticos ordenados** a sus valores ordenados de menor a mayor $X_{1:n}, \ldots, X_{n:n}$.

Estadísticos ordenados

- Si $X_1, \ldots, X_n$ es una muestra (son v.a. IID), se llaman **estadísticos ordenados** a sus valores ordenados de menor a mayor $X_{1:n}, \ldots, X_{n:n}$.
- Por ejemplo, si la muestra es $2, 4, 1, 1, 5$, entonces

$$X_{1:5} = 1,\ X_{2:5} = 1,\ X_{3:5} = 2,\ X_{4:5} = 4,\ X_{5:5} = 5.$$

Estadísticos ordenados

- Si $X_1, \dots, X_n$ es una muestra (son v.a. IID), se llaman **estadísticos ordenados** a sus valores ordenados de menor a mayor $X_{1:n}, \dots, X_{n:n}$.
- Por ejemplo, si la muestra es $2, 4, 1, 1, 5$, entonces

$$X_{1:5} = 1,\ X_{2:5} = 1,\ X_{3:5} = 2,\ X_{4:5} = 4,\ X_{5:5} = 5.$$

- Sus funciones de fiabilidad son $\bar{F}_{i:n}(x) = \Pr(X_{i:n} > x)$ para $i = 1, \dots, n$.

Estadísticos ordenados

- Si $X_1, \dots, X_n$ es una muestra (son v.a. IID), se llaman **estadísticos ordenados** a sus valores ordenados de menor a mayor $X_{1:n}, \dots, X_{n:n}$.
- Por ejemplo, si la muestra es $2, 4, 1, 1, 5$, entonces

$$X_{1:5} = 1,\ X_{2:5} = 1,\ X_{3:5} = 2,\ X_{4:5} = 4,\ X_{5:5} = 5.$$

- Sus funciones de fiabilidad son $\bar{F}_{i:n}(x) = \Pr(X_{i:n} > x)$ para $i = 1, \dots, n$.
- Se definen igual para las componentes (aunque no sean IID).

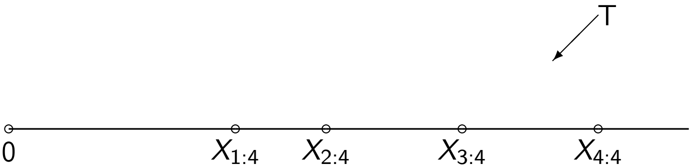
Estadísticos ordenados

- Si $X_1, \ldots, X_n$ es una muestra (son v.a. IID), se llaman **estadísticos ordenados** a sus valores ordenados de menor a mayor $X_{1:n}, \ldots, X_{n:n}$.
- Por ejemplo, si la muestra es $2, 4, 1, 1, 5$, entonces

$$X_{1:5} = 1,\ X_{2:5} = 1,\ X_{3:5} = 2,\ X_{4:5} = 4,\ X_{5:5} = 5.$$

- Sus funciones de fiabilidad son $\bar{F}_{i:n}(x) = \Pr(X_{i:n} > x)$ para $i = 1, \ldots, n$.
- Se definen igual para las componentes (aunque no sean IID).
- En este contexto, representan los tiempos de vida de los sistemas k-out-of-n (que funcionan si funcionan al menos k de sus n componentes).

Proceso de fallo de un sistema con 4 componentes



Signatura de un sistema

- Sabemos que $T = X_{i:n}$ para un $i = 1, \ldots, n$ (el sistema falla a la vez que uno de los componentes).

Signatura de un sistema

- Sabemos que $T = X_{i:n}$ para un $i = 1, \ldots, n$ (el sistema falla a la vez que uno de los componentes).
- Podemos calcular $s_i = \Pr(T = X_{i:n})$ para $i = 1, \ldots, n$.

Signatura de un sistema

- Sabemos que $T = X_{i:n}$ para un $i = 1, \dots, n$ (el sistema falla a la vez que uno de los componentes).
- Podemos calcular $s_i = \Pr(T = X_{i:n})$ para $i = 1, \dots, n$.
- Si las componentes son IID, $s_1, \dots, s_n$ no dependen de las distribuciones de las componentes (solo dependen de ϕ).

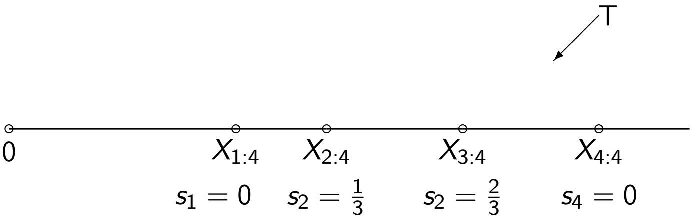
Signatura de un sistema

- Sabemos que $T = X_{i:n}$ para un $i = 1, \ldots, n$ (el sistema falla a la vez que uno de los componentes).
- Podemos calcular $s_i = \Pr(T = X_{i:n})$ para $i = 1, \ldots, n$.
- Si las componentes son IID, $s_1, \ldots, s_n$ no dependen de las distribuciones de las componentes (solo dependen de ϕ).
- Se llama **signatura** de ϕ al vector $\mathrm{s} = (s_1, \ldots, s_n)$.

Signatura de un sistema

- Sabemos que $T = X_{i:n}$ para un $i = 1, \dots, n$ (el sistema falla a la vez que uno de los componentes).
- Podemos calcular $s_i = \Pr(T = X_{i:n})$ para $i = 1, \dots, n$.
- Si las componentes son IID, $s_1, \dots, s_n$ no dependen de las distribuciones de las componentes (solo dependen de ϕ).
- Se llama **signatura** de ϕ al vector $\mathrm{s} = (s_1, \dots, s_n)$.
- Por ejemplo, para el avión (con componentes IID) se tiene:

Proceso de fallo del avión con 4 componentes IID



Representaciones basadas en signaturas

Representación de Samaniego, caso IID

- Francisco (Frank) J. Samaniego (Univeridad de California, Davis), publicó la primera representación en el artículo:

Representación de Samaniego, caso IID

- Francisco (Frank) J. Samaniego (Univeridad de California, Davis), publicó la primera representación en el artículo:
- Samaniego, F.J. (1985). On closure of the IFR class under formation of coherent systems. IEEE Transactions on Reliability R-34, 69–72.

Representación de Samaniego, caso IID

- Francisco (Frank) J. Samaniego (Univeridad de California, Davis), publicó la primera representación en el artículo:
- Samaniego, F.J. (1985). On closure of the IFR class under formation of coherent systems. IEEE Transactions on Reliability R-34, 69–72.
- Este artículo tiene 292 citas en Scopus.

Representación de Samaniego, caso IID

- Francisco (Frank) J. Samaniego (Univeridad de California, Davis), publicó la primera representación en el artículo:
- Samaniego, F.J. (1985). On closure of the IFR class under formation of coherent systems. IEEE Transactions on Reliability R-34, 69–72.
- Este artículo tiene 292 citas en Scopus.
- Posteriormente publicó un libro sobre signaturas:

Representación de Samaniego, caso IID

- Francisco (Frank) J. Samaniego (Univeridad de California, Davis), publicó la primera representación en el artículo:
- Samaniego, F.J. (1985). On closure of the IFR class under formation of coherent systems. IEEE Transactions on Reliability R-34, 69–72.
- Este artículo tiene 292 citas en Scopus.
- Posteriormente publicó un libro sobre signaturas:
- Samaniego, F.J. (2007). System Signatures and their Applications in Engineering Reliability. New York: Springer.

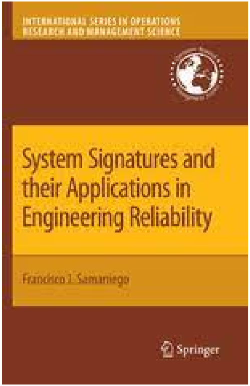


Figura: Frank Samaniego (izquierda, congreso MMR2015, Tokyo).

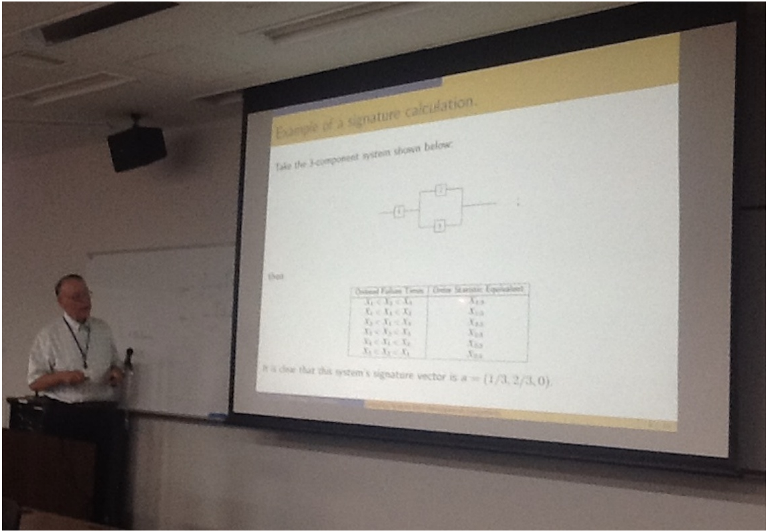


Figura: Frank Samaniego (Congreso MMR2015 Tokyo).

Representación de Samaniego, caso IID

Teorema (Samaniego, 1985)

Si $X_1, \ldots, X_n$ son IID con una función de fiabilidad continua, entonces la fiabilidad del sistema se puede calcular como

$$\bar{F}_T(t) = s_1 \bar{F}_{1:n}(t) + \cdots + s_n \bar{F}_{n:n}(t) \tag{1}$$

para todo t, donde $s_i = \Pr(T = X_{i:n})$ para $i = 1, \ldots, n$.

Extensiones para componentes dependientes

- Las hipótesis del teorema son muy restrictivas (IID y cont.).

Extensiones para componentes dependientes

- Las hipótesis del teorema son muy restrictivas (IID y cont.).
- La primera extensión apareció en el artículo:

Extensiones para componentes dependientes

- Las hipótesis del teorema son muy restrictivas (IID y cont.).
- La primera extensión apareció en el artículo:
- Jorge Navarro, José María Ruiz and Carlos J. Sandoval (2005). A note on comparisons among coherent systems with dependent components using signatures. Statistics and Probability Letters 72, 179–185. Citas JCR: 91.

Extensiones para componentes dependientes

- Las hipótesis del teorema son muy restrictivas (IID y cont.).
- La primera extensión apareció en el artículo:
- Jorge Navarro, José María Ruiz and Carlos J. Sandoval (2005). A note on comparisons among coherent systems with dependent components using signatures. Statistics and Probability Letters 72, 179–185. Citas JCR: 91.
- Una demostración formal para componentes intercambiables (EXC), para las que su distribución no cambia al permutarlos, y absolutamente continua se publicó en:

Extensiones para componentes dependientes

- Las hipótesis del teorema son muy restrictivas (IID y cont.).
- La primera extensión apareció en el artículo:
- Jorge Navarro, José María Ruiz and Carlos J. Sandoval (2005). A note on comparisons among coherent systems with dependent components using signatures. Statistics and Probability Letters 72, 179–185. Citas JCR: 91.
- Una demostración formal para componentes intercambiables (EXC), para las que su distribución no cambia al permutarlos, y absolutamente continua se publicó en:
- Jorge Navarro and Tomasz Rychlik (2007). Reliability and expectation bounds for coherent systems with exchangeable components. Journal of Multivariate Analysis 98, 102–113. Citas JCR: 129.

Figura: Tomasz Rychlik (izquierda). Polish Academy of Science.

Extensiones para componentes dependientes

- La siguiente extensión apareció en el artículo:

Extensiones para componentes dependientes

- La siguiente extensión apareció en el artículo:
- Jorge Navarro, Francisco J. Samaniego, N. Balakrishnan and Debasis Bhattacharya (2008). On the application and extension of system signatures in engineering reliability. Naval Research Logistics 55, 313–327. Citas JCR: 162.

Extensiones para componentes dependientes

- La siguiente extensión apareció en el artículo:
- Jorge Navarro, Francisco J. Samaniego, N. Balakrishnan and Debasis Bhattacharya (2008). On the application and extension of system signatures in engineering reliability. Naval Research Logistics 55, 313–327. Citas JCR: 162.
- El Prof. N. Balakrishnan (Bala), Universidad McMaster, Hamilton, Canadá es el mayor especialista mundial en estadísticos ordenados y autor de más de 1500 publicaciones (citas 81640, Índice h 86, fuente Google Scholar).

Extensiones para componentes dependientes

- La siguiente extensión apareció en el artículo:
- Jorge Navarro, Francisco J. Samaniego, N. Balakrishnan and Debasis Bhattacharya (2008). On the application and extension of system signatures in engineering reliability. Naval Research Logistics 55, 313–327. Citas JCR: 162.
- El Prof. N. Balakrishnan (Bala), Universidad McMaster, Hamilton, Canadá es el mayor especialista mundial en estadísticos ordenados y autor de más de 1500 publicaciones (citas 81640, Índice h 86, fuente Google Scholar).
- Ha sido elegido recientemente (8 de septiembre de 2021) Fellow of the Royal Society of Canada (FRSC).

Extensiones para componentes dependientes

- La siguiente extensión apareció en el artículo:
- Jorge Navarro, Francisco J. Samaniego, N. Balakrishnan and Debasis Bhattacharya (2008). On the application and extension of system signatures in engineering reliability. Naval Research Logistics 55, 313–327. Citas JCR: 162.
- El Prof. N. Balakrishnan (Bala), Universidad McMaster, Hamilton, Canadá es el mayor especialista mundial en estadísticos ordenados y autor de más de 1500 publicaciones (citas 81640, Índice h 86, fuente Google Scholar).
- Ha sido elegido recientemente (8 de septiembre de 2021) Fellow of the Royal Society of Canada (FRSC).
- Debasis Bhattacharya, Departamento de Estadística, Universidad Visva–Bharati, West Bengal, India.

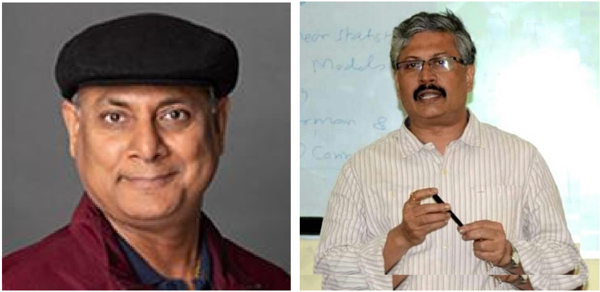


Figura: Prof. N. Balakrishnan (izquierda) y Prof. Debasis Bhattacharya (derecha).

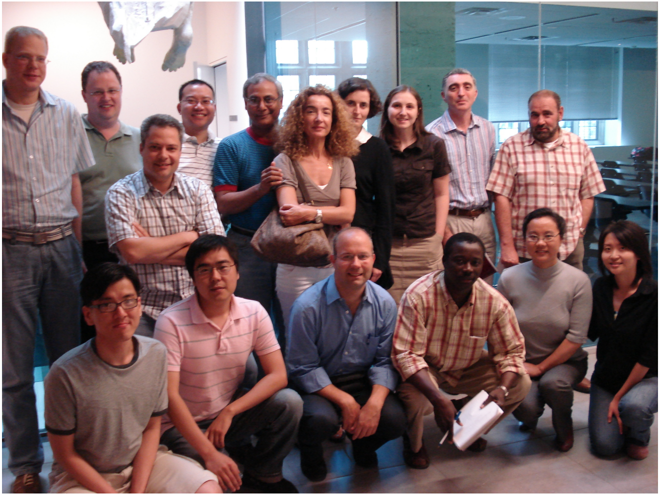


Figura: Prof. N. Balakrishnan, Hamilton, verano 2008.

Representación basada signaturas, caso EXC

Teorema (Navarro et al., 2008)

Si $X_1, \ldots, X_n$ son intercambiables (EXC) y ϕ es un sistema semicoherente basado en algunos (o todos) de esos componentes, entonces la fiabilidad del sistema se puede calcular como

$$\bar{F}_T(t) = s_1^{(n)} \bar{F}_{1:n}(t) + \cdots + s_n^{(n)} \bar{F}_{n:n}(t) \tag{2}$$

para todo t, donde $s_1^{(n)}, \ldots, s_n^{(n)} \in \mathbb{R}$ solo dependen de ϕ.

Representación basada signaturas, caso EXC

- Ese resultado contiene diversas extensiones.

Representación basada signaturas, caso EXC

- Ese resultado contiene diversas extensiones.
- Si ϕ es coherente, se extiende el resultado de Navarro y Rychlik (2007) eliminando la condición de continuidad.

Representación basada signaturas, caso EXC

- Ese resultado contiene diversas extensiones.
- Si ϕ es coherente, se extiende el resultado de Navarro y Rychlik (2007) eliminando la condición de continuidad.
- En este caso $s_i^{(n)}$ y $\Pr(T = X_{i:n})$ pueden ser distintos.

Representación basada signaturas, caso EXC

- Ese resultado contiene diversas extensiones.
- Si ϕ es coherente, se extiende el resultado de Navarro y Rychlik (2007) eliminando la condición de continuidad.
- En este caso $s_i^{(n)}$ y $\Pr(T = X_{i:n})$ pueden ser distintos.
- Además ahora podemos representar sistemas con k componentes como si tuvieran n para cualquier $n > k$.

Representación basada signaturas, caso EXC

- Ese resultado contiene diversas extensiones.
- Si ϕ es coherente, se extiende el resultado de Navarro y Rychlik (2007) eliminando la condición de continuidad.
- En este caso $s_i^{(n)}$ y $\Pr(T = X_{i:n})$ pueden ser distintos.
- Además ahora podemos representar sistemas con k componentes como si tuvieran n para cualquier $n > k$.
- El vector $\mathrm{s}^{(\mathrm{n})} = (s_1^{(n)}, \dots, s_n^{(n)})$ se llama **signatura de orden n** del sistema.

Representación basada signaturas, caso EXC

- Ese resultado contiene diversas extensiones.
- Si ϕ es coherente, se extiende el resultado de Navarro y Rychlik (2007) eliminando la condición de continuidad.
- En este caso $s_i^{(n)}$ y $\Pr(T = X_{i:n})$ pueden ser distintos.
- Además ahora podemos representar sistemas con k componentes como si tuvieran n para cualquier $n > k$.
- El vector $\mathrm{s}^{(\mathrm{n})} = (s_1^{(n)}, \ldots, s_n^{(n)})$ se llama **signatura de orden n** del sistema.
- Un ejemplo en ese artículo prueba que las representaciones (1) y (2) no se cumplen si eliminamos la condición ID.

Representación basada signaturas, caso DD-ID cópulas

- Las "cópulas" son una herramienta fundamental en estadística para modelizar la dependencia.

Representación basada signaturas, caso DD-ID cópulas

- Las "cópulas" son una herramienta fundamental en estadística para modelizar la dependencia.
- El caso "componentes intercambiables" (EXC) es equivalente a que las componentes sean ID y que su cópula sea simétrica.

Representación basada signaturas, caso DD-ID cópulas

- Las “cópulas” son una herramienta fundamental en estadística para modelizar la dependencia.
- El caso “componentes intercambiables” (EXC) es equivalente a que las componentes sean ID y que su cópula sea simétrica.
- El ejemplo prueba que la condición ID no se puede eliminar.

Representación basada signaturas, caso DD-ID cópulas

- Las "cópulas" son una herramienta fundamental en estadística para modelizar la dependencia.
- El caso "componentes intercambiables" (EXC) es equivalente a que las componentes sean ID y que su cópula sea simétrica.
- El ejemplo prueba que la condición ID no se puede eliminar.
- En el artículo siguiente probamos que la condición de que la cópula sea simétrica sí se puede relajar mediante la condición de que sea "diagonal dependent" (DD), que es mucho más débil:

Representación basada signaturas, caso DD-ID cópulas

- Las "cópulas" son una herramienta fundamental en estadística para modelizar la dependencia.
- El caso "componentes intercambiables" (EXC) es equivalente a que las componentes sean ID y que su cópula sea simétrica.
- El ejemplo prueba que la condición ID no se puede eliminar.
- En el artículo siguiente probamos que la condición de que la cópula sea simétrica sí se puede relajar mediante la condición de que sea "diagonal dependent" (DD), que es mucho más débil:
- Jorge Navarro, Juan Fernández-Sánchez (2020). On the extension of signature-based representations for coherent systems with dependent non-exchangeable components. Journal of Applied Probability 57, 429–440.

Figura: Juan Fernández-Sánchez (Univ. Almería), La Manga 2019.

Otras representaciones

- Pensamos que la representación de Samaniego no se puede extender más ya que la condición ID no se puede eliminar.

Otras representaciones

- Pensamos que la representación de Samaniego no se puede extender más ya que la condición ID no se puede eliminar.
- Sí que hay otras representaciones que permiten manejar los casos más generales (no ID).

Otras representaciones

- Pensamos que la representación de Samaniego no se puede extender más ya que la condición ID no se puede eliminar.
- Sí que hay otras representaciones que permiten manejar los casos más generales (no ID).
- Las más eficientes son las denominadas **representaciones basadas en distorsiones**. Su representación general se puede ver en el artículo siguiente:

Otras representaciones

- Pensamos que la representación de Samaniego no se puede extender más ya que la condición ID no se puede eliminar.
- Sí que hay otras representaciones que permiten manejar los casos más generales (no ID).
- Las más eficientes son las denominadas **representaciones basadas en distorsiones**. Su representación general se puede ver en el artículo siguiente:
- Jorge Navarro, Yolanda del Águila, Miguel Ángel Sordo, Alfonso Suárez-Llorens (2016). Preservation of stochastic orders under the formation of generalized distorted distributions. Applications to coherent systems. Methodology and Computing in Applied Probability 18, 529–545. Citas JCR: 53.

Comparaciones de sistemas usando signaturas

Principales órdenes estocásticos

- Orden estocástico (usual): $X \leq_{ST} Y$ si $\bar{F}_X \leq \bar{F}_Y$.

Principales órdenes estocásticos

- Orden estocástico (usual): $X \leq_{ST} Y$ si $\bar{F}_X \leq \bar{F}_Y$.
- Orden razón de riesgo (hazard rate): $X \leq_{HR} Y$ si $\bar{F}_Y/\bar{F}_X$ crece.

Principales órdenes estocásticos

- Orden estocástico (usual): $X \leq_{ST} Y$ si $\bar{F}_X \leq \bar{F}_Y$.
- Orden razón de riesgo (hazard rate): $X \leq_{HR} Y$ si $\bar{F}_Y/\bar{F}_X$ crece.
- $X \leq_{HR} Y \Leftrightarrow (X - t|X > t) \leq_{ST} (Y - t|Y > t)$ para toda edad t.

Principales órdenes estocásticos

- Orden estocástico (usual): $X \leq_{ST} Y$ si $\bar{F}_X \leq \bar{F}_Y$.
- Orden razón de riesgo (hazard rate): $X \leq_{HR} Y$ si $\bar{F}_Y / \bar{F}_X$ crece.
- $X \leq_{HR} Y \Leftrightarrow (X - t|X > t) \leq_{ST} (Y - t|Y > t)$ para toda edad t.
- Orden vida media residual (mean residual life): $X \leq_{MRL} Y$ si $E(X - t|X > t) \leq E(Y - t|Y > t)$ para toda edad t.

Principales órdenes estocásticos

- Orden estocástico (usual): $X \leq_{ST} Y$ si $\bar{F}_X \leq \bar{F}_Y$.
- Orden razón de riesgo (hazard rate): $X \leq_{HR} Y$ si $\bar{F}_Y / \bar{F}_X$ crece.
- $X \leq_{HR} Y \Leftrightarrow (X - t | X > t) \leq_{ST} (Y - t | Y > t)$ para toda edad t.
- Orden vida media residual (mean residual life): $X \leq_{MRL} Y$ si $E(X - t | X > t) \leq E(Y - t | Y > t)$ para toda edad t.
- Orden razón de verosimilitudes (likelihood ratio): $X \leq_{LR} Y$ si $\bar{F}'_Y / \bar{F}'_X$ crece.

Principales órdenes estocásticos

- Orden estocástico (usual): $X \leq_{ST} Y$ si $\bar{F}_X \leq \bar{F}_Y$.
- Orden razón de riesgo (hazard rate): $X \leq_{HR} Y$ si $\bar{F}_Y/\bar{F}_X$ crece.
- $X \leq_{HR} Y \Leftrightarrow (X - t|X > t) \leq_{ST} (Y - t|Y > t)$ para toda edad t.
- Orden vida media residual (mean residual life): $X \leq_{MRL} Y$ si $E(X - t|X > t) \leq E(Y - t|Y > t)$ para toda edad t.
- Orden razón de verosimilitudes (likelihood ratio): $X \leq_{LR} Y$ si $\bar{F}'_Y/\bar{F}'_X$ crece.
- Relaciones:

$$\begin{array}{ccccc} X \leq_{LR} Y & \Rightarrow & X \leq_{HR} Y & \Rightarrow & X \leq_{MRL} Y \\ & & \Downarrow & & \Downarrow \\ & & X \leq_{ST} Y & \Rightarrow & E(X) \leq E(Y) \end{array}$$

Comparaciones basadas en signaturas

Teorema (Navarro et al., 2008)

Si T_1 y T_2 son los tiempos de vida de dos sistemas semicoherentes con componentes $X_1, \ldots, X_n$ con distribución conjunta $\boldsymbol{F}$ intercambiable y signaturas de orden n $\mathbf{s}_1^{(n)}$ y $\mathbf{s}_2^{(n)}$, entonces:

(i) *Si $\mathbf{s}_1^{(n)} \leq_{ST} \mathbf{s}_2^{(n)}$, entonces $T_1 \leq_{ST} T_2$ para toda $\boldsymbol{F}$;*

(ii) *Si $\mathbf{s}_1^{(n)} \leq_{HR} \mathbf{s}_2^{(n)}$, entonces $T_1 \leq_{HR} T_2$ para toda $\boldsymbol{F}$ tal que $X_{1:n} \leq_{HR} \cdots \leq_{HR} X_{n:n}$;*

(iii) *Si $\mathbf{s}_1^{(n)} \leq_{HR} \mathbf{s}_2^{(n)}$, entonces $T_1 \leq_{MRL} T_2$ para toda $\boldsymbol{F}$ tal que $X_{1:n} \leq_{MRL} \cdots \leq_{MRL} X_{n:n}$;*

(iv) *Si $\mathbf{s}_1^{(n)} \leq_{LR} \mathbf{s}_2^{(n)}$, entonces $T_1 \leq_{LR} T_2$ para toda $\boldsymbol{F}$ continua o discreta tal que $X_{1:n} \leq_{LR} \cdots \leq_{LR} X_{n:n}$.*

Tabla: Signaturas de orden 4 para todos los sistemas coherentes con 1-4 componentes EXC (o IID).

i	T_i	$\mathbf{s}^{(4)}$
1	$X_{1:1} = X_1$	$(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4})$
2	$X_{1:2} = \min(X_1, X_2)$ (2-series)	$(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{6}, 0)$
3	$X_{2:2} = \max(X_1, X_2)$ (2-paralelo)	$(0, \frac{1}{6}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2})$
4	$X_{1:3} = \min(X_1, X_2, X_3)$ (3-serie)	$(\frac{3}{4}, \frac{1}{4}, 0, 0)$
5	$\min(X_1, \max(X_2, X_3))$	$(\frac{1}{4}, \frac{5}{12}, \frac{1}{3}, 0)$
6	$X_{2:3}$ (2-out-of-3)	$(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0)$
7	$\max(X_1, \min(X_2, X_3))$	$(0, \frac{1}{3}, \frac{5}{12}, \frac{1}{4})$
8	$X_{3:3} = \max(X_1, X_2, X_3)$ (3-paralelo)	$(0, 0, \frac{1}{4}, \frac{3}{4})$

i	T_i	$s^{(4)}$
9	$X_{1:4} = \min(X_1, X_2, X_3, X_4)$ (4-serie)	$(1, 0, 0, 0)$
10	$\max(\min(X_1, X_2, X_3), \min(X_2, X_3, X_4))$	$(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0, 0)$
11	$\min(X_{2:3}, X_4)$	$(\frac{1}{4}, \frac{3}{4}, 0, 0)$
12	$\min(X_1, \max(X_2, X_3), \max(X_3, X_4))$	$(\frac{1}{4}, \frac{7}{12}, \frac{1}{6}, 0)$
13	$\min(X_1, \max(X_2, X_3, X_4))$	$(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, 0)$
14	$X_{2:4}$ (3-out-of-4)	$(0, 1, 0, 0)$
15	$\max(\min(X_1, X_2), \min(X_1, X_3, X_4),$ $\min(X_2, X_3, X_4))$	$(0, \frac{5}{6}, \frac{1}{6}, 0)$
16	$\max(\min(X_1, X_2), \min(X_3, X_4))$	$(0, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}, 0)$
17	$\max(\min(X_1, X_2), \min(X_1, X_3),$ $\min(X_2, X_3, X_4))$	$(0, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}, 0)$
18	$\max(\min(X_1, X_2), \min(X_2, X_3),$ $\min(X_3, X_4))$	$(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0)$

i	T_i	$s^{(4)}$
19	$\max(\min(X_1,\max(X_2,X_3,X_4)),$ $\min(X_2,X_3,X_4))$	$(0,\frac{1}{2},\frac{1}{2},0)$
20	$\min(\max(X_1,X_2),\max(X_1,X_3),$ $\max(X_2,X_3,X_4))$	$(0,\frac{1}{3},\frac{2}{3},0)$
21	$\min(\max(X_1,X_2),\max(X_3,X_4))$	$(0,\frac{1}{3},\frac{2}{3},0)$
22	$\min(\max(X_1,X_2),\max(X_1,X_3,X_4),$ $\max(X_2,X_3,X_4))$	$(0,\frac{1}{6},\frac{5}{6},0)$
23	$X_{3:4}$ (2-out-of-4)	$(0,0,1,0)$
24	$\max(X_1,\min(X_2,X_3,X_4))$	$(0,\frac{1}{2},\frac{1}{4},\frac{1}{4})$
25	$\max(X_1,\min(X_2,X_3),\min(X_3,X_4))$	$(0,\frac{1}{6},\frac{7}{12},\frac{1}{4})$
26	$\max(X_{2:3},X_4)$	$(0,0,\frac{3}{4},\frac{1}{4})$
27	$\min(\max(X_1,X_2,X_3),\max(X_2,X_3,X_4))$	$(0,0,\frac{1}{2},\frac{1}{2})$
28	$X_{4:4}=\max(X_1,X_2,X_3,X_4)$ (4-paralelo)	$(0,0,0,1)$

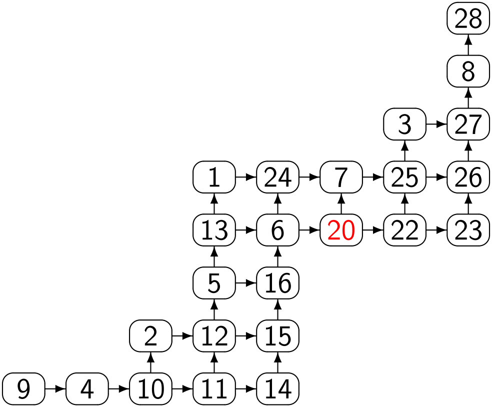


Figura: Órdenes ST para los sistemas de la tabla anterior y componentes IID o EXC.

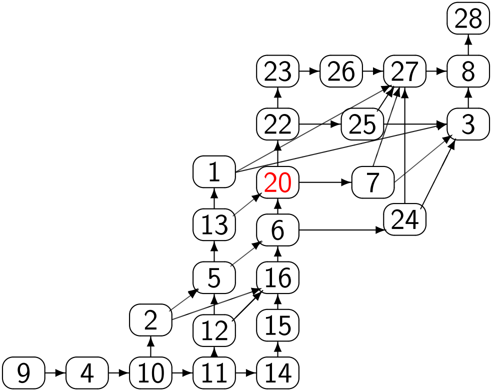


Figura: Ordenes HR (resp. MRL) para los sistemas de la tabla anterior y componentes IID o EXC verificando $X_{1:4} \leq_{HR} X_{2:4} \leq_{HR} X_{3:4} \leq_{HR} X_{4:4}$ (resp. $X_{1:4} \leq_{MRL} X_{2:4} \leq_{MRL} X_{3:4} \leq_{MRL} \leq_{MRL} X_{4:4}$).

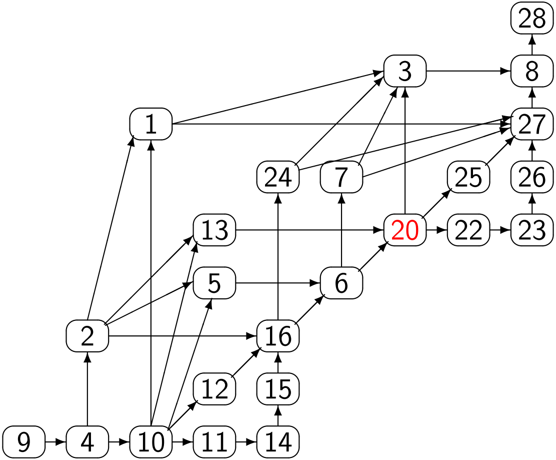


Figura: Órdenes LR para los sistemas de la tabla anterior y componentes IID o EXC verificando $X_{1:4} \leq_{LR} X_{2:4} \leq_{LR} X_{3:4} \leq_{LR} X_{4:4}$.

Órdenes

- En el artículo Navarro y Rubio (2011) probamos que esas figuras no contienen todos los órdenes para el caso IID.

Órdenes

- En el artículo Navarro y Rubio (2011) probamos que esas figuras no contienen todos los órdenes para el caso IID.
- Sin embargo, sí probamos que tienen todos los órdenes del caso EXC.

Órdenes

- En el artículo Navarro y Rubio (2011) probamos que esas figuras no contienen todos los órdenes para el caso IID.
- Sin embargo, sí probamos que tienen todos los órdenes del caso EXC.
- Es más, descubrimos que si usábamos signaturas de orden 5, aparecían más ordenes para el caso IID.

Órdenes

- En el artículo Navarro y Rubio (2011) probamos que esas figuras no contienen todos los órdenes para el caso IID.
- Sin embargo, sí probamos que tienen todos los órdenes del caso EXC.
- Es más, descubrimos que si usábamos signaturas de orden 5, aparecían más ordenes para el caso IID.
- Posteriormente desarrollamos otra técnica (basada en distorsiones) que sí obtenía todos los órdenes para el caso IID y que también se podía usar en el caso no ID.

Órdenes

- En el artículo Navarro y Rubio (2011) probamos que esas figuras no contienen todos los órdenes para el caso IID.
- Sin embargo, sí probamos que tienen todos los órdenes del caso EXC.
- Es más, descubrimos que si usábamos signaturas de orden 5, aparecían más ordenes para el caso IID.
- Posteriormente desarrollamos otra técnica (basada en distorsiones) que sí obtenía todos los órdenes para el caso IID y que también se podía usar en el caso no ID.
- Los resultados se pueden ver en:

Referencias adicionales

- J. Navarro, Y. del Aguila, M.A. Sordo, A. Suárez-Llorens (2016). Preservation of stochastic orders under the formation of generalized distorted distributions. Applications to coherent systems. Methodology and Computing in Applied Probability 18, 529–545.
- J. Navarro (2018). Stochastic comparisons of coherent systems. Metrika 81, 465–482.
- J. Navarro (2022). Introduction to System Reliability Theory. Springer. ISBN: 978-3-030-86952-6 (Hardcover Book).

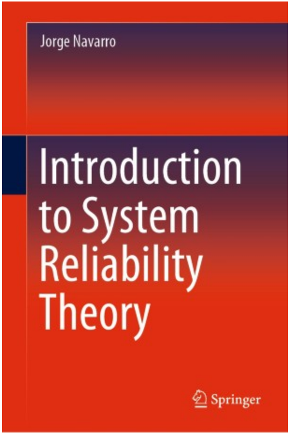


Figura: Libro publicado en octubre de 2021.

- Y por último:

- Y por último:
- ¡Gracias a todos ustedes por su asistencia y por su atención!