SOBRE ESPACIOS SEMI-SUSLIN Y ESPACIOS CON RED DE TIPO $\mathcal{C}$

por

JOSE ORIHUELA*

ABSTRACT

This paper is devoted to the study of the relations bertween the classes of webbed spaces introduced by De Wilde and the class of semi-Suslin spaces of Valdivia. Both classes are related with the closed graph theorem. We prove that a strictly webbed space is semi-Suslin and that a semi-Suslin space is webbed. Further, we show that a webbed and locally complete space is semi-Suslin too. Looking at convexity conditions we introduce some extensions of semi-Suslin spaces giving new results related with the closed graph theorem.

INTRODUCCION Y NOTACIONES

Los espacios vectoriales que utilizaremos están definidos sobre el cuerpo $\mathbb{K}$ de los números reales o complejos. La palabra "espacio" significará "espacio vectorial topológico de Hausdorff" a menos que se especifique lo contrario. Si A es un subconjunto de un espacio E, denotaremos por $\langle A \rangle$ el subespacio generado por A. Si $p \in (0, 1]$ y A es absolutamente p-convexo y acotado, denotamos por E_A al espacio $\langle A \rangle$ dotado con la p-norma del funcional de Minkowski del conjunto A, esto es, $P_A(x) = \inf \left\{ \lambda^p : x \epsilon \lambda A, \lambda \geqslant 0 \right\}$. A es un p-disco de Banach si E_A es completo. Un espacio E es localmente completo si todo subconjunto absolutamente convexo, cerrado y acotado de E es un disco de Banach, (4). Denotamos por $E[\mathcal{T}]$ al espacio E dotado de la topología $\mathcal{T}$. Pondremos $\hat{E}[\hat{\mathcal{T}}]$ para la completación de E y $\tilde{E}[\mathcal{T}]$ para la completación local. $\tilde{E}$ es la intersec-

(*) El presente trabajo constituye parte de la tesis doctoral del autor, realizada bajo la dirección del professor M. Valdivia.

ción de todos los subespacios localmente completos F de $\hat{E}$ tal que $F \supset E$ y $\tilde{\mathfrak{T}}$ es la restricción de $\hat{\mathfrak{T}}$ a $\tilde{E}$. Para las nociones y notaciones standard de la teoría de espacios vectoriales topológicos nos referimos (6) y (7).

Siguiendo a De Wilde, (2), una sucesión (A_k) de subconjuntos no vacios de un espacio E se dice que es completante si $A_1 \supset A_2 \supset \ldots \supset A_k \supset \ldots$ y si existe una sucesión (λ_k) de escalares positivos tal que, si $0 < \mu_k \leqslant \lambda_k$ y $x_k \epsilon A_k$ $k=1,2, \ldots$, la serie $\sum_{k=1}^{\infty} \mu_k x_k$ converge en E. Si la sucesión (λ_k) se puede escoger de manera que $\sum_{k=p}^{\infty} \mu_k x_k \in A_p$ $p=1,2, \ldots$, la sucesión (A_k) se llama estrictamente completa. Una red en un espacio E es una familia de subconjuntos de E, $\mathfrak{W} = \left\{C_{m_1, m_2, \ldots, m_k}\right\}$, donde $k, m_1, m_2, \ldots, m_k$ son enteros positivos y tal que se verifican las siguientes relaciones:

$$E = \cup\left\{C_{n_1} : n_1=1, 2, \ldots\right\}, \quad C_{m_1, m_2, \ldots m_k} = \cup\left\{C_{m_1, m_2, \ldots m_k, m} : m= 1,2, \ldots\right\} \quad k=1,2, \ldots$$

Una red $\mathfrak{W}$ es absolutamente p-convexa si los conjuntos que la definen son absolutamente p-convexos. Una red $\mathfrak{W}$ es completante o red de tipo $\mathcal{C}$ si para cada sucesión (m_n) de enteros positivos la sucesión $C_{m_1} \supset C_{m_1, m_2} \supset \ldots \supset C_{m_1, m_2, \ldots m_k} \supset \ldots$ es completante.

Si $\mathfrak{W}$ es absolutamente p-convexa y la sucesión anterior estrictamente completa, la red se llama p-estricta o red de tipo $\mathcal{C}$ p-estricta.

Sea $0 < p \leqslant 1$. Un subconjunto A de un espacio E es C_pS-compacto, (5), si para cada sucesión $(x_n) \subset A$ y cada sucesión de escalares (a_n), $a_n \geqslant 0$ $n = 1,2 \ldots$ y $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n)^p =1$, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n$ es convergente en E a un vector de A. Una serie así diremos que es una serie p-convexa en A. Un espacio E es semi p-Suslin si existe un espacio Polaco X y una aplicación T de X en los subconjuntos C_pS-compactos de E verificando las siguientes condiciones:

a) $\cup\left\{Tx : x \epsilon X\right\} = E$
b) Si (x_n) es convergente en X, existe un CpS-compacto A en E tal que $Tx_n \subset A$ $n=1,2, \ldots$

Para p=1 obtenemos los espacios semi-Suslin de Valdivia, (13). Todo espacio semi-Suslin es semi p-Suslin para cada $p \epsilon (0, 1]$ y todo espacio semi p-Suslin es semi q-Suslin para $0 < q < p \leqslant 1$.

Para la clase saturada $\mathcal{A}$ de los espacios localmente p-convexos (Valdivia, (15)) los espacios $\mathcal{A}$ -tonelados los llamaremos espacios p-tonelados. Un espacio vectorial topológico E es p-tonelado si, y sólo si todo subconjunto absolutamente p-convexo, cerrado y absorbente es un entorno del origen. Los espacios red

$\mathcal{A}$ -tonelados los llamaremos espacios red p-tonelados. Un espacio vectorial topológico E es red p-tonelado si dada una red cualquiera $\{E_{m_1,m_2,\ldots,m_k}\}$ de subespacios de E, existe una sucesión (m_k) de enteros positivos tal que $E_{m_1,m_2,\ldots,m_k}$ es denso en E y p-tonelado k=1,2,...

I. GENERACION DE p-DISCOS DE BANACH

M. Valdivia prueba en (12) que todo subconjunto convexo, acotado y completo tiene una envoltura absolutamente convexa que es un disco de Banach. Tal conjunto es claramente un CS-compacto. El siguiente resultado extiende el dado por Valdivia; incluso para p=1 hay CS-compactos no completos, (11).

TEOREMA 1.– Sea A un subconjunto CpS-compacto del espacio E. La envoltura absolutamente p-convexa de A es un p-disco de Banach de E.

Demostración.– Supongamos primero que A es absolutamente p-convexo. Si $\{x_n : n=1,2,\ldots\} \subset E_A$ y $\sum_{n=1}^{\infty} P_A(x_n) < +\infty$, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ converge en E_A.

En efecto, para cada entero positivo n definimos

$a_n = (P_A(x_n) + \frac{1}{2^n})^{1/p}$, $y_n = \frac{1}{a_n} x_n$. Al ser A CpS-compacto, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n y_n = \sum_{n=1}^{\infty} x_n$ converge en E.

Es fácil probar ahora que el vector suma está en E_A y la convergencia se da también en este espacio. Para el caso general tenemos B la envoltura absolutamente p-convexa de A. Para $(\lambda_n) \in \ell^p$, con

$\sum_{n=1}^{\infty} |\lambda_n|^p \leqslant 1$, si $\{x_n : n=1,2,\ldots\} \subset A$, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n x_n$ converge en E a un vector de $4^{1/p}B$. Este hecho sigue siendo cierto si la sucesión $\{ x_n : n=1,2,\ldots \} \subset B$. Para comprobarlo tomemos una representación de x_n como

$$x_n = \sum_{j=1}^{k_n} \lambda_j^n x_j^n \;,\; \sum_{j=1}^{k_n} |\lambda_j^n|^p \leqslant 1 \;,\; x_j^n \in A \;\; j=1,2,\ldots,k_n \;,\;\; k_n \in \mathbb{N}$$

Consideremos la sucesión de vectores de

$$A \left\{ x_1^1, x_2^1, \ldots, x_{k_1}^1, x_1^2, \ldots, x_{k_2}^2, x_1^3, \ldots \right\}$$

y la sucesión de ℓ^p $\left\{ \lambda_1^1\lambda_1, \lambda_2^1\lambda_1, \ldots, \lambda_{k_1}^1\lambda_1, \lambda_1^2\lambda_2, \ldots, \lambda_{k_2}^2\lambda_2, \lambda_1^3\lambda_3, \ldots \right\}$ que verifica $\sum |\lambda_j^n\lambda_n|^p \leqslant 1$. En consecuencia, la serie $\sum \lambda_j^n\lambda_n x_j^n$ converge en E a un vector de $4^{1/p}B$. Ahora bien, las sumas parciales de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n x_n$ forman una subsucesión de las sumas parciales de la serie $\Sigma\, \lambda_j^n\, \lambda_n\, x_j^n$, tal serie converge pues a un vector de $4^{1/p}B$. Razonando ahora como en el caso en que A era absolutamente p-convexo se obtiene el resultado.

Q.E.D.

COROLARIO 1.1.– Sea E un espacio vectorial y $\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2$ *dos topologías vectoriales sobre E tales que* $\mathcal{T}_2$ *es más fina que* $\mathcal{T}_1$ *y tiene una base de entornos del origen cerrados para* $\mathcal{T}_1$*. Todo subconjunto que sea CpS-compacto (respect. p-disco de Banach) en* $E[\mathcal{T}_1]$ *lo es también en* $E[\mathcal{T}_2]$.

Demostración.– Sea B la envoltura absolutamente p-convexa de A, que es un p-disco de Banach para $\mathcal{T}_1$. Así la inmersión de E_B en $E[\mathcal{T}_1]$ es continua. Como $E[\mathcal{T}_2]$ tiene una base de entornos cerrados para $\mathcal{T}_1$, y E_B es de Baire, la inmersión de E_B en $E[\mathcal{T}_2]$ también es continua. Así cualquier serie p-convexa en A, que es convergente en E_B, será convergente en $E[\mathcal{T}_2]$, y a un vector de A pues ya lo era en $E[\mathcal{T}_1]$.

Q.E.D.

En (13), pág. 82, Valdivia prueba el corolario 1.1 para las topologías $\sigma(E', E)$ y $\beta(E', E)$ sobre el dual de un espacio localmente convexo y para el caso p=1. El método desarrollado aquí pone de manifiesto la importancia del teorema 1.

TEOREMA 2.– Sea $A_1 \supset A_2 \supset \ldots \supset A_n \supset \ldots$ *una sucesión completante de subconjuntos absolutamente p-convexos del espacio E. Sea* (n_k) *una sucesión estrictamente creciente de enteros positivos y* $\{x_j\colon j=1,2,\ldots\}$ *una sucesión en E tal que* $x_j \epsilon A_k$ *si* $n_{k-1} \leqslant j < n_k$ $k=1,2,\ldots$ $(n_0=1)$*. Entonces, para cualquier* $(\zeta_n) \epsilon l^p$*, la serie* $\sum_{n=1}^{\infty} \zeta_n x_n$ *converge en E.*

Demostración.– Para p=1, $\zeta_n = 1/2^n$, $x_n \epsilon A_n$ $n=1,2,\ldots$, W. Robertson, (10), prueba el resultado. Una simple adaptación al caso p-convexo prueba el resultado para $\zeta_n = (1/2^n)^{1/p}$ $n=1,2,\ldots$ Pasemos a la prueba del caso general. Supongamos que $\rho = \Sigma\ |\zeta_n|^p \leqslant 1$ y denotemos por $S_n = \sum_{k=1}^{n} |\zeta_k|^p$. Razonemos el caso no trivial en el que $0 < S_1 < S_2 < \ldots < S_n < \ldots < \rho$. Razonando por recurrencia determinamos sucesiones (m_k) y (p_k) de enteros positivos tales que $m_0=1 < m_1 < m_2 < \ldots < m_k < \ldots$, $p_0 < p_1 < \ldots < p_k \ldots$

$$\rho - \frac{1}{2^{p_{j-1}}} < Sm_j \leqslant \rho - \frac{1}{2^{p_j}}\ , \quad Sm_j > \rho - \frac{1}{2^{p_{j-1}}}\ ,$$

$$m_j \geqslant n_j \quad j = 0, 1, 2, \ldots \qquad (p_{-1} = 0)$$

Aseguremos así que $S_{m_j} - S_{m_{j-1}} \leqslant \frac{1}{2^{p_{j-1}-1}} \leqslant \frac{1}{2^{j-1}}$ j = 1, 2, ... Con todo ello y gracias a la p-convexidad absoluta de los elementos de la sucesión (A_n) tendremos que $\sum_{k=2}^{m_1} \zeta_k x_k \in A_1$; $\sum_{k=m_1+1}^{m_2} \zeta_k x_k \in (\frac{1}{2})^{1/p} A_2$; . . . ; $\sum_{k=m_{j-1}+1}^{m_j} \zeta_k x_k \in (\frac{1}{2^{j-1}})^{1/p} A_j$; . . . de donde la sucesión de sumas parciales $\left\{ \sigma_n = \sum_{k=1}^{n} \zeta_k x_k : n=1, 2, \ldots \right\}$ tienen la subsucesión $\left\{\sigma_{m_j} : j=1, 2, \ldots \right\}$ convergente, esto termina la prueba si probamos que $\left\{ \sigma_n : n=1, 2, \ldots \right\}$ es de Cauchy. Sea U un retorno del origen de E, existirá un entero positivo k_0 tal que $\left\{ \sum_{m=k_0}^{\infty} \mu_m x_m : |\mu_m| \leqslant (\frac{1}{2^m})^{1/p}, x_m \in A_m , \ m = k_0, k_0+1, \ldots \right\} \subset U$. Si r, s son enteros mayores que m_{k_0}, $\sigma_r - \sigma_s \in U$ como queríamos probar.

Q.E.D.

El teorema 2 ha sido obtenido recientemente por M. Valdivia, (17), para p=1 con una prueba diferente.

COROLARIO 1.2.– Si la sucesión (A_n) es estrictamente completa, la sucesión $\left\{C_k = (\frac{1}{2^k})^{1/p} A_k : k=1, 2, \ldots \right\}$ forma una base de entornos del origen para una topología $\mathcal{A}$ sobre E, más fina que la inicial, con la que adquiera una estructura de grupo topológico aditivo metrizable y completo. Si $L = \bigcap_{k=1}^{\infty} \langle A_k \rangle$, $\mathcal{A}$ induce en L una estructura de espacio metrizable, completo y localmente p-convexo. En particular $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$ es un p-disco de Banach.

Demostración.– La primera parte es una adaptación del caso convexo estudiado por W. Robertson, (10). L es un F-espacio pues en él cada A_n es absorbente. Finalmente, $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$ tienen un cierre algebraico que es un acotado y cerrado de L, y por consiguiente es un disco de Banach.

Q.E.D.

TEOREMA 3.– Sea (A_n) una sucesión completante de subconjuntos absolutamente p-convexos del espacio $E[\mathcal{T}]$. Para cada entero positivo n, sea

$$C_n = \left\{ \sum_{m=n}^{\infty} \mu_m x_m : |\mu_m| \leqslant (\frac{1}{2^m})^{1/p} , x_m \in A_m , \ m = n, n+1, \ldots \right\}$$

La familia $\{C_k : k=1, 2, \dots\}$ *forma una base de entornos del origen para una topología* $\mathcal{A}$ *sobre* E, *más fina que* $\mathcal{C}$, *con lo que adquiere una estructura de grupo topológico aditivo, metrizable y completo.*

Demostración.– Todas las afirmaciones son claras salvo la completitud. Tomemos $x_k \in C_k$, $k = 1, 2, \dots$ y veamos que la serie $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ converge en $E[\mathcal{A}]$. Cada x_k se escribe como $x_k = \sum_{m=k}^{\infty} \mu_m^k x_m^k$, $|\mu_m^k| \leqslant (\frac{1}{2^m})^{1/p}$, $x_m^k \in A_m$, $m = k, k+1, \dots$ Por la p-convexidad absoluta y la completitud de (A_n) tendremos que la envoltura absolutamente p-convexa de la sucesión $\{x_m^k : k = 1, 2, \dots, m \geqslant k\}$ está acotada en E, llamemos D a la clausura de dicha envoltura en $\hat{E}$, que es un p-disco de Banach de $\hat{E}$. Teniendo en cuenta que $\sum_{k=1}^{\infty} (\sum_{m=k}^{\infty} |\mu_m^k|^p) < +\infty$, la serie $\sum \mu_m^k x_m^k$ es absolutamente sumable en $\hat{E}_D$. Si convenimos en llamar $\mu_m^k = 0$, $x_m^k = 0$ para $m < k$, $k=1, 2, \dots$, aplicando la fórmula de sumación por paquetes en un espacio p-Banach tendremos:

$$\sum_{k=1}^{\infty} x_k = \sum_{k=1}^{\infty} (\sum_{m=1}^{\infty} \mu_m^k x_m^k) = \sum_{m=1}^{\infty} (\sum_{k=1}^{\infty} \mu_m^k x_m^k) = \sum_{m=1}^{\infty} (\sum_{k=1}^{m} \mu_m^k x_m^k)$$

expresión que sigue siendo válida en $\hat{E}$. Llamando

$$c_m = (\sum_{k=1}^{m} |\mu_m^k|^p)^{1/p} \text{ y } z_m = \sum_{k=1}^{m} \frac{\mu_m^k}{c_m} x_m^k, \text{ será } z_m \in A_m \text{ y}$$

$\sum_{m=1}^{\infty} |c_m|^p = \sum_{m=1}^{\infty} (\sum_{k=1}^{\infty} |\mu_m^k|^p) < +\infty$, por lo que el teorema 2 asegura que

$\sum_{m=1}^{\infty} c_m z_m$ converge en E, así $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ converge en E. Probaremos ahora que la convergencia también se da en $\mathcal{A}$ y esto termina la prueba. La idea es la misma que en el teorema 2, y la resumimos en el siguiente

LEMA 4.– Si $(\zeta_n) \in l^p$, $x_n \in A_n$, $n = 1, 2, \dots$, *y* $n_0 \geqslant 4$ *es tal que* $\sum_{n=n_0}^{\infty} |\zeta_n|^p \leqslant \frac{1}{2^{n_0-2}}$, *entonces* $\sum_{n=n_0}^{\infty} \zeta_n x_n \in C_{n_0-3}$.

Supongamos probado el lema. Razonando en $\hat{E}_D$ tenemos las siguientes igualdades:

$$\sum_{k=n_0}^{\infty} (\sum_{m=n_0}^{\infty} \mu_m^k x_m^k) = \sum_{m=n_0}^{\infty} (\sum_{k=n_0}^{\infty} \mu_m^k x_m^k) = \sum_{m=n_0}^{\infty} (\sum_{k=n_0}^{m} \mu_m^k x_m^k)$$

Llamando $d_m = (\sum_{k=n_0}^{m} |\mu_m^k|^p)^{1/p}$, $w_m = \sum_{k=n_0}^{\infty} \frac{\mu_m^k}{d_m} x_m^k$, es $w_m \in A_m$

y $\sum_{m=n_0}^{\infty} |d_m|^p \leq \frac{1}{2^{n_0-2}}$

Aplicando el lema aseguramos que $\sum_{m=n_0}^{\infty} d_m w_m \in C_{n_0-3}$, y en definitiva $\sum_{k=n_0}^{\infty} x_k \in C_{n_0-3}$. Como el razonamiento es válido para cualquier $n_0 \geq 4$, aseguramos la convergencia de la serie $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ en $E[\mathcal{A}]$.

Para concluir la prueba desarrollamos ahora la del lema 4. Sea $\rho = \sum_{n=n_0}^{\infty} |\zeta_n|^p$ y p_{-1} un entero positivo, $p_{-1} \geq n_{0-2}$ tal que $\frac{1}{2^{p_{-1}+1}} < \rho \leq \frac{1}{2^{p_{-1}}}$.
Podemos determinar un entero positivo p_o tal que si denotamos las sumas parciales por $S_m = \sum_{k=n_0}^{m} |\zeta_k|^p$, sea $\rho - \frac{1}{2^{p_o-1}} < S_{n_o} \leq \rho - \frac{1}{2^{p_o}}$, con $p_o - 1 \geq p_{-1}$
(Si $S_{n_o} = \rho$ el resultado es evidente). Podrán ocurrir dos casos:

a) $S_n < \rho \quad n=n_o, n_o+1, \ldots$ Razonando por recurrencia se obtienen sucesiones de enteros positivos

$$m_o = n_o < m_1 < \ldots < m_k \ldots; \quad p_{-1} < p_o < p_1 < \ldots < p_k < \ldots \text{ tales que}$$

$$S_{m_j} > \rho - \frac{1}{2^{p_{j-1}}} \; ; \; \rho - \frac{1}{2^{p_{j-1}}} < S_{m_j} \leq \rho - \frac{1}{2^{p_j}} \quad j = 0, 1, 2, \ldots$$

con lo que tendremos las siguientes desigualdades

$$S_{m_j} - S_{m_{j-1}} = \sum_{k=m_{j-1}+1}^{m_j} |\zeta_k|^p \leq \frac{1}{2^{p_{j-1}+1}} \leq \frac{1}{2^{p_{j-2}}} \leq \frac{1}{2^{p_{-1}+j-1}} \leq \frac{1}{2^{n_o-3+j}}$$

$$j = 1, 2, \ldots$$

de las que se sigue que $\left(\sum_{k=m_{j-1}+1}^{m_j} \zeta_k x_k \right) \in \left(\frac{1}{2^{n_o-3+j}} \right)^{1/p} A_{j+n_o} \quad j = 1, 2, \ldots$
de donde resulta claro que $\sum_{n=n_o} \zeta_n x_n$ es un elemento de C_{n_o-3}.

b) Supongamos que existe $n > n_o$ tal que $S_n = \rho$. Podemos desarrollar los mismos pasos que en el caso a), con la única diferencia de que ahora el proceso es finito, esto es, existir-a un m_k con $S_{m_k} = \rho$ y entonces

$$\sum_{n=n_0}^{\infty} \zeta_n x_n = \sum_{n=n_0}^{m_k} \zeta_n x_n \in C_{n_o-3}$$

Q.E.D.

COROLARIOS 1.3.– Si $L = \bigcap_{n=1}^{\infty} \langle C_n \rangle$, *la topología* $\mathcal{A}$ *induce sobre L una estructura de espacio metrizable, completo y localmente p-convexo. En particular,* $\bigcap_{n=1}^{\infty} \rho_n C_n$ *es un p-disco de Banach para cualquier sucesión* (ρ_n) *de escalares positivos.*

Llamaremos a L el F-espacio asociado a la sucesión completante $\{ A_n\colon n=1, 2, \ldots \}$. El corolario 1.3 ha sido obtenido recientemente por M. Valdivia, (17), para el caso convexo y con una prueba diferente.

TEOREMA 5.– Sea $A_1 \supset A_2 \supset \ldots \supset A_n \supset \ldots$ *una sucesión completante de subconjuntos absolutamente p-convexos del espacio E. Sea* $\{ T_n\colon n=1, 2, \ldots \}$ *una sucesión de subconjuntos CpS-compactos de E. Suponemos que existe una sucesión estrictamente creciente* (n_k) *de enteros positivos tal que* $T_n \subset A_k$ *si* $n \geqslant n_k$. *Entonces el conjunto*

$$A = \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \zeta_n x_n : \sum_{n=1}^{\infty} (\zeta_n)^p \leqslant 1 \ , \ x_n \in T_n \ , \ \zeta_n \geqslant 0 \quad n=1,2,\ldots \right\}$$

es un CpS-compacto que contiene a todos los T_n.

Demostración.– El teorema 2 asegura la buena definición del conjunto A, que es p-convexo y contiene a cada T_n. Sea $a_m \geqslant 0$, $y_m \in A$ $m = 1, 2, \ldots$ y $\Sigma\ (a_m)^p = 1$. Cada y_m admite una representación de la forma

$$y_m = \sum_{n=1}^{\infty} \zeta_n^m x_n^m \ , \ \sum_{n=1}^{\infty} (\zeta_n^m)^p \leqslant 1 \ , \ \zeta_n^m \geqslant 0 \ , \ x_n^m \in T_n \quad n=1,2,\ldots$$

La sucesión doble $\{ x_n^m : m, n=1, 2, \ldots \}$ tienen una envoltura absolutamente p-convexa acotada en E. Para comprobarlo basta tener en cuenta que (A_n) es una sucesión completante de subconjuntos absolutamente p-convexos y que cada T_n tiene envoltura absolutamente p-convexa acotada. Llamemos D al cierre de dicha envoltura en $\hat{E}$, completación de E. D es un p-disco de Banach de $\hat{E}$ y así, la serie

$\sum_{m=1}^{\infty} a_m y_m = \sum_{m=1}^{\infty} a_m \left(\sum_{n=1}^{\infty} \zeta_n^m x_n^m \right) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_m \zeta_n^m x_n^m$ es convergente en $\hat{E}_D$ pues $\sum_{m,n=1}^{\infty} |a_m \zeta_n^m|^p = \sum_{m,n=1}^{\infty} (a_m)^p (\zeta_n^m)^p \leqslant \sum_{m=1}^{\infty} (a_m)^p = 1$, por lo que la serie anterior es absolutamente sumable en $\hat{E}_D$. Aplicando la fórmula de sumación por paquetes en un espacio p-Banach, $\sum_{m=1}^{\infty} a_m y_m =$

$= \sum_{n=1}^{\infty} (\sum_{m=1}^{\infty} a_m \zeta_n^m x_n^m)$, expresión que sigue siendo válida en $\hat{E}$. Ahora bien, para cada n fijo, y por ser T_n un CpS-compacto, $\sum_{m=1}^{\infty} a_m \zeta_n^m x_n^m \in \eta_n T_n$, con $\eta_n = (\sum_{m=1}^{\infty} (a_m)^p (\zeta_n^m)^p)^{1/p}$.

Como $\sum_{n=1}^{\infty} (\eta_n)^p \leqslant 1$, tendremos que $\sum_{m=1}^{\infty} a_m y_m$ converge en E a un vector de A, lo que termina la prueba.

Q.E.D.

Para un subconjunto A del espacio E denotamos con $\overline{A}^a$ su clausura algebraica, (7).

COROLARIO 1.5.– Si cada T_n es un p-disco de Banach, entonces el conjunto

$$A = \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \zeta_n x_n : \sum_{n=1}^{\infty} |\zeta_n|^p \leqslant 1 \;\; , \;\; x_n \in \overline{T}_n^a \;\; n = 1, 2, \ldots \right\}$$

es un p-disco de Banach que contiene a todos los T_n $n = 1, 2, \ldots$

Recordemos que una sucesión (x_n) es rápidamente convergente en E si existe un disco de Banach A en E tal que (x_n) es convergente en E_A. Sea $\ell_o = \cap \left\{ \ell^p : p \in (0, 1] \right\}$.

PROPOSICION 6.– Sea A un p-disco de Banach en el espacio E $(0 < p < 1)$. Si $\{x_n\} \subset A$ y $(\zeta_n) \in l_o$, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \zeta_n x_n$ es rápidamente convergente en E.

Demostración.– Para $(\eta_n) \in \ell^p$, la envoltura absolutamente convexa de la sucesión $\left\{ \eta_n x_n : n=1, 2, \ldots \right\}$ es acotada en E. En efecto, dado un entorno del origen U en E, al ser A un p-disco de Banach, existirá un entero positivo n_o tal que $\sum_{n \geqslant n_o} \eta_n z_n \in U$ para cualquier $(z_n) \subset A$. De esta forma, $\Gamma \left\{ \eta_n x_n : n \geqslant n_o \right\} \subset U$ y de aquí se sigue fácilmente la acotación. Definamos para cada entero positivo n, $y_n = |\zeta_n|^{1/2} x_n$. Si $(a_n) \in \ell^1$, $(a_n |\zeta_n|^{1/2}) \in \ell_o$ y la serie $\Sigma\, a_n y_n$ converge en E al ser A un p-disco de Banach. Podemos definir así una aplicación lineal T: $\ell^1 \rightarrow E$ dada por $T((a_n)) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n y_n$. Si B es la envoltura absolutamente convexa y cerrada de la sucesión $\{ y_n : n = 1, 2, \ldots \}$, B es un acotado y T se factoriza a través de E_B en un operador continuo. La imagen de la bola unidad de ℓ^1 es un disco de Banach D de E_B que contiene a $\{ y_n : n=1, 2, \ldots \}$, como

$\sum_{n=1}^{\infty} |\zeta_n|^{1/2} < +\infty$. la serie $\sum_{n=1}^{\infty} (\zeta_n)^{1/2} y_n$ es normalmente convergente en E_D, por consiguiente $\sum_{n=1}^{\infty} \zeta_n x_n$ converge en E_D.

Q.E.D.

COROLARIO 1.6.– Es un espacio E localmente completo todo subconjunto absolutamente p-convexo, cerrado y acotado es un p-disco de Banach.

COROLARIO 2.6.– Si (A_n) es una sucesión completante de subconjuntos absolutamente p-convexos del espacio E y $x_n \in A_n$ n=1, 2, . . . Para $(\zeta_n) \in \ell_0$, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \zeta_n x_n$ es rápidamente convergente en E.

En (4) P. Dierolf obtiene un resultado más fuerte que el corolario 1.6.

II. ESPACIOS SEMI p-SUSLIN Y ESPACIOS CON RED DE TIPO $\mathcal{C}$

Denotemos por $\mathcal{D}_p(E)$ la familia de los p-discos de Banach del espacio E. El teorema 1 permite dar la siguiente caracterización de los espacios semi p-Suslin.

TEOREMA 7.– Un espacio E es semi p-Suslin si, y sólo si, existe un espacio Polaco X junto con una aplicación $T: X \to \mathcal{D}_p(E)$ verificando las siguientes condiciones:

a) $\cup \{ T_x : x \in X \} = E$

b) Si (x_n) es una sucesión convergente en X, existe un p-disco de Banach A en E tal que $T_{x_n} \subset A$ $n = 1, 2, \ldots$

Resumimos en la siguiente proposición las propiedades de estabilidad.

PROPOSICION 8.– Sea E un espacio vectorial topológico

a) Si F es un subespacio sucesionalmente cerrado de E y E es semi p-Suslin, también lo es F

b) Si $f: E \to F$ es lineal, continua y suprayectiva con E semi p-Suslin, también lo es F

c) Si $\{E_m : m=1, 2, \ldots\}$ es una sucesión de subespacios semi p-Suslin que cubre E, entonces E es semi p-Suslin

d) Si $\{E_m : m=1, 2, \ldots\}$ es una sucesión finita o infinita de espacios semi p-Suslin y E es el producto de dicha sucesión, entonces E con la topología producto es semi p-Suslin.

e) *Si* $\{E_m: m=1, 2, \ldots\}$ *es una sucesión de subespacios semi p-Suslin de E, la intersección* $\cap \{E_m: m=1, 2, \ldots\}$ *es semi p-Suslin.*

f) *Si* $\mathcal{T}_1$ *y* $\mathcal{T}_2$ *son dos topologías vectoriales sobre E tales que* $\mathcal{T}_2$ *es más fina que* $\mathcal{T}_1$ *y tiene una base de entornos del origen que son cerrados para* $\mathcal{T}_1$ *siendo* $E[\mathcal{T}_1]$ *semi p-Suslin, entonces* $E[\mathcal{T}_2]$ *también lo es.*

Demostración.– Las cinco primeras son análogas al caso p=1 de Valdivia, (13). f) es una consecuencia inmediata del corolario 1.1.

Q.E.D.

Todo espacio Polaco X admite una red $\mathcal{V} = \{B_{n_1,n_2,\ldots,n_k}\}$ tal que cada sucesión (n_k) de enteros positivos de una base de filtro $(B_{n,\ldots,n_k})$ convergente en X, (3). El conjunto $\mathbb{N}$ de enteros positivos es un espacio Polaco si lo dotamos de la topología discreta. El espacio producto $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ es también Polaco y f: $\mathbb{N}^{\mathbb{N}} \to X$ definida por $f((a_n))=\lim B_{a_1,a_2\ldots a_k}$ es continua y suprayectiva. No bs restrictivo por tanto trabajar con $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ en la definición de espacio semi p-Suslin.

Sea E un espacio semi p-Suslin y $T:X \to \mathcal{D}_p(E)$ la aplicación que da el teorema 7, la red $\mathcal{D} = \{B_{n_1,n_2,\ldots,n_k}\}$ del espacio Polaco X nos da una red $\mathcal{W} = \{C_{n_1,n_2,\ldots,n_k} := T(B_{n_1,n_2,\ldots,n_k})\}$ en E que es de tipo $\mathcal{C}$. Más aún, si $(n_k) \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ y $x_k \in \Gamma_p C_{n_1,n_2,\ldots,n_k}$ k=1, 2, ..., entonces la sucesión $\{x_k: k = 1, 2, \ldots\}$ está contenida en un p-disco de Banach. (Γ_p denota la envoltura absolutamente p-convexa, (7)).

TEOREMA 9.– Sea E un espacio con una red p-estricta, entonces E es semi p-Suslin.

Demostración.– Sea $\mathcal{W} = \{C_{n_1,n_2,\ldots,n_k}\}$ la red p-estricta de E. Para cada $\alpha \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, $\alpha = (a_n)$ definimos $T\alpha = \bigcap_{n=1}^{\infty} C_{a_1,a_2,\ldots,a_n}$. El corolario 1.2. asegura que $T\alpha$ es un p-disco de Banach. Claramente $\cup\{T\alpha : \alpha \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}\} = E$. Sea ahora $\alpha_n = (a_j^n)$ una sucesión en $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ convergente hacia $\alpha = (a_j)$. Para cada entero positivo k, existe un n_k tal que si $n \geq n_k$, entonces $a_k^n = a_k$, además no es restrictivo suponer que (n_k) es estrictamente creciente. Tendremos así que $T\alpha_n \subset C_{a_1,a_2,\ldots,a_k}$ si $n \geq n_k$; aplicando el corolario 1.5 obtenemos un p-disco de Banach que contienen a cada T_n. El teorema 7 nos da el resultado.

Q.E.D.

TEOREMA 10.– Sea E un espacio localmente p-convexo y localmente completo con una red de tipo $\mathcal{C}$. Entonces E es semi p-Suslin.

Demostración.– Sea $\mathcal{W} = \{ C_{n_1,n_2,\ldots,n_k} \}$ la red de tipo $\mathcal{C}$ de E. Para $\alpha = (a_n) \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ la sucesión $(C_{a_1,a_2,\ldots,a_n})$ es completante en E. Si $x_k \in \overline{\Gamma_p C_{a_1,a_2,\ldots,a_k}}$, la p-convexidad y completitud local de E aseguran que $\{ x_k : k = 1, 2, \ldots \}$ está contenida en un p-disco de Banach y así $\{ \overline{\Gamma_p C_{a_1,a_2,\ldots,a_k}} : k = 1, 2, \ldots \}$ es una sucesión completante y estricta. Definimos $T\alpha = \bigcap_{k=1}^{\infty} \overline{\Gamma_p C_{a_1,a_2,\ldots,a_k}}$ y es $T\alpha$ un p-disco de Banach. La aplicación $T: \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \to \mathcal{D}_p(E)$ así definida verifica las condiciones del teorema 7, lo que se prueba como en el teorema 9, y E es semi p-Suslin.

Q.E.D.

En (2), pág. 123, M. De Wilde pregunta si un espacio con red de tipo $\mathcal{C}$ y localmente completo tienen una red estricta. El teorema 10 da una respuesta parcial a esta pregunta, que nos será suficiente para obtener en el apartado V un teorema de levantamiento que engloba los dados por De Wilde.

M. Valdivia ha dado una respuesta afirmativa a la pregunta de De Wilde en un reciente trabajo, (16).

III. PROPIEDADES DE LOCALIZACION

TEOREMA 11.– *Sea (A_k) una sucesión completante de subconjuntos absolutamente p-convexos del espacio E. Para cada entero positivo n, sea*

$$C_n = \left\{ \sum_{m=n}^{\infty} \mu_m x_m : |\mu_m| \leq \left(\frac{1}{2^m}\right)^{1/p}, x_m \in A_m,\ m=n, n+1, \ldots \right\}$$

y $L = \bigcap_{n=1} \langle C_n \rangle$ el F-espacio localmente p-convexo asociado a (A_k). Sea F un espacio (metrizable) y f una plicación lineal de F en E con gráfica (sucesionalmente) cerrada en FxE. Si la clausura de $f^{-1}(A_k)$ es entorno del origen en F, se tiene que

$$a)\ \left(\frac{1}{2^n}\right)^{1/p} \overset{o}{\overline{f^{-1}(A_n)}} \subset f^{-1}(C_n)$$

$$b)\ f(F) \subset L \quad y \quad f: E \to L[\mathcal{A}] \text{ es continua.}$$

Demostración.– Supongamos primero que F es metrizable y sea $\{ U_k : k = 1, 2, \ldots \}$ una base de entornos del origen en F de forma que $(2^k)^{1/p} U_k \subset \overline{f^{-1}(A_k)}$ k=1, 2, ... Denotemos por B_k a $\left(\frac{1}{2^k}\right)^{1/p} f^{-1}(A_k)$ k=1, 2, ... Fijemos un entero positivo k y $x_k \in \overset{o}{\overline{B_k}}$. Determinamos vectores $y_k \in B_k$ y $x_{k+1} \in U_{k+1}$ de forma que $x_k = y_k + x_{k+1}$. Razonando por recurrencia obtendremos sucesiones $\{x_j : j = k, k+1, \ldots\}$, $\{y_j : j = k, k+1, \ldots\}$ tales que $x_j = y_j + x_{j+1}$, $y_j \in B_j$, $x_j \in U_j$ $j = k, k+1, \ldots$ Sumando en la anterior igualdad tenemos $\sum_{j=k}^{N} x_j = \sum_{j=k}^{N} y_j + \sum_{j=k}^{N} x_{j+1}$, así $x_k - x_{N+1} = \sum_{j=k}^{N} y_j$. Claramente $x_k = \sum_{j=k}^{\infty} y_j$. La serie $\sum_{j=k}^{\infty} f(y_j)$ converge a un vector z de C_k y como la gráfica de f es sucesionalmente cerrada $f(x_k) = z \in C_k$. De esto se sigue a) en el caso metrizable. Para el caso general obtendremos las mismas sucesiones $\{x_j\}$, $\{y_j\}$ y $\{U_n : n=1, 2, \ldots\}$ será una sucesión de entornos del origen en F. Sea $\{W_i : i \in I\}$ una base de entornos del origen en F. Para cada $j > k$, $x_j \in U_j \subset \overset{o}{\overline{B}}_j \subset B_j + W_i$, determinamos así vectores $y_{j,i} \in B_j$, $w_{j,i} \in W_i$ tales que $x_j = y_{j,i} + w_{j,i}$. Sea $\mathbb{N}_k = \{k, k+1, \ldots\}$ Ordenamos $\mathbb{N}_k \times I$ con el orden producto; esto es $(m, i) \geqslant (n, j)$ si, si, y sólo si $m \geqslant n$ y $W_i \subset W_j$. La red

$$\left\{ x_k - y_{N+1,i} - \sum_{j=k}^{N} y_j : (N, i) \in \mathbb{N}_k \times I, \geqslant \right\} \qquad (1)$$

converge al origen en F. La red $\{ f(y_{N+1,i}) : (N, i) \in \mathbb{N}_k \times I, \geqslant \}$ converge al origen en E. Resulta entonces que la imagen de la red (1) por f converge hacia $f(x_k) - z$. Como la gráfica de f es cerrada, $f(x_k) = z \in C_k$ quedando probado a) en el caso general. La parte b) es una consecuencia inmediata de a).

Q.E.D.

NOTA.– Si R es una relación lineal, (3), con gráfica cerrada la parte a) sigue siendo cierta y R es continua. Si F es metrizable el resultado anterior sigue siendo cierto cuando la gráfica de R es E-rápidamente cerrada en FxE (corolario 2.6), esto es, R corta a $F \times E_D$ en un cerrado para cada D disco de Banach de E.

La idea del teorema 11 está recogida de un trabajo de M. Valdivia, (14), donde se prueba el teorema 11 para una sucesión completante y localizando la aplicación en un subespacio metrizable y completo que depende de f.

Sea E un espacio semi p-Suslin y $\mathcal{W} = \{C_{n_1, n_2, \ldots, n_k}\}$ la red construida antes del teorema 9. Para cada $\alpha = (a_n)$ en $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ sea L el F-espacio localmente asociado a la sucesión completante $(\Gamma_p C_{a_1, a_2, \ldots, a_n})$. Si $f: F \to E$ es una aplicación lineal con gráfica cerrada para la que existe un $\alpha = (a_n)$ en $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ tal que $\Gamma_p f^{-1}(C_{a_1, a_2, \ldots, a_n})$ tienen clausura con punto interior para $n=1, 2, \ldots$, el teorema 11 asegura que $f(F) \subset L$ y $f: F \to L$ es continua, en definitiva $f: F \to E$ es continua. La condición natural sobre F es que sea red p-tonelado, (15).

COROLARIO 1.11.– Si F es un espacio red p-tonelado (metrizable) y E es semi p-Suslin, cualquier aplicación lineal $f: F \to E$ con gráfica cerrada (E-rápidamente cerrada) es continua y existe $\alpha \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ tal que $f(F) \subset L_\alpha$ con $f: F \to L_\alpha$ continua.

Este resultado extiende propiamente, incluso para p=1 el teorema de gráfica cerrada que Valdivia prueba en (13) para espacios semi-Suslin en llegada y Baire convexos en partida. Valdivia, (15), ha probado recientemente la extensión de este resultado cuando F es totalmente $\mathcal{A}$ -tonelado y E tiene una red completante $\mathcal{A}$ -regular. Tomando $\mathcal{A}$ la clase de espacios localmente p-convexos, un repaso de la prueba de Valdivia pone de manifiesto la validez del resultado cuando E tienen una red $\mathcal{W} = \{C_{n_1,n_2,\ldots,n_k}\}$ tal que, para cualquier sucesión (n_k) de enteros positivos, $(\Gamma_p C_{n_1,n_2,\ldots,n_k})$ es una sucesión completante, en particular cuando E es semi p-Suslin.

COROLARIO 2.11.– Un espacio red'p-tonelado y semi p-Suslin es metrizable, completo y localemente p-convexo.

COROLARIO 3.11.– Si E es la envoltura localmente convexa de espacios red-tonelados y E es semi-Suslin, entonces E es ultrabornológico. Si E es la envoltura localmente convexa de una sucesión de espacios red-tonelados y E es semi-Suslin, entonces E es un espacio LF.

COROLARIO 4.11.– Para un espacio semi-Suslin, la envoltura absolutamente convexa de la familia de espacios Fréchet asociados $\{L_\alpha : \alpha \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}\}$ coincide con $E[\mathcal{T}^u]$, donde $\mathcal{T}^u$ es la topología ultrabornológica asociada a $\mathcal{T}$ y $E[\mathcal{T}^u]$ sigue siendo semi-Suslin.

El corolario 4.11 extiende un resultado de Powell, (8).

En un espacio localmente completo las sucesiones completantes de subconjuntos absolutamente p-convexos tienen por clausura sucesiones completantes. Con esta observación y el teorema de localización obtenemos:

COROLARIO 5.11.– Sea E un espacio semi p-Suslin localmente completo. Existe un espacio Polaco X y una aplicación $T: X \to \mathcal{D}_p(E)$ verificando las condiciones a) y b) del teorema 7 y de forma que cualquier semi disco de Banach de E está contenido en la imagen de algún $x \in X$ por la apliación T.

Demostración.– Para cada $\alpha = (a_n) \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, sea (C_n^α) la base de entornos del origen para la topología $\mathcal{A}_\alpha$ asociada a la sucesión completante $(\Gamma_p C_{a_1,a_2,\ldots,a_n})$ según el teorema 3. Para $\beta = (b_n) \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ definimos $T(\alpha,\beta) = \bigcap_{k=1} b_k C_k^\alpha$ que es un p-disco de Banach después del corolario 1.3. La aplicación $T: \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \times \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \to \mathcal{D}_p(E)$ así definida verifica las condiciones de lteorema 7 y la condición sobre los semi-discos se sigue del teorema de localización.

Q.E.D.

COROLARIO 6.11.– Si E es semi-Suslin, localmente completo y localmente convexo, su bidual fuerte es un espacio semi-Suslin.

Demostración.– Si $T:X \to \mathfrak{D}(E)$ es la aplicación que nos da el corolario anterior, podemos definir $S:X \to \mathfrak{D}(E")$ por $S_x = \overline{T}_x$, donde la clausura se toma en $\sigma(E",E')$. Así $E"[\sigma(E",E')]$ es semi-Suslin y en definitiva lo es el bidual fuerte.

Q.E.D.

Sea E un espacio de Frechet de dimensión infinita. $E[\sigma(E, E')]$ es semi-Suslin y su completación no puede serlo, pues es un espacio de Baire no metrizable. Sin embargo el teorema de localización permite afirmar:

COROLARIO 7.11.– Si E es semi p-Suslin y cada punto de la completación $\hat{E}$ está en la clusura de un semi-disco de Banach de E, entonces $\hat{E}$ es semi p-Suslin.

Demostración.– Con las notaciones del corolario 5.11, sea $S(\alpha, \beta) = \overline{T(\alpha, \beta)}$, con la clausura calculada en $\hat{E}$, la aplicación S nos da la estructura de semi p-Suslin en $\hat{E}$.

Q.E.D.

Para el caso localmente convexo obtenemos la siguiente condición suficiente.

COROLARIO 8.11.– Sea E un espacio localmente convexo en el que toda sucesión de $E'[\sigma(E',E)]$ que converge al origen en el sentido de Mackey es equicontinua. Si E es semi-Suslin y $E'[\mathfrak{b}(E',E)]$ es bornológico, donde $\mathfrak{b}(E',E)$ denota la topología de convergencia uniforme sobre los discos de Banach de E, entonces la completación $\hat{E}$ es semi-Suslin.

Demostración.– Se prueba fácilmente que $\hat{E} \subset (E'[\mathfrak{b}(E',E)])'$ y así el corolario 7.11 nos da el resultado.

Q.E.D.

Un *resultado análogo al corolario 7.11 se obtiene para la completación local $\tilde{E}$ de un espacio E.* Para el caso localmente convexo obtenemos como corolario:

COROLARIO 9.11.– Sea E un espacio semi-Suslin y localmente convexo. Si $E'[\mathfrak{b}(E',E)]$ es dual localmente completo, entonces la completación local $\tilde{E}$ de E es un espacio semi-Suslin. Si E es semi-Suslin y tonelado con $E'[\mathfrak{b}(E',E)]$ casi tonelado, la completación local $\tilde{E}$ de E es un espacio semi-Suslin.

Demostración.– En ambos casos se considera el espacio $F=\hat{E} \cap (E'[\mathfrak{b}(E',E)])'$

con la topología inducida por la de $\hat{E}$ y se comprueba que es localmente completo. Así $\tilde{E} \subset (E'[\mathfrak{b}(E',E)])'$ y de aquí se sigue el resultado.

Q.E.D.

Por los resultados anteriores sabemos que un espacio (LB) tiene una completación semi-Suslin. Más generalmente, un espacio E en el que toda sucesión de $E'[\sigma(E',E)]$ que converge al origen en el sentido de Mackey sea equicontinua, si $E = \cup \{ D_n : n=1, 2, \ldots \}$ con D_n absolutamente convexo y acotado, $D_n \subset D_{n+1}$ $n=1, 2, \ldots$, entonces $\hat{E} = \cup \{ n \overline{D}_n : n=1, 2, \ldots \}$ y así $\hat{E}$ es unión numerable de discos de Banach y por consiguiente semi-Suslin, (13).

PROBLEMA ABIERTO.– No sabemos si cualquier espacio LF tiene una completación o completación local semi-Suslin. ¿Será cierto para espacios ultrabornológicos semi-Suslin?

El interés de estas cuestiones está en su relación con la verificación del teorema de la base débil sobre espacios ultrabornológicos semi-Suslin.

IV. EJEMPLOS DISTINGUIENDO ESPACIOS

Sea $0 < q < 1$ y ℓ^q el espacio vectorial de todas las sucesiones (a_n) en $\mathbb{K}$ tales que $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^q < +\infty$ dotado de su topología ordinaria T_q, asociada a la q-norma $\| (a_n) \| q = \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^q$. *$\ell^q$ es un espacio q-Banach y por consiguiente es semi q-Suslin.* Sea $0 < q < p \leqslant 1$. Como ℓ^q no es localmente p-convexo y es de Baire, el corolario 1.11 asegura que ℓ^q *no es semi p-Suslin.* Este ejemplo pone de manifiesto que el teorema 10 no es cierto sin asumir la hipótesis de p-convexidad local del espacio E.

Denotemos ahora por λ al espacio vectorial ℓ^q dotado con la topología inducida por ℓ^p, esto es, con la topología T_p, $(0 < q < p \leqslant 1)$. La identidad de ℓ^q en λ es continua y así λ *es semi q-Suslin.* Probaremos ahora que λ *no es semi p-Suslin,* poniendo así de manifiesto que el teorema 10 no es cierto sin asumir la hipótesis de completitud local de E. Para p=1 obtenemos la separación estricta de las clases de espacios semi-Suslin y semi q-Suslin en la categoría de espacios normados (nótese que estos espacios son incluso de Suslin).

Sea T_q' la topología localmente p-convexa más fina sobre ℓ^q, de entre todas las topologías localmente p-convexas más gruesas que T_q. Una base de entornos del origen para T_q' la forman los entornos del origen para T_q que son p-convexos. Nótese que T_p es una topología de Hausdorff localmente p-convexa sobre ℓ^q y más gruesa que T_q, resulta entonces que T_q' es de Hausdorff y más fina que T_p.

PROPOSICION 12.– $T_p = T_q$'

Demostración.– Sea U un entorno p-convexo del origen para T_q, que sin pérdida de generalidad podemos suponer T_q'-cerrado y a posteriori T_q-cerrado. Sea s un entero positivo tal que $U_s = \{ x \in \ell^q : \| x \|_q \leqslant 1/s \}$ esté contenido en U y $B = \{ x \in \ell^q = \|x\|_p \leqslant 1 \}$. Comprobaremos que $(1/s)^{1/q} B \subset U$ con lo que $T'_q \leqslant T_p$ y la prueba concluye. Sea $z \in (1/s)^{1/q}B$. Para a y b en $\mathbb{K}$, denotamos por $(a;b)$ al cociente a/b si $b \neq 0$ y o si $b = 0$. Entonces $(1/s)^{1/q}(z_m; |z_m|)$ $e_m \in U_s$ ($e_m = (\delta^j_m)_j$, con δ^j_i la δ de Kronecker) para m = 1, 2, . . . , como $\sum\limits_{m=1} s^{p/q} |z_m|^p \leqslant 1$ y U es p-convexo,
$\sum\limits_{m=1}^{k} s^{1/q} |z_m| (1/s)^{1/q}(z_m ; |z_m|)\, e_m = \sum\limits_{m=1}^{k} z_m e_m \in U$, y así lím $\sum\limits_{m=1}^{k} z_m e_m =$
$= z \in U$.

Q.E.D.

PROPOSICION 13.– λ no puede subrirse con una sucesión de subconjuntos absolutamente p-convexos, cerrados y sin punto interior.

demostración.– Sea $\{ A_m : m=1, 2, \dots \}$ una sucesión de subconjuntos absolutamente p-convexos y cerrados que cubra λ. Al ser ℓ^q un espacio de Baire existirá un entero positivo r tal que A_r tiene punto interior en ℓ^q. La p-convexidad absoluta de A_r asegura que A_r es un entorno del origen en l^q, por consiguiente en T_p después de la proposición 12.

Q.E.D.

COROLARIO.– λ es un espacio red p-tonelado y no es semi p-Suslin.

Demostración.– Que λ es red p-tonelado es consecuencia inmediata de la proposición 13. Si λ fuera semi p-Suslin, el corolario 2.11 asegura que λ es completo, lo que contradice su densidad estricta en ℓ^p.

Q.E.D.

Sea ahora (p_n) una sucesión estrictamente creciente de números reales en el intervalo (o, 1) que converge hacia 1. Sea $E_n = \ell^{p_n}$ y $E = \cup \{ E_n : n = 1, 2, \dots \}$. Sea $\mathcal{T}$ la topología vectorial límite inductivo de los $E_n[T_{p_n}]$, que es de Hausdorff al ser más fina que T_1. *$E[\mathcal{T}]$ es semi p-Suslin y localmente p-convexo para todo $p \in (0, 1)$.* Además, como un límite inductivo de espacios de Baire es ultratonelado, (9). Sea $\mathcal{T}^{00}$ la topología localmente convexa más fina sobre E de entre todas las topologías localmente convexas más gruesas que $\mathcal{T}$. $\mathcal{T}^0$ es más fina que T_1 y por consiguiente de Hausdorff.

PROPOSICION 14.– $E[\mathcal{T}^{00}]$ es un espacio tonelado límite inductivo de $\{E_n[T_1]: n = 1, 2, \ldots\}$ y $\mathcal{T}^{00} = T_1$.

Demostración.– Por ser $E[\mathcal{T}]$ ultratonelado, $E[\mathcal{T}^{00}]$ es tonelado, (9). Por un teorema de Valdivia, (13), $E[\mathcal{T}^{00}]$ es el límite indusctivo de los espacios $\{E_n[\mathcal{T}^{00}] : n = 1, 2, \ldots\}$, ahora bien como $\mathcal{T}^{00}$ sobre E_n es más fina que T_1 sobre E_n y más gruesa que T_{p_n}, sobre E_n $\mathcal{T}^{00}$ coincide con T_1 (prop. 12). Finalmente observemos que $E[T_1]$ y $E[\mathcal{T}^{00}]$ tienen como dual el espacio ℓ^∞ y como T_1 es metrizable, $T_1 = \mathcal{T}^{00}$.

Q.E.D.

PROPOSICION 15.– $E[\mathcal{T}]$ es completo.

Demostración.– Los vectores canónicos $\{e_n: n=1, 2, \ldots\}$ forman una base de Schauder equicontinua en cada espacio ℓ^p y por consiguiente en E y a "posteriori" en la completación $\hat{E}$. Resulta entonces claro que $\langle \hat{E}, \ell^\infty \rangle$ forman un par dual. Por un teorema de W. Robertson, (9), los subconjuntos completos para $\mathcal{T}^{00}$ lo son para la topología $\mathcal{T}$. Si B_n es la bola unidad de E_n, B_n es cerrado en ℓ^1 y por tanto completo para $T_1 = \mathcal{T}^{00}$, así B_n es completo para $\mathcal{T}$. Aplicamos ahora el teorema 13, pag. 90 de la memoria de Adasch, (1), como E es ultratonelado y $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} nB_n$ resulta ser E un espacio completo.

Q.E.D.

PROPOSICION.– $E[\mathcal{T}]$ no es un espacio semi-Suslin.

Demostración.– Cada $E_n[T_1]$ es red-tonelado después del corolario 1.13 y $E[\mathcal{T}^{00}]$ es el límite inductivo de los $E_n[T_1]$ por la proposición 14. Si $E[\mathcal{T}]$ fuera semi-Suslin, la identidad $E[\mathcal{T}^{00}] \to E[\mathcal{T}]$, que tiene gráfica cerrada, sería continua y así $\mathcal{T}^{00} = \mathcal{T}$, lo que contradice la completitud de $E[\mathcal{T}]$ pues $E[\mathcal{T}^{00}]$ es un subespacio propio y denso de ℓ^1.

Q.E.D.

Este ejemplo pone de manifiesto la importancia de la convexidad local en el teorema 10.

PROBLEMA ABIERTO.– ¿Existe un espacio semi-Suslin sin red de tipo $\mathcal{C}$ estricta?

V. UN TEOREMA DE LEVANTAMIENTO

En su tesis, M. De Wilde, (2) da dos teoremas de "levantamiento" de subconjuntos rápidamente compactos, uno para espacios con red de tipo $\mathcal{C}$ estricta y otro para espacios de Suslin localmente completos. Ambas clases de espacios son semi-Suslin después de los teoremas 9 y 10. El teorema de localización permite obtener un resultado que engloba los dados por M. De Wilde.

TEOREMA 17.– Sea f una aplicación lineal definida de un subespacio G de E sobre F, donde E y F son espacios vectoriales topológicos. Supongamos que E es semi Suslin y que f tiene gráfica rápidamente sucesionalmente cerrada en ExF.

a) Para toda sucesión rápidamente convergente (y_n) en F, existe una sucesión (x_n) rápidamente convergente en E tal que $f(x_n) = y_n$, $n=1, 2, \ldots$

b) Para todo subconjunto rápidamente compacto K de F, existe un subconjunto $\mathcal{K}$, rápidamente compacto en E tal que $f(\mathcal{K}) = K$.

Demostración.– a) Al ser f sobre podemos suponer que (y_n) converge al origen. Sea D un disco de Banach con (y_n) convergente al origen en F_D. Definimos una relación lineal R de F_D en E por $yRx \Leftrightarrow f(x) = y$, $(y, x) \in F_D xE$. El dominio es F_D al ser f sobre y R tiene su gráfica E-rápidamente cerrada en $F_D xE$. El teorema 11 asegura la existencia de una sucesión completante $A_1 \supset A_2 \supset \ldots \supset A_n \supset$ de subconjuntos absolutamente convexos de E tales que, si

$$C_k = \{ \sum_{m=k}^{\infty} \mu_m x_m \; ; \; |\mu_m| \leqslant \frac{1}{2^m} \; ; x_m \in A_m \; : m = k, k+1, \ldots \}$$

es $R^{-1}(C_k)$ un entorno del origen en F_D. Existirá una sucesión de escalares positivos (ε_n), decreciente al origen tal que

$$\varepsilon_n D \subset R^{-1} (\frac{1}{2^n} C_n) \qquad n=1, 2, \ldots$$

Sea (n_k) una sucesión estrictamente creciente de enteros positivos tal que

$$y_m \in \varepsilon_k D \qquad \text{si } n_k \leqslant m < n_{k+1} \qquad k=1, 2, \ldots$$

Para cada par de enteros k, m con $n_k \leqslant m < n_{k+1}$, podemos tomar $x_m \in \frac{1}{2^k} C_k$ tal que $f(x_m) = y_m$. Teniendo en cuenta los teoremas 3 y 5, la sucesión (x_m) es rápidamente convergente al origen y esto nos da la prueba de la parte a).

Para probar la parte b), sea (y_n) una sucesión nula en F_D, D un disco de Banach de F, tal que K está contenido en la envoltura absolutamente convexa y cerrada en F_D de (y_n). Por la parte a) existe una sucesión (x_n) en E, rápidamente convergente al origen tal que $f(x_n) = y_n$. Sea B un disco de Banach en E tal que (x_n) converge al origen en E_B, $\bar{K} = \{ \sum_{n=1}^{\infty} \zeta_n x_n : \sum_{n=1}^{\infty} |\zeta_n| \leqslant 1 \}$ es la envoltura absolutamente convexa y cerrada de (x_n) en E_B, (7), que es un compacto de E_B. $f(\bar{K}) \supset K$ y tomando $\mathcal{K} = \bar{K} \cap f^{-1}(K)$ obtenemos la parte b).

Q.E.D.

BIBLIOGRAFIA

(1) Adasch, N., Ernst, B. y Keim, D. "Topological vector spaces". Lecture Notes in Math. 639. Springer. Berlin. Heildelberg. New York. (1978).

(2) De Wilde, M. "Réseaux dans les espaces linéaires a semi-normes". Mem. Soc. R. Sc. Liège 18.2 (1969).

(3) De Wilde, M. "Closed graph theorems and webbed spaces". Pitman. London. San Francisco. Melbourne. (1978).

(4) Dierolf, P. "Une caractérisation des espaces vectoriels topologiques complets au sens de Mackey". C.R.A.cad, Sc. Paris. 283.A 245-248 (1976).

(5) Jameson, G. J. O. "Topology and normed spaces". Chapman and Hall. London (1974).

(6) Jarchow, H. "Locally convex spaces". B.G. Teubner. Stuttgart. (1981).

(7) Köthe, G. "Topological vector spaces I and II". Springer. Berlin. Heidelberg. New York (1969-1979).

(8) Powell, M. "On Komura's closed graph theorem". Trans. Amer. Math. Soc. 211, 391-246 (1975).

(9) Robertson, W. "Completions of topological vector spaces". Proc. London Math. Soc. 8, 241-257 (1958).

(10) Robertson, W. "On the closed graph theorem and spaces with webs". Proc. London Math. Soc. (3), 23, 692-738 (1972).

(11) Valdivia, M. "On bounded sets which generate Banach spaces". Archiv. der Math. 23, 6, 640-642 (1972).

(12) Valdivia, M. "Some notes on convex sets". Manusc. Math. 26, 381-386 (1979).

(13) Valdivia, M. "Topics in locally convex spaces". North. Holland. Math. Studies 67. Amsterdam. New York. Oxford (1982).

(14) Valdivia, M. "Localization theorems in webbed spaces". Semesterbericht Funktional Analysis. Tübingen, Sommersemester 49-57 (1982).

(15) Valdivia, M. "Classes of barrelled spaces related with the closed graph theorem". Port. Mathematica 40-3, 345-366.

(16) Valdivia, M. "Quasi LB-spaces" (Pendiente de Publicación en J. London Math. Soc.).

(17) Valdivia, M. "Semi LB-spaces" (Preprint).

Dirección del autor:
José Orihuela
Departamento de Análisis Matemático
Facultad de Matemáticas
Universidad de Murcia
30.001 Murcia
SPAIN