Matemáticas de los mercados financieros

J.M. Mira, J. Orihuela[1]

[1]Departamento de Matemáticas
Universidad de Murcia

Facultad de Matemáticas. Presentación de asignaturas optativas del Grado. 26 de Abril de 2012

Handbook of the geometry of Banach Spaces

CHAPTER 9

Applications to Mathematical Finance

Freddy Delbaen

Department of Mathematics, E.T.H., Zürich, Switzerland
E-mail: delbaen@math.ethz.ch

Walter Schachermayer

Department of Mathematics, Vienna University of Technology, Vienna, Austria
E-mail: WSchach@statl.bwl.univie.ac.at

Contents

The fundamental theorem of asset pricing in its most general form can now be stated (see [11] and [15]).

THEOREM 3.4. *For a semi-martingale* $S: \mathbb{R}_+ \times \Omega \to \mathbb{R}^d$ *the following two properties are equivalent*:

(a) *S satisfies the (NFLVR) property.*

(b) *There is an equivalent probability measure* $\mathbb{Q} \sim P$ *such that under* $\mathbb{Q}$ *the process S is a sigma-martingale.*

If we assume that the semi-martingale S is locally bounded (respectively bounded) the term "sigma-martingale" in (b) *may be replaced by the term "local martingale" (respectively "martingale").*

As indicated above, the central point of the proof is the fact that C is weak*-closed. This is done using the Krein–Šmulian theorem, also called the Banach–Diedonné theorem. This theorem says that a convex set C in the dual X^* of a Banach space X is $\sigma(X^*, X)$ (i.e., weak*-closed) if and only if $C \cap (nB_{X^*})$ is $\sigma(X^*, X)$ closed for each $n \geqslant 1$. If $X = L_1$ and $X^* = L_\infty$ we can, using the characterization of relatively weakly compact sets in L_1 as uniformly integrable subsets of L_1, make this even more precise. A convex set $C \subset L_\infty$ is weak*-closed if and only if, for each sequence $(f_n)_{n \geqslant 1}$ in C that is uniformly bounded and converges in probability to a function f, we have that $f \in C$. Since in our context the set C is a cone we have to show the following fact.

Another application of Banach space theory is given by James' theorem on weakly compact sets. We state the result in its negative form, see [9] for details.

THEOREM 5.4. *Suppose S is continuous, satisfies (NFLVR) and suppose that all martingales with respect to $(\mathcal{F}_t)_{0\leqslant t}$ are continuous (i.e., all stopping times are predictable). Then we have*

(a) *either $\mathbb{M}$ is a singleton,*

(b) *or $\mathbb{M}$ is so big that it has no extreme points.*

It turns out that (a) occurs if and only if $\mathbb{M}$ is weakly compact and the proof uses James' theorem.

In the case when S is only assumed to be locally bounded (and not necessarily continuous), the above theorem is false and the implications of $\mathbb{M}$ being weakly compact are not yet fully understood.

Teorema fundamental de los mercados financieros

Theorem (Harrison, Pliska, Kreps, Delbaen, Schachermayer)

Los siguientes enunciados son equivalentes para un modelo (S_t) de mercado financiero sobre $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$

1. (S_t) *no admite posibilidad de arbitraje*
2. *Existe una medida de probabilidad* $\mathbb{Q}$ *equivalente a* $\mathbb{P}$ *bajo la cual el proceso* (S_t) *se convierte en una martingala*

- Teoría de Probabilidad
- Ecuaciones diferenciales estocásticas
- Optimización
- Análisis Funcional

Teorema fundamental de los mercados financieros

Theorem (Harrison, Pliska, Kreps, Delbaen, Schachermayer)

Los siguientes enunciados son equivalentes para un modelo (S_t) *de mercado financiero sobre* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$

1. (S_t) *no admite posibilidad de arbitraje*
2. *Existe una medida de probabilidad* $\mathbb{Q}$ *equivalente a* $\mathbb{P}$ *bajo la cual el proceso* (S_t) *se convierte en una martingala*

- Teoría de Probabilidad
- Ecuaciones diferenciales estocásticas
- Optimización
- Análisis Funcional

Theorem (Harrison, Pliska, Kreps, Delbaen, Schachermayer)

Los siguientes enunciados son equivalentes para un modelo (S_t) *de mercado financiero sobre* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$

1. (S_t) *no admite posibilidad de arbitraje*
2. *Existe una medida de probabilidad* $\mathbb{Q}$ *equivalente a* $\mathbb{P}$ *bajo la cual el proceso* (S_t) *se convierte en una martingala*

- Teoría de Probabilidad
- Ecuaciones diferenciales estocásticas
- Optimización
- Análisis Funcional

Teorema fundamental de los mercados financieros

Theorem (Harrison, Pliska, Kreps, Delbaen, Schachermayer)

Los siguientes enunciados son equivalentes para un modelo (S_t) de mercado financiero sobre $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$

1. (S_t) *no admite posibilidad de arbitraje*
2. *Existe una medida de probabilidad $\mathbb{Q}$ equivalente a $\mathbb{P}$ bajo la cual el proceso (S_t) se convierte en una martingala*

- Teoría de Probabilidad
- Ecuaciones diferenciales estocásticas
- Optimización
- Análisis Funcional

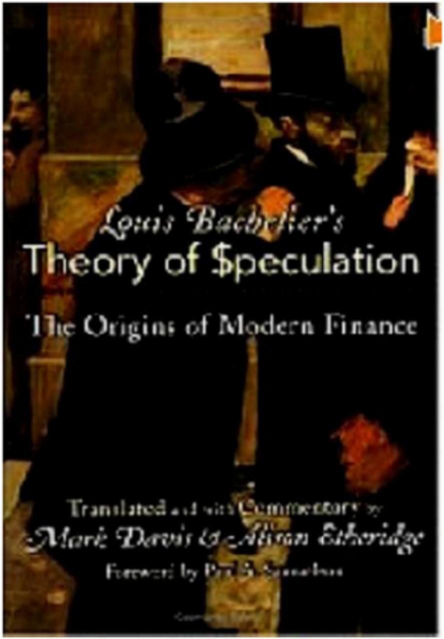
Teorema fundamental de los mercados financieros

Theorem (Harrison, Pliska, Kreps, Delbaen, Schachermayer)

Los siguientes enunciados son equivalentes para un modelo (S_t) de mercado financiero sobre $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$

1. *(S_t) no admite posibilidad de arbitraje*
2. *Existe una medida de probabilidad $\mathbb{Q}$ equivalente a $\mathbb{P}$ bajo la cual el proceso (S_t) se convierte en una martingala*

- Teoría de Probabilidad
- Ecuaciones diferenciales estocásticas
- Optimización
- Análisis Funcional


Louis Bachelier's
Theory of $peculation
The Origins of Modern Finance
Mark Davis & Alison Etheridge

Louis Bachelier 1870-1946

- 1989 Mueren los padres de L. Bachelier
- 1900 Defiende su tesis *Teoría de la Especulación* que es informada por Appell, **Poincaré** y Boussinesq.
- 1909-14 Imparte clases en la Sorbona de carácter honorífico
- 1912 Publicación de su *Calcul des Probabilités*
- 1914 Publicación de su *Le Jeu, la Chance et le Hasard*
- 1919-22 Profesor asistente en Besançon
- 1922-25 Profesor asistente en Dijon
- 1926 Enero, es censurado por la Univesidad de Dijon
- 1926-27 Profesor asociado en Rennes
- 1927-37 Profesor en Besançon
- 1941 Su última publicación
- 1996 Se funda la Bachelier Finance Society
- 2006 La tesis de Bachelier es reeditada y traducida al inglés por M. Davis y A. Etheridge con un prólogo de Paul A. Samuelson

Movimiento Browniano

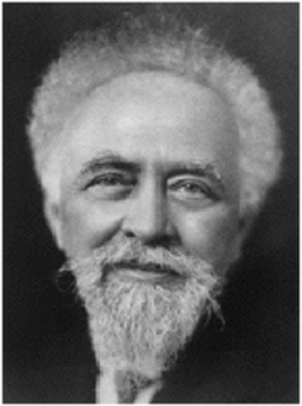
Bachelier-Einstein-Perrin

Jean Perrin experimentally verified Einstein's predictions

In his letter to Einstein:

"I did not believe it was possible to study Brownian motion with such precision"

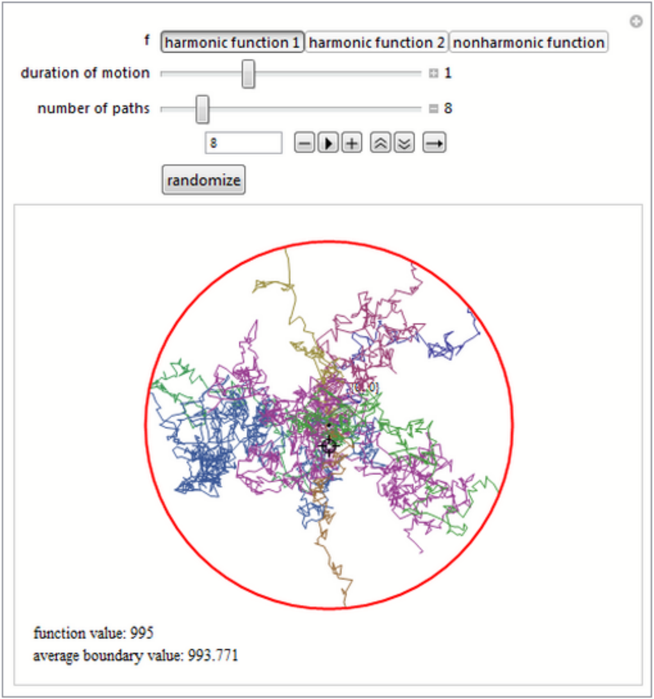
Accurate calculation of Avogadro number

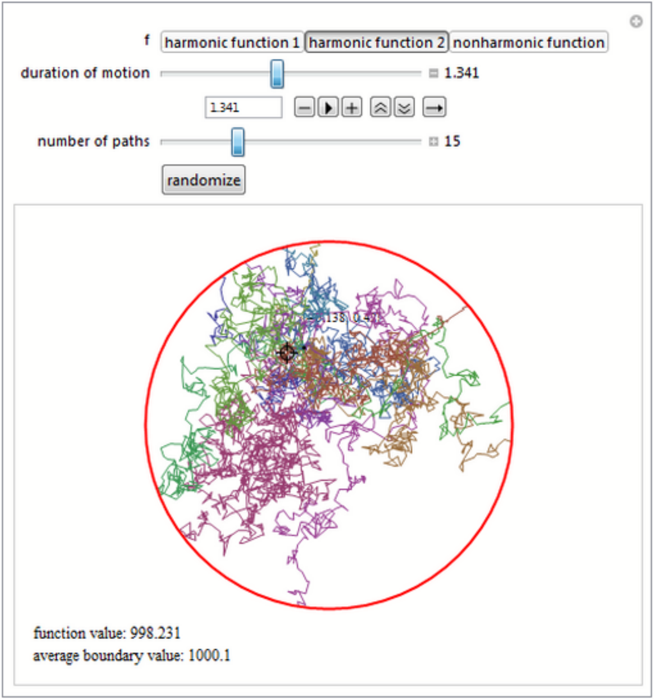


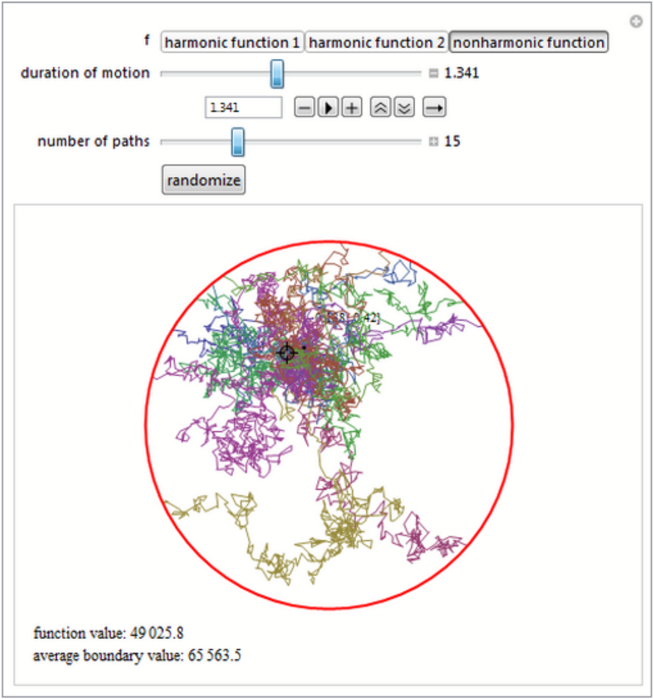
PREMIO NOBEL DE FISICA
EN 1926

Pli cacheté

$$X_t = x + \beta\left(\int_0^t \sigma^2(s, X_s)\,\mathrm{d}s\right) + \int_0^t a(s, X_s)\,\mathrm{d}s$$


f
harmonic function 1
harmonic function 2
nonharmonic function
duration of motion
1
number of paths
8
8
randomize
function value: 995
average boundary value: 993.771


f
harmonic function 1
harmonic function 2
nonharmonic function
duration of motion
1.341
1.341
number of paths
15
randomize
function value: 998.231
average boundary value: 1000.1


f
harmonic function 1
harmonic function 2
nonharmonic function
duration of motion
1.341
1.341
number of paths
15
randomize
function value: 49 025.8
average boundary value: 65 563.5

Materia: **MÉTODOS NUMÉRICOS Y VARIACIONALES DE LAS ECUACIONES EN DERIVADAS PARCIALES**

Créditos ECTS: 6
Carácter: Optativa

Se desarrolla durante el cuatrimestre C7 en la asignatura

- **Métodos numéricos y variacionales de las ecuaciones en derivadas parciales**

Competencias del aprendizaje que el estudiante adquiere con dicha materia

Competencias específicas (resultados del aprendizaje previstos):

- Saber utilizar los espacios de Sobolev en la modelización de los problemas de ecuaciones diferenciales en derivadas parciales.
- Comprensión de los espacios de energía y la extensión de Friedrichs para operadores autoadjuntos
- Manejar y comprender conceptualmente las soluciones débiles y los problemas de regularidad
- Saber resolver la ecuación de ondas, del calor y de Schrödinger con el cálculo operacional.
- Adquirir destreza en el análisis numérico de problemas diferenciales.
- Saber utilizar aplicaciones informáticas con recursos gráficos y numéricos para visualizar soluciones y para plantear y resolver problemas concretos en EDP.
- Desarrollar algoritmos numéricos para la resolución de ecuaciones diferenciales en derivadas parciales con métodos de diferencias finitas y de elementos finitos analizando su convergencia.
- Saber comparar los distintos algoritmos de resolución y elegir el más apropiado a cada problema. Adquirir la capacidad de modelar problemas físicos, químicos, biológicos o económicos mediante las EDP.

Competencias del título de grado que se abordan en la materia:

Competencias transversales de la UMU:
CTUM1: Ser capaz de expresarse correctamente en español.
CTUM2: Utilizar bibliografía y referencias escritas en inglés.
CTUM3: Utilizar como usuario las herramientas básicas en TIC, para acceder a contenidos, complementos y herramientas virtuales de la materia, y para comunicarse a través de la red.
CTUM4: Considerar la ética y la integridad intelectual como valores esenciales de la práctica profesional.
CTUM6: Capacidad para trabajar en equipo.
CTUM7: Desarrollar habilidades de iniciación a la investigación.

Competencias generales del grado de matemáticas:
CGM1: Comprender y utilizar el lenguaje matemático.
CGM2: Conocer demostraciones rigurosas de algunos teoremas clásicos.
CGM3: Asimilar las definiciones de los nuevos objetos matemáticos en relación con otros previamente conocidos y ser capaz de utilizarlos.
CGM4: Saber abstraer propiedades y comprobarlas con demostraciones o refutarlas con contraejemplos e identificar errores en razonamientos

incorrectos.
CGM5: Capacitar para el aprendizaje autónomo de nuevos conocimientos y técnicas referidos a los contenidos de esta materia.
CGM6: Resolver problemas de Matemáticas mediante habilidades de cálculo básico y el uso de aplicaciones informáticas de grafismo y cálculo
CGM7: Proponer, analizar, validar e interpretar modelos de situaciones reales abordables con técnicas de cálculo diferencial e integral.
CGM8: Utilizar aplicaciones informáticas de cálculo y visualización gráfica para experimentar y resolver problemas.
CGM9: Desarrollar algoritmos para abordar numéricamente problemas de asignación de precios, optimización de carteras, etc..
CGM10: Utilizar herramientas de búsqueda de recursos bibliográficos.
CGM11: Comunicar, tanto por escrito como de forma oral, conocimientos, procedimientos, resultados e ideas matemáticas.

Requisitos previos

Requisitos de matrícula: Para poder realizar la matrícula de esta asignatura el alumno deberá haber superado los 60 créditos de materias básicas y al menos otros 60 créditos de asignaturas correspondientes a materias obligatorias

Conocimientos previos recomendados: Los correspondientes a las asignaturas y materias Análisis Funcional, Ecuaciones en Derivadas Parciales y Series de Fourier y Métodos numéricos

Breve descripción de los contenidos

Espacios de Sobolev. Teorema de Malgrange y Ehrenpreis. Operadores autoadjuntos no acotados. La ecuación del calor, de ondas y de Schrödinger. Métodos de diferencias y estabilidad. Teorema de Lax para ecuaciones de evolución. El método de Ritz. Introducción al método de elementos finitos. Programación de algoritmos de resolución.

Actividades formativas con su contenido en ECTS, su metodología de enseñanza-aprendizaje y su relación con las competencias que debe adquirir el estudiante

El desarrollo de la materia se llevará a cabo a través de los siguientes tipos de actividades formativas, encaminadas en su conjunto a conseguir las competencias de aprendizaje específicas y trasversales señaladas en el apartado correspondiente.

Presenciales (40% en contenido ECTS) (los porcentajes son aproximados)

	Porcentaje relativo a la presencialidad
Clase magistral de teoría – problemas.	35%-45%
Talleres de problemas	5%-10%
Laboratorio de prácticas informáticas	35%-45%
Tutorías en pequeños grupos o personales	5%
Exposición de trabajos	5%-10%
Realización de exámenes	5%

No presenciales (60% en contenido ECTS) (los porcentajes son aproximados)

Porcentaje relativo a la no presencialidad	
Estudio de teoría	30%
Resolución de problemas	30%
Preparación de trabajos – prácticas (individuales)	30%
Preparación de trabajos – prácticas (grupo)	10%

Procedimiento de evaluación

El sistema de evaluación de las competencias adquiridas por los alumnos con la materia se organizara en torno a las siguientes fuentes básicas de obtención de información:

- Exposiciones orales en clase de unos contenidos previamente preparados y debate con los compañeros y el profesor. Tutorías.
- Resolución y redacción de problemas propuestos y de prácticas realizadas con ordenador.
- Examen escrito y de prácticas.

Los alumnos desarrollarán exposiciones orales y ante el resto de la clase de materia previamente explicada en las clases magistrales, materia que habrá sido elegida por ellos mismos para este fin, lo que dará lugar a un coloquio posterior donde las intervenciones de todos los asistentes serán evaluadas. Todo ello junto con los problemas y las prácticas realizadas será reflejado en la calificación final de la asignatura.

En todas las actividades evaluadoras se tendrá en cuenta la honestidad, la ética y la integridad intelectual con la que se llevan a cabo.

Aquellos alumnos que no superen la materia con la evaluación anterior dispondrán de la posibilidad de realizar un examen teórico practico a tenor de lo dispuesto en la normativa vigente de la Universidad de Murcia.

En la guía docente anual se fijará el peso concreto otorgado a los procedimientos de evaluación descritos que guardará relación con las actividades formativas. También incluirá el cronograma con la previsión de las fechas para su realización.